Feuille d'exercices n°7 premium

---

1. corrigé Démontrer que si A est une matrice carrée diagonalisable, alors A^T l'est aussi.

2. corrigé Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

son polynôme caractéristique. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on pose

$$\chi_A(B) = (\lambda_1 \mathrm{Id} - B) \dots (\lambda_n \mathrm{Id} - B).$$

Démontrer, en utilisant un déterminant, que $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre commune.

3. corrigé Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$) de rang 1 et de trace nulle. Démontrer que $M^2 = 0$.

4. corrigé On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

et on considère l'application

$$f : M \mapsto AM + MB.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Déterminer la matrice μ de f dans la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ constituée des matrices élémentaires.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

5. corrigé Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

1. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AV et en déduire une valeur propre de A.

2. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.

3. On suppose A diagonalisable.

(a) Soit X un vecteur propre associé à 1. Montrer que la suite de terme général

$$Y_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k X$$

est une suite convergente. En déduire sa limite.

(b) Même question pour X vecteur propre associé à $\lambda \neq 1$.

(c) Même question pour X quelconque.

1. énoncé Rappel: pour toutes matrices A et B de taille $n \times n$:

$$(AB)^T = B^T \times A^T$$

et pour tout matrice carrée inversible P, la matrice ${}^tP$ est inversible et:

$$\left(P^{-1}\right)^T = \left(P^T\right)^{-1}.$$

En supposant A diagonalisable, il existe donc D diagonale et P inversible telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

En transposant et en utilisant le rappel:

$$D^T = P^T \times A^T \times \left(P^T\right)^{-1}.$$

Comme $D = D^T$, on a obtenu l'égalité

$$Q^{-1}A^T Q = D,$$

ce qui démontre que A^T est semblable à une matrice diagonale i.e. A^T est diagonalisable.

2. énoncé $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or

$$\det(\chi_A(B)) = \det(B - \lambda_1 \mathrm{Id}) \times \ldots \times \det(B - \lambda_n \mathrm{Id}).$$

Donc $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si

$$\det(B - \lambda_1 \mathrm{Id}) \neq 0, \ldots, \det(B - \lambda_n \mathrm{Id}) \neq 0.$$

On a

$$\det(B - \lambda_1 \mathrm{Id}) = (-1)^n \det(\lambda_1 \mathrm{Id} - B)$$

et $\det(\lambda \mathrm{Id} - B)$ étant le polynôme caractéristique de B, on voit que $\det(\lambda_1 \mathrm{Id} - B) \neq 0$ si et seulement si λ_1 n'est pas racine du polynôme caractéristique de B, donc si et seulement si λ_1 n'est pas une valeur propre de B; de même pour $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

3. énoncé Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M. Alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(M) = 1$ donc $\mathrm{Ker}\, u$ est de dimension $n-1$ (théorème du rang). Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (théorème de la base incomplète). La matrice T de u dans $\mathcal{B}$ a alors l'allure suivante:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mais comme M et T représentent toutes deux u, elles sont semblables et en particulier ont même trace. Comme $\mathrm{Tr}(M) = 0$, c'est que $a_{nn} = 0$ et

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme on le voit aisément par le calcul, T^2 est la matrice nulle; puisqu'il existe une matrice inversible P telle que $M = P^{-1}TP$ (car T et M sont semblables), on a

$$M^2 = P^{-1}T^2P = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque: il y a mieux que calculer T^2 pour prouver que T^2 est la matrice nulle. On va démontrer que $f^2 = f \circ f$ est l'endomorphisme nul, ce qui entraînera que $T^2 = 0$, et pour démontrer que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul, on va utiliser le principe suivant:

> deux endomorphismes sont égaux dès lors qu'ils coïncident (prennent les mêmes valeurs) sur les vecteurs d'une base.

On va démontrer que $f^2(e) = \vec{0}$ pour tout vecteur e de la base $\mathcal{B}$.

