PT Le Corbusier 2019-20

Devoir surveillé de mathématiques n° 2 – Corrigé

***

Problème I *(D'après Banque PT – Math B 2019)*

1. (a) Le point $H_0(x_H, y_H)$ appartient à D et la droite (M_0H_0) est orthogonale à D

donc $\begin{cases} ax_H + by_H + c = 0 \\ \overrightarrow{M_0H_0} \text{ est colinéaire à } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

De plus, $ax_H+by_H+c = a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c = 0$ donc $ax_0+by_0+c+(a^2+b^2)\lambda = 0$ puis $\lambda = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$. (On sait que $(a, b) \neq (0, 0)$ donc $a^2 + b^2 \neq 0$).

On obtient le résultat demandé :

$$\boxed{(x_H, y_H) = \left(x_0 - a\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, y_0 - b\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right).}$$

(b) $d(M_0, D) = M_0H_0 = \sqrt{\dfrac{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \dfrac{b^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2}$

puis $\boxed{d(M_0, D) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

2. (a) On a $(D_{-1}) : y - 2 = 0$, $(D_0) : x = 0$, $(D_1) : y = 0$

Soit $M(x, y)$, $d(M, D_{-1}) = d(M, D_0) = d(M, D_1) \Leftrightarrow |y-2| = |x| = |y| \Leftrightarrow (y-2)^2 = x^2 = y^2$.

$(y - 2)^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = y^2 \Leftrightarrow y = 1$. Puis $(y - 2)^2 = x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = 1$ et $x^2 = 1$.

$\boxed{\text{Les points du plan équidistants des droites } D_{-1}, D_0 \text{ et } D_1 \text{ sont donc } A(1, 1) \text{ et } B(-1, 1).}$

(b) Seuls A et B sont candidats, d'après la question précédente. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$d(A, D_t) = \dfrac{|t^2 - 1 - 2t + 2t(1 - t)|}{\sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2}} = \dfrac{| - 1 - t^2|}{\sqrt{(t^2 + 1)^2}} = 1.$

Donc $\boxed{A \text{ est équidistant de toutes les droites } D_t,\ t \in \mathbb{R}.}$

En revanche, par exemple, $d(B, D_2) = \dfrac{11}{5} \neq d(B, D_0) = 1$.

Donc $\boxed{A \text{ est l'unique point équidistant de toutes les droites } D_t,\ t \in \mathbb{R}.}$

3. (a) On peut lire un vecteur directeur sur l'équation cartésienne donnée dans l'énoncé :

$\boxed{\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } D_t.}$

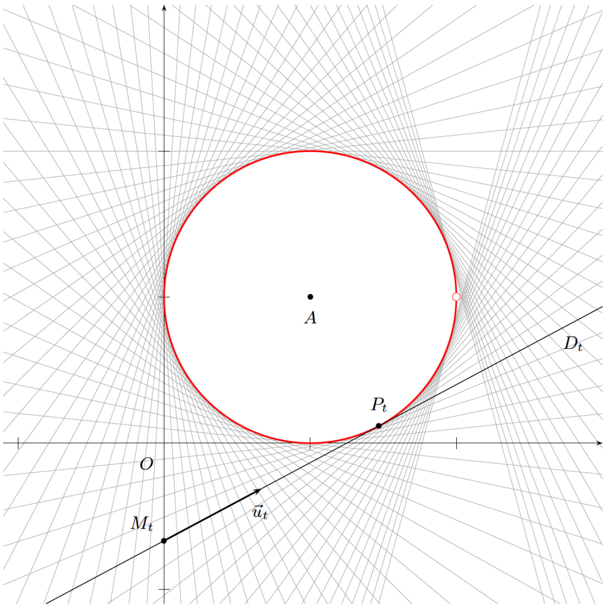
Le point $M(t) = (0, 1 - t)$ appartient à D_t.

