Feuille d'exercices n°5

---

1. corrigé Déterminer une base du sous-espace F de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs $\vec{v} = (x, y, z)$:

1. tels que $x + 2y - 3z = 0$,
2. tels que $x + 3z = 0$.

2. corrigé Déterminer une base du sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ constitué des vecteurs $\vec{v} = (x, y, z, t)$:

1. tels que $x + y - 2z + 3t = 0$,
2. tels que $x + 3t = 0$,
3. tels que $x + y - z + t = 0$ et $x + 2y + z + 2t = 0$.

3. corrigé On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\forall \vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y).$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
2. Démontrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

4. corrigé On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2z, -3x + 3y - 2z).$$

1. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?
4. Vérifier que $\mathcal{B}_2 = \big((-1, -1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 0)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice M_2 de f dans cette base.

5. corrigé On considère l'application u définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ u(P) = XP' - P.$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de u.

6. corrigé Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application

$$u : P \longmapsto P + P'.$$

1. Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice T de u dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.
3. Déterminer la matrice T' de u dans la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.
4. Déterminer la matrice T'' de u dans la base $\mathcal{B} = (X^2, 1, X^3, X)$.
5. On travaille cette fois dans $\mathbb{R}_n[X]$ où $n \geq 2$ est un entier donné. Déterminer la matrice T_n de u dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

7. corrigé Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 & -5 \\ 1 & 3 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -8 & 6 \\ 0 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4). Déterminer une base de $\operatorname{Im}(u)$.

8. corrigé Pour tout réel a, on considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f_a : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y + az, 2x + y + z, x + y + z) \end{array}$$

1. Déterminer suivant les valeurs de a une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. On prend $a = -1$; déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.
4. On note $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x + 2y + 2z = 0\}$.

(a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base

(b) On prend $a = 0$; donner une base de $f(H)$.

(c) On prend $a = -1$; donner une base de $f(H)$.

9. corrigé Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\vec{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Déterminer l'unique antécédant $\vec{u} = (x, y, z)$ de $\vec{v}$ par f.
3. En déduire A^{-1}.

10. corrigé Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit P le plan défini par

$$P = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x + y - z = 0\}$$

et D la droite dirigée par le vecteur $\vec{v}_3 = (2, -1, 0)$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection sur P parallèlement à D. Déterminer la matrice M de p dans la base canonique.

1. énoncé

1. On a

$$\begin{aligned}\vec{v}=(x,y,z)\in F &\iff x+2y-3z=0\\ &\iff x=-2y+3z\end{aligned}$$

donc $\vec{v}\in F$ si et seulement si $\vec{v}=(-2y+3z,y,z)$, donc si et seulement si

$$\begin{aligned}&\vec{v} &=& y(-2,1,0)+z(3,0,1)\\ \iff &\vec{v} &\in& \operatorname{Vect}\big((-2,1,0),(3,0,1)\big)\end{aligned}$$

donc F est le plan engendré par les vecteurs $\vec{v}_1=(-2,1,0)$ et $\vec{v}_2=(3,0,1)$ et puisqu'ils sont clairement linéairement indépendants, ils constituent alors une base de F.

2. On a

$$\begin{aligned}\vec{v}=(x,y,z)\in F &\iff x+2z=0\\ &\iff x=-2z\end{aligned}$$

donc $\vec{v}\in F$ si et seulement si $\vec{v}=(-2z,y,z)$, donc si et seulement si

$$\begin{aligned}&\vec{v} &=& z(-2,0,1)+y(0,1,0)\\ \iff &\vec{v} &\in& \operatorname{Vect}\big((-2,0,1),(0,1,0)\big)\end{aligned}$$

donc F est le plan engendré par les vecteurs $\vec{v}_1=(-2,0,1)$ et $\vec{v}_2=(0,1,0)$ et puisqu'ils sont clairement linéairement indépendants, ils constituent alors une base de F.