- on a déjà
$$f(e_1) = \ldots f(e_{n-1}) = \vec{0}.$$
En composant par f, il vient
$$f^2(e_1) = \ldots = f^2(e_{n-1}) = f(\vec{0}) = \vec{0}.$$
- D'après la dernière colonne de T, on a
$$f(e_n) = a_{1n}e_1 + \ldots + a_{n-1n}e_{n-1}$$
et donc par linéarité,
$$f^2(e_n) = a_{1n}f(e_1) + \ldots + a_{n-1n}f(e_{n-1}) = \vec{0},$$
puisque $f(e_1) = \ldots f(e_{n-1}) = \vec{0}$. En conclusion, f^2 et l'endomorphisme nul coïncident sur la base $\mathcal{B}$ et c'est pourquoi f^2 est l'endomorphisme nul.

4. énoncé

1. L'application f est bien définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et à valeurs dans cet espace (produit de matrices 2×2 et somme) et par distributivité du produit matriciel, il est immédiat que cette application est linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Il faut bien avoir présent à l'esprit que f est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc f agit sur des matrices 2×2 (et non sur des vecteurs de $\mathbb{C}^2$) et que $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est un espace de dimension 4; la matrice recherchée est donc une matrice 4×4. La base en question est la base $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 2}}$ avec

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

On calcule

$$f(E_{11})=\begin{pmatrix}1+i&1-i\\0&0\end{pmatrix}\quad f(E_{12})=\begin{pmatrix}1-i&1+i\\0&0\end{pmatrix}$$
$$f(E_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\1+i&1-i\end{pmatrix}\quad f(E_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\1-i&1+i\end{pmatrix}$$

On voit que $f(E_{11})=(1+i)E_{11}+(1-i)E_{12}$ ou encore

$$f(E_{11})=(1+i)E_{11}+(1-i)E_{12}+0\times E_{21}+0\times E_{22}.$$

C'est pourquoi la première colonne de μ sera $\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\0\\0\end{pmatrix}$. En procédant de même avec les autres images, on obtient

$$\mu=\begin{pmatrix}1+i&1-i&0&0\\1-i&1+i&0&0\\0&0&1+i&1-i\\0&0&1-i&1+i\end{pmatrix}.$$

En développant le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&e&g\\0&0&f&h\end{vmatrix}$$

suivant sa première colonne, on obtient

$$\Delta=a\begin{vmatrix}d&0&0\\0&e&g\\0&f&h\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}c&0&0\\0&e&g\\0&f&h\end{vmatrix}$$

et en développant ces deux déterminants suivant leur première colonne:

$$\begin{aligned}\Delta&=ad\begin{vmatrix}e&g\\f&h\end{vmatrix}-bc\begin{vmatrix}e&g\\f&h\end{vmatrix}\\&=(ad-bc)\begin{vmatrix}e&g\\f&h\end{vmatrix}\\&\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}e&g\\f&h\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

C'est la formule de calcul d'un déterminant *par blocs*. En appliquabnt cette formule, le polynôme caractéristique P de μ est

$$\begin{aligned}P(\lambda)&=\begin{vmatrix}\lambda-(1+i)&i-1&0&0\\i-1&\lambda-(1+i)&0&0\\0&0&\lambda-(1+i)&i-1\\0&0&i-1&\lambda-(1+i)\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\lambda-(1+i)&i-1\\i-1&\lambda-(1+i)\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\lambda-(1+i)&i-1\\i-1&\lambda-(1+i)\end{vmatrix}\\&=\left[(\lambda-(1+i))^2-(i-1)^2\right]^2.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}(\lambda-(1+i))^2-(i-1)^2=0&\iff\lambda-(1+i)=\pm(i-1)\\&\iff\lambda=2\text{ ou }\lambda=2i.\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de f sont 2 et $2i$. En posant $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$, on a facilement

$$\begin{aligned}\mu X &= 2X \iff X = x\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\\ \mu X &= 2iX \iff X = x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc une base du sous-espace propre associé à 2 est constituée des matrices

$$(E_{11}+E_{12},E_{21}+E_{22})$$

et pour la valeur propre $2i$:

$$(E_{11}-E_{12},E_{21}-E_{22}).$$

5. énoncé

1. Du fait que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$, la i-ème composante de AX est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\times 1=1$ et c'est pourquoi $AV=V$. Ainsi, 1 est une valeur propre de A.

2. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ; alors $AX=\lambda X$ s'écrit

$$\forall i\in [\![1,n]\!],\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\lambda x_i. \tag{1}$$

Considérons l'indice i tel que

$$|x_i|=\max\{|x_k|\,,\,k\in[\![1,n]\!]\}$$

i.e. x_i est la plus grande composante, en valeur absolue, de X. On a alors, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|\le\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}x_j|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,|x_j|\le\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,|x_i|=|x_i|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=|x_i|\,.$$

De (??) on déduit alors $|\lambda|\,|x_i|\le|x_i|$, de quoi on déduit $|\lambda|\le 1$ (on a en effet $|x_i|\le 0$ car $|x_i|=0$ entraînerait $x_j=0$ pour tout j puisque x_i est censé être le plus grand des x_j; on aurait alors $X=0$, ce qui est exclu puisque X est un vecteur propre).

3. (a) Soit X un vecteur propre associé à une valeur propre λ: $AX=\lambda X$ et par une récurrence immédiate, on a $A^kX=\lambda^kX$ pour tout entier k. Ici, on a donc

$$Y_p=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}X=\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\right)X=X$$

et la suite (Y_p) est constante et donc convergente vers X.

(b) Comme signalé ci-dessus, on a $A^kX=\lambda^kX$; on a donc

$$Y_p=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^kX=\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^k\right)X.$$

- Si $|\lambda|<1$, alors

  $$\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^k\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1-\lambda}$$

  et en conséquence

  $$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^k\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0\times\frac{1}{1-\lambda}=0.$$

  On en déduit que Y_p tend vers la matrice colonne nulle lorsque p tend vers $+\infty$.

- Si $|\lambda|=1$, c'est que $\lambda=1$ (déjà vu) et si $\lambda=-1$, alors

  $$\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^k=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k=\begin{cases}1 & \text{si } p \text{ est pair}\\ 0 & \text{si } p \text{ est impair.}\end{cases}$$

  Donc

  $$\left|\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^k\right|\le 1\Rightarrow\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\lambda^k\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

  et là aussi Y_p tend vers la matrice colonne nulle lorsque p tend vers $+\infty$.

(c) Puisque A est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ de vecteurs propres; notons $(X_1, \ldots, X_{d_1})$ une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ que l'on décompose sur $\mathcal{B}$:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = \sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=d_1+1}^{n} \alpha_i X_i.$$

Par linéarité, on a

$$A^k X = A^k \left(\sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i X_i + \sum_{i=d_1+1}^{n} \alpha_i X_i \right) = A^k \left(\sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i X_i \right) + A^k \left(\sum_{i=d_1+1}^{n} \alpha_i X_i \right).$$

Notons $X' = \sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i X_i$, qui est un vecteur propre associé à la valeur propre 1: on a donc $A^k X' = X'$; pour $i \in [\![d_1+1, n]\!]$, notons λ_i les valeurs propres associées aux vecteurs propres $X_{d_1+1}, \ldots, X_n$ et $X'_i = \alpha_i X_i$: on a donc $\lambda_i \neq 1$ et X'_i est un vecteur propre associé à λ_i. Toujours par linéarité,

$$\begin{aligned}
A_k X^k &= A^k X' + \sum_{i=d_1+1}^{n} A^k X'_i = X' + \sum_{i=d_1+1}^{n} A^k X'_i \\
\frac{1}{p} \sum_{p=0}^{n-1} A^k X^k &= \frac{1}{p} \sum_{p=0}^{n-1} A^k X' + \sum_{i=d_1+1}^{n} \left(\frac{1}{p} \sum_{p=0}^{n-1} A^k X'_i \right) \\
&= X' + \sum_{i=d_1+1}^{n} \left(\frac{1}{p} \sum_{p=0}^{n-1} A^k X'_i \right).
\end{aligned}$$

D'après (b),

$$\forall i \in [\![d_1+1, n]\!], \quad \frac{1}{p} \sum_{p=0}^{n-1} A^k X'_i \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \vec{0}$$

si bien que

$$\frac{1}{p} \sum_{p=0}^{n-1} A^k X^k \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} X'.$$

Notons que X' est en fait le projeté de X dans la projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et parallèment à la somme des autres sous-espaces propres.