Feuille d'exercices n°9

1. corrigé Sur $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\varphi_1\big((x,y),(x',y')\big) &= xx'-xy'-yx'+3yy'\\ \varphi_2\big((x,y),(x',y')\big) &= xx'-4xy'-4yx'+3yy'\end{aligned}$$

définissent-elles des produits scalaires?

2. corrigé On fixe un entier $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit $M=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\mathrm{Tr}(M^TM)$, où M^T est la transposée, à l'aide des coefficients a_{ij}.
2. Démontrer que
$$\varphi(M,N)=\mathrm{Tr}(M^TN),$$
où Tr désigne la trace définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. corrigé Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2\leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$$

et préciser les cas d'égalité.

4. corrigé Soit un entier $n\geq 2$. L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes de taille $n\times 1$ est muni de son produit scalaire canonique:

$$\langle X,Y\rangle = X^TY.$$

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\mathrm{Ker}\,(A)\subset\mathrm{Ker}\,(A^TA)$.
2. Démontrer que pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$A^TAX=0\Longrightarrow AX=0.$$
On pourra calculer $\|AX\|^2$.
3. En déduire que $\mathrm{Ker}\,A=\mathrm{Ker}\,(A^TA)$ puis $\mathrm{rg}(A^TA)=\mathrm{rg}(A)$.

5. corrigé Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et de classe C^1 sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Pour tout $(f,g)\in E^2$, on pose

$$\varphi(f,g)=f(0)g(0)+\int_0^1(f'(t)-f(t))(g'(t)-g(t))\,dt.$$

1. Démontrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Soit $f\in E$ telle que $\varphi(f,f)=0$.
   (a) Démontrer que f est solution de l'équation différentielle $y'-y=0$.
   (b) En déduire que f est la fonction nulle.
   (c) En déduire que φ est un produit scalaire sur E.
3. On note $f_1:t\mapsto 1$, $f_2:t\mapsto t$ et $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$. À l'aide du procédé de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de F.

6. corrigé Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ usuel, on pose $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(1,2,0,1)$ et on note $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. En déduire la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale p sur F.
3. Déterminer cette matrice par une autre méthode du cours.
4. Déterminer une base de $F^\perp$.

7. corrigé Soit P le plan vectoriel d'équation $x+2y+z=0$.

1. Former la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, de la projection orthogonale sur P.
2. Calculer la distance de $\vec{u}=(0,2,1)$ à P.

8. corrigé On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. (a) Soit un entier $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx$ est convergente.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}P(x)Q(x)e^{-x}\,dx$ est convergente pour tout $(P,Q)\in E^2$.
2. Pour tout $(P,Q)\in E^2$, on pose
$$\langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty}P(x)Q(x)e^{-x}\,dx.$$
Démontrer soigneusement que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Démontrer par récurrence sur n que pour tout entier n,
$$\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx=n!.$$
4. Soit le sous-espace vectoriel $F=\mathbb{R}_1[X]$ de E (polynômes de degré ≤ 1) et $P=X^2$.
   (a) Déterminer le projeté orthogonal de P sur F.
   (b) En déduire la distance d de X^2 à F.
5. *Autre méthode pour déterminer le projeté orthogonal Q de P sur F.* Déterminer une base orthonormée de F. En déduire Q.
6. En déduire la valeur de
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\left(x^2-(ax+b)\right)^2e^{-x}dx.$$

1. énoncé Dans les deux cas, la symétrie et bilinéarité sont évidentes. On a ensuite

$$\begin{aligned}\varphi_1((x,y),(x,y)) &\\ &= x^2-2xy+3y^2\\ &= (x-y)^2-y^2+3y^2\\ &= (x-y)^2+2y^2,\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\varphi_1((x,y),(x,y)) \geq 0$$

et si

$$\varphi_1((x,y),(x,y)) = 0,$$

c'est que, en tant que somme de deux carrés qui est nulle, chaque carré est nul, donc

$$\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ \text{et} \\ y=0 \end{array}\right. ,$$

d'où

$$x=y=0$$

ce qui prouve la définie positivité et le fait que φ_1 est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

