Feuille d'exercices n°1

Calculs algébriques, inégalités

1. corrigé Pour tous réels a et b, factoriser:
1. a^3-b^3 **2.** a^3+b^3 **3.** a^n-b^n.

2. corrigé Calculer:
1. $\sum_{i=4}^{n+1}(3i+7)$ $(n\geq 3)$. **2.** $\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}$ $(n\geq 2)$.

3. corrigé Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

1. $x^2\geq 2$
2. $\sqrt{x^2-1}\leq 1$.

4. corrigé Écrire le nombre $\dfrac{2-i}{3-7i}$ sous forme algébrique.

5. corrigé Donner un argument des nombres complexes

$$-6,\ i+\sqrt{3},\ \frac{i}{1+i}.$$

6. corrigé Donner un argument de $-1+2i$ sous forme d'un $\arccos$, d'un $\arcsin$ puis d'une $\arctan$.

Dérivées et primitives

7. corrigé Calculer les dérivées des fonctions $f:x\mapsto\ldots$ suivantes:

$$\frac{1}{4x^3}\qquad\frac{1}{(x-2)^3}\qquad\frac{1}{(2x+4)^4}.$$

8. corrigé Idem:

$$\frac{1+x}{1-x}\qquad\frac{2-x}{1+2x}\qquad\frac{1}{2-3x^3}.$$

9. corrigé Idem:

$$\frac{1}{\sqrt{3x-1}}\qquad x^{\frac{1}{x}}.$$

10. corrigé Idem:

$$\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\qquad\arctan(1+x^2)\qquad\arcsin(x^2).$$

11. corrigé Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant le domaine de dérivabilité:

1. $e(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

2. $g(x)=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

12. corrigé Déterminer une primitive des fonctions $f:x\mapsto\ldots$ suivantes:

$$\frac{1}{4x^3}\qquad\frac{1}{(1-x)^2}\qquad\frac{4}{1-2x}..$$

13. corrigé Même question:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\qquad\sqrt{1+3x}\qquad\frac{1}{\sqrt{3-4x}}.$$

14. corrigé Même question:

$$\frac{x}{1+x^2}\qquad\frac{3x}{1-x^2}\qquad\frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

15. corrigé Même question:

$$\frac{e^x}{1+e^x}\qquad xe^{x^2}\qquad\tan x.$$

16. corrigé Par une technique du genre

$$X=X+1-1,$$

calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}\,dx,\qquad\int_0^1\frac{x+1}{2x+1}\,dx.$$

17. corrigé Déterminer une primitive des fonctions $f:x\mapsto\ldots$ suivantes:

$$xe^{-2x}\qquad x\sin(3x)\qquad x^2\ln x\qquad x\arctan x.$$

18. corrigé Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^1\frac{1}{4x^2+1}\,dx\ \text{(poser } u=2x\text{)}$$
$$\int_0^1\frac{1}{3x^2+1}\,dx$$
$$\int_0^1\frac{1}{x^2+4}\,dx\ \text{(mettre 4 en facteur)}$$
$$\int_0^1\frac{1}{x^2+3}\,dx$$
$$\int_0^1\frac{1}{4x^2+9}\,dx.$$

19. corrigé Déterminer les primitives de la fonction

$$f:x\mapsto x\sqrt{3x-1}$$

sur $I=\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$ en effectuant le changement de variable $t=\sqrt{3x-1}$.

20. corrigé Déterminer les primitives des fonctions suivantes:

1. $u(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$. *Indication:* rechercher deux réels a et b tels que $e(x)=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}$.

2. $e(x)=\dfrac{1}{1-4x^2}$. *Indication:* rechercher deux réels a et b tels que $e(x)=\frac{a}{1-2x}+\frac{b}{1+2x}$.

Développements limités, limites

21. corrigé Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions suivantes:

1. $\ln(1+\sin x)$ à l'ordre 4.

2. $\dfrac{e^x}{\cos x}$ à l'ordre 3.

22. corrigé Déterminer les limites lorsque x tend vers 0 des expressions suivantes:

1. $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$,

2. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$,

3. $\dfrac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$,

4. x^x

5. $(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

6. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

23. corrigé Déterminer les limites lorsque x tend vers $+\infty$ des expressions suivantes:

1. $\dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$

2. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

3. $x^4e^{-\sqrt{x}}$

4. $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

5. $\ln(x^2+1)-2\ln x$.

