Feuille d'exercices n°15 premium

---

1. corrigé Soit S la surface d'équation

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-6=0$$

et les droites D et D' définies par les équations

$$D\left\{\begin{array}{rcl} x&=&2y+1\\ z&=&y+4\end{array}\right. \qquad D'\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+1&=&0\\ 2x-y+9&=&0.\end{array}\right.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.
2. Déterminer le ou les plans P tangents à S tels que D et D' soient parallèles à P. *Indication:* commencer par rechercher un vecteur normal à un tel plan P et préciser le ou les points de contact entre S et le ou les plans trouvés.

2. corrigé Soit Γ la courbe gauche de paramétrisation

$$\begin{cases} x(t)=\cos^3 t\\ y(t)=\sin^3 t\\ z(t)=\frac{3}{4}\cos 2t\end{cases} \qquad t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

1. Vérifier que Γ est régulière et pour tout t, donner un vecteur unitaire dirigeant la tangente à Γ au point $M(t)$.
2. En déduire que les tangentes à Γ font un angle fixe avec une direction que l'on précisera.

3. corrigé Soit S la surface d'équation

$$(x^2+y^2)z^2-y^2=0.$$

1. Vérifier que S contient l'axe Oz.
2. Démontrer que pour tout $M(x,y,z)$ de S non situé sur l'axe Oz, on a $|z|\leq 1$.
3. Soit $h\in[-1,1]$. Déterminer la nature de l'intersection S_h de S avec le plan d'équation $z=h$.
4. En déduire que S est une surface réglée.

4. corrigé Soit F une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs réelles, Σ la surface d'équation $F(x,y,z)=0$, supposée régulière et $\vec{u}=(a,b,c)$ un vecteur non nul.

1. On fixe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Calculer la dérivée de l'application

$$\varphi:\lambda\mapsto F(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c).$$

2. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

(a) Écrire une paramétrisation de la droite D_M passant par M et dirigée par $\vec{u}=(a,b,c)$.

(b) Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la droite D_M soit tangente à Σ est qu'il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi(\lambda)&=&0\\ \varphi'(\lambda)&=&0.\end{array}\right.$$

On appelle alors cylindre de direction $\vec{u}$ circonscrit à Σ l'ensemble des points M de l'espace tels que la droite D_M soit tangente à Σ.

On prend $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$ et $\vec{u}=(1,-1,-1)$.

3. En remarquant que φ est polynomiale de degré 2 en λ (faire le lien avec la notion de racine double), donner une équation cartésienne du cylindre S de direction $\vec{u}$ circonscrit à Σ.

5. corrigé Soit F une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs réelles et Σ la surface d'équation $F(x,y,z)=0$, supposée régulière.

1. On fixe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Calculer la dérivée de l'application

$$\varphi:\lambda\mapsto F(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

2. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

(a) Écrire une paramétrisation de la droite (OM).

(b) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la droite (OM) soit tangente à Σ est qu'il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi(\lambda)&=&0\\ \varphi'(\lambda)&=&0.\end{array}\right.$$

On appelle cône de sommet O circonscrit à Σ l'ensemble des points M de l'espace tels que la droite (OM) soit tangente à Σ.

On prend

$$F:(x,y,z)\longmapsto\frac{3}{2}x^2+2xy-z-1.$$

3. En remarquant que la fonction φ est polynomiale de degré 2 en λ (faire le lien avec la notion de racine double), donner une équation cartésienne du cône S de sommet O circonscrit à Σ.

1. énoncé

1. L'équation de S s'écrit aussi

$$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+z^2-6=0$$

i.e.

$$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=11,$$

et on en déduit que S est la sphère de centre $\Omega(2,1,0)$ et de rayon $\sqrt{11}$.