En revanche,

$$\begin{aligned}\varphi_2((x,y),(x,y)) &\\ &= x^2-8xy+3y^2\\ &= (x-4y)^2-16y^2+3y^2\\ &= (x-4y)^2-13y^2.\end{aligned}$$

Choisissons un vecteur en lequel

$$x-4y=0,$$

comme le vecteur $(4,1)$. On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_2(4,1) &= 0-13\times 1^2\\ &= -13\\ &< 0,\end{aligned}$$

si bien que la propriété de définie positivité n'est pas satisfaite: φ_2 ne définit donc pas de produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. énoncé

1. Posons

$$M=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}.$$

Alors $M^T=(b_{ij})$ avec

$$b_{ij}=a_{ji},$$

puis $M^TM=(c_{ij})$ avec

$$\begin{aligned}c_{ij} &= \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}.\end{aligned}$$

Enfin, $\varphi(M,M)$ est la somme des éléments diagonaux c_{ii} de M^TM:

$$\begin{aligned}\varphi(M,M) &= \sum_{i=1}^n c_{ii}\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{ki}\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ki}^2.\end{aligned}$$

2. On a

$$\varphi(N,M)=\mathrm{Tr}(N^TM)$$

et de façon évidente, une matrice et sa transposée ont la même trace (car elles ont la même diagonale). Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(N^TM)=\mathrm{Tr}\big((N^TM)^T\big).$$

Mais on sait que la transposition renverse l'ordre des facteurs:

$$(AB)^T=B^T\times A^T.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big((N^TM)^T\big) &= \mathrm{Tr}(M^T\times(N^T)^T)\\ &= \mathrm{Tr}(M^T\times N).\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\varphi(N,M)=\varphi(M,N)$$

i.e. φ est symétrique.

Étudions ensuite la bilinéarité est claire: soit $M,M'N$ tros matrices $n\times n$ et a,b deux scalaires; alors

$$\begin{aligned}\varphi(aM+bM',N) &= \mathrm{Tr}\big((aM+bM')^T\times N\big)\\ &= \mathrm{Tr}\big((aM^T+bM'^T)N\big)\\ &= \mathrm{Tr}\big(aM^TN+bM'^TN\big)\\ &= a\mathrm{Tr}(M^TN)+b\mathrm{Tr}(M'TN) \text{ (linéarité de la trace)}\\ &= a\varphi(M,N)+b\varphi(M',N).\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire à gauche et, par symétrie, bilinéaire.

Enfin, posons

$$M = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}.$$

Grâce à **1**, on a

$$\varphi(M,M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2,$$

ce qui prouve que

$$\varphi(M,M) \geq 0$$

et si $\varphi(M,M)=0$, c'est que, en tant que somme de carrés qui est nulle, chaque carré a_{ki}^2 est nul i.e.

$$a_{ki} = 0$$

et ce, pour tout k et tout i. Ainsi, tous les coefficients de M sont nuls, ce qui démontre que si

$$\varphi(M,M) = 0,$$

c'est que M est la matrice nulle.

La définie positivité est démontrée: φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. énoncé Posons

$$\vec{u} = (x_1,\ldots,x_n)$$

et

$$\vec{v} = (1,\ldots,1).$$

Alors Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique donne

$$|x_1+\ldots+x_n| \leq \sqrt{(x_1^2+\ldots+x_n^2)(1+\ldots+1)}$$

c'est à dire

$$|x_1+\ldots+x_n| \leq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

En élevant au carré, on obtient le résultat.

4. énoncé

1. On a

$$AX=0 \Longrightarrow A^TAX=0,$$

ce qui prouve l'inclusion des noyaux.

2. On a

$$A^TAX=0 \Longrightarrow X^TA^TAX=0$$

i.e.

$$(AX)^TAX=0$$

c'est à dire $\|AX\|^2=0$, donc $AX=0$ par propriété fondamentale d'une norme.

3. De **3**, on déduit

$$\text{Ker }(A^TA) \subset \text{Ker }(A)$$

et finalement

$$\text{Ker } A = \text{Ker }(A^TA).$$

On conclut par le théorème du rang appliqué deux fois:

$$\begin{aligned}\dim(\text{Ker }(A)) + \text{rg}(A) &= n\\ \dim(\text{Ker }(A^TA)) + \text{rg}(A^TA) &= n\end{aligned}$$

et comme

$$\text{Ker } A = \text{Ker }(A^TA),$$

on a

$$\dim(\text{Ker }(A)) = \dim(\text{Ker }(A^TA))$$

et alors

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^TA).$$

5. énoncé

1. Évident.

