Feuille d'exercices n°4

1. corrigé Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et déterminer sa somme. *Indication :* on pourra écrire

$$\frac{1}{k+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{k+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{k+1}.$$

2. corrigé

1. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,dt = \frac{1}{k}$.
2. Par une majoration convenable, démontrer que

$$\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. On pose $u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

4. En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est convergente et calculer sa somme.

3. corrigé Soit $r \in \,]0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout entier n, on pose $u_n = r^n e^{in\theta}$.

1. Justifier que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et déterminer sa somme.
2. En déduire la convergence et la somme des deux séries suivantes:

$$\sum_{n\geq 0} r^n\cos(n\theta), \quad \sum_{n\geq 0} r^n\sin(n\theta).$$

4. corrigé Déterminer la nature des séries suivantes:

$$\sum_{n\geq 1}\arcsin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}, \quad \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}+\ln\frac{n-1}{n}\right),$$

$$\sum_{n\geq 0} e^{-2n} \quad \sum_{n\geq 0}\frac{n!}{(2n)!} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}.$$

5. corrigé Déterminer la nature des séries suivantes:

$$\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad \sum_{n\geq 1}\arccos\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \sum_{n\geq 0}\frac{e^n}{n!}.$$

6. corrigé Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants: (en discutant sur les paramètres):

$$\begin{aligned} u_n &= a - \cos\frac{\pi}{n},\ n \geq 1 \\ u_n &= \operatorname{sh}\frac{1}{n} - a - \frac{b}{n},\ n \geq 1. \end{aligned}$$

7. corrigé Déterminer la nature des séries

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n} \quad \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

8. corrigé On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

et pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = v_n - v_{n-1}$.

1. Démontrer avec soin que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
3. En déduire que la suite (v_n) est convergente. On note γ sa limite, appelée *constante d'Euler*.
4. Justifier que pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k-1}.$$

5. En déduire:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

6. En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$. *Pour information:* $\gamma \approx 0,577$.

9. corrigé Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = \ln\left(\dfrac{n!e^n}{n^n.\sqrt{n}}\right)$.

1. Déterminer un équivalent de $v_n - v_{n+1}$ quand $n \to +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum(v_n - v_{n+1})$.
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
3. En déduire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

10. corrigé Prouver la convergence des séries suivantes:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n(n+1)}, \quad \sum_{n\geq 0}\frac{(1+i)^n}{n!}.$$

11. corrigé Déterminer la nature de la série $u_n = \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

12. corrigé Soit $r \in \mathbb{C}$ tel que $|r| < 1$. Démontrer, en considérant le produit de la série géométrique par ele-même, que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)r^n = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

13. corrigé Déterminer la nature des séries sivantes:

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin\frac{1}{n} \quad \sum_{n\geq 1}(-1)^n\cos\frac{1}{n} \quad \sum_{n\geq 0}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

14. corrigé Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

1. énoncé

1. Par identification, on trouve $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ et $c=-\frac{3}{2}$.

2. On se ramène scrupuleusement à la définition (indispensable dans les calculs de sommes!). On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{k+2}\right). \end{aligned}$$

Ce n'est pas une situation télescopique, mais on s'y ramène en écrivant

$$\frac{1}{k+1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{k+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{k+1}$$

et alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\frac{1}{k+1}}_{\text{télescop.}}+\underbrace{\frac{3}{2}\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{k+2}}_{\text{télescop.}}\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{1}{n+2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la série est convergente et que sa somme vaut $\frac{5}{4}$.

2. énoncé

1. OK.

2. Des faits suivants:

$$1+t\geq 1$$

et donc

$$\frac{1}{1+t}\leq 1$$

et

$$\begin{aligned} \forall t\in[0,1],\ |(-t)^n| &= |(-1)^n t^n| \\ &= t^n \end{aligned}$$

de l'inégalité de la moyenne

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|\leq\int_0^1 |g(t)|\,dt,$$

on déduit

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\right| &\leq \int_0^1\left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \\ &\leq \int_0^1 t^n\,dt \\ &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

et on conclut par théorème d'encadrement.

3. D'après **1**,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}t^{k-1}\,dt. \end{aligned}$$

Or

$$(-1)^{k-1}t^{k-1}=(-t)^{k-1}.$$

En reconnaissant alors la somme des termes d'une série géométrique de raison $-t$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}t^{k-1}=\frac{1-(-t)^n}{1+t},$$

d'où le résultat.

4. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \int_0^1\frac{1}{1+t}\,dt-\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t}\,dt \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1\frac{1}{1+t}\,dt \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

ce qui prouve par définition, que la série $\sum u_k$ est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2.$$

3. énoncé

1. On a
$$r^n e^{in\theta} = \left(re^{i\theta}\right)^n$$
si bien que $\sum u_n$ est une série géométrique de raison
$$\rho = re^{i\theta}$$
et puisque
$$\begin{aligned} |\rho| &= \left|re^{i\theta}\right| \\ &= |r| \times \left|e^{i\theta}\right| \\ &= r \\ &< 1 \quad , \end{aligned}$$
on en déduit que cette série géométrique est convergente avec
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(re^{i\theta}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-re^{i\theta}}. \end{aligned}$$

2. On
$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(r^n e^{in\theta}\right) = r^n \cos(n\theta) \\ \mathrm{Im}\ \left(r^n e^{in\theta}\right) = r^n \sin(n\theta) \end{aligned}$$
et la convergence des séries
$$\sum_{n\geq 0} r^n \cos(n\theta), \qquad \sum_{n\geq 0} r^n \sin(n\theta)$$
est la conséquence du résultat du cours concernant la convergence des séries à termes complexes

4. énoncé $\boxed{\sum_{n\geq 1} \arcsin \frac{1}{n}}$ Il faut savoir retrouver un développement limité de $\arcsin$, à l'ordre 3 pour fixer les idées: $x \mapsto \arcsin x$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ (1+u)^{-\frac{1}{2}} &\underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + o(u) \\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$
et par théorème d'intégration terme à terme des développements limités:
$$\begin{aligned} \arcsin x &\underset{x\to 0}{=} \arcsin 0 + x + \frac{x^3}{36} + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^3}{36} + o(x^3). \end{aligned}$$
En particulier,
$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x$$
et en conséquence
$$\arcsin \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \geq 0$$
et par TCE des séries à termes positifs et par divergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$, on en déduit que la série $\sum \arcsin \frac{1}{n}$ est divergente.

$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n}}$ Il faut savoir déterminer le développement limité, par exemple à l'ordre 3, de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ lorsque x tend vers 0.

- On écrit
$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}$$
- puis
$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$$
- si bien que
$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{1}{2}x^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$
- Ensuite,
$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
- et enfin
$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) + o(x^3) \\ &= x \times 1 + x \times \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \times 1 + o(x^3) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

On a alors
$$\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$$
et donc
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n^2}\geq 0\end{aligned}$$
et par TCE des séries à termes positifs et par convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$ est convergente.

$\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}+\ln\frac{n-1}{n}\right)}$ La démarche est classique en présence d'un logarithme d'un objet x qui tend vers 1: sachant que, par exemple à l'ordre deux,
$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$$
on se ramène, avec notre objet x qui tend vers 1, à l'objet $u=x-1$ qui tend vers 0:
$$\ln x = \ln(1+x-1).$$
Ici, il suffit d'écrire
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) &= \ln\left(\frac{n}{n}-\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$
si bien que
$$\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
et en conséquence
$$\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}\geq 0.$$
Par TCE des séries à termes positifs et par convergence de la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$ est convergente.

$\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 0}e^{-2n}}$ On a
$$\begin{aligned}e^{-2n} &= \left(e^{-2}\right)^n\\ &= \left(\frac{1}{e^2}\right)^n\end{aligned}$$
si bien que la série $\sum e^{-2n}$ est la série géometrique de raison $\frac{1}{e^2}$ et puisque l'on a évidemment
$$0\leq\frac{1}{e^2}<1,$$
cette série géométrique est convergente.

$\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{(2n)!}}$ On applique la règle de d'Alembert:
$$\begin{aligned}\frac{\frac{(n+1)!}{(2(n+1)!)}}{\frac{n!}{(2n)!}} &= \frac{(n+1)!}{n!}\times\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\\ &= (n+1)\times\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\\ &= \frac{1}{2(2n+1)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0<1\end{aligned}$$
ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{(2n)!}$ est convergente.

