M20. FORMULAIRE D'ANALYSE VECORIELLE

EN GRAS : A SAVOIR

Coordonnées cartésiennes. Utilisation de l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$.

On définit l'opérateur nabla par : $\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_x + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_y + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_z$.

En cartésiennes, on remarque alors que tous les opérateurs s'écrivent d'une façon facile à retenir :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{div}(\vec{\boldsymbol{A}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{A}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\Delta \boldsymbol{f} = \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)^2 \cdot \boldsymbol{f} \qquad \Delta \vec{\boldsymbol{A}} = \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)^2 \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \qquad \left(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\right) = \left(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)$$

Coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{e}_z$$

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe Oz :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r sin(\theta)}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r sin(\theta)}\frac{\partial \left(A_\theta sin(\theta)\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Identités importantes :

$$\boldsymbol{df} = \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f}).\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{f})\right) = \vec{\boldsymbol{0}} \qquad \boldsymbol{div}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{A}})\right) = \boldsymbol{0}$$

Développements notables :

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{grad}(div(\vec{A})) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) \qquad div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{B})$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{v} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{rot}(\vec{v})$$

$$\overrightarrow{grad}(f \times g) = f \times \overrightarrow{grad}(g) + g \times \overrightarrow{grad}(f)$$

$$div\left(f \times \vec{A}\right) = f \times div\left(\vec{A}\right) + \vec{A}.\overrightarrow{grad}(f)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(f \times \vec{A}\right) = f \times \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge \vec{A}$$

<u>Propriétés admises de champs :</u>

Si, pour tout M d'un domaine D de l'espace, $\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}(M)\right) = \vec{0}$,

$$alors\ \exists U(M) dans\ D\ tel\ que\ \vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(U(M))$$

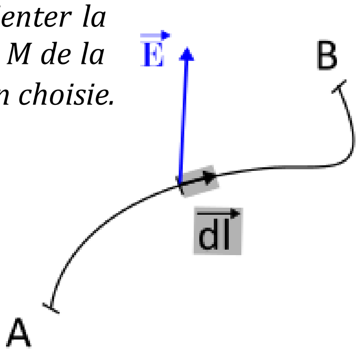
Si, pour tout M d'un domaine D de l'espace, $div\left(\vec{B}(M)\right) = 0$,

$$alors\ \exists \vec{A}(M)\ dans\ D\ tel\ que\ \vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}(M)\right)$$

<u>Circulation d'un champ de vecteurs.</u>

Soit une courbe $\mathcal{C}$ de l'espace comprise entre les points A et . Orienter la courbe consiste à choisir un sens de parcours, ici de A vers B. En un point M de la courbe, on définit le vecteur unitaire tangent $\vec{t}$ selon le sens de l'orientation choisie.
On définit la circulation du champs $\vec{E}(M)$ de A à B par :

$$circulation = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{t}dl = \int_A^B \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}$$



Si les point A et B sont confondus, la courbe orientée est fermée et on note alors :

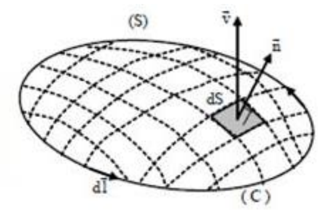
$$circulation = \oint_{M\in\mathcal{C}} \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}$$

Exemple : une différence de potentiel est une circulation.

<u>Flux d'un champs de vecteurs.</u>

Soit une surface S de l'espace, orienter cette surface consiste à choisir en un point M de S le sens du vecteur unitaire normal $\vec{n}$ à S.
On définit le flux du champs $\vec{v}(M)$ à travers S orienté par :

$$\phi = \iint_{M\in S} \vec{v}(M).\vec{n}dS$$



Si la surface est fermée (on peut définir un volume intérieur et un volume extérieur, par exemple une sphère), alors $\vec{n}$ est alors par convention orienté de l'intérieur vers l'extérieur et on notera :

$$\phi = \oiint_{M\in S} \vec{v}(M).\vec{n}dS$$

Ex : un courant électrique est un flux.

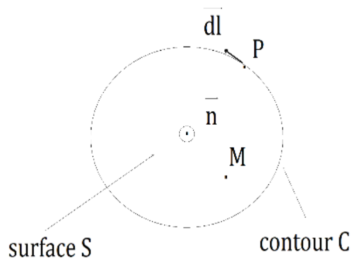
<u>Deux formules intégrales importantes.</u>

***La formule d'Ostrogradski** dit :* $\boldsymbol{\iiint_{P\in V} div(\vec{E}(P))d\tau = \oiint_{M\in S} \vec{E}(M).\vec{n}dS}$

pour une surface S fermée délimitant un volume intérieur V.

***La formule de Stokes** dit :* $\boldsymbol{\iint_{M\in S} \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}(M)\right)\vec{n}dS = \oint_{M\in\mathcal{C}} \vec{B}(P).\overrightarrow{dl}}$

pour une surface S plane limitée par la courbe C avec les conventions suivantes :
si P évolue dans le sens trigo, le vecteur normal est vers vous.
si P évolue dans le sens horaire, le vecteur normal est dans le sens opposé.



Vous prendrez toujours des contours orientés dans le sens trigonométrique.