2. (a) On a alors

$$f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t)-f(t))^2\,dt = 0,$$

et comme il s'agit d'une somme de deux termes positifs, c'est que chaque terme est nul; on a donc

$$f(0)=0$$

et

$$\int_0^1 (f'(t)-f(t))^2\,dt = 0.$$

La fonction continue et positive

$$t \mapsto (f'(t)-f(t))^2$$

ayant une intégrale nulle sur $[0,1]$ est alors la fonction nulle sur $[0,1]$ d'après une propriété de l'intégrale. Donc

$$\forall t \in [0,1],\ f'(t)-f(t)=0$$

et f est bien une solution de l'équation différentielle

$$y'-y=0$$

sur $[0,1]$.

(b) Il existe donc un réel C tel que

$$\forall t\in[0,1],\ f(t)=Ce^t$$

mais comme $f(0)=0$, on en déduit $C=0$. Ainsi, f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

(c) Il est clair que
$$\varphi(f,f) \geq 0$$
pour tout $f \in E$ et on vient de démontrer la définie positivité. Donc φ est bien un produit scalaire sur E.

3. On pose
$$e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1$$
et comme
$$\begin{aligned}\langle f_1, f_1\rangle &= 1\times 1 + \int_0^1 (0-1)(0-1)\,dt \\ &= 1 + \int_0^1 dt \\ &= 2,\end{aligned}$$
on a
$$\|f_1\| = \sqrt{2}$$
et donc
$$e_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
On recherche ensuite
$$e_2 = ae_1 + bf_2$$
de manière à ce que
$$\begin{cases}\langle e_2, e_1\rangle = 0 \\ \|e_2\| = 1.\end{cases}$$
On a
$$\begin{aligned}\langle e_2, e_1\rangle &= \langle ae_1 + bf_2, e_1\rangle \\ &= a\langle e_1, e_1\rangle + b\langle f_2, e_1\rangle \\ &= a + b\langle f_2, e_1\rangle.\end{aligned}$$
On a
$$\begin{aligned}\langle f_2, e_1\rangle &= 0\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^1 (1-t)\times\left(0-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (t-1)\,dt \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$
si bien que
$$\langle e_2, e_1\rangle = 0 \iff a = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$
et alors
$$\begin{aligned}e_2 &= ae_1 + bf_2 \\ &= \frac{b}{2\sqrt{2}}e_1 + bf_2 \\ &= b\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}e_1 + f_2\right)\end{aligned}$$
de sorte que
$$\|e_2\| = |b|\left\|\frac{1}{2\sqrt{2}}e_1 + f_2\right\|.$$
On a
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{2}}e_1 + f_2 : t &\longmapsto \frac{1}{4} + t \\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}e_1 + f_2\right)' : t &\longmapsto 1\end{aligned}$$
d'où
$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2\sqrt{2}}e_1 + f_2\right\|^2 &= \frac{1}{16} + \int_0^1\left(1 - \frac{1}{4} - t\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{16} + \int_0^1\left(\frac{3}{4} - t\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{16} + \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - t\right)^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64}\right) \\ &= \frac{3\times 4 + 1 + 27}{3\times 64} \\ &= \frac{5}{24}\end{aligned}$$
d'où
$$\left\|\frac{1}{2\sqrt{2}}e_1 + f_2\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$
si bien que
$$\|e_2\| = 1 \iff |b| = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$
Prenons
$$b = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$
On a alors
$$e_2 = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}e_1 + f_2\right)$$

c'est à dire

$$e_2 : t \longmapsto \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+t\right)$$

Ainsi, (e_1, e_2) avec

$$\begin{aligned} e_1 : t &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \\ e_2 : t &\longmapsto \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+t\right) \end{aligned}$$

est une base orthonormée de F.

