Exercice 3 : Looping

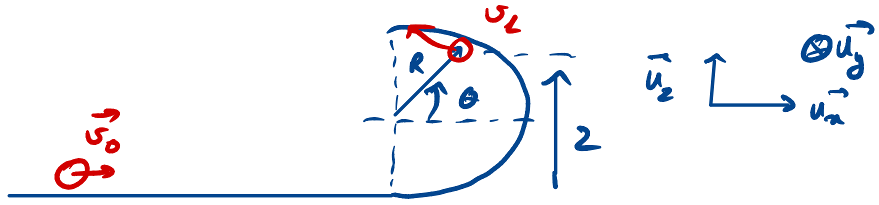
Présentat° Il s'agit d'un exercice de mécanique qui propose d'étudier le mvt d'une balle sur un support ayant une forme de looping.

réf : Terrestre, galiléen

syst : la balle, ponctuelle de masse m.

BAME : poids $m\vec{g}$

1

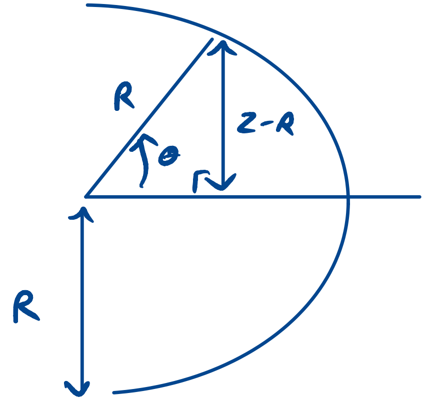


$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pas de frottement}}}{\Delta E_m = 0} \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p = -mgz$$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, E_p \Rightarrow \frac{dE_p}{dz} = +mg \Rightarrow E_p = +mgz + \underbrace{\cancel{cste}}_{=0 \text{ en } z=0}$$

Comment exprimer z en fct° de R et θ

Rq : choix de θ : pour éviter des angles > π/2, je définis l'origine de θ au centre du demi-cercle.



$$\sin(\theta) = \frac{z-R}{R} \Rightarrow z = R\sin(\theta) + R = R(1+\sin(\theta))$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = -\cancel{m}gR(1+\sin(\theta))$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - 2gR(1+\sin(\theta))}$$

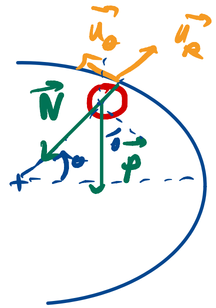
Pour que la balle ne fasse pas demi-tour, la vitesse ne doit pas s'annuler ⇒

$$v_0^2 > 2gR(1+\sin\theta) \quad \forall\theta$$

↳ max

$$\boxed{v_0 > 2\sqrt{gR}}$$

2 Appliquons le PFD :



$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ mvt polaire

d'où $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

Projection du poids sur $\{\vec{u_R}, \vec{u_\theta}\}$:

$$\vec{P} = -mg\left\{\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}_{\sin(\theta)}\vec{u_R} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}_{\cos\theta}\vec{u_\theta}\right\}$$

Dans le PFD

avec $\vec{N} = -N\vec{u_R}$
$N \geq 0$.

$/\vec{u_R}$: $-mR\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta - N$

$/\vec{u_\theta}$: inutile

$$v^2 = (R\dot{\theta})^2 = v_0^2 - 2gR(1+\sin\theta)$$

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} - 2g(1+\sin\theta)$$

$$N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg(1+\sin\theta) - mg\sin\theta$$

$$\boxed{N = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2+3\sin\theta)}$$

La balle est en contact ssi $N > 0 \ \forall\theta$

$$\frac{\cancel{m}v_0^2}{R} > \cancel{m}g(2+3)$$

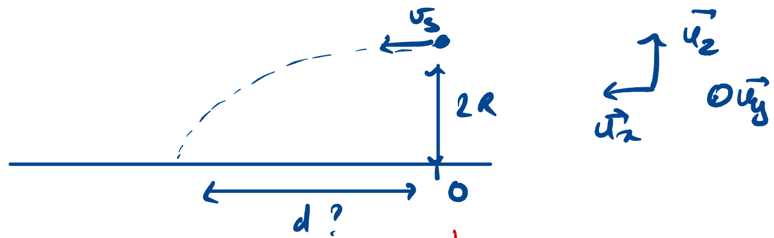
$$\boxed{v_0^2 > 5gR}$$

3 App de la ① pour $\theta = \pi/2$

$$v_S^2 = v_0^2 - 2gR(1+1)$$

$$\boxed{v_S = \sqrt{v_0^2 - 4gR}}$$

4 Il faut ici étudier la chute libre :



$$\cancel{m}\vec{a} = \cancel{m}\vec{g}$$

v_S à $t=0$ à $t=0$ 0   0 à $t=0$

$$\begin{cases}\ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g\end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= At + \cancel{B} \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + \cancel{Ct} + D\end{aligned}$$

2R à $t=0$

d'où
$$\boxed{\begin{aligned} x &= v_S t \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + 2R\end{aligned}}$$

t^* l'instant où $z=0$ $t^* = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$

$$x(t=t^*) = d \Rightarrow d = v_S\, 2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$\boxed{d = 2\sqrt{\frac{R}{g}v_0^2 - 4R^2}}$$