2. énoncé

1. On a

$$\begin{aligned}\vec{v}=(x,y,z,t)\in F &\iff x+y-2z+3t=0\\ &\iff x=-y+2z-3t\\ &\iff \vec{v}=(-y+2z-3t,y,z,t)\\ &\iff \vec{v}=y(-1,1,0,0)+z(2,0,1,0)+t(-3,0,0,1)\\ &\iff \vec{v}\in\operatorname{Vect}\big((-1,1,0,0),(2,0,1,0),(-3,0,0,1)\big)\end{aligned}$$

donc F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}_1=(-1,1,0,0)$, $\vec{v}_2=(2,0,1,0)$ et $\vec{v}_3=(-3,0,0,1)$. Ces trois vecteurs forment une famille libre car la matrice M de cette famille dans la base canonique:

$$M=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

est une matrice échelonnée à trois pivots et est donc de rang 3. Donc cette famille de trois vecteurs est de rang 3 et constitue alors une base de F.

2. On a

$$\begin{aligned}\vec{v}=(x,y,z,t)\in F &\iff x+3t=0\\ &\iff x=-3t\\ &\iff \vec{v}=(-3t,y,z,t)\\ &\iff \vec{v}=t(-3,0,0,1)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0)\\ &\iff \vec{v}\in\operatorname{Vect}\big((-3,0,0,1),(0,1,0,0),(,0,0,1,0)\big)\end{aligned}$$

donc F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}_1=(-3,0,0,1)$, $\vec{v}_2=,0,1,0,0)$ et $\vec{v}_3=(0,0,1,0)$. Cette famille de trois vecteurs est de rang 3 (facile par pivot) et constitue alors une base de F.

3. On a

$$\begin{aligned}\vec{v}=(x,y,z,t)\in F &\iff \begin{cases}x+y-z+t&=0\\ x+2y+z+2t&=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x+y&=z-t\\ x+2y&=-z-2t.\end{cases}\end{aligned}$$

L_2-L_1 donne $y=-2z-t$ et L_1 redonne

$$x=-y+z-t=3z.$$

Ainsi,

$$\vec{v}\in F\iff \vec{v}=(3z,-2z-t,z,t)$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\vec{v} &=& z(3,-2,1,0)+t(0,-1,0,1)\\ \iff &\vec{v} &\in& \operatorname{Vect}\big((3,-2,1,0),(0,-1,0,1)\big)\end{aligned}$$

donc F est le plan engendré par les vecteurs $\vec{v}_1=(3,-2,1,0)$ et $\vec{v}_2=(0,-1,0,1)$; cette famille de deux vecteurs est manifestement libre et constitue alors une base de F.

3. énoncé

1. On calcule

$$f(1,0)=(2,1),\ f(0,1)=(-4,-2).$$

On a donc

$$\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\big((2,1),(-4,-2)\big).$$

Puisque

$$(-4,-2)=-2\times(2,1),$$

la famille

$$\big((2,1),(-4,-2)\big)$$

est liée et c'est pourquoi

$$\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(2,1).$$

2. Soit $\vec{v} = (x, y)$. Alors

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \operatorname{Ker} f &\iff f(\vec{v}) = (0,0) \\
&\iff \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff x - 2y = 0 \text{ (car } L_1 \text{ et } L_2 \text{ sont proportionnelles)} \\
&\iff x = 2y \\
&\iff \vec{v} = (2y, y) \\
&\iff \vec{v} = y(2,1) \\
&\iff \vec{v} \in \operatorname{Vect}(2,1).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(2,1)$$

et on a donc

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f.$$

4. énoncé

1. On a

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= (1,0,-3) \\
f(0,1,0) &= (-1,0,3) \\
f(0,0,1) &= (2,2,-2).
\end{aligned}$$

On écrit ces vecteurs verticalement et on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $u \in \operatorname{Ker} f \iff f(u) = (0,0,0)$ ce qui se produit si et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \\ -3x + 3y - 2z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff u = (x, x, 0) = x(1,1,0) \\
&\iff u \in \operatorname{Vect}(1,1,0)
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $(1,1,0)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

3. On sait que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}), f(\vec{k})).$$

Manifestement, $f(\vec{\jmath}) = -f(\vec{\imath})$, si bien que

$$\operatorname{Vect}(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}), f(\vec{k})) = \operatorname{Vect}(f(\vec{\imath}), f(\vec{k})).$$

Enfin, il est clair que $(f(\vec{\imath}), f(\vec{k}))$ est libre (ces deux vecteurs sont non proportionnels). Ainsi, une base de $\operatorname{Im} f$ est $(f(\vec{\imath}), f(\vec{k}))$, c'est à dire

$$\big((1,0,-3),(2,2,-2)\big).$$

Autre approche: on applique la méthode du pivot à M, en agissant uniquement sur ses colonnes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\ell_3 + 3\ell_1}{\overset{a_{11} \text{ pivot}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{\ell_3 - 2\ell_4}{\overset{a_{23} \text{ pivot}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est échelonnée de rang 2 et les colonnes 1 et 3 contiennent les pivots; donc les colonnes 1 et 3 de M portent les vecteurs constituant une base de $\operatorname{Im} f$. On retrouve la base $\big((1,0,-3),(2,2,-2)\big)$.