Donc $\boxed{D_t \text{ admet pour représentation paramétrique } \begin{matrix} x = 2t\lambda \\ y = 1 - t + \lambda(t^2 - 1) \end{matrix},\ \lambda \in \mathbb{R}.}$

(b) On recherche une représentation paramétrique de l'enveloppe Γ de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sous la forme $g(t) : \begin{cases} x(t) = 2t\lambda(t) \\ y(t) = 1 - t + \lambda(t)(t^2 - 1) \end{cases}$ où λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à déterminer.
Les vecteurs $g'(t)$ et $\vec{u}(t)$ doivent être colinéaires donc on résout $[M'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t), \vec{u}(t)] = [M'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$, *i.e.* $\begin{vmatrix} 2\lambda(t) & 2t \\ -1 + 2t\lambda(t) & t^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$ d'où $2\lambda(t)(t^2 - 1) - 2t(-1 + 2t\lambda(t)) = 0$ puis $2\lambda(t)(-t^2 - 1) + 2t = 0$, enfin $\lambda(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$

d'où $g(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ y(t) = 1 - t + \dfrac{t}{1+t^2}(t^2 - 1) = \dfrac{1 + t^2 - t - t^3 + t^3 - t}{1+t^2} = \dfrac{1 - 2t + t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{\text{une représentation paramétrique de l'enveloppe } \Gamma \text{ de la famille de droites } (D_t)_{t\in\mathbb{R}} \text{ est : } \begin{cases} x = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$



4.

(a) $\boxed{\Gamma' \text{ est le cercle de centre } A(1,1) \text{ et de rayon } 1.}$

(b) Soit $M(x, y) \in \Gamma$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \dfrac{2t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}$. On vérifie que M appartient au cercle de centre A et de rayon 1.
$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\dfrac{2t^2}{1+t^2} - 1)^2 + (\dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} - 1)^2 = (\dfrac{t^2 - 1}{1+t^2})^2 + (\dfrac{-2t}{1+t^2})^2$
$= \dfrac{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{(t^2+1)^2}{(1+t^2)^2} = 1$
Ainsi, $M \in \Gamma'$. Donc $\boxed{\Gamma \subset \Gamma'}$.
Le point $(2, 1)$ appartient à Γ' (en prenant $\theta = 0$).
En revanche $x = \dfrac{2t^2}{1+t^2} = 2 \Leftrightarrow 1 + t^2 = t^2 \Leftrightarrow 1 = 0$, ce qui est impossible, donc $(2, 1) \notin \Gamma$.

Ainsi $\boxed{\Gamma \neq \Gamma'.}$

(c) $\boxed{\text{Les deux courbes sont parcourues dans le sens direct (ou trigonométrique).}}$

5. cf. cours

6. (a) Soit $\vec{f}(\theta) = (1 + \cos(\theta), 1 + \sin(\theta))$. $\vec{f}$ est dérivable sur $[0, 2\pi]$ et $\forall \theta \in [0, 2\pi], \vec{f}'(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. On a $s'(\theta) = \|\vec{f}'(\theta)\| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$.

Donc $\boxed{\overrightarrow{T}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ puis } \overrightarrow{N}(\theta) = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}}$

s est la primitive de $s' : \theta \mapsto 1$ qui s'annule en 0. Ainsi, $\boxed{s(\theta) = \theta.}$

$\boxed{\text{L'origine du repère de Frenet est } M(\theta).}$

(b) On a $P_k(\theta) = M(\theta) + (k - s(\theta))\overrightarrow{T}(\theta) = (1 + \cos\theta - (k-\theta)\sin\theta, 1 + \sin\theta + (k-\theta)\cos\theta)$.

On a donc $\boxed{\Lambda_k : \begin{cases} x(\theta) = 1 + \cos\theta - (k-\theta)\sin\theta \\ y(\theta) = 1 + \sin\theta + (k-\theta)\cos\theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi].}$

(c) Les fonctions x et y sont dérivables sur $[0, 2\pi]$ par somme et produit de fonctions dérivables.

On $\forall \theta \in [0, 2\pi], \begin{cases} x'(\theta) = -\sin\theta - (k-\theta)\cos\theta + \sin\theta = (\theta - k)\cos\theta \\ y'(\theta) = \cos\theta - (k-\theta)\sin\theta - \cos\theta = (\theta - k)\sin\theta \end{cases}$

Ainsi $\begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} = (\theta - k) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

Les fonctions cos et sin ne s'annulant jamais simultanément, $\begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \theta = k$.