6. énoncé

1. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (v_1, v_2) de F. On commence par poser

$$\begin{aligned} f_1 = &= \frac{1}{\|v_1\|}v_1 \\ &= \frac{1}{2}v_1 \\ &= \frac{1}{2}(1,1,1,1) \end{aligned}$$

puis on recherche

$$f_2 = af_1 + bv_2$$

de manière à ce que

$$\begin{cases} \langle f_2, f_1\rangle = 0 \\ \|f_2\| = 1. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle f_2, f_1\rangle &= \langle af_1 + bv_2, f_1\rangle \\ &= a\langle f_1, f_1\rangle + b\langle v_2, f_1\rangle \\ &= a + 2b \end{aligned}$$

si bien que

$$\langle f_2, f_1\rangle = 0 \iff a = -2b$$

et alors

$$\begin{aligned} f_2 &= af_1 + bv_2 \\ &= -2bf_1 + bv_2 \\ &= b(-2f_1 + v_2) \\ &= b\big(-(1,1,1,1) + (1,2,0,1)\big) \\ &= b(0,1,-1,0) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|f_2\| &= |b|\|(0,1,-1,1,0)\| \\ &= |b|\sqrt{2} \end{aligned}$$

et en conséquence

$$\|f_2\| = 1 \iff |b|\sqrt{2} = 1.$$

Prenons

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On a alors

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$$

et ainsi

$$\left(\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)\right)$$

est une base orthonormée de F.

2. Déterminer la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection p orthogonale sur F, c'est, suivant le protocole, calculer les images des vecteurs

$$(e_1, e_2, e_3, e_4)$$

de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et d'écrire ces images en colonne. On va donc calculer l'image de tout vecteur v de $\mathbb{R}^4$ par le biais de la formule du cours

$$p(v) = \langle v, f_1\rangle f_1 + \langle v, f_2\rangle f_2.$$

Partant de

$$v = (x,y,z,t),$$

on a

$$\begin{aligned} \langle v, f_1\rangle &= \frac{1}{2}(x+y+z+t) \\ \langle v, f_1\rangle f_1 &= \frac{x+y+z+t}{4}(1,1,1,1) \\ \langle v, f_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z) \\ \langle v, f_2\rangle f_2 &= \frac{y-z}{2}(0,1,-1,0) \end{aligned}$$

et

$$\frac{x+y+z+t}{4}(1,1,1,1) + \frac{y-z}{2}(0,1,-1,0) = \left(\frac{x+y+z+t}{4}, \frac{x+3y-z+t}{4}, \frac{x-y+3z+t}{4}, \frac{x+y+z+t}{4}\right)$$

si bien que

$$p(x,y,z,t) = \left(\frac{x+y+z+t}{4}, \frac{x+3y-z+t}{4}, \frac{x-y+3z+t}{4}, \frac{x+y+z+t}{4}\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} p(1,0,0,0) &= \left(\frac14,\frac14,\frac14,\frac14\right)\\ p(0,1,0,0) &= \left(\frac14,\frac34,-\frac14,\frac14\right)\\ p(0,0,1,0) &= \left(\frac14,-\frac14,\frac34,\frac14\right)\\ p(0,0,0,1) &= \left(\frac14,\frac14,\frac14,\frac14\right)\end{aligned}$$

et c'est pourquoi

$$M=\begin{pmatrix} \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14\\ \frac14 & \frac34 & -\frac14 & \frac14\\ \frac14 & -\frac14 & \frac34 & \frac14\\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \end{pmatrix}.$$

3. La deuxième méthode est basée sur le principe suivant:

> Si $\mathcal{B}=(\vec v_1,\ldots,\vec v_r)$ du sous-espace vectoriel F, un vecteur $\vec w$ appartient à $F^\perp$ si et seulement si $\vec w$ est orthogonal à tout vecteur de cette base i.e.
>
> $$\begin{cases}\langle \vec w,\vec v_1\rangle = 0\\ \quad\vdots\\ \langle \vec w,\vec v_r\rangle = 0.\end{cases}$$
>
> En conséquence, si p est la projection orthogonale sur F et $\vec u$ un vecteur de E, alors $p(\vec u)$ s'écrit
>
> $$p(\vec u)=\lambda_1\vec v_1+\ldots+\lambda_r\vec v_r,$$
>
> où $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ sont les uniques scalaires solution du système
>
> $$\begin{cases}\left\langle \vec u-\sum_{i=1}^r\lambda_i\vec v_i,\vec v_1\right\rangle = 0\\ \quad\vdots\\ \left\langle \vec u-\sum_{i=1}^r\lambda_i\vec v_i,\vec v_r\right\rangle = 0.\end{cases}$$