4. On a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1}}{\overset{a_{11} \text{ pivot}}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\ell_3 - 2\ell_2}{\overset{a_{22} \text{ pivot}}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice, qui est la matrice de la famille $\mathcal{B}_2$ dans la base canonique, est à 3 pivots, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}_2$ est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. On calcule ensuite

$$f(1,1,-1) = (-2,-2,2)$$

et il est manifeste que

$$f(1,1,-1) = -2 \times (1,1,-1).$$

Ainsi,

$$f(1,1,-1) = -2 \times (1,1,-1) + 0 \times (1,2,1) + 0 \times (1,1,0)$$

et c'est pourquoi la première colonne de M_2 est $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule ensuite

$$f(1,2,1) = (1,2,1)$$

et comme

$$f(1,2,1) = 1 \times (1,2,1),$$

on a

$$f(1,2,1) = 0 \times (1,1,-1) + 1 \times (1,2,1) + 0 \times (1,1,0)$$

et c'est pourquoi la deuxième colonne de M_2 est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin,

$$f(1,1,0) = (0,0,0).$$

La troisième colonne de M_2 est donc tout simplement $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En définitive,

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice diagonale.

5. énoncé

1. L'application u est bien linéaire: si P et Q sont deux polynômes, et (λ, μ) un couple de réels,

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= X(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda X P' + \mu X Q' - \lambda P - \mu Q \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

Enfin, u est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ car pour tout polynôme P,

$$XP' - P$$

est bien un polynôme et lorsque

$$\deg(P) \leq 2,$$

alors

$$\begin{aligned} \deg(P') &\leq 1 \\ \deg(XP') &\leq 2 \end{aligned}$$

et donc

$$\deg(XP' - P) \leq 2,$$

ce qui prouve que $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

2. Son noyau est constitué des polynômes vérifiant $XP' - P = 0$. Comme on est dans $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire $P = aX^2 + bX + c$, donc la condition devient

$$X(2aX + b) - (aX^2 + bX + c) = 0,$$

c'est à dire $aX^2 + c = 0$. Cela n'est possible que si $a = c = 0$, donc

$$\text{Ker}\,(u) = \{bX / b \in R\} = \text{Vect}(X).$$

Quant à l'image de u, calculons les images par u des éléments de la base $(1, X, X^2)$:

$$\begin{aligned} u(1) &= -1 \\ u(X) &= 0 \\ u(X^2) &= 2X^2 - X^2 \\ &= X^2. \end{aligned}$$

Puisque $(1, X, X^2)$ est une base, on a

$$\text{Im}\,(u) = \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2))$$

et ici on a donc

$$\text{Im}\,(u) = \text{Vect}(-1, X^2).$$

Il est clair que $(-1, X^2)$ est une famille libre; c'est donc une base de $\text{Im}\,u$. Évidemment, $(1, X^2)$ est aussi une base de $\text{Im}\,u$.

6. énoncé

1. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ (polynôme de degré ≤ 3). Il est tout d'abord clair que $P + P'$ est un polynôme. Ensuite,

$$\deg(P') \leq 2$$

et donc

$$\deg(P + P') \leq 3.$$

Autrement dit,

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$$

et u est une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Ensuite, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X]$ et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} u(aP + bQ) &= aP + bQ + (aP + bQ)' \\ &= aP + bQ + aP' + bQ' \\ &= a(P + P') + b(Q + Q') \\ &= au(P) + bu(Q), \end{aligned}$$

ce qui démontre que u est une application linéaire. Finalement, u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. On calcule et on "code":

$$\begin{array}{rcl}
u(1) & = & 1 \\
& = & 1\times 1+0\times X+0\times X^2+0\times X^3 \\
u(X) & = & X+1 \\
& = & 1\times 1+1\times X+0\times X^2+0\times X^3 \\
u(X^2) & = & X^2+2X \\
& = & 0\times 1+2\times X+1\times X^2+0\times X^3 \\
u(X^3) & = & X^3+3X^2 \\
& = & 0\times 1+0\times X+3\times X^2+1\times X^3
\end{array}$$

