Feuille d'exercices n°7

---

1. corrigé Soit E un espace vectoriel, u un endomorphisme de E. On suppose que λ est une valeur propre de u et que x est un vecteur propre associé.

1. Démontrer que x est un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre λ^2.

2. Soit un entier $n \geq 2$. Démontrer que x est un vecteur propre de u^n associé à la valeur propre λ^n.

3. On considère un polynôme $P = a_N x^N + \ldots + a_1 X + a_0$. On pose alors

$$P(u) = a_N u^N + \ldots + a_1 u + a_0 \mathrm{Id}.$$

Démontrer que x est un vecteur propre associé à $P(\lambda)$.

4. On suppose que u est un automorphisme de E. Justifier que $\lambda \neq 0$ et démontrer alors que x est un vecteur propre de u^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.

2. corrigé Soit f, g, h les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ respectivement canoniquement associé aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer leurs polynômes caractéristiques, en déduire leurs valeurs propres et pour chacune des valeurs propres, déterminer une base du sous-espace propre associé.

2. Dire si ces endomorphismes sont diagonalisables et si oui, donner une base de l'espace constituée de vecteurs propres et une décomposition diagonale de leurs matrices.

3. corrigé On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

2. Calculer P^{-1}.

3. Calculer alors A^n.

4. corrigé On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$ (on ne calculera pas P^{-1}).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$; déterminer des réels a_n et b_n tels que

$$D^n = a_n I_3 + b_n D.$$

3. Démontrer alors que

$$A^n = a_n I_3 + b_n A$$

et calculer A^n.

5. corrigé Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser B.

2. En déduire une matrice diagonalisable A telle que $A^2 = B$.

6. corrigé On fixe un entier n et on note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\varphi : P \mapsto P - (X+1)P'$.

1. Rappeler la dimension de E.

2. Démontrer que φ est un endomorphisme de E.

3. Déterminer la matrice M de φ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

4. En déduire que φ est diagonalisable.

7. corrigé Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que la matrice A est non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

4. En déduire A^n.

1. énoncé

1. On a

$$\begin{aligned} u(x)=\lambda x \Rightarrow u(u(x)) &= u(\lambda x) \\ &= \lambda u(x) \\ &= \lambda \times \lambda x \\ &= \lambda^2 x, \end{aligned}$$

ce qui démontre que x est un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre λ^2.

2. Par récurrence sur n. C'est vrai pour $n=2$ et si c'est vrai à un rang $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} u^{n+1}(x) &= u(u^n(x)) \\ &= u(\lambda^n x) \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \lambda^n u(x) \\ &= \lambda^n \times \lambda x \quad (x \text{ est propre associé à } \lambda) \\ &= \lambda^{n+1} x, \end{aligned}$$

ce qui démontre que x est un vecteur propre de u^{n+1} associé à la valeur propre λ^{n+1}. La propriété est donc vraie au rang $n+1$ et donc pour tout entier $n \geq 2$ d'après le principe de récurrence.

3. De **2** on déduit:

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= a_N \lambda^N x + \ldots + a_1 \lambda x + a_0 x \\ &= \left(a_N \lambda^N + \ldots + a_1 \lambda + a_0\right) x \\ &= P(\lambda) x, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. Si λ était nul, on aurait $u(x) = \vec{0}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(u)$ ne serait pas réduit au seul vecteur nul, ce qui contredirait le fait que u est un automorphisme de E (car en cas d'automorphisme, on a $\mathrm{Ker}\,(u) = \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{Im}\,(u) = E$). On a ensuite

$$\begin{aligned} u(x)=\lambda x &\Rightarrow u^{-1}(u(x)) = u^{-1}(\lambda x) \\ &\Rightarrow x = \lambda u^{-1}(x) \quad (u^{-1} \text{ est linéaire}) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda} x = u^{-1}(x), \end{aligned}$$

ce qui démontre que x est un vecteur propre de u^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.

