Feuille d'exercices n°15

On se donne un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace et toutes les coordonnées seront définies dans ce repère.

Courbes de l'espace

1. corrigé Soit Γ la courbe gauche de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = \operatorname{ch} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner une représentation paramétrique de la tangente $T(t)$ à Γ en un point $M(t)$.
2. Démontrer que la tangente à Γ en $M(t)$ est tangente à la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=2$.

2. corrigé Soit la courbe gauche γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2+2t-1 \\ z(t) = t+1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que γ est plane, incluse dans un plan P dont on donnera une équation cartésienne.

Surfaces paramétrées, plan tangent

3. corrigé Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface S de paramétrisation

$$f : (u,v) \mapsto \begin{cases} uv \\ u^2+v^2 \\ u-v \end{cases}$$

au point de paramètres $u=1$ et $v=2$.

4. corrigé Soit la surface S de paramétrisation

$$f : (t,u) \mapsto \begin{cases} tu \\ t^2u \\ tu^2. \end{cases}$$

1. Déterminer des axes, plans et centre de symétrie de S.
2. On note γ_1 l'intersection de S avec le plan P_1 d'équation $x=y$. Donner une paramétrisation de γ_1 et préciser la nature de la projection de γ_1 sur le plan $x=0$.
3. Déterminer les points réguliers de S.
4. Soit γ_2 l'ensemble des points réguliers de S en lesquels le plan tangent est parallèle au vecteur $\vec{w}=(0,1,-1)$. Démontrer que γ_2 est une courbe régulière contenue dans un plan que l'on précisera.
5. Soit γ_3 l'ensemble des points réguliers de S en lesquels le plan tangent passe par le point $A(\frac{1}{3},0,0)$. Démontrer que γ_3 est une courbe régulière dont on donnera la nature.

Surfaces définies par une équation cartésienne

5. corrigé Soit S la surface d'équation $z^3+4x^2+2y^2=0$.

1. Déterminer des éléments de symétrie de S.
2. Quelle est la nature de la section de S par le plan d'équation $z=z_0$?
3. Quels sont les points réguliers de S?
4. Soit $A(0,0,-1)$. Quels sont les points réguliers de S en lesquels le plan tangent passe par A? Reconnaître cet ensemble de points.

6. corrigé On considère la surface Σ d'équation $x-8yz=0$.

1. Vérifier que Σ est régulière; déterminer en chacun de ses points une équation cartésienne du plan tangent à Σ.
2. Déterminer les points de Σ en lesquels le plan tangent contient la droite D définie par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} x+4z+2=0 \\ y=1. \end{cases}$$

Questions diverses

7. corrigé Soit la surface Σ d'équation cartésienne $z=x^2-y^2$.

1. Déterminer les points réguliers de Σ.
2. Démontrer que l'intersection de Σ avec son plan tangent au point $A(1,1,0)$ est constituée de deux droites, que l'on précisera.
3. On considère un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de cette surface et un vecteur non nul $\vec{u}=(a,b,c)$. À quelle condition portant sur (a,b,c) la droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ est-elle incluse dans Σ?
4. Combien existe-t-il de telles droites?
5. Quel est le lieu des points où ces droites sont orthogonales?

8. corrigé Préciser la position de la surface Σ d'équation cartésienne $z=\sin^2 x-y^2$ par rapport à son plan tangent au point O.

9. corrigé On considère les surfaces Σ et Σ' d'équations respectives $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2-y^2=3$ et le point $A(2,1,2)$.

1. Vérifier que $A\in\Sigma\cap\Sigma'$ et qu'il existe un voisinage V de A tel que $V\cap(\Sigma\cap\Sigma')$ soit un arc de courbe γ régulier en A. Préciser la tangente à γ en A.
2. Déterminer soigneusement les projections de γ sur les plans $x=0$, $y=0$ puis $z=0$.

Surfaces réglées

10. corrigé On considère la surface S d'équation cartésienne

$$z=\left(y-2\sqrt{2}x\right)y.$$

1. Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $y=\alpha$, où $\alpha\in\mathbb{R}$? Qu'en déduit-on pour S ?
2. Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $x=\beta$, où $\beta\in\mathbb{R}$?
3. Quelle est la nature de l'intersection Λ_γ de S avec un plan d'équation $z=\gamma$, où $\gamma\in\mathbb{R}$? Distinguer différents cas suivant les valeurs de γ.

11. corrigé Soit la courbe γ de paramétrisation

$$F : t\mapsto(\cos t,\sin t,t) \qquad t\in\mathbb{R}.$$

1. Déterminer une paramétrisation de la surface réglée S engendrée par les tangentes à la courbe γ.
2. Quels sont les points réguliers de S?
3. Vérifier que γ est tracée sur S.
4. Démontrer qu'en deux points réguliers de S situés sur une même génératrice, les plans tangents sont confondus.

12. corrigé On considère les courbes gauches

$$\gamma_1 : t\mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 0 \end{cases} \qquad \gamma_2 : u\mapsto \begin{cases} \frac{u^2}{3} \\ 0 \\ u. \end{cases}$$

1. Ces courbes sont-elles planes? Quelle en est leur nature?
2. Soit $M_1(t)$ le point de γ_1 de paramètre t et $M_2(u)$ le point de γ_2 de paramètre u. À quelle condition la droite $(M_1(t)M_2(u))$ est-elle parallèle au plan $y=z$?

3. Donner une représentation paramétrique de la surface S engendrée par les droites parallèles au plan $y = z$ et rencontrant les courbes γ_1 et γ_2.

4. Trouver une équation cartésienne de S.

13. corrigé Soit S la surface de paramétrisation

$$f : (u, v) \mapsto \begin{cases} u \cos v \\ u \sin v \\ \sin v \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi].$$

1. La surface S est-elle réglée?
2. Soit Σ la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$. Quelle est la nature de Σ?
3. Donner une paramétrisation de $L = S \cap \Sigma$.
4. Démontrer qu'en tout point de L, S et Σ ont le même plan tangent.

Surfaces de révolution

14. corrigé Soit la surface S paramétrée par

$$f : (\theta, \lambda) \mapsto \begin{cases} x = \cos\theta - \lambda \sin\theta \\ y = \sin\theta + \lambda\cos\theta \\ z = \lambda \end{cases}$$

où $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la surface S est réglée.
2. Déterminer une équation cartésienne de S. En déduire que S est une surface de révolution.
3. Rappeler le protocole de transformation de l'expression $a\cos\theta + b\sin\theta$ en $R\cos(\theta - \theta_0)$. Déterminer la nature des lignes coordonnées obtenues en fixant λ et retrouver le fait que S est une surface de révolution d'axe (Oz).

15. corrigé On se donne un réel $a > 0$ et une droite Δ.

1. Justifier que l'ensemble Σ des points M de l'espace tels que $d(M, \Delta) = a$ est une surface de révolution d'axe Δ, qu'on appelle cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon a.
2. Soit D la droite de l'espace passant par le point donné A et dirigé par le vecteur $\vec{u}$. En écrivant

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$$

où H est un point bien choisi, démontrer que pour tout point M de l'espace, la distance $d(M, D)$ du point M à la droite D est donnée par

$$d(M, D) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

3. Donner une équation cartésienne de Σ lorsque $a = 2$ et Δ est la droite définie par les équations $\begin{cases} y = -z \\ x = 1. \end{cases}$

16. corrigé Soit S la surface d'équation $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

1. Quelle est la nature de S?
2. Soit D la droite définie par les équations

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent à S est parallèle à D.

17. corrigé Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution Σ obtenue par rotation de la courbe γ définie par les équations

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

autour de l'axe Oz. En préciser une méridienne puis représenter Σ.

18. corrigé Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution Σ obtenue par rotation de la courbe γ de paramétrisation

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

autour de l'axe D défini par les équations $x = y = z$.

19. corrigé Soit Γ la courbe gauche de paramétrisation

$$\begin{cases} x(u) = \cos^3 u \\ y(u) = \sin^3 u \\ z(u) = \cos 2u, \end{cases} \qquad u \in [-\pi, \pi].$$

1. Vérifier l'identité $(\cos^2 t)^3 + (\sin^2 t)^3 = 1 - 3\cos^2 t \sin^2 t$.
2. Donner une représentation paramétrique de la surface S engendrée par la rotation de Γ autour de Oz.
3. Trouver une équation cartésienne d'une surface Σ contenant S.
4. Les deux surfaces coïncident-elles?

Mise en équation

20. corrigé Soit S la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$, P le plan déquation $x+y = 1$, A le point $(1, 1, 1)$ et $\gamma = S \cap P$.

1. Quelle est la nature de γ?
2. Déterminer une équation cartésienne du cône Σ de sommet A et de directrice γ, c'est à dire de la surface engendrée par les droites passant par le point A et qui rencontrent un point de γ.

21. corrigé Déterminer une équation cartésienne de la surface Σ obtenue par rotation de la droite $(O; \vec{k})$ autour de la droite D d'équations $x = y = z$.

22. corrigé Soit Σ la surface d'équation $x^2 + 2y^2 - z = 0$.

1. Soit C la section de Σ par le plan d'équation $x+2y+z = 0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la projection de C sur le plan $z = 0$.
2. Soit γ la section de Σ par le plan d'équation $x + y = 0$ et $\vec{u} = (1, 1, 0)$.

   (a) Soit $M(x, y, z)$; écrire une paramétrisation de la droite passant par M et dirigée par $\vec{u}$.