et en conséquence,

$$T=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

3. On calcule et on "code":

$$\begin{array}{rcl}
u(X^3) & = & X^3+3X^2 \\
& = & 1\times X^3+3\times X^2+0\times X+0\times 1 \\
u(X^2) & = & X^2+2X \\
& = & 0\times X^3+1\times X^2+2\times X+0\times 1 \\
u(X) & = & X+1 \\
& = & 0\times X^3+0\times X^2+1\times X+1\times 1 \\
u(1) & = & 1 \\
& = & 0\times X^3+0\times X^2+0\times X+1\times 1,
\end{array}$$

et en conséquence,

$$T'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

4. On calcule et on "code":

$$\begin{array}{rcl}
u(X^2) & = & X^2+2X \\
& = & 1\times X^2+0\times 1+0\times X^3+2\times X \\
u(1) & = & 1 \\
& = & 0\times X^2+1\times 1+0\times X^3+0\times X \\
u(X^3) & = & X^3+3X^2 \\
& = & 3\times X^2+0\times 1+1\times X^3+0\times X \\
u(X) & = & X+1 \\
& = & 0\times X^2+1\times 1+0\times X^3+1\times X
\end{array}$$

et en conséquence,

$$T''=\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}.$$

5. Le principe est évidemment le même qu'en ***(2)***, à ceci près que l'on va calculer une bonne fois pour toutes $u(X^k)$. Pour tout $k\geq 1$,

$$\begin{array}{rcl}
u(X^k) & = & X^k+kX^{k-1} \\
& = & 0\times 1+\ldots+0\times X^{k-2}+k\times X^{k-1}+1\times X^k+0\times X^{k+1}+\ldots+0\times X^n
\end{array}$$

et c'est pourquoi

$$T_n=\begin{pmatrix}1&1&0&\ldots&0\\0&\ddots&2&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&n-1\\0&\ldots&\ldots&0&1\end{pmatrix}.$$

7. énoncé On applique la méthode du pivot en agissant sur les lignes uniquement:

$$M\sim\begin{array}{c} a_{11}\text{ pivot}\\ \ell_2-\ell_1\\ \ell_3+2\ell_1\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&-5&7&-5\\0&8&-12&8\\0&4&-6&4\\0&4&-6&4\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\ell_2\leftrightarrow\ell_3\\ \\ \\ \ell_4-\ell_3\end{array}\begin{pmatrix}1&-5&7&-5\\0&4&-6&4\\0&8&-12&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\ell_3\leftarrow\ell_3-2\ell_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-5&7&-5\\0&4&-6&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

matrice échelonnée à 2 pivots portés par les colonnes 1 et 2 et c'est pourquoi $\big(u(e_1),u(e_2)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$. Ainsi,

$$\big((1,1,-2,0),(-5,3,6,4)\big)$$

est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$.

8. énoncé

1. Soit $\vec{v}=(x,y,z)$. Alors

$$\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,f\iff\begin{cases}x-y+az=0\\ 2x+y+z=0\\ x+y+z=0.\end{cases}$$

L_2-L_3 donne $x=0$ et on alors

$$\begin{aligned}\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,f&\iff\begin{cases}-y+az=0\\ y+z=0\\ x=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}-z+az=0\\ y=-z\\ x=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}z(a-1)=0\\ y=-z\\ x=0.\end{cases}\end{aligned}$$

Au regard de la première égalité, deux situations se présentent:

- si $a=1$,

$$\begin{aligned}\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,f&\iff\begin{cases}y=-z\\ x=0\end{cases}\\ &\iff\vec{v}=(0,-z,z)\\ &\iff\vec{v}=z(0,-1,1)\\ &\iff\vec{v}\in\mathrm{Vect}(0,-1,1)\end{aligned}$$

et on en conclut que $(0,-1,1)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,f$.

- Si $a\neq1$, alors $z(a-1)=0\iff z=0$ et alors

$$\begin{aligned}\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,f&\iff\begin{cases}z=0\\ y=-z\\ x=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}z=0\\ y=0\\ x=0\end{cases}\\ &\iff\vec{v}=(0,0,0)\end{aligned}$$

et on en conclut que $\mathrm{Ker}\,f=\{\vec{0}\}$.