Soit donc

$$v=(x,y,z,t)$$

un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On recherche donc $p(v)$ sous la forme

$$p(v)=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2$$

de manière à ce que

$$(S)\iff\begin{cases}\langle v-(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2),v_1\rangle=0\\ \langle v-(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2),v_2\rangle=0.\end{cases}$$

On a

$$v-(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=\big(x-\lambda_1-\lambda_2,y-\lambda_1-2\lambda_2,z-\lambda_1,t-\lambda_1-\lambda_2\big)$$

et donc

$$\begin{cases}\langle v-(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2),v_1\rangle=x+y+z+t-4\lambda_1-4\lambda_2\\ \langle v-(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2),v_2\rangle=x+2y+t-5\lambda_1-6\lambda_2\end{cases}$$

si bien que la résolution de (S) conduit à

$$\begin{cases}\lambda_1=\frac14(x-y+3z+t)\\ \lambda_2=\frac12(y-z)\end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}p(v)&=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2\\ &=\frac14(x-y+3z+t)\big(1,1,1,1\big)+\frac12(y-z)\big(1,2,0,1\big)\\ &=\left(\frac{x+y+z+t}{4},\frac{x+3y-z+t}{4},\frac{x-y+3z+t}{4},\frac{x+y+z+t}{4}\right).\end{aligned}$$

On trouve (évidemment) la même expression de $p(v)$; on poursuit ensuite comme précédemment.

4. Un vecteur $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ appartient à $F^\perp$ si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur de F donc si et seulement s'il est orthogonal aux vecteurs d'une base de F (résultat du cours) donc si et seulement si

$$\begin{cases}\langle u,v_1\rangle=0\\ \langle u,v_2\rangle=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\ 3x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

La matrice de ce système est la matrice

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&3&1&-1\end{pmatrix}.$$

Étant déjà échelonnée avec pivots affectant x_1 et x_2, on prendra x_3 et x_4 comme paramètres, on a

$$u\in F^\perp\iff\begin{cases}x_2 = -\frac13(x_4-x_3)\\ x_1 = -2x_2+x_3-x_4\\ \quad = \frac13(x_3-x_4)\end{cases}$$

et donc

$$u \in F^{\perp} \iff u = \left(\frac{1}{3}(x_3 - x_4), \frac{1}{3}(x_4 - x_3), x_3, x_4\right)$$
$$= x_3\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) + x_4\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right)$$

et on en déduit que (u_1, u_2) avec

$$u_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right),\ u_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right)$$

est une base de $F^{\perp}$.

7. énoncé

1. Un vecteur unitaire normal à P est $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$. On sait qu'alors (cf. cours) que

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ p(\vec{u}) = \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{n}\rangle \vec{n}.$$

On calcule

$$p(1,0,0) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{2}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$
$$p(0,1,0) = \left(-\frac{2}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{6}\right)$$
$$p(0,0,1) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right),$$

d'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

de p dans la base canonique.

2. D'après le cours, la distance recherchée est

$$d = \|\vec{u} - p(\vec{u})\|.$$

On a:

$$p(\vec{u}) = \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{n}\rangle \vec{n} \Rightarrow \vec{u} - p(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{n}\rangle \vec{n}$$
$$= \frac{5}{6}(1,2,1)$$

puis

$$\|\vec{u} - p(\vec{u})\| = \frac{5}{6} \times \sqrt{6},$$

qui est donc la distance recherchée.

8. énoncé

1. (a) On a

$$x^n e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

car par croissance comparée,
$$x^{n+2}e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puisque

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann), on applique ensuite le théorème de comparaison pour les fonctions intégrables sur $[1, +\infty[$. L'intégrale

$$\int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$$

étant d'autre part évidemment convergente, il en résulte que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

est convergente.

