Programme de colles – Semaine 20 – du 09/03 au 13/03

‘

Variables aléatoires discrètes

Généralités

— Définition d'une variable aléatoire discrète.

— Loi d'une v.a. discrète.

— Fonction de répartition. Propriétés à connaître : croissance, limites en $-\infty$ et $+\infty$.

— Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ (les x_n distincts), et si les $p_n \geq 0$ vérifient $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe P telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P(X = x_n) = p_n$.

— Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle.

— Couple de variables aléatoires indépendantes.

— Variables aléatoires mutuellement indépendantes. (L'indépendance 2 à 2 n'entraîne pas l'indépendance mutuelle)

Espérance et variance

— Définition de l'espérance. Variable aléatoire d'espérance finie.

— Théorème du transfert (admis).

— Linéarité (admise), positivité et croissance de l'espérance.

— Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ (admis). (La réciproque est fausse).

— Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

— Définition de la variance (2 expressions à connaître). Ecart type.

— $V(aX + b) = a^2V(X)$.

— Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

— Covariance : définition, coefficient de corrélation.

— $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes, $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. (La réciproque est fausse.)

— $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$.

— Si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. (La réciproque est fausse.)

— Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\operatorname{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$.

— $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Lois usuelles finies (Rappels de PTSI)

— Loi uniforme. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.

— Loi de Bernoulli. Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.

— Loi binomiale. Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Séries génératrices

- Définition de la série génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi de X est entièrement caractérisée par G_X. Le rayon de convergence de G_X est ≥ 1.
- Lien série génératrice-espérance. Lien série génératrice-variance.
- Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Lois usuelles

- Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Série génératrice, espérance, variance. Caractérisation comme loi sans mémoire. Interprétation comme rang du 1er succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli de même paramètre p.
- Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Série génératrice, espérance, variance. Somme de variables suivant une loi de Poisson.

Résultats asymptotiques

- Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.
- Loi faible des grands nombres.