2. Un endomorphisme f est un automorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}\,f=\{\vec{0}\}$. Ici, ceci se produit si et seulement si $a\neq-1$.

3. On calcule

$$\begin{aligned}f(1,0,0)&=(1,2,1)\\ f(0,1,0)&=(-1,1,1)\\ f(0,0,1)&=(-1,1,1)\end{aligned}$$

et il est clair que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,f&=\mathrm{Vect}\big(f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1)\big)\\ &=\mathrm{Vect}\big((1,2,1),(-1,1,1)\big)\end{aligned}$$

et comme la famille $\big((1,2,1),(-1,1,1)\big)$ est manifestement libre, c'est une base de $\mathrm{Im}\,f$.

4. (a) Il est clair que H contient le vecteur nul. Il s'agit ensuite de démontrer que H est stable par combinaison linéaire.
Soit $\vec{v}=(x,y,z)\in H$, on a donc

$$x+2y+2z=0,$$

soit $\vec{v}\,' = (x', y', z') \in H$, on a donc $x' + 2y' + 2z' = 0$ et a, b des scalaires. Alors

$$a\vec{u} + b\vec{v}' = (ax + bx', ay + by', az + bz')$$

et

$$\begin{aligned}(ax+bx') + 2(ay+by') + 2(az+bz') &= a(x+2y+2z) + b(x'+2y'+2z')\\ &= a \times 0 + b \times 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$a\vec{v} + b\vec{v}\,' \in H$$

et donc que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\vec{v} = (x,y,z) \in H &\iff x = -2y - 2z\\ &\iff \vec{v} = (-2y-2z, y, z)\\ &\iff \vec{v} = y(-2,1,0) + z(-2,0,1)\\ &\iff \vec{v} \in \operatorname{Vect}\big((-2,1,0),(-2,0,1)\big)\end{aligned}$$

et comme il est manifeste que $\big((-2,1,0),(-2,0,1)\big)$ est une famille libre, c'est alors une base de H.

(b) On calcule dans ce cas

$$f(-2,1,0) = (-3,-3,-1),\ f(-2,0,1) = (2,-3,-1)$$

et puisque dans la cas $a = 0$, f est un automorphisme, $\big((-3,-3,-1),(2,-3,-1)\big)$ est une base de $f(H)$.

(c) On calcule dans ce cas

$$\begin{aligned}f(-2,1,0) &= (-3,-3,-1)\\ f(-2,0,1) &= (-3,-3,-1).\end{aligned}$$

L'image d'une base de H étant une famille génératrice de $f(H)$, on voit ici que

$$f(H) = \operatorname{Vect}(-3,-3,-1)$$

et donc $(-3,-3,-1)$ est une base de $f(H)$.

9. énoncé

1. Le système accompagant $f(x,y,z) = (0,0,0)$ conduit rapidement à

$$(x,y,z) = (0,0,0).$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ et du théorème du rang, il résulte que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. On a $f(\vec{u}) = \vec{v}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{aligned} x+z &= x'\\ 2x - y + z &= y'\\ -x + y - z &= z'.\end{aligned}\right.$$

En faisant $L_2 + L_3$, on obtient

$$x = y' + z'$$

puis L_1 donne

$$z = x' - y' - z'$$

et enfin L_2 donne

$$y = x' + z'.$$

Ainsi, l'unique antécédant de $\vec{v}$ est

$$(y'+z', x'+z', x'-y'-z').$$

3. Par définition, f^{-1} est l'application retournant les antécédants, donc

$$f^{-1} : \vec{v} = (x',y',z') \longmapsto (y'+z', x'+z', x'-y'-z').$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}f^{-1}(1,0,0) &= (0,1,1)\\ f^{-1}(0,1,0) &= (1,0,-1)\\ f^{-1}(0,0,1) &= (1,1,-1)\end{aligned}$$

donc la matrice de f^{-1} dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

qui est donc la matrice A^{-1} recherchée.

10. énoncé

1. On a

$$\begin{aligned}\vec{u} = (x,y,z) \in P &\iff z = x + y\\ &\iff \vec{u} = (x, y, x+y)\\ &\iff \vec{u} = x(1,0,1) + y(0,1,1),\end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$P = \operatorname{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

avec $\vec{v}_1 = (1,0,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1))$ et ces deux vecteurs formant manifestement une famille libre, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de P.