$\boxed{\Lambda_k \text{ présente donc un unique point stationnaire : le point } P_k(k) = (1 + \cos(k), 1 + \sin(k)).}$

$\boxed{\text{Le point } P_k(k) \text{ est situé sur le cercle } \Gamma'.}$

(d) On cherche la développée comme enveloppe des normales à Λ_k. Les normales à Λ_k sont les droites passant par $P_k(\theta)$ et dirigées par $\vec{n}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

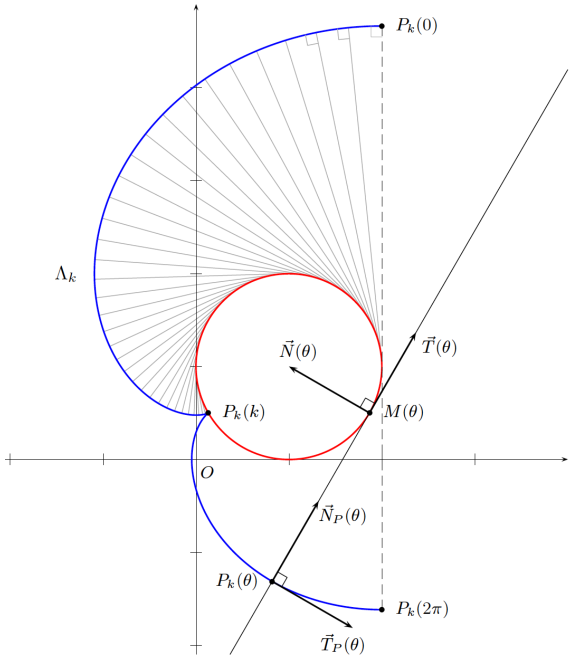
On cherche donc une paramétrisation de la développée sous la forme $g(\theta) = P_k(\theta) + \lambda(\theta)\vec{n}(\theta)$.

On résout $[P_k'(\theta) + \lambda(\theta)\vec{n}'(\theta), \vec{n}(\theta)] = 0$, *i.e.* $\begin{vmatrix} (\theta - k)\cos\theta - \lambda(\theta)\cos\theta & -\sin\theta \\ (\theta - k)\sin\theta - \lambda(\theta)\sin(\theta) & \cos\theta \end{vmatrix} = 0$

Il vient $\lambda(\theta) = \theta - k$, puis $g(\theta) = (1 + \cos(\theta), 1 + \sin(\theta))$.

$\boxed{\text{La développée de } \Lambda_k \text{ est la courbe } \Gamma.}$

7. (a)



(b) Par définition du centre de courbure, la droite $(M(\theta)P(\theta))$ est normale à Λ au point $P(\theta)$. La développée étant l'enveloppe des normales, cette droite est donc aussi tangente à Γ' au point $M(\theta)$. Donc un vecteur directeur de cette droite est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{T}(\theta)$.

$\boxed{\text{Il existe une fonction } \lambda, \text{ telle que : } \forall \theta \in [0, 2\pi], \overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = \lambda(\theta)\overrightarrow{T}(\theta).}$

(c) Les fonctions précédentes étant toutes de classe $\mathcal{C}^1$, on peut dériver toutes ces fonctions par rapport à θ. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

On a $\overrightarrow{OP}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta) + \lambda(\theta)\overrightarrow{T}(\theta)$.

Par dérivation, on obtient bien : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} + \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} + \lambda\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\theta}}$

Par définition de $\overrightarrow{T_P}$, $\overrightarrow{T_P} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}/\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s_p/\,\mathrm{d}\theta}$ d'où $\overrightarrow{OP}(\theta) = \dfrac{\mathrm{d}s_P}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T_P}$.

De même, $\overrightarrow{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}/\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}\theta}$ d'où $\overrightarrow{OM}(\theta) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T}$.

Par la première formule de Frenet, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\gamma\overrightarrow{N}$.

En remplaçant ces trois vecteurs dans le résultat précédent, on obtient bien : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s_P}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T_P} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} + \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{T} + \lambda\gamma\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{N}.}$

(d) Les vecteur $\overrightarrow{T_P}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires, et orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{T}$. Ainsi, dans l'équation précédente, la composante selon le vecteur $\overrightarrow{T}$ est nulle donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} + \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta} = 0}$.