2. énoncé

1. En effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ puis en développant suivant la première ligne:

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & -3 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2+3\lambda)-4) \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+4). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2, -4\}$. En résolvant ensuite les systèmes $AX = X$, $AX = 2X$ et enfin $AX = -4X$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}(1,1,1) \\ \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}(-4,-3,2) \\ \mathrm{Ker}\,(f + 4\mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}(2,-3,2). \end{aligned}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis en développant suivant la deuxième ligne:

$$\begin{aligned} \chi_g(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -3 & -2 \\ 2 & \lambda-5 & -2 \\ -2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -3 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ -2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -3 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(g) = \{1, 2\}$, la valeur propre 1 étant simple et la valeur propre 2 étant double. En résolvant ensuite les systèmes $BX = X$ puis $BX = 2X$ on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}(1,1,-1) \\ \mathrm{Ker}\,(g - 2\mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}\big((3,2,0),(1,0,1)\big). \end{aligned}$$

En effectuant $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ puis en développant suivant la deuxième colonne:

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-2).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(h) = \{1,2\}$, la valeur propre 1 étant double et la valeur propre 2 étant simple. En résolvant ensuite les systèmes $CX = X$ puis $CX = 2X$ on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,(h - \mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}(1,1,0) \\
\mathrm{Ker}\,(h - 2\mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}(1,0,1).
\end{aligned}$$

2. • La somme des dimensions $1+1+1 = 3$ des sous-espaces propres de f égale la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$; donc f est diagonalisable et une base de vecteurs propres est

$$\big((1,1,1), (-4,-3,1), (2,-3,2)\big).$$

Enfin, on a

$$D = P^{-1}AP$$

avec

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\
P &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Remarque. On aurait pu affirmer *d'emblée* que f est diagonalisable car f possède 3 valeurs propres *distinctes* et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 (cf. condition *suffisante* de diagonalisation).

• La somme des dimensions $2+1 = 3$ des sous-espaces propres de g égale la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$; donc g est diagonalisable et une base de vecteurs propres est

$$\big((1,1,-1), (3,2,1), (1,0,1)\big).$$

Enfin, on a

$$D = P^{-1}BP$$

avec

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
P &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

• La somme des dimensions $1+1 = 2$ des sous-espaces propres de h n'est pas égale la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$; donc h n'est pas diagonalisable.

3. énoncé

1. On calcule

$$\mathrm{Sp}(A) = \{2,3,4\}$$

et on peut déjà affirmer que A est diagonalisable puisque A possède 3 vecteurs propres distinctes. On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,(A - 2I_3) &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathrm{Ker}\,(A - 3I_3) &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathrm{Ker}\,(A - 4I_3) &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc A est diagonalisable et on a $D = P^{-1}AP$ avec

$$\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
P &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. On calcule

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$A = PDP^{-1}$$

et donc

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

et on calcule

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 2^n-3^n & -2^n+3^n \\ -3^n+4^n & 3^n & -3^n+4^n \\ -3^n+4^n & -2^n+3^n & 2^n-3^n+4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. énoncé

1. On calcule

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (\lambda+1)(\lambda-2)^2 \\ \mathrm{Sp}(A) &= \{-1,2\} \end{aligned}$$

-1 étant simple et 2 étant double. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(A+I_3) &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{Ker}\,(A-2I_3) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Pour la diagonalisation de A, deux réponses possibles:

- la somme
$$1+2$$
des dimensions des sous-espaces propres de A égale la dimension de l'espace $\mathbb{R}^3$, donc A est diagonalisable (première condition nécessaire et suffisante de diagonalisation énoncée dans le cours).
- La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre simple -1 vaut 1 et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 vaut 2, donc A est diagonalisable (deuxième condition nécessaire et suffisante de diagonalisation énoncée dans le cours).

On a ensuite
$$D = P^{-1}AP$$

avec

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} D^n &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ a_nI_3+b_nD &= \begin{pmatrix} a_n-b_n & 0 & 0 \\ 0 & a_n+2b_n & 0 \\ 0 & 0 & a_n+2b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si bien que
$$D^n = a_nI_3+b_nD$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a_n-b_n = (-1)^n \\ a_n+2b_n = 2^n \\ a_n+2b_n = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} b_n = \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right) \\ a_n = \frac{1}{3}\left(2^n+2(-1)^n\right). \end{cases}$$

3. De
$$D = P^{-1}AP,$$

on déduit
$$A = PDP^{-1}$$

et
$$A^n = PD^nP^{-1}$$

et donc

$$\begin{aligned} A^n &= P(a_nI_3+b_nD)P^{-1} \\ &= P(a_nP^{-1}+b_nDP^{-1}) \\ &= Pa_nP^{-1}+Pb_nDP^{-1} \\ &= a_nPP^{-1}+b_nPDP^{-1} \\ &= a_nI_3+b_nA. \end{aligned}$$