   (b) En déduire une équation cartésienne du cylindre S de direction $\vec{u}$ et de directrice γ, c'est à dire de la surface obtenue par réunion des droites dirigées par $\vec{u}$ et qui rencontrent la courbe γ (faire un dessin).
3. Retrouver une équation cartésienne de S en paramétrant γ.

23. corrigé Soit γ la courbe de l'espace définie par les équations

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de γ?
2. Trouver une paramétrisation de γ.
3. Le cylindre de directrice γ et de direction $\vec{u} = (1, 1, 1)$ est la surface S obtenue par réunion de toutes les droites parallèles à $\vec{u}$ et qui passent par un point de γ.

   (a) Déterminer une paramétrisation de S.

   (b) Déterminer les points réguliers de S.

   (c) Déterminer la nature de l'ensemble des points de S en lesquels le plan tangent est parallèle au vecteur $\vec{w} = (1, -1, 0)$.

   (d) Trouver une équation cartésienne de S.

   (e) Retrouver alors (c).
4. Déterminer une équation cartésienne de la projection C sur le plan (xOy) de l'intersection de S avec le plan $P : x + y + z = 0$.

5. Dans le plan, démontrer que les formules

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{array}\right.$$

définissent des formules de changement de repère entre repères orthonormés; comment se déduisent les axes du nouveau repère des axes de l'ancien repère?

6. En déduire la nature de C.

1. énoncé

1. On a
$$f'(t)=(-\sin t,\cos t,\operatorname{sh} t),$$
vecteur jamais nul car $\cos$ et $\sin$ ne s'annulent pas simultanément. Ainsi, Γ est régulière et au point $M(t)$, la tangente est dirigée par $f'(t)$; cette tangente admet donc la paramétrisation
$$\lambda\mapsto\begin{cases}\cos t-\lambda\sin t\\ \sin t+\lambda\cos t\quad \lambda\in\mathbb{R}.\\ \operatorname{ch} t+\lambda\operatorname{sh} t\end{cases}$$
2. Une droite est tangente à une sphère si et seulement si la distance de son centre à la droite égale le rayon de la sphère. On rappelle la formule donnant la distance d'un point B à une droite D, dirigée par un vecteur $\vec{u}$ et passant par un point a dans l'espace:
$$d(B,D)=\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$
On a donc
$$d(O,T(t))=\frac{\|\overrightarrow{M(t)O}\wedge\vec{f}'(t)\|}{\|f'(t)\|}.$$
En développant et en tenant compte de
$$\cos^2+\sin^2 t=1$$
et de
$$\operatorname{sh}^2 t+1=\operatorname{ch}^2 t,$$
on obtient
$$\begin{aligned}d(O,T(t)) &= \frac{\sqrt{2\operatorname{ch}^2 t}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t}}\\ &= \sqrt{2},\end{aligned}$$
qui est le rayon de la sphère; le résultat est prouvé.

2. énoncé En tout point $M(t)$ de γ, on a
$$y(t)-x(t)=2t-1.$$
Or
$$t=z(t)-1,$$
donc
$$2t-1=2z(t)-3$$
si bien qu'en tout point $M(t)$ de γ,
$$y(t)-x(t)=2z(t)-3,$$
ce qui démontre que tous les points de γ appartiennent au plan P d'équation
$$y-x=2z-3$$
i.e. γ est plane, incluse dans P.

3. énoncé On calcule
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= (v,2u,1)\\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) &= (u,2v,-1)\\ \vec{N}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\\ &= (-2u-2v,u+v,2v^2-2u^2).\end{aligned}$$
Le plan tangent à S au point $M(1,2)$ est par définition normal au vecteur
$$\vec{N}(1,2)=(-6,3,6)$$
et passe par le point M de S de paramètres $(1,2)$, qui est le point de coordonnées
$$(2,5,-1).$$
Un point $M(x,y,z)$ appartient donc au plan tangent si et seulement si
$$\overrightarrow{M(u,v)M}\perp\vec{N}(1,2)$$
et une équation du plan tangent est alors
$$\langle\overrightarrow{M(u,v)M},\vec{N}(1,2)\rangle=0,$$
c'est à dire
$$-6(x-2)+3(y-5)+6(z+1)=0,$$
c'est à dire
$$-6x+3y+6z+3=0.$$

4. énoncé

1. Les points
$$M(-t,u),\quad M(t,-u),\quad M(-t,-u)$$
sont les symétriques respectifs de $M(t,u)$ par rapport à: l'axe Oy, l'axe Oz, l'axe Ox, donc S est symétrique par rapport à ces trois axes. Enfin, Le point $M(u,t)$ est le symétrique de $M(t,u)$ par rapport au plan $y=z$ et S présente alors une symétrie par rapport à ce plan.

2. Le point $M(t,u)$ appartient à P_1 si et seulement si

$$tu = t^2 u,$$

ce qui se produit si et seulement si $u=0$, $t=0$ ou $t=1$. Les points correspondants sont: le point $(0,0,0)$, le point $(0,0,0)$ et les points

$$(u,u,u^2),\ u\in\mathbb{R}.$$

Ces derniers comportent le point $(0,0,0)$. Ainsi, γ_1 est constitué des points

$$(u,u,u^2),\ u\in\mathbb{R}.$$

La projection de γ_1 sur le plan $x=0$ est constitué des points

$$(0,u,u^2),\ u\in\mathbb{R}$$

et forment une parabole.

3. On calcule

$$\begin{aligned}\vec{n}(t,u) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\wedge\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)\\ &= (3t^2u^2,-tu^2,-t^2u)\end{aligned}$$

et $\vec{n}(t,u)\neq\vec{0}$ si et seulement si $t\neq 0$ et $u\neq 0$. Donc les points réguliers de S sont les points $M(t,u)$ avec $t\neq 0$ et $s\neq 0$.

4. Le plan tangent à S au point régulier $M(t,u)$, normal au vecteur $\vec{n}(t,u)$, est parallèle au vecteur $\vec{w}$ si et seulement si $\vec{n}(t,u)$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux donc si et seulement si

$$\langle\vec{n}(t,u),\vec{w}\rangle = 0 \iff -t^2u+t^2=0 \iff tu(-u+t)=0$$

et comme $t\neq 0, u\neq 0$ en un point régulier, ceci se produit si et seulement si $u=t$. Les points γ_2 obtenus sont les points

$$(t^2,t^3,t^3),\ t\neq 0.$$

Ils forment une courbe gauche régulière car la la dérivée de

$$t\mapsto (t^2,t^3,t^3)$$

est

$$(2t,3t^2,3t^2)\neq(0,0,0)$$

puisque $t\neq 0$. Enfin, tous les points de γ_2 satisfont

$$y=z,$$

ce qui démontre que γ_2 est plane, incluse dans le plan $y=z$.

5. Le plan tangent à S au point régulier $M(t,u)$, normal au vecteur $\vec{n}(t,u)$, passe par A si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{M(t,u)A}$ est orthogonal à $\vec{n}(t,u)$ donc si et seulement si (après simplification par le facteur tu):

$$\begin{aligned}3tu\left(tu-\frac{1}{3}\right)-u\times t^2-t\times u^2=0 &\iff t^2u^2-tu=0\\ &\iff tu(tu-1)=0\end{aligned}$$

donc si et seulement si $tu=1$ (car $t\neq 0, u\neq 0$ en un point régulier) c'est à dire

$$u=\frac{1}{t}.$$

Les points γ_3 obtenus sont les points de la courbe gauche

$$h: t\mapsto\left(1,t,\frac{1}{t}\right),\ t\neq 0$$

qui forment une courbe régulière puisque

$$h'(t)=\left(0,1,-\frac{1}{t^2}\right)\neq(0,0,0).$$

Tous les points de γ_3 sont dans le plan

$$x=1$$

et forment une hyperbole.

5. énoncé

1. Il est clair que

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in S &\iff M'(-x,-y,z)\in S\\ &\iff M''(-x,y,z)\in S\\ &\iff M'''(x,-y,z)\in S.\end{aligned}$$

Or M', M'', M''' sont respectivement le symétrique de M par rapport à l'axe Oz, le plan $x=0$, le plan $y=0$. Ainsi, S est symétrique par rapport à cet axe et ces deux plans.

2. Vide si $z_0>0$, singleton O si $z_0=0$, ellipse si $z_0<0$.

3. Tous les points sauf O.

4. Plan tangent à S en $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$8x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+3z_0^2(z-z_0)=0.$$

Il passe par A si et seulement si

$$-8x_0^2-4y_0^2+3z_0^2(1-z_0)=0.$$

En combinant avec l'équation de S, on obtient

$$3z_0^2+5z_0^3=0$$

i.e. $z_0=0$ ou $z_0=-\frac{3}{5}$. Mais z_0 donne le point O, non régulier donc à éliminer. Les points recherchés forment d'après (a) une ellipse.

6. énoncé

1. En notant
$$F(x,y,z)=x-8yz,$$
on a
$$\overrightarrow{\text{grad}}F(x,y,z)=(1,-8y,-8z)\neq(0,0,0)$$
ce qui démontre que tous les points de Σ sont réguliers. Soit $M(x,y,z)$ un point de Σ; un point $N(X,Y,Z)$ de l'espace appartient au plan tangent à Σ en M si et seulement si $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}}F(M)$ donc si et seulement si
$$X-x-8z(Y-y)-8y(Z-z)=0,$$
qui est une équation cartésienne (en X,Y,Z) du plan tangent à Σ en M.