24. corrigé En utilisant des développements limités à des ordres convenables, déterminer des équivalents des fonctions suivantes aux points indiqués:

1. $\dfrac{\sin x-x}{x^2}$ en 0

2. $\dfrac{e^x - x - 1}{(1-\cos x)^2}$ en 0

3. $\cos x - \sqrt{1+x}$ en 0

4. $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}} + 1$ en $+\infty$

5. $\dfrac{1}{x^2} - \sin\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$

6. $\mathrm{sh}\,(2x) - \sin(2x)$ en 0

7. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ en 0.

1. énoncé

1. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
2. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
3. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

2. énoncé

1. $\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{23}{2}n-29$
2. $2^{n+2}-8$.

3. énoncé *Rappels:* pour tout réel x et tout réel positif b:

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2}=|x|,\\&|x|\leq b\iff -b\leq x\leq b,\\&|x|\geq b\iff x\leq -b \text{ ou } x\geq b.\end{aligned}$$

1. Du fait de la croissance de la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ sur $[0,+\infty[$ et de la positivité des quantités x^2 et 2, on a
$$x^2\geq 2\iff\sqrt{x^2}\geq\sqrt{2}.$$
Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\sqrt{x^2}=|x|$$
si bien que
$$x^2\geq 2\iff |x|\geq\sqrt{2}\iff x\geq\sqrt{2}\text{ ou } x\leq-\sqrt{2}.$$
L'ensemble des solutions est donc
$$\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right[.$$

2. Pour $\sqrt{x^2-1}\geq 1$, il y a une préoccupation supplémentaire, celui de l'existence des quantités en jeu: de façon évidente, il est nécessaire avant toute chose d'imposer la contrainte $x^2-1\geq 0$ pour que l'inégalité ait un sens; dans un premier temps, il est donc nécessaire d'imposer $x\geq 1$ ou $x\leq -1$. Ensuite, pour $x\geq 1$ ou $x\leq -1$, on déduit de la croissance de la fonction $t\mapsto t^2$ sur $[0,+\infty[$ que
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1}\leq 1\quad&\iff\quad\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2\leq 1^2\iff x^2-1\leq 1\\&\iff\quad x^2\leq 2\iff |x|\leq\sqrt{2}\iff -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}.\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc constitué des réels $x\geq 1$ ou $x\leq -1$ vérifiant $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$, c'est à dire
$$\left[-\sqrt{2},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right].$$

4. énoncé $\dfrac{2-i}{3-7i}=\dfrac{13+11i}{58}$.

5. énoncé

- Pour -6: π.
- $|i+\sqrt{3}|=\sqrt{4}=2$ donc
$$i+\sqrt{3}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$
donc un argument de $i+\sqrt{3}$ est $\frac{\pi}{6}$.
- On a
$$\frac{i}{1+i}\quad=\quad\frac{i(1-i)}{|1+i|^2}=\frac{1+i}{2}$$
donc $\frac{i}{1+i}$ a même argument que $1+i$, à savoir $\frac{\pi}{4}$. Ou encore:
$$\operatorname{Arg}\left(\frac{i}{1+i}\right)=\operatorname{Arg}(i)-\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\quad[2\pi].$$

6. énoncé Soit θ un argument de $-1+2i$. On a$|-1+2i|=\sqrt{5}$, donc
$$-1+2i=\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)=\sqrt{5}e^{i\theta}=\sqrt{5}\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$
donc
$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}<0,\quad\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}>0$$
d'où $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Puisque $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\subset[0,\pi]$ et que $\cos$ établit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ dont l'application réciproque est $\arccos$, on a
$$\theta=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$
Ensuite, on ne peut pas faire fonctionner $\arcsin$ puisque $\arcsin$ renvoie un angle dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Cependant,
$$\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\Longrightarrow\pi-\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\subset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
et alors
$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\Longrightarrow\pi-\theta=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$
d'où
$$\theta=\pi-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$
De même, on ne peut pas faire fonctionner $\arctan$ puisque $\arctan$ renvoie un angle dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Cependant,
$$\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\Longrightarrow\pi-\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\subset\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

et alors

$$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta=-\frac{2}{-1}=2\Longrightarrow \pi-\theta=\arctan 2,$$

d'où

$$\theta=\pi-\arctan 2.$$

7. énoncé

$$\frac{-3}{4x^4}\qquad \frac{-3}{(x-2)^4}\qquad \frac{-8}{(2x+4)^5}.$$

8. énoncé

$$\frac{2}{(1-x)^2}\qquad \frac{-5}{(1+2x)^2}\qquad \frac{9x^2}{(2-3x^3)^2}.$$

9. énoncé

$$\frac{-3}{2(3x-1)^{\frac{3}{2}}}\qquad -\frac{\ln x-1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$$