Puisque $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = 1$, on a alors $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta} = -1$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda(\theta) = k - \theta.}$

(e) En réinjectant le résultat précédent dans le résultat de la question 7b, on obtient que $\forall \theta \in [0, 2\pi], P(\theta) = M(\theta) + (k - \theta)\overrightarrow{T}(\theta)$.

Ainsi $\boxed{\Lambda \text{ est une courbe } \Lambda_k. \text{ On obtient bien le résultat voulu.}}$

***

Problème II *(D'après Mines Albi Alès Douai Nantes 2010)*

Partie 1 – Etude de courbes paramétrées

1. f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $f_a'(t) = -\dfrac{at^{a-1}}{(1+t^a)^2}$.
   Donc $\forall t \geqslant 0, f_a'(t) \leqslant 0$. De plus, la dérivée ne s'annule qu'en 0, si $a > 1$.
   Donc $\boxed{f_a \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$.
2. (a) On a vu que f_a est dérivable donc continue sur I, ainsi que strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection,
   $\boxed{f_a \text{ réalise un bijection de } [0, +\infty[\text{ sur }]\lim_{x\to+\infty} f_a(x), f_a(0)] =]0,1]}$
   (b) $\Gamma_{a,a} = \{(f_a(t), f_a(t)), t \in I\}$. D'après la question précédente, $\Gamma_{a,a} = \{(x,x), x \in]0,1]\}$.
   Ainsi $\boxed{\Gamma_{a,a} \text{ est le segment reliant } O \text{ au point de coordonnées } (1,1), \text{ privé du point } O.}$
3. Si on note $(x_1(t), y_1(t)), t \in I$, le paramétrage de $\Gamma_{a,b}$ et $(x_2(t), y_2(t)), t \in I$, le paramétrage de $\Gamma_{b,a}$, on a clairement : $\forall t \in I, x_1(t) = y_2(t) = f_a(t)$ et $x_2(t) = y_1(t) = f_b(t)$.
   Donc $\boxed{\Gamma_{a,b} \text{ et } \Gamma_{b,a} \text{ sont symétriques par rapport à la droite d'équation } y = x.}$
4. Soit $t > 0$. $f_a(t) + f_a(1/t) = \dfrac{1}{1+t^a} + \dfrac{1}{1+(1/t)^a} = \dfrac{1}{1+t^a} + \dfrac{t^a}{1+t^a}$.
   $\boxed{f_a(t) + f_a(1/t) = 1}$
5. Ainsi, on a $x_(t) = 1 - x(1/t)$ et $y(t) = 1 - y(1/t)$ donc *(faire un dessin !)*
   $M(1/t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport au point $B(1/2, 1/2)$.
   Donc $\boxed{\Gamma \text{ privé du point } M(0) = (1,1) \text{ est symétrique par rapport à } B.}$
6. On a déjà vu que x et y sont dérivables sur I, avec $\forall t \in I, (x'(t), y'(t)) = (-\dfrac{at^{a-1}}{(1+t^a)^2}, -\dfrac{bt^{b-1}}{(1+t^b)^2})$.
   Il vient le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	0		$-$		
$x(t)$	1	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	0
$y(t)$	1	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0		$-$		

   Note : $x'(0) \neq 0$ si $a = 1$.
7. (a) $\dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \dfrac{\dfrac{1}{1+t^b} - 1}{\dfrac{1}{1+t^a} - 1} = \dfrac{1+t^a}{1+t^b}\left(\dfrac{-t^b}{-t^a}\right) \underset{t\to0}{\sim} t^{b-a} \xrightarrow[t\to0]{} 0$ car $b > a$. Donc Γ présente une tangente horizontale au point $M(0) = (1,1)$.

$\boxed{\Gamma \text{ admet une tangente d'équation } y=1 \text{ au point } M(0).}$

(b) Puisque f_a et f_b tendent vers 0 en $+\infty$, $\boxed{M(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0,0).}$

Or $\dfrac{y(t)-0}{x(t)-0} = \dfrac{1+t^a}{1+t^b} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{a-b} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $b>a$.

Donc Γ présente une « tangente » horizontale au point limite.