2. La droite D admet la paramétrisation
$$t\mapsto\begin{cases}-2-4t\\1\\t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$
si bien que le plan tangent à Σ en $M(x,y,z)$ contient la droite D si et seulement si
$$\forall t\in\mathbb{R},\ -2-4t-x-8z(1-y)-8y(t-z)=0.$$
Attention, ce n'est pas une équation où t est l'inconnue; la question est de savoir pour quelles valeurs de x,y,z l'identité ci-dessus peut avoir lieu. Celle-ci est polynomiale en t; il s'agit donc, après développement, de déterminer x,y,z tels que
$$\forall t\in\mathbb{R},\ (-4-8y)t-2-x+16yz-8z=0,$$
ce qui se produit si et seulement si les coefficients de ce polynôme en t sont nuls, donc si et seulement si
$$\begin{cases}-4-8y=0\\-2-x+16yz-8z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=-\frac{1}{2}\\-x-2-16z=0\end{cases}$$
à quoi s'ajoute évidemment
$$x-8yz=0,$$
condition d'appartenance de $M(x,y,z)$ à Σ. On doit donc rechercher les réels x,y,z tels que
$$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}\\-x-2-16z=0\\x-8yz=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=-\frac{1}{2}\\-x-2-16z=0\\x+4z=0.\end{cases}$$
L_3+L_2 donne
$$z=-\frac{1}{6}$$
puis
$$x=\frac{2}{3}.$$
Finalement, on obtient un seul point: le point de coordonnées
$$\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right).$$

7. énoncé

1. Soit $F:(x,y,z)\mapsto x^2-y^2-z$. Alors
$$\overrightarrow{\text{grad}}F(x,y,z)=(2x,-2y,-1)\neq(0,0,0)$$
donc tous les points de Σ sont réguliers i.e. Σ est régulière.

2. On a $\overrightarrow{\text{grad}}F(A)=(2,-2,1)$ donc une équation du plan tangent P à Σ en A est
$$2(x-1)-2(y-1)-z=0\iff 2x-2y-z=0.$$
L'intersection $\Sigma\cap P$ est constituée des points $M(x,y,z)$ tels que
$$\begin{cases}z=x^2-y^2\\2x-2y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}z=x^2-y^2\\2x-2y-x^2+y^2=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}z=x^2-y^2\\(y-x)(-2+y+x)=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}z=(x-y)(x+y)\\y-x=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}z=(x-y)(x+y)\\y+x=2\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}z=0\\y-x=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}z=2x-2y\\y+x=2\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}y=x\\z=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}y=2-x\\z=-4+4x.\end{cases}$$
On obtient bien deux droites, la première passant par $(0,0,0)$ et dirigée par $(1,1,0)$, la seconde passant par $(0,2,-4)$ et dirigée par $(1,-1,4)$.

3. On a donc $z_0=x_0^2-y_0^2$. Une paramétrisation de la droite passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ est
$$t\mapsto\begin{cases}x_0+at\\y_0+bt\\(x_0^2-y_0^2)+ct\end{cases}$$

est la question est donc de savoir pour quelles valeurs de (a,b,c) tous les points de cette droite appartiennent à Σ i.e. pour quelles valeurs de (a,b,c) on a

$$\begin{array}{ll} & \forall t\in\mathbb{R},\ (x_0^2-y_0^2)+ct=(x_0+at)^2-(y_0+bt)^2 \\ \iff & \forall t\in\mathbb{R},\ (a^2-b^2)t^2+(2ax_0-2by_0-c)t=0, \end{array}$$

ce qui se produit, par identification des coefficients d'un polynôme, si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=0 \\ c=2ax_0-2by_0. \end{array}\right.$$

4. On obtient donc deux catégories de vecteurs:

$$\vec{u}=(a,a,2a(x_0-y_0)),\quad \vec{u}=(a,-a,2a(x_0+y_0))$$

et tous ceux de la première, resp. deuxième catégorie, sont colinéaires au vecteur

$$\vec{u}_1=(1,1,2(x_0-y_0)),$$

resp.

$$\vec{u}_2=(1,-1,2(x_0+y_0))$$

et engendrent donc la même droite. En définitive, il n'existe que deux droites passant par M_0 et incluses dans Σ, les droites Δ_1 et Δ_2 dirigées respectivement par $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$.

5. Ces deux droites sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}_1\perp\vec{u}_2$ donc si et seulement si

$$1-1+4(x_0-y_0)(x_0+y_0)=0 \iff x_0^2-y_0^2=0.$$

Les points correspondants de Σ sont les points

$$\left\{\begin{array}{l} x_0=y_0 \\ z_0=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x_0=-y_0 \\ z_0=0 \end{array}\right.$$

et constituent deux droites.

8. énoncé On note

$$g:(x,y)\mapsto \sin^2 x-y^2.$$

Le point $O=(0,0,0)$ est bien un point de Σ et on calcule

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &=& 2\sin x\cos x=\sin 2x, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &=& 2\cos 2x, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) &=& 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &=& -2y \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &=& -2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) &=& -2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &=& 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0) &=& 0. \end{array}$$

La matrice hessienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

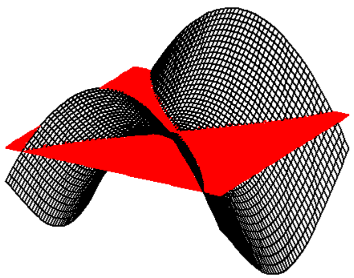
admet les valeurs propres 2 et -2; elles sont non nulles et de signe opposé et c'est pourquoi le plan tangent à Σ en O traverse localement Σ: O est un point col. Notons que Σ admettant l'équation cartésienne

$$z-g(x,y)=0,$$

P admet comme vecteur normal

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial x}(0,0),-\frac{\partial g}{\partial y}(0,0),1\right)=(0,0,1)$$

i.e. P est le plan $z=0$.



9. énoncé

1. $(2,1,2)$ satisfait bien les deux équations. En notant

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-9 \\ g(x,y,z) &= x^2-y^2-3, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y,z) = (2x,2y,2z) &\implies \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(A) = (4,2,4) \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}} g(x,y,z) = (2x,-2y,0) &\implies \overrightarrow{\mathrm{grad}} g(A) = (4,-2,0). \end{aligned}$$

On voit que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(A)$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}} g(A)$ sont non colinéaires; d'après le cours, $\Sigma \cap \Sigma'$ est localement au voisinage de A le support d'une courbe γ régulière en A dont la tangente est la droite formée par l'intersection des plans tangents respectifs P et P' en A à Σ et Σ'. Puisque $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(A)$ est normal à P et $\overrightarrow{\mathrm{grad}} g(A)$ est normal à P' en A, l'intersection $P \cap P'$ est dirigée par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(A) \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}} g(A) = (8,16,-16),$$

colinéaire à $(1,2,-2)$. Ainsi, la tangente à γ en A est la droite passant par A et dirigée par $(1,2,-2)$.

2.

- On obtient une équation cartésienne dans le plan $x=0$ du projeté de γ sur ce plan par élimination de x dans les équations de γ.

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=9 \\ \\ x^2-y^2=3 \end{array} \right. \overset{L_1-L_2}{\Rightarrow} 2y^2+z^2=6.$$

  Ainsi, le projeté de γ sur le plan $x=0$ est inclus dans la courbe d'équation

$$2y^2+z^2=6$$

  de ce plan, qui est une ellipse γ_1: ce projeté est donc a priori une portion d'ellipse.

- On obtient une équation cartésienne dans le plan $y=0$ du projeté de γ sur ce plan par élimination de y dans les équations de γ.

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=9 \\ \\ x^2-y^2=3 \end{array} \right. \overset{L_1+L_2}{\Rightarrow} 2x^2+z^2=12.$$

  Ainsi, le projeté de γ sur le plan $y=0$ est inclus dans la courbe d'équation

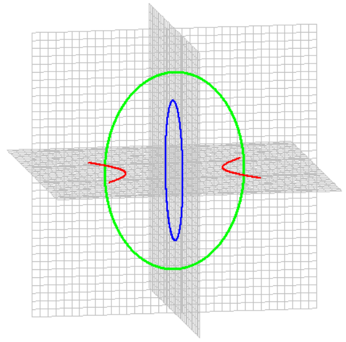
$$2x^2+z^2=12$$

  de ce plan, qui est une ellipse γ_2: ce projeté est donc a priori une portion d'ellipse.

- On obtient une équation cartésienne dans le plan $z=0$ du projeté de γ sur ce plan par élimination de z dans les équations de γ. Puisque z est "déjà éliminé" dans la deuxième équation, on en déduit que le projeté de γ sur le plan $z=0$ est inclus dans la courbe d'équation

$$x^2-y^2=3$$

  de ce plan, qui est une hyperbole γ_3: ce projeté est donc a priori une portion d'hyperbole.



Mais, dans chacun des trois cas, l'inclusion est-elle stricte ou a-t-on égalité entre le projeté et la courbe contenant ce projeté?

- Soit $M'(0,y,z)$ un point de l'ellipse γ_1 d'équation

$$2y^2+z^2=6$$

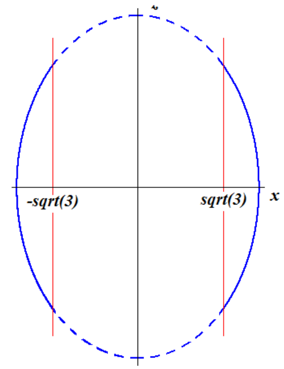
  du plan $x=0$; existe-t-il un point M de γ dont il est le projeté? Existe-t-il un réel x tel que le point $M(x,y,z)$ soit un point de γ?