10. énoncé

$$\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\qquad \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$$
$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

11. énoncé

1. $D=]-1,1[$, $e'(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

2. $D=\mathbb{R}^*$, $g'(x)=\dfrac{2x}{|x|\,(x^2+1)}$

12. énoncé

$$\frac{-1}{8x^2}\qquad \frac{1}{2(1-x)^2}\qquad -2\ln|1-2x|\cdot$$

13. énoncé

$$2\sqrt{x}\qquad \frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}}\qquad -\frac{1}{2}\sqrt{3-4x}\cdot$$

14. énoncé

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\qquad -\frac{3}{2}\ln(1-x^2)\qquad \frac{-1}{2(1+x^2)}.$$

15. énoncé

$$\ln(1+e^x)\qquad \frac{1}{2}e^{x^2}\qquad -\ln|\cos x|\,.$$

16. énoncé

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}\,dx &= \int_0^1\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx\\ &= \int_0^1\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\,dx\\ &= [x-\arctan x]_0^1\\ &= 1-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x+1}{2x+1}\,dx &= \int_0^1\frac{x+\frac12+\frac12}{2x+1}\,dx\\ &= \int_0^1\left(\frac{x+\frac12}{2x+1}+\frac{\frac12}{2x+1}\right)\,dx\\ &= \int_0^1\left(\frac12+\frac{\frac12}{2x+1}\right)\,dx\\ &= \left[\frac12 x+\frac14\ln(2x+1)\right]_0^1\\ &= \frac12+\frac14\ln 3.\end{aligned}$$

17. énoncé Dans les quatre cas, on effectue une intégration par parties:

$$\begin{aligned}\int xe^{-2x}\,dx &= -\frac12 xe^{-2x}-\frac14 e^{-2x}+C\\ \int x\sin(3x)\,dx &= -\frac13 x\cos(3x)+\frac19\sin(3x)+C\\ \int x^2\ln x\,dx &= \frac13 x^3\ln x-\frac19 x^3+C\\ \int x\arctan x\,dx &= \frac12 x^2\arctan x-\frac12 x+\frac12\arctan x+C.\end{aligned}$$

18. énoncé Le changement $u=2x$ donne

$$du=2dx,\qquad 4x^2+1=u^2+1$$

et u varie de 0 à 2, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{4x^2+1}\,dx &= \int_0^2\frac{1}{u^2+1}\frac12\,du=\frac12[\arctan u]_0^2\\ &= \frac12\arctan 2.\end{aligned}$$

On écrit
$$3x^2=\left(\sqrt{3}x\right)^2$$
et le changement $u=\sqrt{3}x$ donne
$$du=\sqrt{3}dx,\quad 3x^2+1=u^2+1$$
et u varie de 0 à $\sqrt{3}$, d'où
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{3x^2+1}\,dx &= \int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}\frac{1}{\sqrt{3}}\,du\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}[\arctan u]_0^{\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$
On écrit
$$x^2+4=4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)$$
puis
$$\frac{x^2}{4}=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
et le changement $u=\frac{1}{2}x$ donne
$$du=\frac{1}{2}dx,\quad x^2+4=4(u^2+1)$$
et u varie de 0 à $\frac{1}{2}$, d'où
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{x^2+4}\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4(u^2+1)}2\,du\\ &= \frac{1}{2}[\arctan u]_0^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
On écrit
$$4x^2+9=9\left(\frac{4x^2}{9}+1\right)$$
puis
$$\frac{4x^2}{9}=\left(\frac{2x}{3}\right)^2$$
et le changement $u=\frac{2}{3}x$ donne
$$du=\frac{2}{3}dx,\quad 4x^2+9=9(u^2+1)$$
et u varie de 0 à $\frac{2}{3}$, d'où
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{4x^2+9}\,dx &= \int_0^{\frac{2}{3}}\frac{1}{9(u^2+1)}\frac{3}{2}\,du\\ &= \frac{1}{6}[\arctan u]_0^{\frac{2}{3}}\\ &= \frac{1}{6}\arctan\frac{2}{3}.\end{aligned}$$
19. énoncé On écrit
$$t=\sqrt{3x-1}\quad\Longrightarrow\quad dt=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}\,dx$$
et donc
$$dx=\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}\,dt=\frac{2}{3}t\,dt.$$
On a ensuite
$$t^2=3x-1\quad x=\frac{1}{3}(t^2+1)$$
et
$$x\sqrt{3x-1}\,\;dx=\frac{1}{3}(t^2+1)\times t\times\frac{2}{3}t\,dt,$$
d'où
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{3x-1}\,dx &= \int\frac{1}{3}(t^2+1)\times t\times\frac{2}{3}t\,dt\\ &= \frac{2}{9}\int\left(t^4+t^2\right)\,dt\\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)+C\end{aligned}$$
puis on revient à la variable x:
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{3x-1}\,dx &= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C\\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}\left(\sqrt{3x-1}\right)^5-\frac{1}{3}\left(\sqrt{3x-1}\right)^3\right)+C\\ &= \frac{2}{45}\left(1+x\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{27}\left(1+x\right)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$
20. énoncé