(b) Soit P et Q deux polynômes; alors

$$P(x)Q(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} Ax^N e^{-x},$$

où Ax^N est le terme dominant du polynôme PQ. À l'aide de (a) et du théorème de comparaison, la convergence de

$$\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\, dx$$

est assurée.

2. D'après **1**(b), $\langle P, Q\rangle$ existe bel et bien pour tout $(P,Q) \in E^2$; c'est une remarque indispensable, car si la définition de $\langle\, ,\, \rangle$ avait été

$$\langle P, Q\rangle \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\, dx,$$

on n'aurait pas défini un produit scalaire sur E car cette quantité n'existe jamais (sauf en cas de présence du polynôme nul)! Cette intégrale n'existe pas! Cette intégrale est divergente!
L'aspect bilinéaire symétrique est évident. Ensuite, si

$$\langle P, P\rangle = 0,$$

c'est que la fonction

$$x \mapsto P^2(x)e^{-x}$$

est nulle sur $[0,+\infty[$ car elle est continue, positive et a une intégrale nulle sur cet intervalle. On en déduit que

$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\ P(x)=0$$

et on en déduit donc que P est le polynôme nul puisqu'il possède une infinité de racines. La définie positivité est prouvée et on a donc ainsi défini un produit scalaire sur E.

3. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx &= \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-x}\,dx\\ &= \lim_{T\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^T\\ &= \lim_{T\to+\infty}(1-e^{-T})=1,\end{aligned}$$

donc la proposition est vraie au rang $n=0$.
Supposons-la vraie à un rang $n\geq 0$. Posons

$$u(x)=x^{n+1},\ v'(x)=e^{-x}.$$

Puisque

$$x^{n+1}e^{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

(croissance comparée), le crochet

$$[uv]_0^{+\infty}$$

est nul. La formule d'intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}\,dx &= [-x^{n+1}e^{-x}]_0^{+\infty}+(n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx\\ &= 0+(n+1)\times n!\ \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)!.\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$ et donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

4. (a) On applique le résultat du cours:

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $\mathcal{B}=(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_r)$ une base de F, p la projection orthogonale sur F et $\vec{u}$ un vecteur de E. Alors $p(\vec{u})$ s'écrit

$$p(\vec{u})=\lambda_1\vec{v}_1+\ldots+\lambda_r\vec{v}_r,$$

où $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ sont les uniques scalaires solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\left\langle \vec{u}-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\vec{v}_i,\vec{v}_1\right\rangle &=& 0\\ &\vdots& \\ \left\langle \vec{u}-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\vec{v}_i,\vec{v}_r\right\rangle &=& 0,\end{array}\right.$$

ce qui nous conduit à rechercher deux scalaires a et b tels que

$$\left\{\begin{array}{l}\langle X^2-(a+bX),1\rangle=0\\ \langle X^2-(a+bX),X\rangle=0\end{array}\right.$$

et on aura alors

$$p(X^2)=aX+b.$$

On calcule

$$\begin{aligned}\langle X^2-(a+bX),1\rangle &= \int_0^{+\infty}(x^2-ax-b)e^{-x}\,dx\\ &= \int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\,dx-a\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx-b\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx\\ &= 2!-a\times 1!-b\times 0!\\ &= 2-a-b\\ \langle X^2-(a+bX),X\rangle &= \int_0^{+\infty}(x^3-ax^2-bx)e^{-x}\,dx\\ &= \int_0^{+\infty}x^3e^{-x}\,dx-a\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\,dx-b\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx\\ &= 3!-a\times 2!-b\times 1!\\ &= 6-2a-b.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{l}a+b=2\\ 2a+b=6\end{array}\right.$$

et la résolution de ce système donne

$$\left\{\begin{array}{l}a=4\\ b=-2\end{array}\right.$$

en en conséquence,

$$\begin{aligned}p(X^2) &= aX+b\\ &= 4X-2.\end{aligned}$$

(b) On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $(1,X)$ de F.

