PT– pour le 1er sept 2026 **DM n°1 : Révisions d'analyse**

Attention à encadrer vos résultats. Merci de rendre plusieurs copies distinctes :
une copie pour la technique 1
une copie pour la technique 2
une copie regroupant les techniques 3 , 4 et 5
une copie regroupant les techniques 6 ,7 et 8
une copie regroupant les exercices 1 et 2
une copie pour l'exercice 3

Quelques techniques à maitriser :

Technique 1. (Savoir calculer une dérivée)

1-1) Calculer la dérivée des fonctions suivantes sans préciser leurs domaines de dérivabilité :

$f_1 : x \to \cos^2(x)$; $f_2 : x \to \frac{1}{x^2}$; $f_3 : x \to \frac{1}{1-x}$; $f_4 : x \to \frac{1}{(1-x)^2}$; $f_5 : x \to \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$; $f_6 : x \to \frac{1}{(1-2x)^5}$;

$f_7 : x \to x.e^{x}$; $f_8 : x \to x^3 e^{-x}$; $f_9 : x \to x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$; $f_{10} : x \to \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; $f_{11} : x \to \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

$f_{12} : x \to \ln(|\ln(x)|)$;

1-2) Soit $\varphi: x \to \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer φ'

En déduire que $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$. Que devient cette relation pour x<0 ?

1-3) Soit $g(x,y) = x^2 (1 + y)^3 + y^2$. Calculer les dérivées partielles de g

Déterminer le(s) point(s) critique(s) de g sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

1-4) Calculer la dérivée n-ième (pour $n \in \mathbb{N}$) de la fonction $g : x \to x^3 e^{-x}$

1-5) Calculer la dérivée n-ième (pour $n \in \mathbb{N}$) de la fonction $h : x \to \frac{1}{x+2}$

Technique 2. (Savoir calculer une limite, trouver un équivalent, un DL)

2-1) Déterminer un équivalent en 0 le plus simple possible de : $x(x-1)e^x$; $\sin(3x)$; $\text{sh}^2(x)$; $\frac{\text{Arctan}(x)}{x}$; $\sqrt{1+x} - 1$;

$xe^x - x$; $x + x^2$; $x + \sin x$; $x - \sin x$; ; $x^2 - \sin^2 x$; $\ln(\sin x)$; $\ln(\cos x)$

Déterminer un équivalent en $+\infty$ de : $x(x-1)e^x$; $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$; $x + x^2$; $e^x - 2x$; $\frac{\text{Arctan}(x)}{x}$

2-2) Calculer les limites en 0 de : $\sin x.\sin\frac{1}{x}$; $\sin(x).\ln(x)$; $\frac{e^{3x}-1}{x}$; $\frac{\sin(2x)}{\tan(x)}$; $\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$

Calculer (et retenir) $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

2-3) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $k(x) = \frac{1}{1+x}$

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\varphi(x) = \sin^2(x)$

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g(x) = \ln(3+\cos(x))$

Technique 3. (Savoir démontrer une inégalité, savoir trouver le signe d'une expression)

3-1) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$ $\quad \frac{1}{1-x} \leq \frac{x}{1-x^2}$

3-2) Montrer (et retenir) que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} \geq 1 + x}$

3-3) Montrer que pour tout couple de réels (x, y) : $\quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

3-4) Montrer grâce à l'inégalité des accroissements finis (et retenir) que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x)| \leq |x|}$

3-5) Montrer , grâce à la formule de Taylor avec majoration du reste de Lagrange que pour tout réel x

$$\left| \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^4}{24}$$

Technique 4. (Savoir linéariser)

4-1) Linéariser $\sin^3(x)$.

4-2) Application 1 : En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\,dx$

4-3) Application 2 : Démontrer (et retenir) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}$.

En déduire la dérivée n-ieme de $x \rightarrow \sin^3(x)$

Technique 5. (Savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples)

5-1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4 - x^2}$.

5-2) Application 1 : Déterminer une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{4 - x^2}$ sur $]-2, 2[$

5-3) Application 2 : Déterminer la dérivée n-ieme de $x \rightarrow \frac{1}{4 - x^2}$.(utiliser le résultat de la question 1-4)

Technique 6. (Savoir expliciter le terme général d'une suite usuelle)

6-1) (*suite géométrique*) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} + 3u_n = 0$.
Expliciter u_n.