1. $\displaystyle\int u(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

2. $\displaystyle\int e(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right|.$

21. énoncé

1. $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$.

2. $1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

22. énoncé

1. On a

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Le dénominateur est un produit: pas de problème pour trouver un équivalent; le numérateur est une somme: on recherche un DL à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}
x^2 - \sin^2 x &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \\
&= x^2 - \left(x^2 - 2\times x \times \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\
&= \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\
&\Longrightarrow x^2 \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^4 -
\end{aligned}$$

et puisque $\sin \sim x$ lorsque x tend vers 0, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^2 \times x^2} \\
&= \frac{1}{3} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
x\cos x - \sin x &\underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\
&\Longrightarrow x\cos x - \sin x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3} \\
&= -\frac{1}{3} \\
&\Longrightarrow \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3. On a classiquement

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3} = 3 \\
&\Longrightarrow \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 3.
\end{aligned}$$

4. Facile!

$$x^x = e^{x\ln x}.$$

Or $x\ln x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 (résultat de croissance comparée) donc

$$\begin{aligned}
e^{x\ln x} &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1 \\
&\Longrightarrow x^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}$$

5. Tout d'abord,

$$(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \exp\left(\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \\
&= 1 - 2x^2 + o(x^2), \\
\ln(1-t) &\underset{t\to 0}{=} -t + o(t) \\
&\Longrightarrow \ln(\cos(2x)) \\
&\underset{x\to 0}{=} -2x^2 + o(x^2),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x)) &\underset{x\to 0}{=} -6 + o(1) \\
&\Longrightarrow \frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -6.
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} &= \exp\left(\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))\right)\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{-6}.\end{aligned}$$

6. Toujours la même démarche de conversion en exponentielle:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \exp\left(\tan x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\ln x\right).$$

Or

$$\begin{aligned}\sin x &\underset{x\to 0}{\sim} x\\ \cos x &\underset{x\to 0}{\sim} 1\\ &\Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x\to 0}{\sim} x\\ &\Longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\ln x \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x.\end{aligned}$$

Or $x\ln x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 (résultat de croissance comparée) donc

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\ln x\right) &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{-0} = 1\\ &\Longrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

23. énoncé

1. Croissance comparée: en $+\infty$, $(\ln x)^4$ est négligeable devant x et x est négligeable devant e^{3x}, donc $(\ln x)^4$ est négligeable devant e^{3x}, donc la limite vaut $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} &= e\times\frac{e^{3x}}{(\ln x)^4}\\ &= e\times\frac{e^{3x}}{x}\times\frac{(\ln x)^4}{x}.\end{aligned}$$

Le facteur $\frac{e^{3x}}{x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et le facteur $\frac{(\ln x)^4}{x}$ aussi pour les raisons invoquées ci-dessus. Ainsi,

$$\frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Classique: on multiplie par "la quantité conjuguée" i.e. on utilise l'astuce suivante:

$$\begin{aligned}\sqrt{a}-\sqrt{b} &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\\ &= \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\end{aligned}$$

(car le numérateur est de la forme $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$). On a donc

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} &= \frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3})}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}\end{aligned}$$

d'où il ressort clairement que

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Autre méthode: on force la mise en facteur de x dans chaque radical (classique):

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} &= \sqrt{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}-\sqrt{x\left(1-\frac{3}{x}\right)},\\ &= \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{5}{x}}-\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}}\\ &= \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right),\end{aligned}$$

le but étant de se ramener à des expressions de la forme $(1+u)^\alpha$ avec u voisin de 0. Plus précisément, puisque $\frac{5}{x}$ et $\frac{3}{x}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{5}{x}} &= \left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}\times\frac{5}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\ \sqrt{1-\frac{3}{x}} &= \left(1-\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{5}{x}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}} &= \frac{5}{2x}+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{4}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\Longrightarrow \sqrt{1+\frac{5}{x}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4}{x}\end{aligned}$$

et finalement,

$$\begin{aligned}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} &= \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\times\frac{4}{x}\\ &= \frac{4}{\sqrt{x}},\end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

