Exercice 1.

Présentation l'exercice propose d'étudier l'ascension d'un ballon dans l'atmosphère.

1 air : $\frac{4}{5}$ N_2 et $\frac{1}{5}$ O_2

$$M_{air} = 0{,}8 \times M_{N_2} + 0{,}2 M_{O_2} = 0{,}8 \times 2 \times M_N + 0{,}2 \times 2 \times M_O$$
$$= 1{,}6 \times 14 + 0{,}4 \times 16$$
$$= 29 \ g.mol^{-1}$$

2 $$\frac{dP}{dz} = -\rho_{air} g$$

loi fondamentale de la statique des fluides
axe Oz axe sens le haut

Rq à savoir démontrer pour l'oral !

on l'air G.P. et $t°$ isotherme ⇒

$$PV = nRT_0 = m \frac{RT_0}{M_{air}}$$

d'où $$\rho_{air}(P) = \frac{P \times M_{air}}{R T_0}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M_{air} g}{R T_0} \xrightarrow{\text{intégration entre } 0 \text{ et } z} \boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)}$$

avec $\boxed{H = \frac{R T_0}{M_{air} g}}$ App num $H = 8{,}6$ km

3 système ballon de masse m

ref galiléen terrestre

ATE poids : $m\vec{g}$

Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho_{air}(z) V_0 \vec{g}$ cste

Que vaut la masse m ? (on néglige la masse de l'enveloppe)

hélium gaz parfait : $2P_0 V_0 = \frac{m}{M_{He}} R T_0$

$$\boxed{m = \frac{2 P_0 V_0 M_{He}}{R T_0}}$$

à l'équilibre $\vec{\Pi} + m\vec{g} = 0$

d'où $$\frac{2\cancel{P_0}\cancel{V_0} M_{He}}{\cancel{RT_0}} \cancel{g} = \frac{M_{air}}{\cancel{RT_0}} \cancel{P_0} \exp\left(-\frac{z_{eq}}{H}\right) \cancel{V_0} \cancel{g}$$

$$\boxed{z_{eq} = H \ln\left(\frac{M_{air}}{2 M_{He}}\right)}$$

App num $\underline{z_{eq} = 17\text{ km}}$

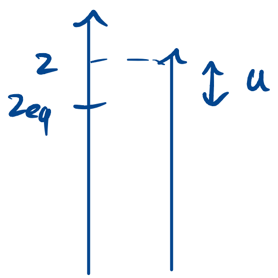
$\boxed{4}$

• Lorsque le ballon arrive en z_{eq}, la vitesse est non nulle, donc il va dépasser z_{eq}. Le poids est alors supérieur à la poussée d'Archimède le ballon descend puis passe en dessous de z_{eq}.
La poussée d'Archimède est alors supérieure à z_{eq} le ballon monte à nouveau.

• PFD sur le ballon

$$\frac{\cancel{2P_0}\cancel{V_0}\cancel{M_{He}}}{\cancel{R}\cancel{T_0}}\ddot{z} = -\frac{\cancel{2P_0}\cancel{V_0}\cancel{M_{He}}}{\cancel{R}\cancel{T_0}}g + \frac{M_{air}\cancel{P_0}}{2\cancel{RT_0}M_{He}}\exp\left(-\frac{z}{H}\right)\cancel{V_0}g$$

$$\ddot{z} - \frac{M_{air}}{2M_{He}}\exp\left(\frac{-z}{H}\right)g = -g$$



$z = z_{eq} + u$ et $u \ll z_{eq}$
$u \ll H$

$$\ddot{z} - \frac{M_{air}}{2M_{He}}\exp\left(\frac{-u}{H}\right)\exp\left(\frac{-z_{eq}}{H}\right)g = -g$$

$$\ddot{u} - \frac{M_{air}}{2M_{He}}\left(1 - \frac{u}{H}\right)g\exp\left(\frac{-z_{eq}}{H}\right) = -g$$

$$\ddot{u} + \frac{M_{air}}{2M_{He}}g\exp\left(-\frac{z_{eq}}{H}\right)\frac{u}{H} = -g + \frac{M_{air}}{2M_{He}}g\exp\left(\frac{-z_{eq}}{H}\right)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0^2 = \frac{M_{air}}{2M_{He}}\frac{g}{H}\exp\left(\frac{-z_{eq}}{H}\right)$ $= 1$ cf Q3

d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{H}}$

et la période $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}}$