2. En écrivant

$$D\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2y+1\\ y &=& y\\ z &=& y+4,\end{array}\right.$$

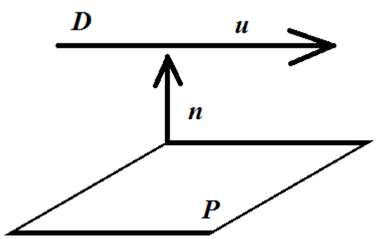
on a une représentation paramétrique de D au moyen du paramètre y et voit que D est dirigée par $\vec{u}=(2,1,1)$. Ensuite, L_2 dans les équations de D' donne $z=x+8$, que l'on reporte dans L_1, ce qui donne $y=2x+9$. Ainsi,

$$D'\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x\\ y=2x+9 & & \\ z &=& x+8,\end{array}\right.$$

et on a une représentation paramétrique de D' au moyen du paramètre x et voit que D' est dirigée par

$$\vec{u}'=(1,2,1).$$

D'autre part, en un point M d'une sphère centré en Ω, le plan tangent est normal au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ et comme un plan est parallèle à une droite si et seulement si un vecteur normal à ce plan est orthogonal à un vecteur directeur de cette droite,



un point de S en lequel le plan tangent à S est parallèle à D et à D' est un point M de coordonnées (x,y,z) tel que

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-4x-2y-6=0 \ (M\in S)\\ \langle\overrightarrow{\Omega M},\vec{u}\rangle=0 \text{ (vecteur normal au plan tangent } \perp\vec{u})\\ \langle\overrightarrow{\Omega M},\vec{u}'\rangle=0 \text{ (vecteur normal au plan tangent } \perp\vec{u}')\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-4x-2y-6=0\\ 2(x-2)+y-1+z=0\\ x-2+2(y-1)+z=0.\end{array}\right.$$

L_2-L_3 donne

$$y=x-1$$

et L_2 redonne

$$z=-3x+6.$$

En injectant ces expressions de y et z dans L_1, on obtient après simplifications

$$x^2-4x+3=0,$$

c'est à dire $x=1$ ou $x=3$. On obtient alors les deux points

$$A(1,0,3),\quad B(3,2,-3).$$

2. énoncé

1. On calcule

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t, -\frac{3}{2}\sin 2t)\\ &= (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t, -\frac{3}{\sin}t\cos t)\\ &= -3\cos t\sin t(\cos t, -\sin t, 1)\end{aligned}$$

et comme $\cos t\neq 0$, $\sin t\neq 0$ pour tout $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on en conclut que

$$f'(t)\neq 0$$

et donc que γ est régulière sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Le vecteur

$$\vec{u}(t)=(\cos t,-\sin t,1)$$

est colinéaire à $f'(t)$ et donc dirige également la tangente à γ en $M(t)$.

2. On a

$$\begin{aligned}\frac{\langle\vec{u}(t),\vec{k}\rangle}{\|\vec{u}(t)\|\times\|\vec{k}\|} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

qui est le cosinus de l'angle entre la tangente à γ en $M(t)$ (dirigée par $\vec{u}(t)$) et l'axe $(O;\vec{k})$ (dirigé par $\vec{k}$). Ainsi, les tangentes à γ font toutes un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe $(O;\vec{k})$.

3. énoncé

1. Les points $(0,0,z)$ vérifient bien l'équation de S.
2. On a donc
$$x^2+y^2\neq 0$$
et
$$z^2=\frac{y^2}{x^2+y^2}\leq 1.$$
3. On a
$$(x^2+y^2)h^2=y^2 \iff h^2x^2=(1-h^2)y^2.$$
Si $h\neq 0$,
$$x=\pm\sqrt{\frac{1-h^2}{h^2}}y$$
donc S_h est la réunion de
$$\begin{cases} x &= \sqrt{\frac{1-h^2}{h^2}}y \\ z &= h \end{cases}$$
et de
$$\begin{cases} x &= -\sqrt{\frac{1-h^2}{h^2}}y \\ z &= h \end{cases}$$
et c'est donc la réunion de deux droites. Si $h=0$, alors $y=0$ et
$$S_h:\begin{cases} y &= 0 \\ z &= 0, \end{cases}$$
qui est une droite. Donc S_h est constitué d'une droite ou de la réunion de deux droites.
4. Soit $M(x_0,y_0,z_0)$ un point de S.
   - Soit
   $$x_0=y_0=0$$
   et alors $M\in(Oz)$ qui est une droite incluse dans S,
   - soit $z_0\in[-1,1]$ et alors M appartient à une droite, voire deux droites, incluses dans S.