$\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}}$ On écrit dans un premier temps
$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt{n}\\ &= \sqrt{n}\times\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\\ &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right).\end{aligned}$$
On effectue ensuite un développement limité de
$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$$
à l'ordre un au voisinage de 0:
$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+o(x)\end{aligned}$$
si bien que
$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en conséquence

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

et c'est pourquoi

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\times\frac{1}{2n}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}}\\
\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}\\
&= \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \geq 0.
\end{aligned}$$

Par TCE des séries à termes positifs et par convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, on en déduit que la série $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ est convergente.

$\boxed{\sum_{n\geq1}\frac{n!}{n^n}}$ Pour la série $\sum_{n\geq1}\frac{n!}{n^n}$, on cherche à appliquer la règle de d'Alembert:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} &= \frac{(n+1)!}{n!}\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\\
&= (n+1)\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\\
&= \frac{n^n}{(n+1)^n}\\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\
&= \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n\\
&= \left(\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)^n\\
&= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\\
&= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\
n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{-n}{n+1}+o(1)
\end{aligned}$$

et c'est pourquoi

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$$

en conséquence de quoi, par continuité de la fonction $x\mapsto e^x$ en $x=-1$:

$$\begin{aligned}
\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-1)\\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

autrement dit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

Puisque $\frac{1}{e}<1$, la série $\sum_{n\geq1}\frac{n!}{n^n}$ converge.

5. énoncé $\boxed{\sum_{n\geq2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$ On sait que

$$\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$$

et c'est pourquoi

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2} \leq 0$$

Par TCE des séries dont le terme général est de signe constant et par convergence de la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, on en déduit que la série $\sum_{n\geq2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

$\boxed{\sum_{n\geq1}\arccos\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ On a $\arccos 0 = 1$ et la fonction $\arccos$ est continue en 0, si bien que

$$\arccos\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Le terme général de la série $\sum_{n\geq1}\arccos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ne tendant pas vers 0, la série est divergente.

$\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{e^n}{n!}.}$ On applique la règle de d'Alembert:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} &= \frac{e^{n+1}}{e^n}\times\frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{e}{n+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0<1\end{aligned}$$

et c'est pourquoi la série est convergente.

6. énoncé L'idée motrice est de produire un équivalent. Comme on le sait, un développement limité peut produire un équivalent *mais à condition que ce développement fournisse une partie principale, qui est le terme non nul de plus bas degré ce développement.* Il faut donc aller suffisamment loin dans ces développements.

$\boxed{\displaystyle\sum a-\cos\frac{\pi}{n}}$ On a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} a-1+\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Quel équivalent peut-on récupérer de ce développement? Quel est le terme non nul de plus bas degré?

- C'est $a-1$ si $a-1\neq 0$. Donc si $a-1\neq 0$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a-1.$$

  Le terme général de cette série ne tendant pas vers 0, mais vers $a-1$, cette série est divergente.

- Si $a-1=0$, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

  développement dont le terme non nul de plus bas degré est $\frac{\pi^2}{2n^2}$. On a donc alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}\geq 0.$$

  Par TCE des séries à termes positifs et par convergence de la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a=1$.

$\boxed{\displaystyle\sum \operatorname{sh}\frac{1}{n}-a-\frac{b}{n}}$ Même démarche:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -a+\frac{1-b}{n}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Quel est le terme non nul de plus bas degré de ce développement?

- C'est $-a$ si $-a\neq 0$; Donc si $a\neq 0$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -a.$$

  Le terme général de cette série ne tendant pas vers 0, mais vers $-a$, cette série est divergente.

- Si $a=0$, c'est $\frac{1-b}{n}$ si $1-b\neq 0$. Donc si $a=0$ et $b\neq 1$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-b}{n}.$$

  Par TCE des séries à termes positifs et par divergence de la série de Riemann $\sum\frac{1}{n}$, on en déduit que la série $\sum u_n$ est divergente.

- Si $a=0$ et $b=1$, c'est $\frac{1}{n^3}$. Donc si $a=0$ et $b=1$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

  Par TCE des séries à termes positifs et par convergence de la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^3}$, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a=0$ et $b=1$.

