Exercice 2

Présentation : Il s'agit d'un exercice de statique des fluides pour calculer les forces de pression s'exerçant sur un TAG.

1

$$\frac{dP}{dz} = \rho g \quad \Rightarrow \quad \int_{P(z=-H)}^{P(z)} dP = \int_{-H}^{z} \rho g \, dz$$

incompressible

R° fondamentale

$$P(z) - P_0 = \rho g (z+H)$$

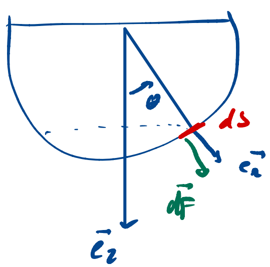
$$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g (z+H)}$$

⚠ aux bornes d'intégration !

2 • par symétrie cylindrique la force de pression est dirigée selon $\vec{e_z}$.

3 • sur la partie cylindrique, par symétrie la résultante des forces de pression est nulle.

• Sur le fond



$$d\vec{F} = (P(z) - P_0) \, dS \, \vec{e_r}$$

P_{int} P_{ext}

Rappel : on projette avant d'intégrer pour éviter de calculer des termes nuls.

$$dF_z = d\vec{F} \cdot \vec{e_z} = \rho g (H+z) \cos(\theta) \, dS$$

or dS à $r=R$ est vaut $dS = R^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi$

(car $d\vec{l} = dr \, \vec{e_r} + r \, d\theta \, \vec{e_\theta} + r \sin\theta \, d\varphi \, \vec{e_\varphi}$).

$$F_z = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \rho g (H+z) \cos(\theta) \, R^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi$$

or $z = R\cos\theta$

d'où $$F_z = 2\pi R^2 \rho g \left\{ \int_0^{\pi/2} H \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta + \int_0^{\pi/2} R \cos^2\theta \sin(\theta) \, d\theta \right\}$$

$$F_z = 2\pi R^2 \rho g \left\{ H \left(+\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{R}{3} \right\}$$

$$F_z = 2\pi R^2 \rho g \left\{ \frac{H}{2} + \frac{R}{3} \right\}$$

d'où $$\boxed{\vec{F_p} = F_z \, \vec{e_z} = 2\pi R^2 \rho g \left\{ \frac{H}{2} + \frac{R}{3} \right\} \vec{e_z}.}$$

autre méthode

la force est la même sur toute une couronne

$$dF_{z,C} = \rho g \,(H+z)\cos(\theta)\, dS_C$$

sur la couronne

surface de la couronne

il reste à intégrer sur θ : $[0; \pi/2]$.

$$F_z = \int_0^{\pi/2} \rho g \left(H + R\cos(\theta)\right) \cos\theta \; 2\pi R^2 \sin(\theta)\, d\theta$$

on retrouve le même calcul que précédemment.