  - Posons
  $$x=\sqrt{y^2+3}.$$
    On a alors
  $$x^2=y^2+3$$
    et donc
  $$x^2-y^2=3.$$
  - On a ensuite
  $$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= x^2-y^2+2y^2+z^2 \\ &= 3+6 \\ &= 9. \end{aligned}$$
  - Ces deux points prouvent que le point $M(x,y,z) \in \gamma$; et bien entendu, le projeté de M sur le plan $x=0$ est le point M'.

  On a donc prouvé que tout point de l'ellipse γ_1 est un point du projeté de γ sur le plan $x=0$. Ce projeté est donc l'ellipse γ_1 toute entière.

- Soit $M'(x,0,z)$ un point de l'ellipse γ_2 d'équation
$$2x^2+z^2=12$$
du plan $y=0$; existe-t-il un point M de γ dont il est le projeté? Existe-t-il un réel y tel que le point $M(x,y,z)$ soit un point de γ?
  - Si y existe, on a
  $$y^2=x^2-3$$
  ce qui implique que
  $$x^2-3\geq 0.$$
  - Donc si $M'(x,0,z)$ est un point de γ_2 tel que
  $$x^2<3,$$
  alors M' n'est le projeté d'aucun point de γ.
  - En revanche, si
  $$x^2-3\geq 0,$$
  posons
  $$y=\sqrt{x^2-3}.$$
  On a alors
  $$y^2=x^2-3$$
  et donc
  $$x^2-y^2=3.$$
  - On a ensuite
  $$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= -x^2+y^2+2x^2+z^2 \\ &= -3+12 \\ &= 9. \end{aligned}$$
  - Ces deux points prouvent que le point $M(x,y,z)\in\gamma$; et bien entendu, le projeté de M sur le plan $x=0$ est le point M'.

On a donc prouvé que tout point $M'(x,0,z)$ de l'ellipse γ_2 tel que m$x^2-3\geq 0$m est un point du projeté de γ sur le plan $y=0$ et que seuls les points de γ_2 tels que
$$x^2-3\geq 0$$
sont des points du projeté. Ce projeté est donc la portion de l'ellipse γ_2 telle que
$$x^2\geq 3$$
i.e. telle que $x\geq\sqrt{3}$ ou $x\leq-\sqrt{3}$.



- Soit $M'(x,y,0)$ un point de l'hyperbole γ_3 d'équation
$$x^2-y^2=3$$
du plan $z=0$; existe-t-il un point M de γ dont il est le projeté? Existe-t-il un réel z tel que le point $M(x,y,z)$ soit un point de γ?
  - Si z existe, on a
  $$z^2=9-x^2-y^2$$
  ce qui implique que
  $$9-x^2-y^2\geq 0$$
  i.e.
  $$x^2+y^2\leq 9.$$
  - Donc si $M'(x,y,0)$ est un point de γ_3 tel que
  $$x^2+y^2>9,$$
  alors M' n'est le projeté d'aucun point de γ.
  - En revanche, si
  $$x^2+y^2\leq 9,$$
  posons
  $$z=\sqrt{9-x^2-y^2}.$$
  On a alors
  $$z^2=9-x^2-y^2$$
  et donc
  $$x^2+y^2+z^2=9$$
  et comme a aussi
  $$x^2-y^2=3,$$
  le point $M(x,y,z)$ est un point de γ. et bien entendu, le projeté de M sur le plan $x=0$ est le point M'.

On a donc prouvé que tout point $M'(x,y,0)$ de l'hyperbole γ_3 tel que

$$x^2+y^2\leq 9$$

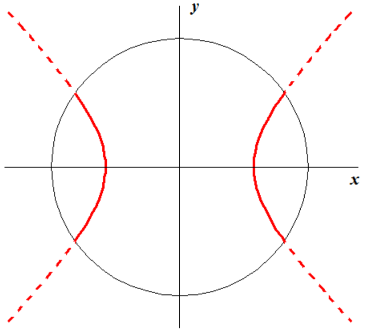
est un point du projeté de γ sur le plan $z=0$ et que seuls les points de γ_3 tels que

$$x^2+y^2\leq 9$$

sont des points du projeté. Ce projeté est donc la portion de l'hyperbole γ_3 telle que

$$x^2+y^2\leq 9$$

et donc qui sont intérieurs au cercle de centre O et de rayon 3 du plan $z=0$.



10. énoncé

1. Cette intersection est définie par les équations

$$\begin{cases} z=(y-2\sqrt{2}x)y \\ y=\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} z=\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha x \\ y=\alpha, \end{cases}$$

qui forment un système d'équations cartésiennes d'une droite que l'on notera D_α; cette droite D_α est par conséquent incluse dans S. D'autre part, soit un point M de S et (x_0,y_0,z_0) ses coordonnées. En posant $\alpha=y_0$, le point M est évidemment sur le plan d'équation $y=\alpha$ et appartient donc à la droite D_α. Ainsi, tout point de S se trouve sur l'une des droites D_α; cela prouve, par double inclusion, que S est la réunion des droites D_α et donc que S est une surface réglée.

2. Cette intersection est définie par les équations

$$\begin{cases} z=(y-2\sqrt{2}x)y \\ x=\beta \end{cases} \iff \begin{cases} z=y^2-2\sqrt{2}\beta y \\ x=\beta. \end{cases}$$

En écrivant

$$y^2-2\sqrt{2}\beta y=(y-\sqrt{2}\beta)^2-2\beta^2,$$

on a

$$z=y^2-2\sqrt{2}\beta y \iff z+2\beta^2=(y-\sqrt{2}\beta)^2$$

et en travaillant dans le repère d'origine $\Omega(0,\sqrt{2}\beta,-2\beta^2)$, cette intersection est définie par les équations

$$\begin{cases} Z=Y^2 \\ x=\beta \end{cases}$$

et on reconnaît l'équation d'une parabole du plan d'équation $x=\beta$.

3. Λ_γ est définie par les équations

$$\begin{cases} (y-2\sqrt{2}x)y=\gamma \\ z=\gamma. \end{cases}$$

$(y-2\sqrt{2}x)y=\gamma \iff -2\sqrt{2}xy+y^2=\gamma$ est l'équation d'une conique dont la partie quadratique a pour matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$: en posant $X=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$, on a

$${}^tXAX=\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}y \\ -\sqrt{2}x+y\end{pmatrix}=-\sqrt{2}xy+y^2.$$

Après calculs, ses valeurs propres sont -1 et 2 et une base orthonormée de vecteurs propres de A est $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ avec

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2},1\right),\quad \vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1,-\sqrt{2}\right).$$

On a alors $D=P^{-1}AP={}^tPAP$ avec

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad P=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

et en posant $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}$, on a $X=PX'$ et alors

$${}^tXAX={}^t(PX')AX'={}^tX'\,{}^tPAPX'={}^tX'\,DX'=\begin{pmatrix} x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x' \\ 2y'\end{pmatrix}=-x'^2+2y'^2.$$

En notant O_γ le point $(0,0,\gamma)$, la conique a pour équation

$$-x'^2+2y'^2=\gamma$$

dans le repère $(O_\gamma,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ du plan d'équation $z=\gamma$. Ainsi, Λ_γ est:

- une hyperbole d'axe focal $(O_\gamma,\vec{e}_1)$ du plan d'équation $z=\gamma$ si $\gamma<0$,
- une hyperbole d'axe focal $(O_\gamma,\vec{e}_2)$ du plan d'équation $z=\gamma$ si $\gamma>0$.

Lorsque $\gamma=0$, la conique est la réunion des deux droites du plan d'équation $z=\gamma$ d'équations respectives

$$x'=\sqrt{2}y',\quad x'=-\sqrt{2}y'.$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}x+y\right) \\ y'=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\sqrt{2}y\right), \end{cases}$$

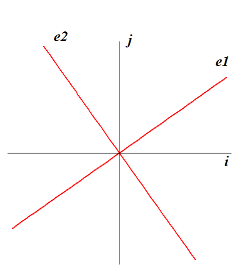
on a

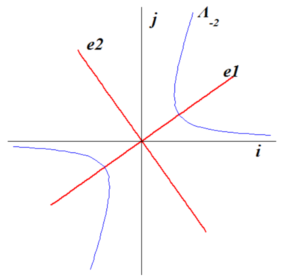
$$x' = \sqrt{2}y' \iff \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}x + y\right) = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{2}y\right) \iff y = 0$$
$$x' = -\sqrt{2}y' \iff \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}x + y\right) = -\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{2}y\right) \iff y = \sqrt{2}x.$$

Ainsi lorsque $\gamma = 0$, Λ_γ est la réunion des droites d'équations cartésiennes respectives

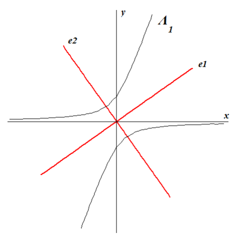
$$\begin{cases} y = 0 \\ z = \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ z = \gamma. \end{cases}$$

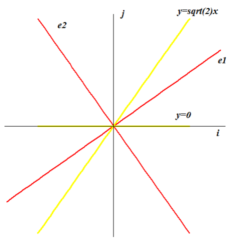
(f) Les axes portés par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ et l'hyperbole Λ_{-2} d'axe focal (O_γ, e_1):





l'hyperbole Λ_1 d'axe focal (O_γ, e_2) et la réunion des deux droites qui constituent Λ_0:





11. énoncé

1. On a

$$\begin{aligned} \vec{n}(u,v) &= (-v\sin u, v\cos u, -v) \\ &= \vec{0} \\ &\iff v = 0 \end{aligned}$$

donc les points réguliers sont les points avec $v \neq 0$.

2. Oui, car à u fixé, la ligne coordonnée

$$L_u : v \mapsto f(u,v)$$

est une droite.

