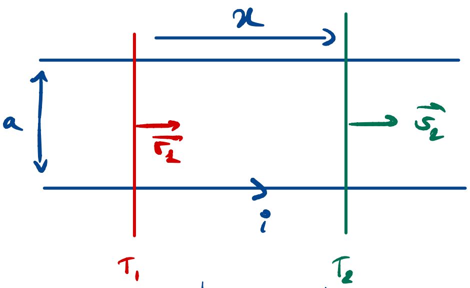
Exercice 4 : double rail de Laplace.

R5 – ELM

Présentat° exercice d'induction



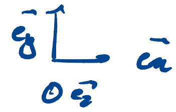
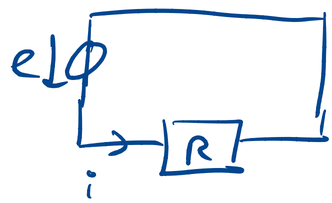


Schéma électrique équi



réf : laboratoire, galiléen

ATE : • poids $m\vec{g}$, Réaction du support et pas de vitesse selon $\vec{e_z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{m\vec{g} + \vec{R} = 0}$

• on néglige les frottement.

• force de Laplace $d\vec{F}_{Lap} = i\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$

$\boxed{1}$ syst : T_1 PFD en p/r $\vec{e_x}$ $m\dfrac{dv_1}{dt} = -iaB$

syst T_2 PFD en p/r $\vec{e_x}$ $m\dfrac{dv_2}{dt} = +iaB$

L.M. $e = Ri \Rightarrow i = \dfrac{e}{R}$

or $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \int \vec{B}\,d\vec{S} = Bax$

loi de Lenz-Faraday

d'où $i = -\dfrac{Ba}{R}\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{Ba}{R}(v_2 - v_1)$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} + \frac{(Ba)^2}{mR}v_1 &= \frac{(Ba)^2}{mR}v_2 \quad (1)\\ \frac{dv_2}{dt} + \frac{(Ba)^2}{mR}v_2 &= \frac{(Ba)^2}{mR}v_1 \quad (2)\end{aligned}}$$

Rq : le sujet n'est pas clair s'il y a une résistance totale R, ou alors si chaque barre possède une résistance R et que l'on néglige la résistance de la partie fixe... j'ai choisi l'option 1. Pour la seconde il faut remplacer R par 2R.

$\boxed{2}$ <u>classique</u> posons $\sigma = v_1 + v_2$

$\delta = v_2 - v_1$

(1) + (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{d\sigma}{dt} + \cancel{\dfrac{\sigma}{\tau}} = \cancel{\dfrac{\sigma}{\tau}}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{d\sigma}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $v_1(t) + v_2(t) = c^{ste}$ (3)

(2) − (1) $\dfrac{d\delta}{dt} + \dfrac{\delta}{\tau} = -\dfrac{\delta}{\tau}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{d\delta}{dt} + \dfrac{2\delta}{\tau} = 0 \Rightarrow \delta = \delta_0 \exp\left(\dfrac{2t}{\tau}\right)$ (4)

CI à $t=0$ $\quad v_1(t=0) = v_0$

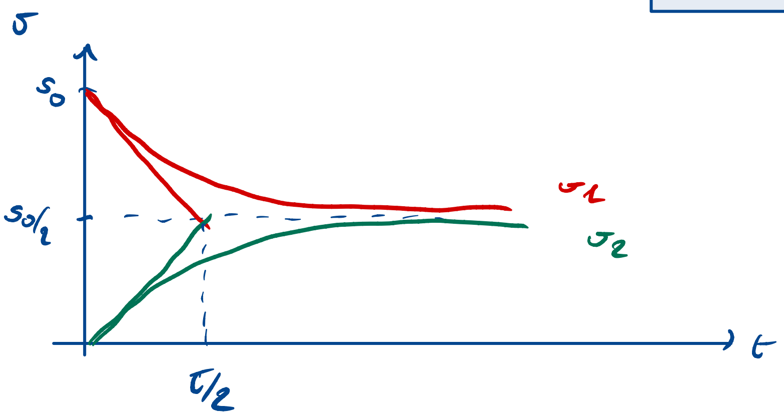
$v_2(t=0) = 0$ (Non précisé dans le sujet, donc hyp).

(3) à $t=0$ $\quad c^{ste} = v_0 \Rightarrow$ $\boxed{v_1(t) + v_2(t) = v_0}$

(4) à $t=0$ $\quad -v_0 = \delta_0 \Rightarrow v_2(t) - v_1(t) = -v_0 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$

$$v_0 - 2v_1(t) = -v_0 \exp -\frac{2t}{\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} v_1(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 + \exp -\frac{2t}{\tau}\right) \\ v_2(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 - \exp -\frac{2t}{\tau}\right) \end{cases}}$$



3 Si la vitesse de T_1 est imposée, l'équat° (1) n'est plus valable. En effet, une force supplémentaire contraint la vitesse v_1.

L'équat° (2) est toujours valable

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{\tau} = \frac{v_1}{\tau} = \frac{v_0 \cos(\omega t)}{\tau}$$

posons $\underline{v_2} = \underline{v_{20}} e^{j\omega t}$ avec $\underline{v_{20}} = |v_2| e^{j\varphi}$

et $\underline{v_1} = v_1 e^{j\omega t}$

$$\frac{d\underline{v_2}}{dt} + \frac{\underline{v_2}}{\tau} = \frac{\underline{v_1}}{\tau}$$

$$j\omega \underline{v_{20}} + \frac{\underline{v_{20}}}{\tau} = \frac{v_1}{\tau}$$

$$\underline{v_{20}} = \frac{v_1}{1 + j\omega\tau}$$

$$|v_2| = \frac{v_1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan(\omega\tau)$$

d'où $\boxed{v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos\left(\omega t - \arctan(\omega\tau)\right)}$

$\boxed{4}$ méthode ultra classique.

on sait une puissance !

Eq mécanique $\begin{cases} m\dfrac{dv_1}{dt} = -iaB & \times v_1 \\ m\dfrac{dv_2}{dt} = +iaB & \times v_2 \end{cases}$

Eq élec $\quad e = Ri \quad$ avec $e = -Ba(v_2 - v_1)$

$\Leftrightarrow \quad -Ba(v_2 - v_1) = Ri \quad \times i$ ← on sait une puissance

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\dfrac{dv_1^2}{dt} = -iaBv_1 \\ \frac{1}{2}m\dfrac{dv_2^2}{dt} = +iaBv_2 \\ -iBa(v_2 - v_1) = Ri^2 \end{cases}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}m\frac{d\,(v_2^2 + v_1^2)}{dt} = Ri^2}$$

E cinétique perdue par les barreau 1 et 2

energie dissipée par effet joule.