6-2) (*suite arithmétique*) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + 2$.
Expliciter u_n.

6-3) (*suite arithmético-géométrique*) Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation: $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$

Préciser celle dont le premier terme est $u_0 = 2$

6-4) (*suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2*)

a) Déterminer les suites réelles vérifiant la relation: $[\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0]$.

b) Déterminer les suites réelles vérifiant la relation: $[\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n]$.

c) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 9$ et $\left[\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} - u_n + \frac{1}{4}u_{n-1} = 0\right]$. Expliciter u_n.

Technique 7. (Connaitre son formulaire de trigonométrie)

7-1) Rappeler (et retenir) les formules d'addition $\boxed{\cos(a+b),\ \cos(a-b),\ \sin(a+b) \text{ et } \sin(a-b)}$.
Retrouver alors la linéarisation de : cosa.cosb, sina.sinb et sina.cosb

7-2) Factoriser $e^{ip} + e^{iq}$ par $e^{i\frac{p+q}{2}}$. En déduire, après avoir utilisé une formule d'Euler, la formule de factorisation usuelle de $\cos p + \cos q$ et $\sin p + \sin q$
Trouver de même la formule de factorisation usuelle de $\cos p - \cos q$ et $\sin p - \sin q$.

7-3) Rappeler (et retenir) les $\boxed{\text{formules de duplication donnant } \sin(2x) \text{ et } \cos(2x)}$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
Ecrire alors sans racine carrée, $\sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{1 + \cos(t)}}$ pour tout $t \in [0,\pi[$

Technique 8 (Utilisation de la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$)

8-1) Rappeler l'expression des sommes finies usuelles $\sum_{k=0}^{n} x^k$, $\sum_{k=1}^{n} x^k$

8-2) Calculer $A = \sum_{k=1}^{n} 3^{2k+1}$

8-3) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$. On écrira le résultat sous forme factorisée.

Quelques exercices :

Exercice 1 : (utilisation de la technique 1) On considère l'équation différentielle (E) : $(1 + x^2)y' + x.y = 1$

1) On considère la fonction F définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$
   a) Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$ puis calculer $F'(x)$
   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
2) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (H) : $(1 + x^2).y' + x.y = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
3) Déterminer alors les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : (utilisation des techniques 2 et 3)

1) Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique des n premiers termes.

Dans cette question, on veut montrer que si la suite (u_n) converge vers le réel L alors la suite (a_n) converge vers L *(C'est le lemme de Cesaro)*

Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraine : $|u_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

b) Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a :
$$|a_n - L| \leq \frac{|u_1 - L| + |u_2 - L| + \ldots + |u_{n0} - L|}{n} + \frac{|u_{n0+1} - L| + \ldots + |u_n - L|}{n}$$

c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraine :
$$\frac{|u_1 - L| + |u_2 - L| + \ldots + |u_{n0} - L|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

d) En déduire que pour tout entier $n > n_1$ $|a_n - L| < \varepsilon$. Conclure

Désormais, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:
$$u_1 \in]0,\pi[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$$

2) Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < u_n < \pi$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

3) Justifier que, lorsque n tend vers $+\infty$: $u_{n+1} \sim u_n$

4) Montrer que , lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $u_n - \sin(u_n) \sim \dfrac{u_n^3}{6}$ puis $u_n^2 - u_{n+1}^2 \sim \dfrac{u_n^2 u_{n+1}^2}{3}$

5) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{3}$

b) Montrer alors, en appliquant le lemme de Cesaro, que $\lim_{n\to+\infty} n.u_{n+1}^2 = 3$

c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 3. (Un exemple important qui resservira dans le chapitre sur les séries entières)

Question 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera g le prolongement obtenu.
b) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser g'.
d) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Question 2 :

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \neq 0 \text{ , } g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}.\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$
Préciser P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$. P_n est de degré $2n-2$ et que son coefficient dominant α_n vérifie :
$$\alpha_{n+1} = -(n+2)\alpha_n$$

c) Expliciter α_n en fonction de n, pour tout $n \geq 1$.

Question 3 : En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $g^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(on pourra montrer par récurrence sur n que « g est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $g^{(n)}(0) = 0$ »)