3. Oui:

$$F(t) = f(t,0).$$

4. La tangente à γ au point $F(t)$ est la droite dirigée par

$$F'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

et passant par

$$F(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Elle possède donc la paramétrisation

$$v \mapsto \begin{cases} \cos t - v\sin t \\ \sin t + v\cos t \\ t + v. \end{cases}$$

Les tangentes à γ sont donc les lignes coordonnées de S obtenues en fixant le premier paramètre. La réunion de ces tangentes forme donc S.

12. énoncé

1. Ce sont deux paraboles, la première dans le plan $z = 0$ et la seconde dans le plan $y = 0$.
2. $(0,1,-1)$ étant normal au plan $y = z$, $(M_1(t)M_2(u))$ est parallèle au plan $y = z$ si et seulement si $\overrightarrow{M_1(t)M_2(u)} \perp (0,1,-1) = 0 \iff t + u = 0$.
3. Il s'agit donc de la surface engendrée par les droites $(M_1(t)M_2(-t))$. Une telle droite passe par $M_1(t)$ et est dirigée par $\overrightarrow{M_1(t)M_2(-t)} = (-\frac{1}{6}t^2, -t, -t)$ et admet donc la paramétrisation $u \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6}ut \\ t - ut \\ -ut \end{cases}$. En faisant varier u et t, on obtient une paramétrisation de S.
4. En un point de S, on a $y - z = t$ d'où $x = \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{6}z$, qui est donc une équation cartésienne de S.

13. énoncé

1. À v fixé, la ligne coordonnée

$$u \mapsto f(u,v)$$

est une droite, donc S est réglée.

2. Sphère de centre $(0,1,0)$ et de rayon 1.
3. Les points de $S \cap \Sigma$ sont les points $M(u,v)$ de S tels que

$$u^2 + \sin^2 v - 2u\sin v = 0,$$

c'est à dire

$$(u - \sin v)^2 = 0$$

i.e. $u = \sin v$. Les points de $S \cap \Sigma$ sont donc les points de coordonnées

$$(\sin v \cos v, \sin^2 v, \sin v)$$

donc

$$v \mapsto (\sin v \cos v, \sin^2 v, \sin v)$$

est une paramétrisation de $S \cap \Sigma$.

4. On calcule

$$\begin{aligned} \vec{n}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \\ &= (\sin v \cos v, -\cos^2 v, u). \end{aligned}$$

En un point de L, la normale au plan tangent à S est dirigée par

$$\vec{n}(\sin v, \sin v) = (\sin v \cos v, -\cos^2 v, \sin v)$$

et la normale à Σ est dirigée par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(\sin v \cos v, \sin^2 v, \sin v),$$

où

$$F : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2y,$$

d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x,y,z) = (2x, 2y-2, 2z)$$

et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}} F(\sin v \cos v, \sin^2 v, \sin v) &= (2 \sin v \cos v, 2\sin^2 v - 2, 2 \sin v) \\ &= 2(\sin v \cos v, -\cos^2 v, \sin v). \end{aligned}$$

Les normales ont la même direction donc les plans sont confondus.

14. énoncé

1. À θ fixé, la ligne coordonnée

$$\lambda \mapsto f(\theta, \lambda)$$

est une droite, donc S est réglée puisque S est engendrée par ses lignes coordonnées.

2. En tout point de S, on a

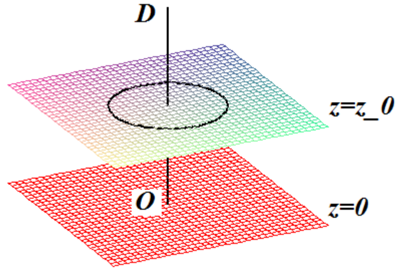
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 + \lambda \\ &= 1 + z^2. \end{aligned}$$

Démontrons que S est une surface de révolution d'axe $(O; \vec{k})$.

- Un plan P orthogonal à l'axe $(O, \vec{k})$ est un plan d'équation $z = z_0$ où z_0 est une constante. La section de Σ par P est alors définie par les équations

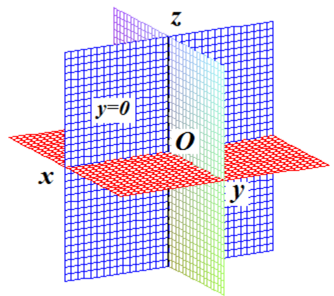
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = z_0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 + z_0^2 \\ z = z_0. \end{array} \right.$$

Il est clair que cette section est le cercle de rayon $\sqrt{1 + z_0^2}$ centré en $(0, 0, z_0)$ du plan P.



- La section de Σ par tout plan orthogonal à l'axe $(O, \vec{k})$ est donc un cercle et donc Σ est par définition une surface de révolution d'axe $(O, \vec{k})$.

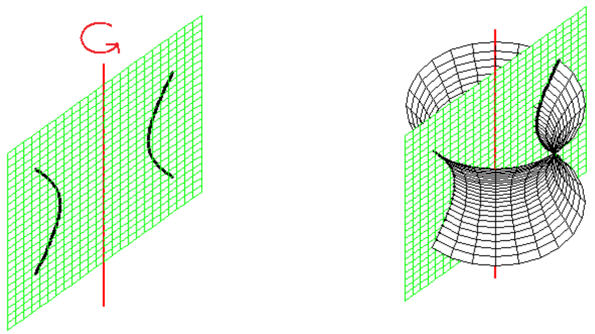
- Une méridienne est obtenue en coupant Σ par un plan contenant $(O, \vec{k})$. Un tel plan est par exemple le plan d'équation $y = 0$:



ce qui donne la méridienne γ définie par les équations

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 - z^2 = 1 \\ y = 0. \end{array} \right.$$

Cette méridienne est une hyperbole équilatère d'axe focal Ox et la surface Σ est appelée hyperboloïde de révolution:



3. En posant $R = \sqrt{a^2+b^2}$ (et en supposant bien entendu $(a,b) \neq (0,0)$ sinon il n'y a rien à transformer), on écrit

$$a\cos\theta + b\sin\theta = R\left(\frac{a}{R}\cos\theta + \frac{b}{R}\sin\theta\right)$$

et dans la mesure où

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \left(\frac{b}{R}\right)^2 &= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1,\end{aligned}$$

il existe un réel θ_0 tel que

$$\frac{a}{R} = \cos\theta_0, \qquad \frac{b}{R} = \sin\theta_0$$

si bien que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}a\cos\theta + b\sin\theta &= R\left(\frac{a}{R}\cos\theta + \frac{b}{R}\sin\theta\right) \\ &= R\big(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\big) \\ &= R\cos(\theta-\theta_0).\end{aligned}$$

Fixons à présent λ et notons Γ_λ la ligne coordonnée

$$\theta \longmapsto \begin{cases} x = \cos\theta - \lambda\sin\theta \\ y = \sin\theta + \lambda\cos\theta \\ z = \lambda. \end{cases}$$

En suivant le protocole précédent et en notant

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{1+(-\lambda)^2} \\ &= \sqrt{1+\lambda^2},\end{aligned}$$

il existe un réel θ_0 tel que

$$\frac{1}{R} = \cos\theta_0 \qquad -\frac{\lambda}{R} = \sin\theta_0$$

si bien que

$$\begin{aligned}\cos\theta - \lambda\sin\theta &= R\left(\frac{1}{R}\cos\theta - \frac{\lambda}{R}\sin\theta\right) \\ &= R\big(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\big) \\ &= R\cos(\theta-\theta_0)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\theta + \lambda\cos\theta &= R\left(\frac{1}{R}\sin\theta + \frac{\lambda}{R}\cos\theta\right) \\ &= R\big(\sin\theta\cos\theta_0 - \cos\theta\sin\theta_0\big) \\ &= R\sin(\theta-\theta_0).\end{aligned}$$

Ainsi, une paramétrisation de Γ_λ est

$$\theta \longmapsto \begin{cases} x = R\cos(\theta-\theta_0) \\ y = R\sin(\theta-\theta_0) \\ z = \lambda \end{cases}$$

et on voit clairement que Γ_λ est le cercle du plan d'équation

$$z = \lambda$$

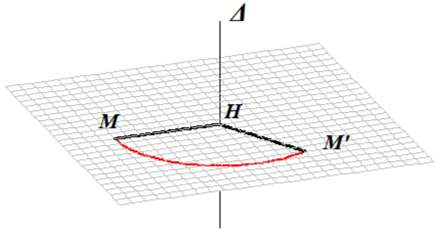
centré en $(0,0,\lambda)$ et de rayon R. Ce cercle a pour axe l'axe (Oz), ce qui met en évidence le fait que la section de S par un plan quelconque orthogonal à l'axe (Oz) est un cercle. C'est une autre preuve que S est une surface de révolution d'axe Oz.

15. énoncé

1. Soit M un point de Σ, H son projeté orthogonal sur Δ et r une rotation d'axe Δ. On a

$$\begin{aligned}a &= d(M,\Delta) \\ &= MH.\end{aligned}$$

Soit $M' = r(M)$.



Alors les points M, M', H sont dans le plan passant par M et normal à Δ et le projeté orthogonal de M' sur Δ est encore le point H: c'est pourquoi

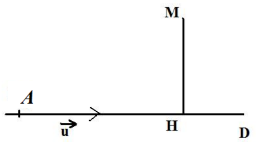
$$d(M', \Delta) = a,$$

ce qui démontre que M' appartient à Σ. Ainsi, Σ est invariante par toute rotation d'axe Δ et c'est pourquoi Σ est une surface de révolution d'axe Δ.