Donc tout point de S se trouve sur une droite entièrement incluse dans S, donc S est réglée.

4. énoncé

1. D'après la règle de la chaîne,
$$\varphi'(\lambda)=a\frac{\partial F}{\partial x}(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)+b\frac{\partial F}{\partial y}(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)+c\frac{\partial F}{\partial z}(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)$$
2. (a) Paramétrisation:
$$\lambda\mapsto\begin{cases} x+\lambda a \\ y+\lambda b \\ z+\lambda c. \end{cases}$$
(b) La droite D_M est tangente à Σ si et seulement s'il existe un point N de D_M qui appartient à Σ et tel que la droite D_M soit incluse dans le plan tangent à Σ en N. Or un point N de D_M est un point de coordonnées
$$(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$
   - L'existence d'un point de D_M qui appartient à Σ équivaut donc à l'existence d'un réel λ tel que
   $$F(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)=0$$
   i.e. tel que
   $$\varphi(\lambda)=0.$$
   - La droite D_M est incluse dans le plan tangent à Σ en l'un de ses points N si et seulement si le vecteur directeur $\vec{u}$ de D_M est orthogonal à un vecteur normal à ce plan; un tel vecteur normal est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(N)$.
   - Ainsi, la droite D_M est tangente à Σ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\varphi(\lambda)=0$ et tel que $\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)$, c'est à dire tel que
   $$\langle\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)\rangle=0$$
   i.e.
   $$a\frac{\partial F}{\partial x}(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)+b\frac{\partial F}{\partial y}(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)+c\frac{\partial F}{\partial z}(x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)=0$$
   c'est à dire précisément
   $$\varphi'(\lambda)=0.$$
   - En définitive, la droite D_M est tangente à Σ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\varphi(\lambda)=0$ et tel que $\varphi'(\lambda)=0$.
3. Un point $M(x,y,z)$ de l'espace appartient donc au cylindre de direction
$$\vec{u}=(1,-1,-1)$$
circonscrit à la surface Σ d'équation cartésienne $F(x,y,z)=0$ avec
$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$$
si et seulement s'il existe un réel λ tel que
$$\begin{cases} \varphi(\lambda) &= 0 \\ \varphi'(\lambda) &= 0 \end{cases}$$

où
$$\varphi(\lambda)=(x+\lambda)^2+(y-\lambda)^2-(z-\lambda)^2.$$
On voit que φ est un polynôme du second degré en λ. Rappelons la notion d'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme: une racine a d'un polynôme P est de multiplicité α si et seulement si
$$P(a)=P'(a)=\ldots=P^{(\alpha-1)}(a)=0 \quad \text{et} \quad P^{(\alpha)}(a)\neq 0.$$
En particulier, soit P un polynôme de degré 2; on sait qu'il possède une racine double si et seulement si son discriminant Δ est nul. On en déduit donc qu'il existe un réel a tel que
$$P(a)=0 \quad \text{et} \quad P'(a)=0$$
si et seulement si Δ est nul.
On en déduit donc ici qu'il existe un réel λ tel que
$$\begin{cases}\varphi(\lambda) &= 0\\ \varphi'(\lambda) &= 0\end{cases}$$
si et seulement si le discriminant Δ de
$$\varphi(\lambda)=(x+\lambda)^2+(y-\lambda)^2-(z-\lambda)^2-1$$
vaut 0. Or
$$(x+\lambda)^2+(y-\lambda)^2-(z-\lambda)^2-1=\lambda^2+2(x-y+z)\lambda+x^2+y^2-z^2-1$$
dont le discriminant Δ vaut
$$\begin{aligned}\Delta &= 4(x-y+z)^2-4(x^2+y^2-z^2-1)\\ &= 8z^2-8xy+8xz-8yz+4\end{aligned}$$
et la condition $\Delta=0$ d'appartenance de $M(x,y,z)$ à ce cylindre s'écrit donc
$$8z^2-8xy+8xz-8yz+4=0,$$
qui est alors une équation cartésienne du cylindre S de direction $\vec{u}$ circonscrit à Σ.

