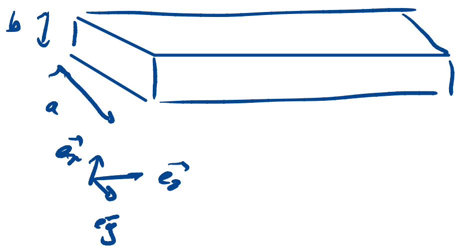
Exercice 8 : guide d'onde

RJ – ELM

<u>Présentat°</u> Les guides d'onde permettent de propager de l'information. Typique un instrument à musique est un guide d'onde mécanique.



1
→ onde non plane car l'amplitude dépend de y.
→ propagat° selon les z croissants
→ polarisation rectiligne selon $\vec{e_x}$

2 Equation de d'Alembert

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

3 on injecte $\vec{E}$ dans l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{n\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) k \sin(\omega t - kz)\vec{e_x}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E^2$$

$$-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$$

d'où $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$

Or il y a propagation ssi k est réel $\Rightarrow k^2 > 0$

d'où $\boxed{\omega > \frac{cn\pi}{a}} = \omega_c$

Le guide agit comme un filtre passe-haut, il coupe les basses fréquences.

$\boxed{4}$ • Pas une onde plane $\Rightarrow$ R° de structure pas possible.

• M.F. $\quad \vec{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

$$\vec{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \partial_z E_x \\ -\partial_y E_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \, k \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin(\omega t - kz) \\ -E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cos(\omega t - kz) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} 0 \\ -E_0 \, k \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin(\omega t - kz) \\ +E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cos(\omega t - kz) \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ + E_0 \frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) + \cancel{C_1(x,y,z)}_{\,0}. \\ + E_0 \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) + \cancel{C_2(x,y,z)}_{\,0}. \end{vmatrix}$$

Rq Pq C_1 et $C_2 = 0$? Car $\vec{B}$ est harmonique
donc de la forme : $\vec{B} = \vec{B_0} \cos(\omega t - kz)$.

Rq L'onde n'étant pas plane, $\vec{B}$ n'est pas $\perp$ à la direction de propagat°.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \\ k \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) \end{vmatrix}$$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{n\pi}{2a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin(2\omega t - 2kz) \\ k \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) \end{vmatrix}$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2\, k}{2\,\omega \mu_0} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \vec{e_z}$$

$$P = \iint_S \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \vec{dS}$$

$$= \frac{E_0^2\, k}{2 \mu_0 \omega}\, b \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy$$

$$= \frac{E_0^2\, k\, ab}{4 \mu_0 \omega} \quad ab = S.$$

$\boxed{5}$ $$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

avant d'entrer dans le guide l'onde est plane !

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k_1^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1 \times \pi}{a}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\pi 4}{3\lambda}\right)^2$$

$$= \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{16\pi^2}{9\lambda^2} = 4\left(\frac{9\pi^2 - 4\pi^2}{9\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{20\pi^2}{9\lambda^2} > 0$$

L'onde peut se propager.

d'après la Q4.

$$E_0 = \sqrt{\frac{4 P \mu_0 \omega}{k S}}$$

note 1.

$$= \sqrt{\frac{4 P \mu_0 \omega\, 3\lambda}{S\, \pi \sqrt{20}}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{f} \quad \text{et} \quad \lambda f = c$$

$$E_0 = \pi \sqrt{\frac{16 P \mu_0 \sqrt{5}}{3 S c}}$$

$$S = ab = \frac{\lambda^2}{4} = \frac{c^2}{4f^2}$$

$$t_0 = \pi \sqrt{\frac{64\sqrt{5}\,\rho\,\mu_0 f^2}{3\,c^3}}$$