**Devoir surveillé de mathématiques n° 4**
**Vendredi 20 décembre 2019**
**Durée : 3 heures**

***

Documents et calculatrices interdits.
Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation.

**Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.**

***

## Exercice 1

Une puce effectue des sauts aléatoires sur les trois sommets d'un triangle $ABC$. A chaque saut, elle peut soit sauter sur place, soit sauter vers un des deux autres sommets.

Les probabilités pour que le saut de départ s'effectue en $A$, $B$ ou $C$ sont respectivement $a_0$, $b_0$, $c_0$. On note $A_n$ (respectivement $B_n$, $C_n$) les événements : « après le $n$-ième saut, la puce est au point $A$ (respectivement $B$, $C$). » et $a_n$, $b_n$ et $c_n$ leurs probabilités respectives.

Pour $X$ et $Y$ appartenant à $\{A, B, C\}$, on note $p_{XY}$ la probabilité pour que le saut s'effectue de $X$ vers $Y$, sachant que la puce est sur la case $X$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $a_{n+1} = p_{AA}a_n + p_{BA}b_n + p_{CA}c_n$.
   (b) Exprimer de même $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$. En déduire la matrice $M$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
2. Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Pour $X$ et $Y$ appartenant à $\{A, B, C\}$ avec $X \neq Y$, on pose $p_{XY} = a$ et $p_{XX} = 1 - 2a$.
   (a) Écrire la matrice $M$ correspondant à ces valeurs et montrer que $M$ admet 1 pour valeur propre. Déterminer le sous-espace propre associé et en donner une base.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a + (1 - 3a)a_n$.
   (c) Exprimer $a_n$ en fonction de $a$, $a_0$ et $n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celles de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?
3. Dans cette question, on suppose que $p_{AA} = 1$, $p_{BA} = p_{BB} = \frac{1}{2}$ et $p_{CA} = p_{CB} = p_{CC} = \frac{1}{3}$.
   (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$
   (b) Écrire la matrice $M$ associée à ces valeurs. Déterminer les valeurs propres de $M$, notées $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, telles que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, et les vecteurs propres $u, v, w$ associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, admettant 1 pour première coordonnée.
   (c) On note $P$ la matrice de $(u, v, w)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $P^2$ et en déduire $P^{-1}$.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $M^n$.
   (e) En déduire une expression de $a_n$ en fonction de $a_0$, $b_0$, $c_0$ et $n$, puis la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
   (f) On note $\mathcal{A}$ l'événement « la puce finit sur la case $A$ ». Exprimer $\mathcal{A}$ à l'aide des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (g) Montrer que $P(\mathcal{A}) = 1$.

**Exercice 2**

1. Soit $x$ un réel tel que : $|x| \leqslant \dfrac{1}{4}$. Exprimer, en fonction de $x$, les deux solutions $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ de l'équation :
$$\mathcal{Y}^2 - \mathcal{Y} + x = 0$$
2. Donner le domaine de définition $\mathcal{I}_\mathcal{Y}$ de la fonction $f$ qui, à tout réel $x$ de $\mathcal{I}_\mathcal{Y}$, associe :
$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$
3. Pour tout réel non nul $\alpha$, rappeler le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel $x$ de $]-1,1[$, associe $(1+x)^\alpha$.
4. Donner le développement en série entière de la fonction $f$, en l'écrivant sous la forme :
$$\forall x \in \mathcal{D}_S \qquad , \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$
où $\mathcal{D}_S$ est un domaine de $\mathbb{R}$ à préciser. On donnera la valeur de $S_0$ et on exprimera les coefficients $S_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de $n$, sous forme de produit.
5. Rappeler la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série produit ?
6. A l'aide de la question 1, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k} \quad (*)$$
7. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ : $S_n = \dfrac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, où $\binom{2n-1}{n-1}$ est le coefficient binomial « $n-1$ parmi $2n-2$ ».
8. Etudier la convergence de la série de terme général $S_n$.
9. On appelle « mot de Dyck » une chaîne de $2n$ caractères, $n \in \mathbb{N}^*$, formée de $n$ lettres $A$ et $n$ lettres $B$, telle que, lorsqu'on dénombre les lettres de gauche à droite, en s'arrêtant à une lettre du mot, le nombre de $A$ soit toujours supérieur ou égal au nombre de $B$. Ainsi, le seul mot de Dyck de longueur 2 est : $AB$. Les mots de Dyck de longueur 4 sont : $AABB$ et $ABAB$. $ABAABB$ et $AAABBB$ sont des mots de Dyck alors que $BA$ ou $AABBBA$ n'en sont pas.

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par $C_n$ le nombre de mots de Dyck de $2n$ lettres.
   (a) Calculer $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$.
   (b) On pose : $C_0 = 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ : $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $C_n = S_{n+1}$, et conclure.

## Exercice 3

On considère un espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Pour un endomorphisme $f$ de $E$, $f^2$ désigne $f \circ f$. La notation $Id_E$ désigne l'endomorphisme identité de $E$.

1. Soit $f$, $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f)$.
2. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme **diagonalisable** de $E$. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, ses valeurs propres.
   (a) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = (f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E).$$
   (b) Montrer que, pour tout vecteur propre $v$ de $f$, on a
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(v) = 0.$$
   (c) Soit $x \in E$ un vecteur quelconque. En décomposant $x$ dans une base bien choisie, montrer que
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(x) = 0.$$
3. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme de $E$ tel que
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0 \quad (\star)$$
   pour des réels $\alpha$ et $\beta$ distincts.
   (a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $a(f - \alpha Id_E) + b(f - \beta Id_E) = Id_E$.
   (b) En déduire que $E = \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Im}(f - \beta Id_E)$.
   (c) Déduire de $(\star)$ que $\operatorname{Im}(f - \beta Id_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E)$
   et que $\operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$.
   (d) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$.
   (e) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \alpha Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - \beta Id_E)$.
   (f) En déduire que $f$ est diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que $f$ est un endomorphisme de $E$ tel que $f^2$ est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres strictement positives. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ces valeurs propres.
   (a) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note $F_k$ le sous-espace propre de $f^2$ associé à la valeur propre $\lambda_k$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $F_k$ est stable par $f$.
   (b) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note $f_k$ la restriction de $f$ à $F_k$ et on pose $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$.
   Montrer que $(f_k + \mu_k Id_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k Id_{F_k}) = 0$.
   (c) En déduire que $f_k$ est diagonalisable.
   (d) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note $F_k^+ = \operatorname{Ker}(f_k + \mu_k Id_{F_k})$ et $F_k^- = \operatorname{Ker}(f_k - \mu_k Id_{F_k})$.
   Montrer que
   $$E = F_1^+ \oplus F_1^- \oplus \cdots \oplus F_p^+ \oplus F_p^-.$$
   En déduire que $f$ est diagonalisable.