$\boxed{\Gamma \text{ admet une tangente d'équation } y=0 \text{ au point } \lim_{t\to+\infty} M(t) = (0,0).}$

8. On pose $h = t-1$.

$f_a(1+h) = \dfrac{1}{1+(1+h)^a} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{1+(1+ah+\dfrac{a(a-1)}{2}h^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{6}h^3+o(h^3)}$

$\underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{2}h+\dfrac{a(a-1)}{4}h^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{12}h^3+o(h^3))}$

$\underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2}(1-(\dfrac{a}{2}h+\dfrac{a(a-1)}{4}h^2+\dfrac{a(a-1)(a-2)}{12}h^3)+(\dfrac{a}{2}h+\dfrac{a(a-1)}{4}h^2)^2-(\dfrac{a}{2}h)^3+o(h^3))$

$\underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2}(1-\dfrac{a}{2}h-\dfrac{a(a-1)}{4}h^2-\dfrac{a(a-1)(a-2)}{12}h^3+\dfrac{a^2}{4}h^2+\dfrac{a^2(a-1)}{4}h^3-\dfrac{a^3}{8}h^3+o(h^3))$

$\underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}h+\dfrac{a}{8}h^2+\dfrac{a(a^2-4)}{48}h^3+o(h^3).$

puis $\boxed{f_a(t) \underset{t\to 1}{=} \dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{4}(t-1)+\dfrac{a}{8}(t-1)^2+\dfrac{a(a^2-4)}{48}(t-1)^3+o((t-1)^3)}$

9. En prenant la formule précédente avec $a=1$ et $b=2$, on a

$x(t) \underset{t\to 1}{=} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}(t-1)+\dfrac{1}{8}(t-1)^2+-\dfrac{1}{16}(t-1)^3+o((t-1)^3)$

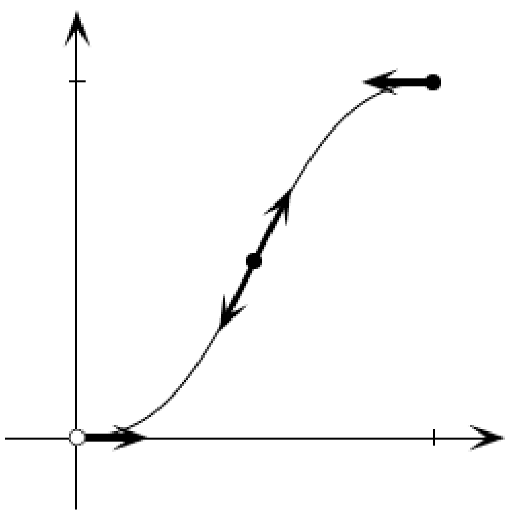
et $y(t) \underset{t\to 1}{=} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(t-1)+\dfrac{1}{4}(t-1)^2+o((t-1)^3)$

Donc $M(t) \underset{t\to 1}{=} \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}+(t-1)\begin{pmatrix}-1/4\\-1/2\end{pmatrix}+(t-1)^2\begin{pmatrix}1/8\\1/4\end{pmatrix}+(t-1)^3\begin{pmatrix}-1/16\\0\end{pmatrix}+o((t-1)^3)$

Les vecteurs $\begin{pmatrix}-1/4\\-1/2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1/8\\1/4\end{pmatrix}$ sont colinéaires, et le vecteur $\begin{pmatrix}-1/16\\0\end{pmatrix}$ est linéairement indépendant des deux premiers. Les entiers caractéristiques sont donc $p=1$ et $q=3$.

$\boxed{\text{Le point } M(1) \text{ est un point d'inflexion. La tangente en ce point est dirigée par } F'(1)=\begin{pmatrix}-1/4\\-1/2\end{pmatrix}, \text{ ou encore par } \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.}$

10.



Partie 2 – Fonction définie par une intégrale

11. $\varphi(0) = \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}t$, donc $\boxed{\varphi(0) = \frac{1}{2}.}$

    $\varphi(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1$, puis $\boxed{\varphi(1) = \ln(2)}$

    $\varphi(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\operatorname{Arctan} t]_0^1$ puis $\boxed{\varphi(2) = \frac{\pi}{4}.}$

12. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+, x \leqslant y$, soit $t \in]0,1]$.

    $\ln(t) \leqslant 0$ donc $x \ln t \geqslant y \ln t$

    Par croissance de exp sur $\mathbb{R}$, $e^{x \ln t} = t^x \geqslant e^{y \ln t} = t^y$

    puis $1 + t^x \geqslant 1 + t^y > 0$. Par passage à l'inverse :

    $\frac{1}{1+t^x} \leqslant \frac{1}{1+t^y}$.