(a) On calcule alors

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\left(2^n+2(-1)^n\right)I_3+\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)A \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n-(-1)^n & -2^n+(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & (-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & -2^n+(-1)^n & 2^{n+1}-(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. énoncé

1. Notons v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice B. On obtient aisément

$$\begin{array}{rcl} \chi_v(\lambda) & = & \lambda(\lambda-1)(\lambda-16) \\ \mathrm{sp}(v) & = & \{0,1,16\} \end{array}$$

et on peut déjà affirmer que v, et donc B, est diagonalisable puisque v possède 3 vecteurs propres distinctes. Le calcul donne

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}\,(f) & = & \mathrm{Vect}(0,1,1) \\ \mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) & = & \mathrm{Vect}(1,1,-1) \\ \mathrm{Ker}\,(f-16\mathrm{Id}) & = & \mathrm{Vect}(2,-1,1). \end{array}$$

Ainsi,

$$\mathcal{B} = \big((0,1,1),(1,1,-1),(2,-1,1)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres pour v et d'après les formules de changement de base, on a

$$D = P^{-1}BP$$

avec

$$\begin{array}{rcl} D & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \\ P & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

2. *Remarque importante:* c'est une situation archi-classique où la résolution d'une certaine équation impliquant une certaine matrice, ici B, est ramenée à un problème concernant une matrice qui lui est semblable, en l'occurrence une matrice diagonale.

En termes d'endomorphismes canoniquement associés, la méthode est naturelle.

- Soit A une matrice 3×3 et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
- On sait alors que A^2 est la matrice, dans la base canonique, associée à l'endomorphisme u^2 (c'est à dire $u\circ u$) si bien que

$$A^2 = B \iff u^2 = v.$$

- Maintenant, soit Δ la matrice de u dans la base de vecteurs propres de v

$$\mathcal{B} = \big((0,1,1),(1,1,-1),(2,-1,1)\big).$$

  Des formules de changement de base, on a

$$\Delta = P^{-1}AP.$$

  Puisque v est représenté par la matrice diagonale D ci-dessus, on a

$$u^2 = v \iff \Delta^2 = D$$

  si bien que le problème

$$A^2 = B$$

  est ramené au problème

$$\begin{array}{rcl} \Delta^2 & = & D \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \end{array}$$

  et ce problème admet la solution triviale

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  et il suffit maintenant de remonter à A:

$$\Delta = P^{-1}AP \implies A = P\Delta P^{-1}$$

  et en conclusion, la matrice

$$A = P\Delta P^{-1}$$

  vérifie

$$A^2 = B.$$

- Tous calculs faits (calcul de P^{-1} puis calcul du produit $P\Delta P^{-1}$), on trouve

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  De surcroît, A est diagonalisable, puisque A est semblable à la matrice diagonale Δ.

Pour terminer, apportons une autre preuve du fait que la matrice

$$A = P\Delta P^{-1}$$

vérifie

$$A^2 = B.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & P\Delta^2P^{-1} \\ & = & PDP^{-1} \\ & = & B. \end{array}$$

6. énoncé

1. $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, \dots, X^n)$.

2. Soit $P \in E$; il est clair que
$$P - (X+1)P'$$
est un polynôme et que
$$\deg(P) \leq n,$$
donc
$$\deg(P') \leq (n-1),$$
d'où
$$\deg(X+1)P' \leq n$$
et alors
$$\deg(P - (X+1)P') \leq n.$$
Ceci prouve que φ est bien une application de E dans E. Ensuite,
$$\begin{aligned}
\varphi(aP+bQ) &= (aP+bQ) - (X+1)(aP+bQ)' \\
&= (aP+bQ) - (X+1)(aP'+bQ') \\
&= a(P - (X+1)P') + b(Q - (X+1)Q') \\
&= a\varphi(P) + b\varphi(Q),
\end{aligned}$$
ce qui prouve que φ est linéaire et finalement que φ est un endomorphisme de E.