Ensuite, on utilise le critère: "deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si la réunion d'une base de l'un avec une base de l'autre forme une base (dite adaptée) de l'espace". On considère donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$; dans la mesure où la matrice de ces trois vecteurs dans la base canonique est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui a pour déterminant -3 (calcul facile) on en conclut que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc que P et D sont supplémentaires.
Ou encore (sans déterminant mais avec la méthode du pivot), en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

puis avec $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice échelonnée à 3 pivots. Ceci prouve que M est de rang 3 et donc que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc que P et D sont supplémentaires.

2. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On sait alors que $\vec{u}$ s'écrit de manière unique

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in P,\ \vec{u}_2 \in D.$$

- *Première méthode.* Puisque $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de P, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{u}_1 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$$

et puisque $D = \text{Vect}(\vec{v}_3)$, il existe $\gamma \in_R$ tel que

$$\vec{u}_2 = \gamma \vec{v}_3$$

si bien que

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in P,\ \vec{u}_2 \in D$$

s'écrit

$$\vec{u} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(2, -1, 0) \\ &= (\alpha + 2\gamma, \beta - \gamma, \alpha + \beta) \end{aligned}$$

et conduit donc au système

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = x \\ \beta - \gamma = y \\ \alpha + \beta = z. \end{cases}$$

$L_3 - L_1$ donne

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = x \\ \beta - \gamma = y \\ \beta - 2\gamma = z - x \end{cases}$$

et $L_3 - L_2$ donne

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = x \\ \beta - \gamma = y \\ -\gamma = z - x - y \end{cases}$$

c'est à dire

$$\gamma = x + y - z.$$

L_2 donne alors

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma + y \\ &= x + 2y - z \end{aligned}$$

et enfin, L_1 donne

$$\begin{aligned} \alpha &= x - 2\gamma \\ &= -x - 2y + 2z. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} p(\vec{u}) &= p(x, y, z) \\ &= \vec{u}_1 \\ &= \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 \\ &= (-x - 2y + 2z)\Big(1, 0, 1\Big) + (x + 2y - z)\Big(0, 1, 1\Big) \\ &= \Big(-x - 2y + 2z, 0, -x - 2y + 2z\Big) + \Big(0, x + 2y - z, x + 2y - z\Big) \\ &= (-x - 2y + 2z, x + 2y - z, z). \end{aligned}$$

On en déduit la matrice M de p dans la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: il suffit de suivre le protocole et de calculer avec cette formule:

$$\begin{aligned}
p(\vec{\imath}) &= p(1,0,0) \\
&= (-1,1,0) \\
p(\vec{\jmath}) &= p(0,1,0) \\
&= (-2,2,0) \\
p(\vec{k}) &= p(0,0,1) \\
&= (2,-1,1)
\end{aligned}$$

et d'écrire ces vecteurs verticalement. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- *Deuxième méthode.* Elle permet d'obtenir plus rapidement la décomposition

  $$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in P,\ \vec{u}_2 \in D.$$

  Puisque $D = \mathrm{Vect}(\vec{v}_3)$, $\vec{u}$ s'écrit sous la forme

  $$\vec{u} = \vec{u}_1 + \lambda\vec{v}_3, \quad \vec{u}_1 \in P,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

  Mais alors

  $$\vec{u}_1 \in P \iff \vec{u} - \lambda\vec{v}_3 \in P$$

  et puisque

  $$\vec{u} - \lambda\vec{v}_3 = \big(x - 2\lambda, y + \lambda, z\big),$$

  on a

  $$\begin{aligned}
  \vec{u}_1 \in P &\iff \big(x - 2\lambda, y + \lambda, z\big) \in P \\
  &\iff (x - 2\lambda) + (y + \lambda) - z = 0 \\
  &\iff \lambda = x + y - z,
  \end{aligned}$$

  d'où l'on déduit

  $$\begin{aligned}
  \vec{u}_1 &= \vec{u} - \lambda\vec{v}_3 \\
  &= \big(x - 2\lambda, y + \lambda, z\big) \\
  &= \Big(x - 2(x + y - z), y + (x + y - z), z\Big) \\
  &= \big(-x - 2y + 2z, x + 2y - z, z\big).
  \end{aligned}$$

On poursuit alors comme précédemment.