2. Par définition, il s'agit de calculer la distance

$$HM = \|\overrightarrow{HM}\|,$$

où H est le projeté orthogonal de M sur D.



On peut la calculer sans avoir à trouver le point H en procédant ainsi:

- on écrit

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} &= \vec{u} \wedge (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \\ &= \vec{u} \wedge \overrightarrow{AH} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM} \\ &= \vec{0} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM} \text{ (puisque les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont liés)} \\ &= \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}.\end{aligned}$$

- En prenant la norme des deux membres, il vient:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\| &= \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}\| \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\overrightarrow{HM}\|,\end{aligned}$$

  du fait que $\vec{u} \perp \overrightarrow{HM}$.

- D'où

$$\begin{aligned}d(M, D) &= \|\overrightarrow{HM}\| \\ &= \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}.\end{aligned}$$

3. La droite

$$\Delta : \begin{cases} y = -z \\ x = 1 \end{cases}$$

passe par le point $A(1, 0, 0)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u} = (0, -1, 1)$.
En utilisant la formule

$$d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Soit $M(x, y, z)$; on calcule alors

$$d(M, \Delta) = \frac{\sqrt{2(x-1)^2 + (y-z)^2}}{\sqrt{2}}$$

si bien que, après élévation au carré,

$$M \in \Sigma \iff 2(x-1)^2 + (y-z)^2 = 8,$$

qui est alors une équation cartésienne de Σ.

16. énoncé

1. C'est une surface de révolution d'axe (Oz).

2. D est dirigée par $\vec{u} = (1, -2, 0)$ et le plan tangent à S en l'un de ses points est normal à

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z) = (-2x, -2y, 2z),$$

qui est donc parallèle à $\vec{u}$ si et seulement si

$$\langle \vec{u}, \overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, z) \rangle = 0,$$

ce qui donne

$$x = 2y.$$

Les points obtenus sont donc ceux vérifiant

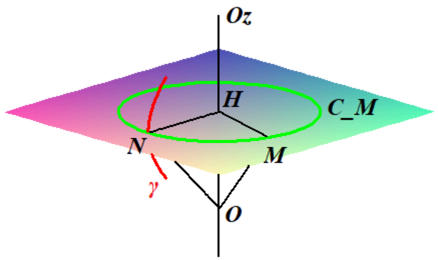
$$\begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 = 1 \\ x = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 - 5y^2 = 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

qui forment une hyperbole (courbe plane qui se projette sur yOz selon une hyperbole).

17. énoncé L'axe Oz est la droite passant par O et dirigée par $\vec{k}$. Un point M de l'espace appartient à Σ si et seulement si le cercle C_M,

- qui est le cercle d'axe Oz passant par M
- et dont le centre est le projeté orthogonal H de M sur D,

passe par un point N de γ:



Ceci se produit si et seulement s'il existe un point N de γ appartenant au plan normal à Oz passant par M et tel que $HM^2 = HN^2$, donc si et seulement si

- $\langle \overrightarrow{MN}, \vec{k} \rangle = 0$, condition assurant l'orthogonalité de (MN) avec Oz et donc le fait que le point N se trouve sur le plan normal à Oz passant par M,
- $OM^2 = ON^2$ (ce qui équivaut à $HM^2 = HN^2$ en appliquant Pythagore dans les triangles rectangles OHM et OHN), condition assurant que N appartient au cercle C_M.

Ainsi, le point M de coordonnées (x, y, z) appartient à Σ si et seulement s'il existe un point N de l'espace, de coordonnées (X, Y, Z), tel que

$$\begin{cases} N \in \gamma \\ \langle \overrightarrow{MN}, \vec{k} \rangle = 0 \\ OM^2 = ON^2 \end{cases} \iff \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} \begin{cases} X^2 - Y^2 - 4X + 2 = 0 \\ X + Z = 1 \end{cases} \\ Z - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \end{cases}$$

L_2 combinée avec L_3 donne

$$X = 1 - Z = 1 - z$$

et L_1 donne alors

$$Y^2 = X^2 - 4X + 2 = (1-z)^2 - 4(1-z) + 2.$$

Tout cela dans L_4 donne

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1-z)^2 + (1-z)^2 - 4(1-z) + 2 + z^2$$

et après simplifications:

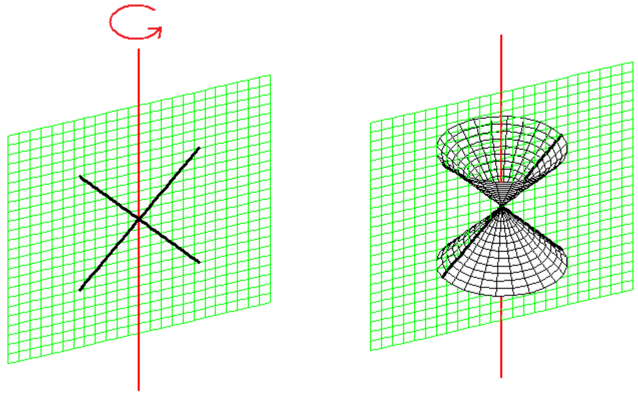
$$x^2 + y^2 = 2z^2,$$

qui est donc une équation cartésienne de Σ.
Une méridienne est obtenue en coupant Σ par un plan contenant $(O, \vec{k})$. Un tel plan est par exemple le plan d'équation $y = 0$, ce qui donne la méridienne γ définie par les équations

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z^2 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2z^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{2} z \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{2} z \\ y = 0 \end{cases}$$

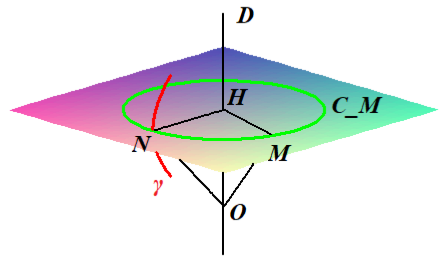
Cette méridienne est constituée de deux droites et la surface Σ, obtenue par rotation de ces deux droites autour de l'axe Oz, est appelée cône de révolution:



18. énoncé L'axe D est la droite passant par O et dirigée par $\vec{u} = (1,1,1)$. Un point M de l'espace appartient à Σ si et seulement si le cercle C_M,

- qui est le cercle d'axe Oz passant par M
- et dont le centre est le projeté orthogonal H de M sur D,

passe par un point N de γ:



Ceci se produit si et seulement s'il existe un point N de γ appartenant au plan normal à D passant par M et tel que $HM^2 = HN^2$, donc si et seulement si

- $\langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle = 0$, condition assurant l'orthogonalité de (MN) avec D et donc le fait que le point N se trouve sur le plan normal à D passant par M,
- $OM^2 = ON^2$ (ce qui équivaut à $HM^2 = HN^2$ en appliquant Pythagore dans les triangles rectangles OHM et OHN), condition assurant que N appartient au cercle C_M.

Ainsi, le point M de coordonnées (x, y, z) appartient à Σ si et seulement s'il existe un point de γ, donc un réel t tel que le point $N(t)$ de paramètre t de γ, donc de coordonnées $(t, t^2, -t)$, tel que

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{MN(t)}, \vec{u} \rangle = 0 \\ OM^2 = ON(t)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (t - x) + (t^2 - y) + (-t - z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + t^4 + t^4. \end{cases}$$

L_1 donne
$$t^2 = x+y+z$$
qui dans L_4 donne
$$x^2+y^2+z^2 = x+y+z+(x+y+z)^2+(x+y+z)^2$$
et après simplifications:
$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)+x+y+z=0,$$
qui est donc une équation cartésienne de Σ.

19. énoncé

1. On utilise
$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+ab+b^2)$$
ce qui donne
$$\begin{aligned}(\cos^2 t)^3+(\sin^2 t)^3 &= (\cos^2 t+\sin^2 t)\big(\cos^4 t-\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t\big)\\ &= \cos^4 t-\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t\end{aligned}$$
et puisque
$$\begin{aligned}\cos^4 t+\sin^4 t &= (\cos^2 t+\sin^2 t)^2-2\cos^2 t\sin^2 t\\ &= 1-2\cos^2 t\sin^2 t,\end{aligned}$$
on obtient bien
$$(\cos^2 t)^3+(\sin^2 t)^3 = 1-3\cos^2 t\sin^2 t.$$

2. Le principe est naturel.

- La surface de révolution S engendrée par la rotation de γ autour de Oz est constituée de l'ensemble des images des points de γ par toutes les rotations r_θ, θ parcourant $[0,2\pi]$ (ce qui permet d'obtenir toutes les rotations autour de Oz).
- Ainsi, les points de S sont les points $r_\theta(M)$, M parcourant γ et θ parcourant $[0,2\pi]$.
- La surface S est donc constituée des points $r_\theta(M(u))$, θ parcourant $[0,2\pi]$ et u parcourant $[-\pi,\pi]$.
- Ainsi, une paramétrisation de S
$$f:(u,\theta)\mapsto(\cos^3 u\cos\theta-\sin^3 u\sin\theta, \cos^3 u\sin\theta+\sin^3 u\cos\theta, \cos 2u).$$

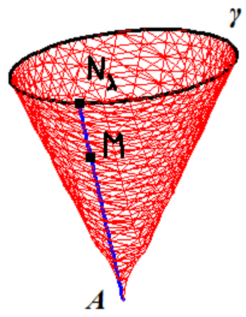
3. En tout point de S de paramètres ,(u,θ), on a alors
$$\begin{aligned}x^2(u,\theta)+y^2(u,\theta) &= \cos^6 u+\sin^6 u\\ &= 1-3\cos^2 u\sin^2 u.\end{aligned}$$
Mais
$$\cos u\sin u = \frac{1}{2}\sin 2u$$
d'où
$$\cos^2 u\sin^2 u = \frac{1}{4}\sin^2 2u.$$
Ainsi,
$$x^2(u,\theta)+y^2(u,\theta) = 1-\frac{3}{4}(1-z^2(u,\theta)$$
et
$$x^2+y^2 = 1-\frac{3}{4}(1-z^2)$$
est l'équation cartésienne d'une surface contenant S.