7. énoncé

- Soit

$$f:t\mapsto\frac{1}{t\ln t}.$$

  Il est clair que f est ≥ 0 et décroissante sur $[2,+\infty[$ donc la série en jeu et l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ sont de même nature. Or, en reconnaissant

$$\int\frac{u'}{u}=\ln|u|$$

  avec ici $u=\ln$, on a

$$\begin{aligned}\int_2^X\frac{1}{t\ln t}\,dt &= [\ln|\ln t|]_2^X \\ &= \ln(\ln X)-\ln(\ln 2) \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.\end{aligned}$$

  L'intégrale est divergente et donc la série aussi.

- Soit
$$f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}.$$
Il est clair que f est ≥ 0 et décroissante sur $[2,+\infty[$ donc la série en jeu et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. Or, en reconnaissant
$$\int \frac{u'}{u2} = -\frac{1}{u}$$
avec ici $u = \ln$, on a
$$\begin{aligned} \int_2^X \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt &= \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^X \\ &= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln X} \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$
L''intégrale est convergente et donc la série aussi.

8. énoncé

1. On a
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$
et donc
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$
2. Convergente par théorème de comparaison.
3. Situation typique de télescopage: dire que la série $\sum u_n$ converge signifie que
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$$
possède une limite finie L lorsque n tend vers $+\infty$ et par télescopage,
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_2$$
et c'est pourquoi (v_n) converge vers $L + v_2$.
4. La fonction
$$t \mapsto \frac{1}{t}$$
est décroissante sur $]0,+\infty[$. On a donc $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k}$ pour tout $t \in [k-1,k]$, d'où
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}\int_{k-1}^{k} dt = \frac{1}{k}.$$
La deuxième inégalité se démontre de la même manière, en partant de $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k-1}$ pour tout $t \in [k-1,k]$.
5. En sommant ces encadrements pour k variant de 2 à n et en utilisant la relation de Chasles, il vient:
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$
et comme une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\ln$, on obtient le résultat.
6. On a donc
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \leq 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \leq 1$$
puis
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \geq 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \geq \frac{1}{n} \geq 0$$
et donc l'encadrement
$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \leq 1$$
et le résultat de l'énoncé est une conséquence du passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cet encadrement.

9. énoncé

1. On a après quelques simplifications,
$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n.\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}.\sqrt{n+1}}\right) \\ \ln\left[\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right] &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$
ce qui démontre que
$$v_n - v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$
du théorème de comparaison, on déduit que la série $\sum(v_n - v_{n+1})$ est convergente.

2. Situation classique de télescopage: dire que la série $\sum(v_n - v_{n+1})$ converge signifie que

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(v_n - v_{n+1})$$

possède une limite finie L lorsque n tend vers $+\infty$ et par télescopage,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{n}(v_n - v_{n+1}) \\ &= v_1 - v_{N+1} \end{aligned}$$

et c'est pourquoi (v_n) converge vers $v_1 - L$.

3. En notant ℓ la limite de la suite (v_n), on a

$$\frac{n!e^n}{n^n.\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^\ell.$$

Puisque le réel $C = e^\ell$, comme toute exponentielle, est non nul et qu'une suite de limite non nulle est équivalente à sa limite, on a

$$\frac{n!e^n}{n^n.\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C \Longrightarrow n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

10. énoncé

- On a

$$\begin{aligned} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| &= \frac{1}{n^2+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

  La suite est classique:

  – Par TCE des séries à termes positifs et par convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ est convergente.
  – Du TCM, on déduit que la série $\sum |u_n|$ est convergente,
  – et du TCA, on déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

- On a

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sin n}{n(n+1)}\right| &\leq \frac{1}{n(n+1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

  La suite est classique:

  – Par TCE des séries à termes positifs et par convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente.
  – Du TCM, on déduit que la série $\sum |u_n|$ est convergente,
  – et du TCA, on déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

- On a

$$|1+i| = \sqrt{2}$$

  et donc

$$|u_n| = \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}.$$

  En posant

$$v_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{n!},$$

  on a

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\sqrt{2}}{n+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1. \end{aligned}$$

  Donc $\sum v_n$ converge (d'Alembert) et $\sum u_n$ aussi par théorème d'absolue convergence.

11. énoncé On a

$$\begin{aligned} n^2\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} &= n^{\frac{3}{2}}e^{-\sqrt{n}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

car en posant $X = \sqrt{n}$, on sait que

$$X^3e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. Ainsi,

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge; il résulte alors du théorème de comparaison pour les séries absolument convergentes que $\sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ converge.

