M17. Premiers opérateurs vectoriels à partir de conduction, diffusion, ondes.

En coordonnées cartésiennes (x,y,z), on définit les opérateurs suivants :

Si f(x,y,z) est une fonction scalaire de l'espace soit de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$*, appelé* ***champ scalaire****, on définit :*

le gradient de f , qui transforme la fonction scalaire en fonction vectorielle de l'espace :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_z = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \end{bmatrix}$$

la laplacien de f est : $\Delta \boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$

Si $\vec{A}(A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z))$ *est une fonction vectorielle de l'espace soit de* $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$*, appelé aussi* ***champ vectoriel :***
la divergence de $\vec{A}$ *est :* $\boldsymbol{div}(\vec{\boldsymbol{A}}) = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$

Propriétés importantes :

$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f})$ *est un vecteur qui pointe vers les f croissant.*
Exemple : si on prend une plaque de métal de température T non uniforme, $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{T})$ *va indiquer les zones de hautes températures. Si la température est uniforme, ce vecteur est nul.*

Si $d\overrightarrow{OM}$ *est un déplacement élémentaire sur lequel f varie de df alors :*

$$\boldsymbol{df} = \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f}).\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$$

Pour une fonction scalaire, la divergence du gradient est le laplacien :

$$\boldsymbol{div}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f})\right) = \Delta \boldsymbol{f}$$

Expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Ces formules ne sont pas à connaître. Mais, pour vous montrer la complexité :

En cylindriques d'axe Oz :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f}) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e}_z$$

$$\boldsymbol{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \Delta \boldsymbol{f} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

En sphériques :
Pas trop compliqué :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f}) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

Pour les deux autres, on supposera $\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A_r}\vec{\boldsymbol{e}}_r$ *et* ***f=f(r)*** *:*
champ radial ou fonction à symétrie sphérique :

$$\boldsymbol{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \qquad \Delta \boldsymbol{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

M18. Opérateurs scalaires et vectoriels, suite et fin.
A partir de électromagnétisme.

A.En coordonnées cartésiennes (x,y,z) :

On définit le laplacien vectoriel et le rotationnel (curl en anglais) d'un champ de vecteurs par :

$$\Delta(\vec{A}) = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

On obtient les deux dernières lignes du rotationnel par permutation circulaire des indices de la première ligne.

On définit l'opérateur $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})$ *par :* $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) = \left(v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Ainsi :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v} = \left(v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cdot \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \cdot \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \cdot \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

B.Utilisation de l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$*.*

On définit l'opérateur nabla par : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{e}_z$.

En cartésiennes, on remarque alors que tous les opérateurs s'écrivent d'une façon facile à retenir :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} \cdot f \qquad div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\Delta f = \left(\vec{\nabla}\right)^2 \cdot f \qquad \Delta\vec{A} = \left(\vec{\nabla}\right)^2 \cdot \vec{A} \qquad (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

C.Propriétés importantes nouvelles :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = \vec{0} \qquad div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = 0$$

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{grad}(div(\vec{A})) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) \qquad div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{B})$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{rot}(\vec{v})$$

Formules que vous pouvez vérifier par vous-mêmes. Les deux premières sont quasi-évidentes et sont à connaître, les trois dernières sont évidemment plus compliquées à vérifier et devraient être fournies.

D.Propriétés admises de champs :

Si, pour tout M d'un domaine D de l'espace, $\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(M)\right) = \vec{0}$,

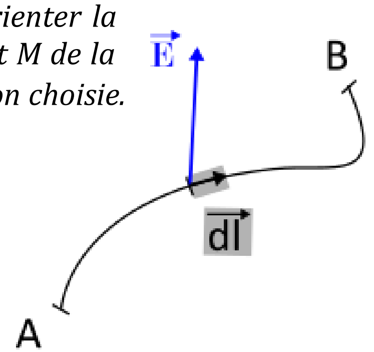
$$alors\ \exists U(M) dans\ D\ tel\ que\ \ \vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(U(M))$$

Si, pour tout M d'un domaine D de l'espace, $div\left(\vec{B}(M)\right) = 0$,

$$alors\ \exists \vec{A}(M)\ dans\ D\ tel\ que\ \ \vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}(M)\right)$$

E.Circulation d'un champ de vecteurs.

Soit une courbe $\mathcal{C}$ de l'espace comprise entre les points A et . Orienter la courbe consiste à choisir un sens de parcours, ici de A vers B. En un point M de la courbe, on définit le vecteur unitaire tangent $\vec{t}$ selon le sens de l'orientation choisie.



On définit la circulation du champs $\vec{E}(M)$ de A à B par :

$$circulation = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{t}dl = \int_A^B \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}$$

Si les point A et B sont confondus, la courbe orientée est fermée et on note alors :

$$circulation = \oint_{M\in\mathcal{C}} \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}$$

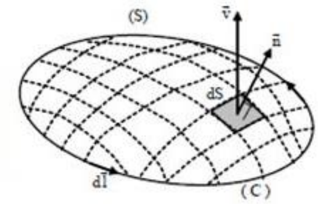
Exemple : une différence de potentiel est une circulation.

F.Flux d'un champs de vecteurs.

Soit une surface S de l'espace, orienter cette surface consiste à choisir en un point M de S le sens du vecteur unitaire normal $\vec{n}$ à S.

On définit le flux du champs $\vec{v}(M)$ à travers S orienté par :

$$\phi = \iint_{M\in S} \vec{v}(M).\vec{n}dS$$



Si la surface est fermée (on peut définir un volume intérieur et un volume extérieur, par exemple une sphère), alors $\vec{n}$ est alors par convention orienté de l'intérieur vers l'extérieur et on notera :

$$\phi = \oiint_{M\in S} \vec{v}(M).\vec{n}dS$$

Ex : un courant électrique est un flux.

G.Deux formules intégrales importantes.

La formule d'Ostrogradski *dit :* $\boldsymbol{\iiint_{P\in V} div(\vec{E}(P))d\tau = \oiint_{M\in S} \vec{E}(M).\vec{n}dS}$

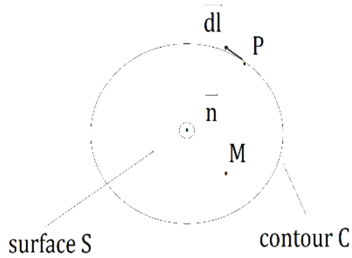
pour une surface S fermée délimitant un volume intérieur V.

La formule de Stokes *dit :* $\boldsymbol{\iint_{M\in S} \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}(M)\right)\vec{n}dS = \oint_{M\in\mathcal{C}} \vec{B}(P).\overrightarrow{dl}}$

pour une surface S plane limitée par la courbe C avec les conventions suivantes :

si P évolue dans le sens trigo, le vecteur normal est vers vous.

si P évolue dans le sens horaire, le vecteur normal est dans le sens opposé.



Vous prendrez toujours des contours orientés dans le sens trigonométrique.