4. Sur la surface
$$\Sigma : x^2+y^2-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}z^2,$$
z peut prendre toute valeur réelle. £ar exemple, tout point de la forme
$$(\frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{1}{2}, t)$$
appartient à Σ) alors que la cote des points de S est entre -1 et 1. Donc les deux surfaces ne coïncident pas.

20. énoncé

1. Cercle.

2. Un point $M(x,y,z)$ appartient à Σ si et seulement si la droite (AM) rencontre γ, dont une paramétrisation est
$$\lambda\mapsto\begin{cases}1+\lambda(x-1)\\ 1+\lambda(y-1)\\ 1+\lambda(z-1),\end{cases}$$
donc si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que le point
$$N_\lambda(1+\lambda(x-1), 1+\lambda(y-1), 1+\lambda(z-1))$$
satisfasse les équations de γ i.e.
$$\begin{cases}(1+\lambda(x-1))^2+(1+\lambda(y-1))^2+(1+\lambda(z-1))^2 &= 1\\ 1+\lambda(x-1)+1+\lambda(y-1) &= 1.\end{cases}$$



De L_2 on tire

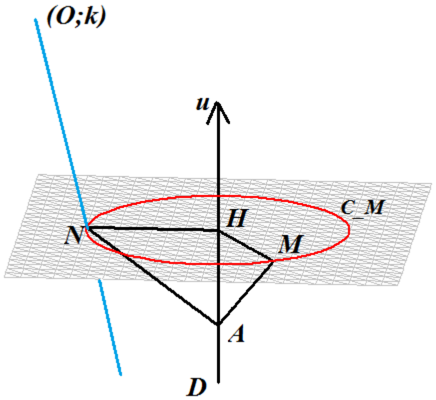
$$\lambda = -\frac{1}{x+y-2}$$

et L_1 donne après simplifications:

$$(y-1)^2 + (x-1)^2 + (x+y-z-1)^2 = (x+y-2)^2,$$

qui est donc une équation cartésienne de S.

21. énoncé *Première méthode.* On applique le principe vu en cours: soit A un point fixé de D et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D; alors un point M de l'espace appartient à Σ si et seulement si le cercle C_M (cercle d'axe D passant par M et dont le centre est le projeté orthogonal H de M sur D), passe par un point N de l'axe $(O;\vec{k})$:



- Ceci se produit si et seulement s'il existe un point N de l'axe $(O;\vec{k})$ appartenant au plan normal à D passant par M et tel que

  $$HM^2 = HN^2,$$

  donc si et seulement si

  $$\langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle = 0$$

  et

  $$HM^2 = HN^2$$

  et donc

  $$AM^2 = AN^2$$

  (en appliquant Pythagore dans les triangles rectangles AHM et AHN).
- On prend $A = (0,0,0)$ et $\vec{u} = (1,1,1)$.
- Ainsi,

$$M \in \Sigma \iff \exists N \,/\, \begin{cases} N \in (O;\vec{k}) \\ \langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle = 0 \\ AM^2 = AN^2 \end{cases}$$

$$M(x,y,z) \in \Sigma \iff \exists N(X,Y,Z) \,/\, \begin{cases} X = 0, Y = 0 \\ \langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle = 0 \\ AM^2 = AN^2 \end{cases}$$

$$M(x,y,z) \in \Sigma \iff \exists Z \in \mathbb{R} \,/\, \begin{cases} -x - y + (Z - z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = Z^2. \end{cases}$$

- L_1 donne

  $$Z = x + y + z$$

  et en conséquence L_2 s'écrit

  $$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2,$$

  qui est donc une équation cartésienne de Σ.

Deuxième méthode (plus longue). On traduit analytiquement une rotation d'axe D; on calcule alors l'image d'un point de l'axe $(O;\vec{k})$ par une telle rotation. Soit θ un angle et r_θ la rotation d'angle θ et d'axe orienté et dirigé par le vecteur

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

(vecteur directeur unitaire de D).

- Dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ l'image d'un point M de l'espace de coordonnées (X,Y,Z) dans $\mathbb{R}$ a pour coordonnées

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y\cos\theta - Z\sin\theta \\ Y\sin\theta + Z\cos\theta \end{pmatrix}$$

  i.e. son image a pour coordonnées

  $$(X, Y\cos\theta - Z\sin\theta, Y\sin\theta + Z\cos\theta)$$

  dans $\mathcal{R}$.

- Un tel repère s'obtient ainsi:
  - on choisit
$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),$$
    vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$.
  - On calcule
$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u}\wedge\vec{v}\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).\end{aligned}$$
  - $\mathcal{R} = (O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est alors un repère orthonormé direct.
  - La matrice de passage de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est alors
$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$
- Maintenant, soit M un point de l'espace de coordonnées (x,y,z) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. D'après les formules de changement de base,
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\times\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = P^{-1}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
  et comme P est une matrice orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$ et donc
$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$
- Un point $(0,0,t)$ de l'axe $(O;\vec{k})$ a donc pour coordonnées
$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{t}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{-2t}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$
  dans $\mathcal{R}$. Son image par r_θ a donc pour coordonnées
$$\left(\frac{t}{\sqrt{3}},\frac{2t\sin\theta}{\sqrt{6}},\frac{-2t\cos\theta}{\sqrt{6}}\right)$$
  dans $\mathcal{R}$.
- Il a donc pour coordonnées
$$P\times\begin{pmatrix}\frac{t}{\sqrt{3}}\\ \frac{2t\sin\theta}{\sqrt{6}}\\ \frac{-2t\cos\theta}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\left(\frac{1}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\cos\theta}{3}\right)\\ t\left(\frac{1}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\cos\theta}{3}\right)\\ t\left(\frac{1}{3}+\frac{2\cos\theta}{3}\right)\end{pmatrix}$$
  dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
- La surface Σ est l'ensemble des images de tous les points de l'axe $(O;\vec{k})$ par toutes les rotations d'axe D. Ce sont donc tous les points de coordonnées
$$\left(t\left(\frac{1}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\cos\theta}{3}\right),t\left(\frac{1}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\cos\theta}{3}\right),t\left(\frac{1}{3}+\frac{2\cos\theta}{3}\right)\right)$$
  avec $t\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi]$. En d'autres termes, l'application
$$f:(t,\theta)\mapsto\left(t\left(\frac{1}{3}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\cos\theta}{3}\right),t\left(\frac{1}{3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\cos\theta}{3}\right),t\left(\frac{1}{3}+\frac{2\cos\theta}{3}\right)\right),$$
  définie sur $D=\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, est une paramétrisation de Σ.
- Remarquons qu'en tout point $(x(t,\theta),y(t,\theta),z(t,\theta))$ de cette paramétrisation, on a
$$(x(t,\theta)+y(t,\theta)+z(t,\theta))^2 = t^2$$
  et par un calcul facile,
$$x(t,\theta)^2+y(t,\theta)^2+z(t,\theta)^2 = t^2$$
  si bien que
$$x(t,\theta)^2+y(t,\theta)^2+z(t,\theta)^2 = (x(t,\theta)+y(t,\theta)+z(t,\theta))^2.$$
  Ces points satisfont l'équation cartésienne obtenue avec la première méthode.

22. énoncé

1. L_1+L_2 donne
$$x^2+x+2y^2+2y=0,$$
c'est à dire
$$(x+\frac{1}{2})^2+2(y+\frac{1}{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
ou encore
$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2}=1$$
dans le repère $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $A(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. C'est donc une ellipse de centre A.

2. (a) La paramétrisation
$$\lambda \mapsto (x+\lambda, y+\lambda, z).$$

(b) Un point $M(x,y,z)$ appartient à S si et seulement si la droite
$$D_M = (M; \vec{u})$$
rencontre γ donc si et seulement s'il existe λ tel que le point $(x+\lambda, y+\lambda, z)$ satisfasse les équations de γ i.e.
$$\begin{cases} (x+\lambda)^2 + 2(y+\lambda)^2 - z &= 0 \\ (x+\lambda)+(y+\lambda) &= 0. \end{cases}$$
De L_2 on tire
$$\lambda = -\frac{1}{2}(x+y)$$
et L_1 devient
$$\frac{3}{4}(x-y)^2 - z = 0.$$

3. γ est définie par
$$\begin{cases} y &= -x \\ z &= 3x^2 \end{cases}$$
donc une paramérisation de γ est
$$t \mapsto (t, -t, 3t^2).$$
Les points de S sont les points des droites passant par un point de γ est dirigée par $\vec{u}$. Une telle droite admet la paramétrisation
$$\lambda \mapsto \begin{cases} t+\lambda \\ -t+\lambda \\ 3t^2 \end{cases}$$
et les points de S sont constitués de tous les points de toutes ces droites; ainsi, une paramétrisation de S est
$$(t,\lambda) \mapsto \begin{cases} t+\lambda \\ -t+\lambda \\ 3t^2. \end{cases}$$
En un point de S, on a
$$x - y = 2t,$$
donc
$$(x-y)^2 = 4t^2 = \frac{4}{3}z.$$
On retrouve l'équation obtenue plus haut.