3. Pour déterminer cette matrice, on doit calculer dans un premier temps $\varphi(1), \varphi(X), \dots, \varphi(X^n)$. On a
$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= 1 \\
&= 1 \times 0 + 0 \times X + \dots + 0 \times X^n,
\end{aligned}$$
ce qui démontre par définition que la première colonne de la matrice M de φ dans $(1, X, \dots, X^n)$ est
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ensuite, pour $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= X - (X+1) \\
&= -1 \\
&= -1 \times 0 + 0 \times X + \dots + 0 \times X^n,
\end{aligned}$$
donc la deuxième colonne de M est
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Plus généralement, pour $k \in [\![2, n]\!]$,
$$\begin{aligned}
\varphi(X^k) &= X^k - k(X+1)X^{k-1} \\
&= -X^{k-1} + (1-k)X^k \\
&= 0 \times 1 + \dots 0 \times X^{k-2} - 1 \times X^{k-1} + (1-k) \times X^k + 0 \times X^{k+1} + \dots + 0 \times X^n,
\end{aligned}$$
et donc la $(k+1)$-ième colonne de M est
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1-k \\ 0 \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ainsi,
$$M = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & 1-k & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1-n
\end{pmatrix}.$$

4. La matrice M est triangulaire; ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux
$$1, 0, -1, -2, \dots, 1-n.$$
Elles sont deux à deux distinctes et au nombre de $n+1$. Ainsi M, et donc φ, possède
$$(n+1) = \dim(E)$$
valeurs propres deux à deux distinctes. On sait alors d'après un résultat du cours que φ est diagonalisable.

7. énoncé

1. Les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 3 (double). Puisque
$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
est de rang 2 (les colonnes 1 et 3 sont clairement linéairement indépendantes), on a
$$\dim(\mathrm{Ker}\,(A - 3I_3)) = 1$$

d'après le théorème du rang donc A n'est pas diagonalisable car la théorie exige que pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé soit égale à sa multiplicité, ce qui n'est pas le cas pour la valeur propre 3.

En revanche, A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ i.e. ne possède que des racines réelles (théorème du cours).

2. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Il s'agit donc de trouver une base

$$\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u) = T,$$

c'est à dire trois vecteurs linéairement indépendants

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

tels que

$$\begin{cases} u(\vec{v}_1) = -\vec{v}_1 \\ u(\vec{v}_2) = 3\vec{v}_2 \\ u(\vec{v}_3) = \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3. \end{cases}$$

- La résolution de $AX = -X$ conduit à prendre

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 1).$$

- La résolution de $AX = 3X$ conduit à prendre

$$\vec{v}_2 = (1, 1, 0).$$

On recherche ensuite un vecteur $\vec{v}_3 = (x, y, z)$ tel que

$$u(\vec{v}_3) = v_2 + 3v_3,$$

c'est à dire tel que

$$(3x - 4z, 2x + y, -x + y + z) = (1, 1, 0) + (3x, 3y, 3z),$$

ce qui se produit si et seulement si

$$\begin{cases} 3x - 4z = 1 + 3x \\ 2x + y = 1 + 3y \\ -x + y + z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} z = -\frac{1}{4} \\ 2x - 2y = 1 \\ -x + y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Puisque L_2 et L_3 sont proportionnelles, on ne garde que

$$\begin{cases} z = -\frac{1}{4} \\ -x + y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

et on voit que l'on peut prendre

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(il existe une infinité de possibilités, il suffit d'en choisir une). On prendra donc

$$\vec{v}_3 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right).$$

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -1,$$

ce qui démontre que

$$\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

est une base et par construction même,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u) = T.$$

Ainsi, A et T sont semblables et

$$T = P^{-1}AP$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3. La démonstration se fait immédiatement par récurrence.

4. De

$$T = P^{-1}AP,$$

on déduit

$$A = PTP^{-1}$$

puis

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

On calcule

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{aligned} A^n &= PT^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^n}{4} + \left(\dfrac{9}{4} + n\right) 3^{n-1} & \frac{-(-1)^n}{4} + \left(\frac{3}{4} - n\right) 3^{n-1} & \frac{(-1)^n}{2} - \left(\frac{3}{2} + 2n\right) 3^{n-1} \\ \frac{-(-1)^n}{4} + \left(\frac{3}{4} + n\right) 3^{n-1} & \frac{(-1)^n}{4} + \left(\frac{9}{4} - n\right) 3^{n-1} & \frac{-(-1)^n}{2} + \left(\frac{3}{2} - 2n\right) 3^{n-1} \\ \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{4}3^n & \frac{-(-1)^n}{4} + \frac{1}{4}3^n & \frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2}3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$