- Dans la mesure où

$$\begin{aligned}\|1\|^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \times 1^2\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \\ &= 1! \\ &= 1,\end{aligned}$$

on posera

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{1}{\|1\|}1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

- L'étape suivante consiste à rechercher E_2 sous la forme

$$E_2 = aE_1 + bX,$$

en ajustant les scalaires a et b de manière à ce que

$$\begin{cases} \langle E_2, E_1\rangle = 0 \\ \\ \|E_2\|^2 = 1. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\langle E_2, E_1\rangle = 0 &\iff \langle aE_1 + bX, E_1\rangle = 0 \\ &\iff a\langle E_1, E_1\rangle + b\langle X, E_1\rangle = 0\end{aligned}$$

et puisque

$$\langle E_1, E_1\rangle = 1$$

(puisque E_1 est par construction même unitaire) et

$$\begin{aligned}\langle X, E_1\rangle &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x\, dx \\ &= 1! \\ &= 1,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\langle E_1, E_2\rangle = 0 &\iff a + b = 0 \\ &\iff a = -b,\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\|E_2\|^2 = 1 &\iff \|-bE_1 + bX\|^2 = 1 \\ &\iff \|b(-E_1 + X)\|^2 = 1 \\ &\iff b^2\|-E_1 + X\|^2 = 1\end{aligned}$$

car rappelons que dans un espace préhilbertien E,

$$\forall(\vec{u}, \lambda) \in E \times \mathbb{R},\ \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$$

et c'est pourquoi

$$\begin{aligned}\|\lambda\vec{u}\|^2 &= |\lambda|^2\|\vec{u}\|^2 \\ &= \lambda^2\|\vec{u}\|^2.\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\|-E_1 + X\|^2 &= \langle -E_1 + X, -E_1 + X\rangle \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}(-1 + x)^2\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + 2x + x^2)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx - 2\int_0^{+\infty} e^{-x} x\, dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} x^2\, dx \\ &= 0! - 2 \times 1! + 2! \\ &= 1,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}b^2\|-E_1 + X\|^2 = 1 &\iff b^2 = 1 \\ &\iff b^2 = 1.\end{aligned}$$

Prenons par exemple

$$b = 1,$$

si bien que

$$\begin{aligned}a &= -b \\ &= -1 \\ E_2 &= aE_1 + bX \\ &= -1 + X\end{aligned}$$

et en conséquence,

$$(1, -1 + X)$$

est une base orthonormée de F.

D'après une formule du cours, en possession d'une base orthonormée (E_1, E_2) de F, on a

$$\begin{aligned}p(X^2) &= \langle X^2, E_1\rangle E_1 + \langle X^2, E_2\rangle E_2 \\ &= \langle X^2, 1\rangle + \langle X^2, -1 + X\rangle\,(-1 + X)\end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned}\langle X^2, 1\rangle &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^2 \times 1\, dx \\ &= 2! \\ &= 2,\end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned}\langle X^2, -1+X\rangle &= -\langle X^2, 1\rangle + \langle X^2, X\rangle \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-x} x^2 \times 1\, dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} x^2 \times x\, dx \\ &= -2! + 3! \\ &= 4\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\langle X^2, -1+X\rangle\,(-1+X) &= 4\,(-1+X) \\ &= -4+4X\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}p(X^2) &= Q \\ &= \langle X^2, E_1\rangle E_1 + \langle X^2, E_2\rangle E_2 \\ &= 2-4+4X \\ &= -2+4X.\end{aligned}$$

(c) D'après le cours,

$$d(X^2, F) = \|X^2 - Q\|$$

et

$$\begin{aligned}\|X^2 - Q\|^2 &= \int_0^{+\infty} (x^2-4x+2)^2 e^{-x}\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} (x^4+16x^2+4-8x^3+4x^2-16x) e^{-x}\, dx \\ &= 4! + 16\times 2! + 4\times 0! - 8\times 3! + 4\times 2! - 16\times 1! = 4.\end{aligned}$$

Ainsi, $d(X^2, F) = 2$.

5. Lorsque (a,b) parcourt $\mathbb{R}^2$, le polynôme $aX+b$ décrit le sous-espace F. Comme

$$\int_0^{+\infty} (x^2-(ax+b))^2 e^{-x}\, dx = \|X^2 - (aX+b)\|^2,$$

la quantité demandée est donc

$$\inf\{\|X^2 - R\|^2,\ R\in F\}$$

c'est à dire, par définition même, le carré de la distance de X^2 au sous-espace F, qui vaut 4 d'après **4**(c).