3. Croissance comparée:

$$\forall\alpha>0,\ \forall\beta>0,\quad X^\alpha e^{-\beta X}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

On pose $X=\sqrt{x}$:

$$x^4e^{-\sqrt{x}}=X^8e^{-X}$$

et puisque X tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, on déduit du théorème de composition des limites et du résultat de croissance comparée ci-dessus que

$$x^4e^{-\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

4. On sait que $\ln(1+t)\underset{t\to0}{\sim}t$; on a donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$$

d'où

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\times\frac{1}{x}=1$$

et donc

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

5. Pour $x>0$, on a $2\ln x=\ln(x^2)$ d'où

$$\begin{aligned}\ln(x^2+1)-2\ln x &= \ln(x^2+1)-\ln(x^2)\\ &= \ln\frac{x^2+1}{x^2}.\end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{x^2+1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

et que

$$\ln t\underset{t\to1}{\longrightarrow}0$$

(continuité de la fonction $\ln$ en 1), il résulte du théorème de composition des limites que

$$\ln\frac{x^2+1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Ainsi,

$$\ln(x^2+1)-2\ln x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

24. énoncé Les équivalents ci-dessous ont été obtenus en suivant scrupuleusement le protocole:

- en présence de produit ou quotient, on effectue le produit ou le quotient des équivalents
- en présence de somme ou de différence, on effectue d'abord un développement limité qui nous sert ensuite àprodire un équivalent.

1. On a

$$\begin{aligned}\sin x &\underset{x\to0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\ \sin x-x &\underset{x\to0}{=} -\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\ \sin x-x &\underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^3}{6}\\ \frac{\sin x-x}{x^2} &\underset{x\to0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2}\\ &= -\frac{1}{6}x.\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}e^x &\underset{x\to0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ e^x-1-x &\underset{x\to0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ e^x-1-x &\underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}\\ \cos x &\underset{x\to0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ 1-\cos x &\underset{x\to0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ 1-\cos x &\underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}\\ (1-\cos x)^2 &\underset{x\to0}{\sim} \frac{x^4}{4}\\ \frac{e^x-x-1}{(1-\cos x)^2} &\underset{x\to0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^4}{4}}\\ &= \frac{2}{x^2}.\end{aligned}$$

3. En effectuant des développements limités à l'ordre 2 (il faut bien se lancer!), on a

$$\begin{aligned}
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\\
(1+x)^{\frac{1}{2}} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\\
\cos x-\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}-1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\\
&= -\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+o(x^2)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

et l'on s'aperçoit rétrospectivement que des développements à l'ordre 1 auraient suffi!

4. En effectuant des développements limités à l'ordre 1, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+u) &\underset{u\to 0}{=} u+o(u)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\
e^u &\underset{u\to 0}{=} 1+u+o(u)\\
-e^u+1 &\underset{u\to 0}{=} -u+o(u)\\
-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Cette première tentative ne permet pas de produire un équivalent. En effectuant alors des développements limités à l'ordre 2, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+u) &\underset{u\to 0}{=} u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
e^u &\underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\\
-e^u+1 &\underset{u\to 0}{=} -u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\\
-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= -\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

5. On a

$$\begin{aligned}
\sin u &\underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^3}{6}+o(u^3)\\
\sin\frac{1}{x^2} &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{6x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\\
\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2} &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{6x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^6}.
\end{aligned}$$

6. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}\,(u) &\underset{u\to 0}{=} u+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\\
\mathrm{sh}\,(2x) &\underset{x\to 0}{=} 2x+\frac{8x^3}{6}+o(x^3)\\
\sin(u) &\underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^3}{6}+o(u^3)\\
\sin(2x) &\underset{x\to 0}{=} 2x-\frac{8x^3}{6}+o(x^3)\\
\mathrm{sh}\,(2x)-\sin(2x) &\underset{x\to 0}{=} 2x+\frac{8x^3}{6}-2x+\frac{8x^3}{6}+o(x^3)\\
&= \frac{8}{3}x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{8}{3}x^3.
\end{aligned}$$

7. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} &= \frac{\sin x - x}{x\sin x}\\
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
\sin x - x &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
\sin x - x &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}\\
\sin x &\underset{x\to 0}{\sim} x\\
x\sin x &\underset{x\to 0}{\sim} x^2\\
\frac{\sin x - x}{x\sin x} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{-x^3}{6}}{x^2}\\
\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x} &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$