    Enfin, par croissance de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^y}\mathrm{d}t$

    Donc $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$.

    $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

13. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$, avec $x \leqslant y$. D'après la proposition précédente,

    $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \varphi(y) - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^y} - \frac{1}{1+t^x}\mathrm{d}t$

    $= \int_0^1 \frac{1 + t^x - 1 - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)}\mathrm{d}t$ (par linéarité)

    $\leqslant \int_0^1 (t^x - t^y)\mathrm{d}t$ (par croissance de l'intégrale car $\frac{1}{(1+t^x)(1+t^y)} \leqslant 1$ sur $[0,1]$)

    puis $\int_0^1 (t^x - t^y)\mathrm{d}t = [\frac{t^{x+1}}{x+1} - \frac{t^{y+1}}{y+1}]_0^1$

    $= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}$

    $\leqslant y - x$ (car $(1+x)(1+y) \geqslant 1$)

    Il vient bien $\boxed{|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \int_0^1 (t^x - t^y)\mathrm{d}t \leqslant y - x}$

14. Soit $x \in \mathbb{R}_+$

    D'après la question précédente, $\forall y \in \mathbb{R}, 0 \leqslant |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |y - x|$.

    Puisque $\lim_{y \to x} |y - x| = 0$, on obtient, par le théorème d'encadrement :

    $|\varphi(x) - \varphi(y)| \xrightarrow[y \to x]{} 0$. Donc φ est continue en x.

    Puis $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

15. Soit $x \geqslant 0$,

    $1 - \varphi(x) = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^x}\mathrm{d}t.$

    puis $\boxed{1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\mathrm{d}t.}$

16. Soit $x \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^x \mathrm{d}t = [\frac{t^{x+1}}{x+1}]_0^1 = \frac{1}{x+1}$. On obtient bien la majoration $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x+1}}$.

Or, par positivité de l'intégrale : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x+1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

Ainsi, par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Puis, d'après la question précédente, $\boxed{\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$

17. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\forall t \in [0,1]$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -\dfrac{xt^{x-1}}{(1+t^x)^2}$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\varphi(x) = [\frac{t}{1+t^x}]_0^1 - \int_0^1 -\frac{xtt^{x-1}}{(1+t^x)^2}\mathrm{d}t$$

puis $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + x\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2}\mathrm{d}t}$

Partie 3 – Intégrales généralisées

18. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. La fonction f_a est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

On a $f_a(t) = \dfrac{1}{1+t^a} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann qui converge si et seulement si $a > 1$.

Par le théorème de comparaison par équivalence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 1$.

La fonction f_a étant continue sur le segment $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_a(t)\mathrm{d}t$ est toujours convergente.

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^a}\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } a > 1.}$

19. On utilise les même arguments qu'à la question précédente : la fonction à intégrer est positive et

$\dfrac{t}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t$ converge puis $\boxed{J \text{ converge.}}$

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t = [\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(t^2)]_0^{+\infty}$$

$\boxed{J = \dfrac{\pi}{4}.}$

20. La fonction $t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.

$t = 1/u$ donc $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$

$t \to 0 \Leftrightarrow u \to +\infty$ et $t \to +\infty \Leftrightarrow u \to 0$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t$ converge d'après la question 18.

D'après le théorème de changement de variable :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+(1/u)^4}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^4}{(1+u^4)(u^2)}\mathrm{d}u$$

puis $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t}$

21. Soit $A \geqslant 0$.

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(t+\sqrt{2}/2)^2+(\sqrt{2}/2)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}[\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}(t+\sqrt{2}/2))]_0^A$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}A+1) - \sqrt{2}\frac{\pi}{4} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \sqrt{2}\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\frac{\pi}{4}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{2}t+1} \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{2}t+1} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.}$

22. On obtient (de différentes manières), pour $t \in \mathbb{R}$, $t^4+1 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$

d'où $\displaystyle I - \sqrt{2}J + I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\sqrt{2}t+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

Puisque $J = \dfrac{\pi}{4}$, on trouve $2I - \sqrt{2}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$ puis $\boxed{I = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}.}$