23. énoncé

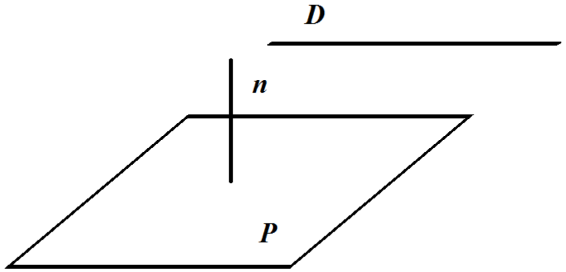
1. C'est le cercle de centre O et de rayon 1 du plan xOy.

2. Évidemment,
$$t \mapsto \begin{cases} \cos \\ \sin t \\ 0 \end{cases}$$
avec $t \in [0, 2\pi]$ est une paramétrisation de γ.

3. (a) Une génératrice de S est une droite passant par un point de γ, donc de la forme $(\cos t, \sin t, 0)$, et dirigée par $\vec{u}$. Une telle droite admet la paramétrisation
$$\lambda \mapsto \begin{cases} \cos t + \lambda \\ \sin t + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ \lambda \end{cases}$$
En faisant varier le réel t dans $[0, 2\pi]$, on obtient toutes les génératrices possibles de S, qui admet donc la paramétrisation
$$f : (t,\lambda) \mapsto \begin{cases} \cos t + \lambda \\ \sin t + \lambda \qquad (t,\lambda) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}. \\ \lambda \end{cases}$$

(b) On calcule
$$\begin{aligned} \vec{n}(t,\lambda) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,\lambda) \wedge \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\lambda) \\ &= (\cos t, \sin t, -\sin t - \cos t). \end{aligned}$$
$\vec{n}(t,\lambda)$ n'est jamais le vecteur nul puisqu'entre abscisse et ordonnée, l'une au moins n'est pas nulle puisque $\cos$ et $\sin$ ne s'annulent pas simultanément. Une autre façon de procéder consiste à considérer $\|\vec{n}(t,\lambda)\|$ et à démontrer que cette norme n'est jamais nulle. Puisque
$$\begin{aligned} \|\vec{n}(t,\lambda)\|^2 &= \cos^2 t + \sin^2 t(-\sin t - \cos t)^2 \\ &= 1 + \sin^2 t(-\sin t - \cos t)^2 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$
et en particulier, $\|\vec{n}(t,\lambda)\|^2 \neq 0$ et donc $\vec{n}(t,\lambda) \neq \vec{0}$. En définitive, tous les points de S sont réguliers et S est une surface régulière.

(c) En un point $M(t,\lambda)$ de S, le plan tangent est normal au vecteur $\vec{n}(t,\lambda)$; ce plan est alors parallèle au vecteur $\vec{w}$ si et seulement si $\vec{n}(t,\lambda)$ est orthogonal à $\vec{w}$



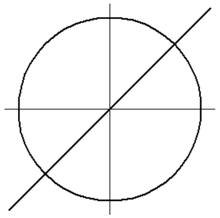
ce qui se produit si et seulement si

$$\langle \vec{n}(t,\lambda), \vec{w}\rangle = 0,$$

ce qui donne la condition nécessaire et suffisante

$$\cos t - \sin t = 0,$$

ce qui conduit à $t = \frac{\pi}{4}$ ou $t = \frac{\pi}{4} + \pi$:



Les points correspondants sont les points

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda \\ \lambda, \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda \\ \lambda \end{cases}$$

avec aucune contrainte sur λ. Ces points forment deux droites, chacune dirigée par

$$\vec{u} = (1,1,1),$$

la première passant par le point

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

et la seconde par

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

(d) Considérons un point

$$(\cos t + \lambda, \sin t + \lambda, \lambda)$$

de S, pour lequel on pose

$$\begin{cases} x = \cos t + \lambda \\ y = \sin t + \lambda \\ z = \lambda. \end{cases}$$

Typiquement, en présence de $\cos t$ et $\sin t$ dans une paramétrisation, il faut viser la relation

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

On a $\lambda = z$ et alors

$$\begin{cases} x - z = \cos t \\ y - z = \sin t \end{cases}$$

et en conséquence:

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1.$$

On dit alors que l'on a obtenu une équation cartésienne de S.

- De façon plus précise,, tous les points de S satisfont la relation

  $$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$$

  ce qui signifie, en notant Σ la surface d'équation cartésienne

  $$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1,$$

  que tous les points de S sont des points de Σ. En d'autres termes,

  $$S \subset \Sigma.$$

- Sans étude plus fine, on ne peut pas affirmer que $S = \Sigma$:
  - par exemple, soit γ la courbe du plan de paramétrisation

    $$t \mapsto \begin{cases} \cos t \\ 2\cos t + 1. \end{cases}$$

  - Il est clair qu'en tout point de γ, la relation

    $$y = 2x + 1$$

    est satisfaite.
  - Ainsi, tout point de γ est un point de l'ensemble D défini par l'équation cartésienne

    $$y = 2x = 1,$$

    qui est bien entendu une droite. En d'autres termes, $\gamma \subset D$

– et il est tout à fait évident que γ n'est qu'une partie de la droite D; plus précisément γ est un segment puisque

$$-1 \leq \cos t \leq 1.$$

– Ainsi, $\gamma \subset D$ mais $\gamma \neq D$.

- Démontrons ici que $\Sigma \subset S$:
  – soit $M(x,y,z)$ un point de Σ, donc tel que

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1.$$

Démontrons que M est un point de S.

– Il s'agit donc de démontrer qu'il existe deux réels t et λ tels que

$$\begin{cases} x = \cos t + \lambda \\ y = \sin t + \lambda \\ z = \lambda. \end{cases}$$

– Posons $\lambda = z$ (notons que c'est absolument le seul choix possible pour λ!).

– On a alors

$$(x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = 1$$

et en présence de deux réels dont la somme des carrés vaut 1:

– il existe alors un réel $t \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\begin{cases} x - \lambda = \cos t \\ y - \lambda = \sin t \end{cases}$$

si bien que finalement,

$$\begin{cases} x = \cos t + \lambda \\ y = \sin t + \lambda \\ z = \lambda, \end{cases}$$

avec $\lambda = z$; notons que l'existence de t est assurée et que son expression (à l'aide des fonctions trigonométriques réciproques, ce qui est toujours délicat) n'est pas nécessaire. Ainsi, M est bien un point de S.

– En définitive, tout point de Σ est bien un point de S i.e. $\Sigma \subset S$, ce qui prouve finalement que $S = \Sigma$.

(e) La surface S va donc être traitée dans cette question comme définie par l'équation cartésienne

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1.$$

- En notant

$$F(x,y,z) = (x-z)^2 + (y-z)^2 - 1,$$

S a pour équation

$$F(x,y,z) = 0.$$

- On a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x,y,z) = (2(x-z), 2(y-z), -2(x-z) - 2(y-z)).$$

- On voit que

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x,y,z) = (0,0,0) \iff x = y = z.$$

Mais aucun point de la forme

$$(x,x,x)$$

ne vérifie l'équation de Σ, ce qui démontre qu'en tout point de Σ,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x,y,z) \neq \vec{0}$$

et donc, par définition, tous les points de Σ sont réguliers i.e. Σ est régulière.

- En un point $M(x,y,z)$ de Σ, le plan tangent est normal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x,y,z)$ et comme en (c), le plan tangent est parallèle à $\vec{w}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x,y,z)$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux i.e.

$$\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x,y,z), \vec{w} \rangle = 0$$

et

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x,y,z), \vec{w} \rangle = 0 &\iff 2(x-z) - 2(y-z) = 0 \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

Les points $M(x,y,z)$ de S en lesquels le plan tangent est parallèle à $\vec{w}$ sont ceux pour lesquels $x = y$:

$$\begin{cases} (x-z)^2 + (y-z)^2 = 1 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} 2(y-z)^2 = 1 \\ x = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - z = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y - z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = y, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} + y \end{cases},$$

ce qui définit deux droites, chacune dirigée par $\vec{u}$, la première passant par le point

$$\left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

et la seconde par

$$\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. La méthode consiste à éliminer z entre les deux équations

$$\begin{cases} (x-z)^2+(y-z)^2=1 \\ \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

qui définissent C; L_2 donne $z=-x-y$ et alors L_1 donne

$$\begin{aligned}(x-(-x-y)^2+(y-(-x-y))^2=1 &\iff (2x+y)^2+(2y+x)^2=1\\ &\iff 5x^2+5y^2+8xy=1.\end{aligned}$$

5. Recherchons la matrice de passage P; on sait qu'elle est telle que

anciennes $= P\times$ nouvelles.

On a très facilement

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ \\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ \\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases}$$

si bien que

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Posons

$$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

de sorte que P est la matrice de passage de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ à la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Comme on le voit, la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base orthonormée. Plus précisément, on remarque que

$$P=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta=-\frac{\pi}{4}$ i.e. P est la matrice de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ si bien $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ sont les images de $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dans cette rotation. En définitive, le repère $\mathcal{R}=(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ se déduit du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

6. De

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ \\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases}$$

on obtient

$$5x^2+5y^2=5x'^2+5y'^2$$

(les doubles produits s'éliminent), puis

$$8xy=4(y'^2-x'^2)$$

si bien qu'une équation cartésienne de C dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$ est

$$x'^2+9y'^2=1 \iff \frac{x'^2}{1^2}+\frac{y'^1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$$

et donc C est une ellipse de centre O et de grand axe Ox'.