Feuille d'exercices n$^\circ$9 premium

1. corrigé Dans un espace euclidien E, soit p et q deux projecteurs orthogonaux.

1. Démontrer que si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$, alors $\mathrm{Ker}\,(q) \subset \mathrm{Ker}\,(p)$.

2. Établir la réciproque.

2. corrigé Soit E un espace préhilbertien. Pour tous vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de E, on note $G(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indices (i, j) est $\langle u_i, u_j \rangle$.

1. On suppose que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée. Démontrer que $\det(G(u_1, \ldots, u_p)) = 0$ (on pourra par exemple supposer que u_p est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{p-1}$).

2. On suppose que $\det(G(u_1, \ldots, u_p)) = 0$.

(a) Justifier que l'une des colonnes de $G(u_1, \ldots, u_p)$ est combinaison linéaire des autres. Par la suite, on pourra supposer qu'il s'agit de la dernière.

(b) Démontrer alors que u_p est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_{p-1}$.

(c) Quel résultat a-t-on établi?

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E; on suppose que F est de dimension finie p et que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F. Soit $x \in E$. En écrivant $x = u + n$ avec $u \in F$ et $n \in F^\perp$, démontrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det(G(e_1, \ldots, e_p, x))}{\det(G(e_1, \ldots, e_p))}}.$$

1. énoncé

1. Soit $x \in \mathrm{Ker} q$; il s'agit donc de démontrer que $x \in \mathrm{Ker} p$. Or $q(x) = \vec{0}$, donc $\|q(x)\| = 0$ et comme $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$, on a aussi $\|p(x)\| = 0$ c'est à dire $p(x) = \vec{0}$ i.e. $x \in \mathrm{Ker}\, p$. L'inclusion est donc démontrée.

2. Rappelons que p étant une projection orthogonale, on a *l'inégalité de Bessel*:

$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

En effet, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}\, p$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\, p$; alors par définition d'une projection, $p(x) = x_1$ et par définition d'une projection orthogonale, on a $x_1 \perp x_2$. On peut alors appliquer le théorème de Pythagore:

$$\|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2,$$

(car $\|x_2\|^2 \geq 0$), ce qui démontre que $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$. Cela étant, on écrit

$$x = x_1 + x_2,\ x = x_1' + x_2'$$

avec $x_1 \in \mathrm{Im}\, p,\ x_2 \in \mathrm{Ker}\, p,\ x_1' \in \mathrm{Im}\, q,\ x_2' \in \mathrm{Ker}\, q$, si bien que

$$p(x) = x_1,\ q(x) = x_1'.$$

On a

$$x_2' = x - x_1'$$

et comme par hypothèse $\mathrm{Ker}\, q \in \mathrm{Ker}\, p$, on a $x_2' \in \mathrm{Ker}\, p$ et donc $x - x_1' \in \mathrm{Ker}\, p$. En conséquence, $p(x - x_1') = \vec{0}$ et donc, par linéarité, $p(x) = p(x_1')$. Du rappel ci-dessus appliqué à x_1', on a

$$\|p(x_1')\| \leq \|x_1'\|$$

c'est à dire

$$\|p(x_1')\| \leq \|q(x)\|$$

et comme $p(x_1') = p(x)$, le résultat s'ensuit.

2. énoncé

1. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ étant supposée liée, c'est que l'un des vecteurs (au moins) est combinaison linéaire des autres; quitte à les permuter, on peut supposer que u_p est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{p-1}$: il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ tels que

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1}.$$

Examinons la dernière colonne de $G(u_1, \ldots, u_p)$. Son premier coefficient ($i = 1,\ j = p$) est $\langle u_1, u_p \rangle$, c'est à dire

$$\langle u_1, \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1} \rangle$$

ou encore

$$\alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \ldots + \alpha_{p-1} \langle u_1, u_{p-1} \rangle.$$

De la même manière, le deuxième coefficient ($i = 2,\ j = p$) vaut

$$\alpha_1 \langle u_2, u_2 \rangle + \ldots + \alpha_{p-1} \langle u_2, u_{p-1} \rangle$$

et le dernier coefficient ($i = p,\ j = p$) vaut

$$\alpha_1 \langle u_p, u_2 \rangle + \ldots + \alpha_{p-1} \langle u_p, u_{p-1} \rangle$$

et on voit que la dernière colonne C_p de $G(u_1, \ldots, u_p)$ est combinaison de ses $p-1$ premières $C_1, \ldots, C_{p-1}$:

$$C_p = \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_{p-1} C_{p-1}.$$

La matrice $G(u_1, \ldots, u_p)$ comporte donc une colonne qui est combinaison d'autres colonnes: elle n'est pas de rang p, donc non inversible, et c'est pourquoi $\det(G(u_1, \ldots, u_p)) = 0$.

2. C'est la réciproque de la propriété précédente: si $\det(G(u_1, \ldots, u_p)) = 0$, c'est que $G(u_1, \ldots, u_p)$ n'est pas inversible; elle n'est donc pas de rang p et c'est pourquoi l'une de ses colonnes est combinaison des autres.