5. énoncé

1. D'après la règle de la chaîne,
$$\varphi'(\lambda)=x\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)+y\frac{\partial F}{\partial y}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)+z\frac{\partial F}{\partial z}(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

2. (a) Paramétrisation:
$$\lambda\mapsto\begin{cases}\lambda x\\ \lambda y\\ \lambda z.\end{cases}$$

(b) La droite D_M est tangente à Σ si et seulement s'il existe un point N de D_M qui appartient à Σ et tel que la droite D_M soit incluse dans le plan tangent à Σ en N. Or un point N de D_M est un point de coordonnées
$$(\lambda x,\lambda y,\lambda z),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

- L'existence d'un point de D_M qui appartient à Σ équivaut donc à l'existence d'un réel λ tel que
$$F(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=0$$
i.e. tel que
$$\varphi(\lambda)=0.$$
- La droite D_M est incluse dans le plan tangent à Σ en l'un de ses points N si et seulement si le vecteur directeur $\vec{u}$ de D_M est orthogonal à un vecteur normal à ce plan; un tel vecteur normal est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(N)$.
- Ainsi, la droite D_M est tangente à Σ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\varphi(\lambda)=0$ et tel que $\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$, c'est à dire tel que
$$\langle\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\rangle=0$$
i.e.
$$x\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)+y\frac{\partial F}{\partial y}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)+z\frac{\partial F}{\partial z}(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=0$$
c'est à dire précisément $\varphi'(\lambda)=0$.
- En définitive, la droite D_M est tangente à Σ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\varphi(\lambda)=0$ et tel que $\varphi'(\lambda)=0$.

3. Un point $M(x,y,z)$ de l'espace appartient donc au cône de sommet O circonscrit à la surface Σ d'équation cartésienne $F(x,y,z)=0$ avec
$$F(x,y,z)=\frac{3}{2}x^2+2xy-z-1$$
si et seulement s'il existe un réel λ tel que
$$\begin{cases}\varphi(\lambda) &= 0\\ \varphi'(\lambda) &= 0\end{cases}$$
où
$$\varphi(\lambda)=\frac{3}{2}(\lambda x)^2+2(\lambda x)(\lambda y)-\lambda z-1.$$
On voit que φ est un polynôme du second degré en λ. Rappelons la notion d'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme: une racine a d'un polynôme P est de multiplicité α si et seulement si
$$P(a)=P'(a)=\ldots=P^{(\alpha-1)}(a)=0 \quad \text{et} \quad P^{(\alpha)}(a)\neq 0.$$

En particulier, soit P un polynôme de degré 2; on sait qu'il possède une racine double si et seulement si son discriminant Δ est nul. On en déduit donc qu'il existe un réel a tel que

$$P(a) = 0 \quad \text{et} \quad P'(a) = 0$$

si et seulement si Δ est nul.
On en déduit donc ici qu'il existe un réel λ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(\lambda) & = & 0 \\ \varphi'(\lambda) & = & 0 \end{array} \right.$$

si et seulement si le discriminant Δ de

$$\varphi(\lambda) = \frac{3}{2}(\lambda x)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) - \lambda z - 1$$

vaut 0. Or

$$\frac{3}{2}(\lambda x)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) - \lambda z - 1 = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2xy\right)\lambda^2 - \lambda z - 1$$

dont le discriminant Δ vaut

$$\begin{aligned} \Delta &= z^2 - 4\left(\frac{3}{2}x^2 + 2xy\right) \\ &= 8z^2 - 6x^2 - 8xy \end{aligned}$$

et la condition $\Delta = 0$ d'appartenance de $M(x, y, z)$ à ce cylindre s'écrit donc

$$8z^2 - 6x^2 - 8xy = 0,$$

qui est alors une équation cartésienne du cône S de sommet O circonscrit à Σ.