PT– pour le 1^{er} sept 2026

DM n°1 : Révisions d'analyse - Indications

Attention à encadrer vos résultats. Merci de rendre plusieurs copies distinctes :
une copie pour la technique 1
une copie pour la technique 2
une copie regroupant les techniques 3 , 4 et 5
une copie regroupant les techniques 6 ,7 et 8
une copie regroupant les exercices 1 et 2
une copie pour l'exercice 3

Quelques indications (si besoin)

Technique 1(Calcul de dérivées)

1-1) Astuce pour simplifier les calculs de dérivées: on peut remplacer $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ par $(1+2x)^{-1/2}$ et $\dfrac{1}{(1-2x)^5}$ par $(1-2x)^{-5}$

pour utiliser la formule $(u^\alpha)' = u'.\,\alpha\, u^{\alpha-1}$

Attention : D'après le cours de PTSI $\boxed{(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}}$ Quelle est donc la dérivée de la composée $(\ln|u(x)|)'$?

1-3) On rappelle que (x,y) est un point critique de g si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

1-4) Utiliser la formule de Leibniz . On explicitera les coefficients binomiaux utilisés : par exemple $\binom{n}{2} = \ldots$?

1-5) Faire une conjecture puis une démonstration par récurrence.

Technique 2 (Limites, équivalents, DL)

2-1) L'équivalent d'un **produit** est le produit des équivalents mais attention il est interdit de <u>sommer</u> des équivalent …

ainsi pour trouver l'équivalent d'une somme :

→Si un terme est négligeable devant l'autre, l'équivalent de la somme est le terme dominant

→Si on peut factoriser, on le fait

→en dernier recours, on passe par un DL

Par ailleurs, on ne peut pas en général « <u>composer</u> » un équivalent : un cas particulier est la composition par ln

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 1 \quad \text{alors : } \quad f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Rightarrow \ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))}$$

2-2) En cas de forme indéterminée, on pensera à utiliser un equivalent...

Pour $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, il FAUT passer par l'ecriture exponentielle.

2-3) Attention à la manipulation des $o(x^n)$: on ne les « rajoute » pas à la fin !

Pour le DL de f, on montre que $f(x) = \dfrac{1}{1+u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$ puis on utilise le $DL_2(0)$ de $h \to \dfrac{1}{1+h}$

Pour le DL de g, on montre que $g(x) = \ln(4) + \ln(1 + u(x))$ avec $u(x) = -\dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ puis on utilise le $DL_2(0)$ de $h \to \ln(1+h)$

Technique 3 (Signe d'une expression)

3-1) pour déterminer le signe d'une expression , on FACTORISE.(méthode 1)

3-2) pour déterminer le signe d'une expression , on introduit une FONCTION que l'on etudie. (méthode 2)

3-3) méthode 1

Technique 4: (Linéarisation)

Partir de la formule d'Euler sin(x) =

Technique 5 : (Décomposition en éléments simples)

Commencer par factoriser le dénominateur

Technique 6: (suite usuelle)

6-3) (*suite arithmético-géométrique*)

Etape 1 : On commence par déterminer le réel K tel que $K = \frac{K}{2} + 1$

Etape 2 : On conclut

Soit en introduisant $w_n = u_n - K$ et en utilisant que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Soit en utilisant SG(E)= SG(H) + SP (E)

Technique 7 : (Trigonométrie)

7-3) Ecrire $1 - \cos(x)$ et $1 + \cos(x)$ en fonction de $\sin^2(\frac{x}{2})$ et $\cos^2(\frac{x}{2})$

Technique 8 : (Une somme usuelle) 8-3) Remarquer que $\cos(kt) = \mathrm{Re}(e^{ikt})$ et calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}$. Penser à la technique de l'angle moitié pour obtenir rapidement un résultat factorisé à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 1

1a) Enoncer rigoureusement le **Théorème fondamental du calcul intégral** (TFCI)

Si f est …. sur l'intervalle I contenant a alors l'application $x \to \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur I s'annulant en a.

3) Commencer par déterminer une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante.

Exercice 2

1 a) : écrire la definition de $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$,« avec les ε ».

1 b) : utiliser l'inégalité triangulaire

1c) : que vaut $\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_1 - L| + |u_2 - L| + \ldots + |u_{n0} - L|}{n}$? à exploiter…

2) Pour déterminer la monotonie d'une suite, on cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$

On montrera que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

3)Utiliser le résultat obtenu dans technique 2, question 2-1

4) Utiliser les questions précedentes

Exercice 3

Question 1 :

Bien énoncer chaque définition (fonction prolongeable par continuité en 0, fonction continue en 0, fonction dérivable en 0, fonction de classe C^1, fonction de classe C^∞ sur ℝ) et/ou chaque théorème utilisé

1c) Pour calculer la limite du taux d'accroissement, on pourra, si on le souhaite, utiliser le **théorème de la limite d'une dérivée :**

Si f est dérivable sur I\{a}, continue sur I et si $\lim_{x \to a} f'(x) = L$ réel ou infini alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers L quand x tend vers a

Question 2 : On montrera que $P_{n+1} = (-3n X^2 + 2)P_n + X^3 P_n'$

Question 3 :

Remarquer que g est de classe C^{n+1} équivaut à $\begin{cases} g \text{ est de classe } C^n \\ g^{(n)} \text{ est de classe } C^1 \end{cases}$

On utilisera le théorème de la limite d'une dérivée