3. Quitte à permuter les vecteurs, on peut supposer la dernière colonne de $G(u_1, \ldots, u_p)$ est combinaison des autres: il existe donc des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ tels que

$$C_p = \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_{p-1} C_{p-1}.$$

C'est donc que l'on a, au niveau du premier, puis du deuxième ... et jusqu'au dernier coefficient de cette colonne

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_p \rangle &= \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \ldots + \alpha_{p-1} \langle u_1, u_{p-1} \rangle, \\
\langle u_2, u_p \rangle &= \alpha_1 \langle u_2, u_2 \rangle + \ldots + \alpha_{p-1} \langle u_2, u_{p-1} \rangle, \\
&\vdots \\
\langle u_p, u_p \rangle &= \alpha_1 \langle u_p, u_2 \rangle + \ldots + \alpha_{p-1} \langle u_p, u_{p-1} \rangle.
\end{aligned}$$

Ou encore, en "dé-développant" les produits scalaires qui figurent dans les membres de droite:

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_p \rangle &= \langle u_1, \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1} \rangle, \\
\langle u_2, u_p \rangle &= \langle u_2, \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1} \rangle, \\
&\vdots \\
\langle u_p, u_p \rangle &= \langle u_p, \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1} \rangle
\end{aligned}$$

et en faisant tout passer à gauche:

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_p - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1}) \rangle &= 0, \\
\langle u_2, u_p - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1}) \rangle &= 0, \\
&\vdots \\
\langle u_p, u_p - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1}) \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Le vecteur $u_p - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1})$ a donc un produit scalaire nul avec u_1, avec u_2, ..., avec u_p donc, par bilinárité du produit scalaire, avec tout combinaison des vecteurs $u_1,\ u_2,\ \ldots u_p$ et donc en particulier avec lui-même! C'est à dire: le carré de la norme du vecteur $u_p - (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1})$ est nul; c'est la preuve que ce vecteur est nul i.e.

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{p-1} u_{p-1},$$

ce qui démontre que u_p est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_{p-1}$.

4. On a donc établi que $\det(G(u_1, \ldots, u_p)) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée.

5. Par définition, on a alors $p(x) = u$ et par théorème, $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ et donc

$$d(x, F) = \|n\|.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} & G(e_1, \ldots, e_p, x) = G(e_1, \ldots, e_p, u+n) \\ = & \begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \ldots & \langle e_1,e_p\rangle & \langle e_1,u+n\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p,e_1\rangle & \ldots & \langle e_p,e_p\rangle & \langle e_p,u+n\rangle \\ \langle u+n,e_1\rangle & \ldots & \langle u+n,e_p\rangle & \langle u+n,u+n\rangle \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On a $n \perp u_1$, $n \perp u_2$, $\ldots$, $n \perp u_n$ et donc

$$\begin{aligned} \langle e_1, u+n\rangle &= \langle e_1, u\rangle + \langle e_1, n\rangle = \langle e_1, u\rangle \\ &\vdots \\ \langle e_p, u+n\rangle &= \langle e_p, u\rangle + \langle e_p, n\rangle = \langle e_p, u\rangle, \end{aligned}$$

et puisque $u \perp n$, on a d'après Pythagore:

$$\langle u+n, u+n\rangle = \|u+n\|^2 = \|u\|^2 + \|n\|^2.$$

Ainsi,

$$G(e_1, \ldots, e_p, u+n) = \begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \ldots & \langle e_1,e_p\rangle & \langle e_1,u\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p,e_1\rangle & \ldots & \langle e_p,e_p\rangle & \langle e_p,u\rangle \\ \langle u,e_1\rangle & \ldots & \langle u,e_p\rangle & \|u\|^2+\|n\|^2 \end{vmatrix}$$

Par ailleurs, rappelons que le calcul d'un déterminant est une opération multilinéaire par rapport aux colonnes (par rapport aux lignes aussi), ce qui signifie que si $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes d'une matrice M et que la colonne C_n s'écrit comme une combinaison $C_n = \alpha K_n + \beta L_n$, alors

$$\begin{aligned} \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n) = \alpha \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, K_n) \\ + \beta \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, L_n). \end{aligned}$$

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha k_1+\beta\ell_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha k_2+\beta\ell_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha k_3+\beta\ell_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ell_1 \\ a_2 & b_2 & \ell_2 \\ a_3 & b_3 & \ell_3 \end{vmatrix}.$$

En décoposant alors la dernière colonne de $G(u_1, \ldots, u_p, x)$ on obtient alors

$$G(e_1, \ldots, e_p, u+n) = \begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \ldots & \langle e_1,e_p\rangle & \langle e_1,u\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p,e_1\rangle & \ldots & \langle e_p,e_p\rangle & \langle e_p,u\rangle \\ \langle u,e_1\rangle & \ldots & \langle u,e_p\rangle & \|u\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \ldots & \langle e_1,e_p\rangle & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p,e_1\rangle & \ldots & \langle e_p,e_p\rangle & 0 \\ \langle u,e_1\rangle & \ldots & \langle u,e_p\rangle & \|n\|^2 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant n'est autre, par définition, que $\det(G(e_1, \ldots, e_p, u))$. Puisque $u \in F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, la famille $(e_1, \ldots, e_p, u)$ est liée est alors $\det(G(e_1, \ldots, e_p, u)) = 0$ d'après **1**. Enfin, en développant le deuxième déterminant par rapport à sa dernière colonne, on voit qu'il vaut exactement

$$\|n\|^2 \det(G(e_1, \ldots, e_p)).$$

Ainsi,

$$\sqrt{\frac{\det(G(e_1, \ldots, e_p, x))}{\det(G(e_1, \ldots, e_p))}} = \sqrt{\frac{\|n\|^2 \det(G(e_1, \ldots, e_p))}{\det(G(e_1, \ldots, e_p))}} = \|n\|,$$

d'où le résultat.