Exercice 7 : effet de Peau

RS - ELM

Présentat° On étudie la propagat° d'un champ ELM dans un conducteur ohmique.

1 • onde plane ? oui, l'amplitude ne dépend que de la direct° de propagation z.

Rappel. $s(x,y,z,t) = s(x,t)$ avec propagat° selon x
plane
$\Rightarrow$ les plan (y,z) sont infini.

• progressive ? non à cause de $\exp(-\alpha z)$ qui atténue l'onde

• α : $\rightsquigarrow$ $\alpha = \frac{1}{\delta}$ inverse de l'épaisseur peau, la longueur d'amortissement de l'onde

$\rightsquigarrow$ $\alpha = k$ nombre d'onde

• propagat° selon z croissants

• polarisat° selon $\vec{e_x}$

2 • R° de structure ? Non, ce n'est pas une OP !

• $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \cancel{-\frac{\partial E_x}{\partial y}} \rightarrow 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \left\{ -\alpha e^{-\alpha z} \exp(j(\omega t - \alpha z)) - j\alpha e^{-\alpha z} \exp(j(\omega t - \alpha z)) \right\} \\ 0 \end{vmatrix}$$

on cherche $\vec{B}$ sous la forme.

$$\vec{B} = \vec{B_0}(z) \exp(j(\omega t - \alpha z))$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{B_0}(z)\, j\omega \exp(j(\omega t - \alpha z))$$

$$\vec{B_0}(z) = \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha E_0 e^{-\alpha z} \dfrac{(1+j)}{j\omega} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{B_0}(z) = \frac{\alpha}{\omega} E_0 e^{-\alpha z} (1-j)\, \vec{e_y}}$$

d'où

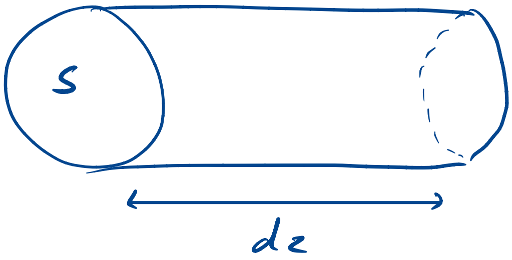
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\alpha}{\omega} E_0 (1-j) e^{-\alpha z} \exp(j(\omega t - \alpha z))\, \vec{e_y}}$$

3 $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ ⚠ en réel !

$$\vec{\Pi} = \frac{\alpha}{\mu_0\omega} E_0^2 \, e^{-2\alpha z}\cos^2(\omega t - \alpha z)\,\vec{e_z}$$

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{\alpha}{2\omega\mu_0} E_0^2 \, e^{-2\alpha z}\,\vec{e_z}}$$

4



Bilan de puissance sur le volume $d\mathcal{V} = S\,dz$.

$$\cancel{\frac{\partial\langle u_{em}\rangle}{\partial t}} = -\iiint \mathrm{div}\,\langle\vec{\Pi}\rangle - \langle P_j\rangle$$

pas de stockage d'ε elm

d'où $\langle P_j\rangle = -\displaystyle\iiint_{d\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial z}\langle\Pi_z\rangle\, dS\, dz$

$$= -\frac{S\alpha E_0^2}{2\omega\mu_0}\int_z^{z+dz}\frac{\partial e^{-2\alpha z}}{\partial z}\,dz$$

$$= -\frac{S\alpha E_0^2}{2\omega\mu_0}\, e^{-2\alpha z}\left(e^{-2\alpha dz} - 1\right)$$

D.L. ordre 1

$$\boxed{\langle P_j\rangle = \frac{S\alpha^2 E_0^2}{\omega\mu_0}\, e^{-2\alpha z}\, dz}$$

puissance cédée dans le conducteur par effet joule.

5 $dP_j = \langle\vec{j}\cdot\vec{E}\rangle \underset{\text{loi d'Ohm}}{=} \langle\gamma E^2\rangle$

d'où $dP_j = \dfrac{\gamma E_0^2\, e^{-2\alpha z}}{2}$

donc pour le volume $d\mathcal{V}$: $\langle P_j\rangle = \iiint dP_j$

$$\langle P_J \rangle = \frac{\gamma E_0^2 S}{2} \int_z^{z+dz} e^{-2\alpha z} dz$$

$$= \frac{\gamma E_0^2 S}{2} \frac{1}{-2\alpha z} \left[e^{-2\alpha z} \right]_z^{z+dz}$$

$$= \frac{\gamma E_0^2 S}{2} \times \frac{1}{-2\alpha z} e^{-2\alpha z} \left(e^{-2\alpha dz} - 1 \right)$$

D.L ordre 1

$$\boxed{\langle P_J \rangle = \frac{\gamma E_0^2 S}{2} e^{-2\alpha z} dz}$$

$\boxed{6}$ On identifie

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha^2}{\omega \mu_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\gamma \omega \mu_0}{2}}}$$

Nous retrouvons, par une approche énergétique, la définition de l'épaisseur de peau.