Exercice oral mécanique

On considère une particule ponctuelle de charge $q < 0$ et de masse m en mouvement dans un champ magnétique stationnaire uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. À l'instant initial, la charge se trouve au centre du repère avec une vitesse $\vec{v}(t = 0) = v_0\vec{u}_y$.

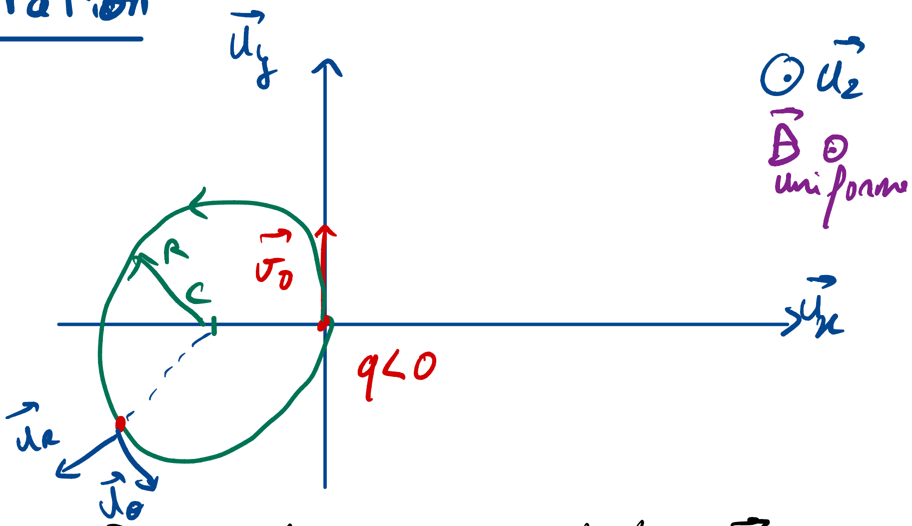
1 - Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.

2 - On admet que la trajectoire est circulaire. Déterminer le rayon et le centre de la trajectoire.

3 - Justifier que le mouvement est périodique. Déterminer la période.

4 - En plus de la force magnétique, la charge subit une force dissipative de puissance $\mathcal{P} = -mv^2/\tau$, avec τ une constante. On suppose que le mouvement demeure quasi-circulaire. Établir l'expression du rayon en fonction du temps.

Présentation



Rappel $\vec E$ accélère une particule, $\vec B$ la fait tourner

T : période de révolution, ω_c : pulsation cyclotron

$\boxed{1}$ Rappel TEC. • $\dfrac{dE_c}{dt} = \sum P_f$

TEM • $\dfrac{dE_m}{dt} = \sum P_{nc}$

• système : charge ponctuelle $q<0$, de masse m

• réf : terrestre, hyp galiléen

• BME : $\vec F_L = q\,\vec v \wedge \vec B$

Rappel $\vec F_L = q(\underbrace{\cancel{\vec E}}_{=\vec 0} + \vec v \wedge \vec B)$

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec F_L) = \vec v \cdot \vec F_L = \underbrace{\vec v}_{/\!/ \vec v} \cdot \underbrace{(q\,\vec v \wedge \vec B)}_{\perp \text{ à } \vec v} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = \cancel{m}\,\cancel{v}\,\frac{dv}{dt} = 0$$

$m \neq 0$ $v \neq 0$ car v à $t=0 \neq 0$

d'où $\dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v = cte} = v_0$

$\boxed{2}$ coordonnées polaires $\vec u_r$, $\vec u_\theta$ de centre C (fixe)

$\dfrac{d\vec u_r}{dt} = \dot\theta\,\vec u_\theta$ et $\dfrac{d\vec u_\theta}{dt} = -\dot\theta\,\vec u_r$

PFD sur q :

$$m\vec a = q\,\vec v \wedge \vec B$$

$\vec v = R\dot\theta\,\vec u_\theta$ $\qquad$ $\vec a = R\ddot\theta\,\vec u_\theta - R\dot\theta^2\,\vec u_r$

$$\begin{cases} -m\cancel{R}\dot\theta^{\cancel{2}} = q\cancel{R}\cancel{\dot\theta}B \\ R\ddot\theta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot\theta = -qB/m \\ \dot\theta = cte \end{cases}$$

d'où $v_0 = -R\dfrac{qB}{m} = -R\omega_c$ avec

ω_c la pulsation cyclotron

d'où $\boxed{R = -\dfrac{m v_0}{qB}}$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

or $\boxed{y_c = 0}$, si on prend le pt $(0,0)$ car $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{u}_y$

$$(0 - x_c)^2 = R^2$$

d'où $x_c = \pm R$

Or comme $q < 0$, le centre est à $x_c < 0$

d'où $\boxed{x_c = \dfrac{m v_0}{qB}}$

3 le mvt est circulaire et uniforme donc périodique.

$$\cancel{v_0} = \frac{2\pi R}{T} = -\frac{2\pi m \cancel{v_0}}{qB\ T}$$

d'où $\boxed{T = -\dfrac{2\pi m}{qB}}$ (>0 car $q<0$).

4 plus rapide $\omega_c = -\dfrac{qB}{m}$ d'où $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c} = -\dfrac{2\pi m}{qB}$

5

$$\frac{dE_c}{dt} = P = -\frac{m v^2}{\tau}$$

$$\cancel{m}\,\cancel{v}\frac{dv}{dt} + \frac{\cancel{m}\,v^{\cancel{2}}}{\tau} = 0$$

$v = \lambda \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ or à $t=0$ $v = v_0$ d'où

$$\boxed{v = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Sur un tour de trajectoire, elle est supposée circulaire, donc les frottements sont négligeable $\tau \gg T$

d'où on a les mêmes équation du mvt qu'à la Q4.

$\dot{\theta} = -\dfrac{qB}{m}$ donc $v = v_0 \exp(-t/\tau) = R\dot{\theta}$

d'où $\boxed{R = -\dfrac{m v_0}{qB} \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$