12. énoncé La série géométrique $\sum r^n$ est absolument convergente. Le produit de Cauchy de la série géométrique de raison r avec elle-même est la série $\sum w_n$ avec

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^{n} r^k r^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} r^n = (n+1)r^n. \end{aligned}$$

D'après le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries, la série $\sum w_n$ a pour somme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} r^n &= \frac{1}{1-r} \times \frac{1}{1-r} \\ &= \frac{1}{(1-r)^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) r^n = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

13. énoncé $\boxed{\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin \frac{1}{n}}$ La fonction $x \mapsto \sin x$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et puisque $\frac{1}{n} \in [0, \pi]$ et que la suite $n \mapsto \frac{1}{n}$ est décroissante, on en déduit que la suite

$$\left(\sin \frac{1}{n}\right)$$

est décroissante. Étant manifestement de limite nulle, la série est convergente en vertu du critère spécial des séries alternées.

$\boxed{\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cos \frac{1}{n}}$ On a clairement

$$\cos \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

et le facteur $(-1)^n$ n'y change rien: la suite

$$\left((-1)^n \cos \frac{1}{n}\right)$$

ne tend pas vers 0. Il en résulte que la série est divergente.

$\boxed{\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)}$ On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} &= \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \sqrt{n^2} \times \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \\ &= n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}.\end{aligned}$$

On effectue ensuite un développement limité de

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

à l'ordre deux au voisinage de 0:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

si bien que

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

et en conséquence

$$n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \sin\pi\left(n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).\end{aligned}$$

Mais pour tout réel x

$$\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin x$$

et on a donc

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

Ensuite, de

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

on déduit, en suivant le protocole de composition des développements limités (mise à la poubelle des termes de degré > 3):

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{\pi}{2n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} - \frac{\pi^3}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2n} - \frac{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi^3}{48}}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \frac{\pi}{2n} - (-1)^n \frac{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi^3}{48}}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

- La série $\sum (-1)^n \frac{\pi}{2n}$ est clairement convergente en vertu du critère spécial des séries alternées.

- Puisque
$$\left| (-1)^n \frac{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi^3}{48}}{48n^3} \right| = \frac{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi^3}{48}}{48n^3}$$
et que $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente, la série $\sum (-1)^n \frac{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi^3}{48}}{48n^3}$ est absolument convergente et donc convergente (on aurait pu aussi évoquer le critère spécial des séries alternées).

- Toujours d'après la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$, la série $\sum \left(\frac{1}{n^3}\right)$ est convergente d'après le théorème de comparaison pour les séries absolument convergentes.

En conclusion, la série $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ est convergente puisque son terme général est la combinaison de trois termes généraux de séries convergentes.

14. énoncé Cet exercice comporte en fait un piège très tentant, celui de raisonner par équivalent. Certes, en se basant sur
$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u,$$
on en déduit bien sûr
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$
Mais cet équivalent se produit entre suites qui ne possèdent pas un signe constant. Bien qu'au membre de droite figure le terme général d'une série convergente (d'après le théorème relatif aux séries alternées), on ne peut *pas* affirmer qu'il en est de même pour le membre de gauche, car le théorème de comparaison par équivalence *ne marche que pour des séries dont les termes généraux ont des signes constants.*

Il faut adopter une toute autre démarche. L'idée est d'effectuer un développement limité: un développement limité produit une *égalité*. Notre terme général sera *égal* à un autre terme général (ou plutôt la somme) beaucoup lus simple à étudier.

Partant de
$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$
on obtient
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{2n}}_{b_n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}}}_{c_n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{d_n}.$$
Il est clair que $\sum a_n$ et $\sum c_n$ convergent d'après le théorème relatif aux séries alternées (on peut dire aussi que $\sum c_n$ converge d'après le théorème de convergence absolue).

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ étant convergente, il résulte du théorème de comparaison pour les séries absolument convergentes que la série $\sum d_n$ est convergente.

Enfin, $\sum b_n$ est évidemment divergente.

En conclusion, notre terme général est la somme de quatre termes, trois d'entre eux produisant une série convergente et le quatrième une série divergente. On en déduit donc que la série est divergente.