Feuille d'exercices n°14 premium

1. corrigé On se donne une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et l'on définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\, dt.$$

1. Justifier que la fonction $F : T \mapsto \displaystyle\int_0^T \varphi(t)\, dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. corrigé On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Déterminer ses extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$.

2. Quelle est la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2}$? En déduire qu'il existe $r_0 > 0$ tel que

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\,|f(1,0)|$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2 \geq r_0^2$.

3. Justifier que f possède un maximum sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \leq r_0^2\}$.

4. Démontrer que f possède un maximum global sur $\mathbb{R}^2$ en $(1,0)$.

3. corrigé Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\boldsymbol{E})$ suivante:

$$(\boldsymbol{E}) : \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1. Déterminer les solutions constantes vérifiant $(\boldsymbol{E})$.

2. Soit f une fonction non constante vérifiant $(\boldsymbol{E})$.

(a) Montrer que $f(0) = 1$ et que $f'(0) = 0$.

(b) Montrer que f est une fonction paire.

3. Soit f une fonction non constante vérifiant $(\boldsymbol{E})$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = f(x+y) + f(x-y)$.

(a) Justifier que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculer les dérivées partielles secondes de F.

(c) Des expressions de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme:

$$f'' - \alpha f = 0.$$

Donner les solutions de cette équation selon les valeurs de α.

4. Déterminer toutes les fonctions vérifiant $(\boldsymbol{E})$.

4. corrigé Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ stable par toute homothétie de centre 0 et de rapport > 0 i.e. vérifiant: $\forall X \in U,\ \forall k > 0,\ kX \in U$.

1. On se donne $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U et l'on fixe $X \in U$. Démontrer que l'application

$$\phi : t \mapsto f(tX)$$

est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite *positivement homogène de degré* r lorsque

$$\forall X \in U,\ \forall k > 0 : \quad f(kX) = k^r f(X).$$

2. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/ x > y > 0\}$. Vérifier que U possède cette propriété de stabilité et que

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

est positivement homogène de degré -2 sur U.

3. Donner d'autres exemples avec $r = 2$, $r = -1$ puis $r = 0$.

4. On se donne une fonction f de classe C^1 sur U. Démontrer que si f est positivement homogène de degré r sur U, alors

$$\forall X = (x,y) \in U, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(X) + y\frac{\partial f}{\partial y}(X) = r f(X).$$

Indication: fixer $X \in U$, considérer $\phi : t \mapsto f(tX)$ et dériver.

5. Établir la réciproque. *Indication:* fixer $X \in U$, considérer $\phi : t \mapsto f(tX)$ et démontrer que ϕ est solution d'une équation différentielle.

1. énoncé

1. C'est le théorème fondamental de l'analyse, qui garantit même que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. En écrivant
$$\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\,dt = \int_0^{x+y} \varphi(t)\,dt - \int_0^{x-y} \varphi(t)\,dt$$
on voit que
$$f(x,y) = F(x+y) - F(x-y).$$
Les fonctions $(x,y) \mapsto x+y$ et $(x,y) \mapsto x-y$ sont clairement continues sur $\mathbb{R}^2$; en conséquence, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ par somme et composée d'applications continues.

2. énoncé

1. La fonction f est de classe C^2 sur le domaine ouvert $\mathbb{R}^2$; un extrémum est donc nécessairement un point critique. On trouve aisément les points $(1,0)$, $(-1,0)$ et les points de la forme $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

- En $(1,0)$, la matrice hessienne $H = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $-\frac{4}{e}, -\frac{2}{e}$ donc f présente un maximum local en $(1,0)$.
- Inutile de faire des calculs en $(-1,0)$: puisque $f(-x,y) = f(x,y)$, tout ce qui se passe en $(1,0)$ se transmet en $(-1,0)$: maximum local en $(-1,0)$.
- Inutile de faire des calculs en un point de la forme $f(0,y)$: il est clair que $f(x,y) \geq 0$ pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et comme $f(0,y) = 0$, f présente un minimum global en ces points.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ (résultat de croissance comparée). Prenons alors $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(1,0)|$ dans la définition formelle d'une limite nulle (les valeurs absolues sont juste là pour la forme); il existe alors un rang $T > 0$ tel que
$$\forall t \geq T,\ \left|t^2 e^{-t^2}\right| \leq \frac{1}{2}|f(1,0)|$$
et donc (là aussi les valeurs absolues sont pour la forme)
$$\forall t \geq T,\ t^2 e^{-t^2} \leq \frac{1}{2}|f(1,0)|.$$
Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x^2 \leq x^2+y^2$, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2 \geq T$, on a
$$x^2 e^{-(x^2+y^2)} \leq (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} \leq \frac{1}{2}|f(1,0)|$$
et donc en posant $r_0 = \sqrt{T}$,
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \geq r_0^2,\ |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|f(1,0)|.$$

3. La fonction f est continue sur le domaine D, qui est un domaine fermé et borné: l'existence d'un maximum est alors garantie par un théorème du cours.

4. Plusieurs arguments doivent être mis en jeu; soit (x_0,y_0) le maximum de f sur D. Alors:

- le domaine D contient le point $(1,0)$: en effet, ce point ne peut pas être à l'extérieur de D, puisqu'à l'extérieur de D , $|f|$ prend des valeurs $\leq \frac{1}{2}|f(1,0)|$, ce qui ne se produit évidemment pas en $(1,0)$.
- le point (x_0,y_0) est intérieur à D car sur la frontière de D, constituée du cercle $x^2+y^2 = r_0^2$, $|f|$ prend des valeurs $\leq \frac{1}{2}|f(1,0)|$ donc si (x_0,y_0) était sur ce cercle, on aurait $|f(x_0,y_0)| \leq \frac{1}{2}|f(1,0)|$ mais comme $(1,0) \in D$, on doit avoir aussi $f(x_0,y_0) \geq f(1,0)$, ce qui conduit à une contradiction.
- Ainsi, f présente un maximum en (x_0,y_0) qui est un point intérieur à D: c'est donc obligatoirement un maximum local de f dont la recherche a fait l'objet du **1** et c'est pourquoi $(x_0,y_0) = (1,0)$ ou $(-1,0)$; puisque $f(x,y) = f(-x,y)$, on peut évidemment toujours supposer que c'est $(1,0)$.
- En résumé:
  - pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) \leq f(1,0)$,
  - pour tout (x,y) extérieur à D, $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|f(1,0)|$ (d'après **2**) et à plus forte raison, $f(x,y) \leq f(1,0)$.
- C'est la preuve que f présente un maximum global sur $\mathbb{R}^2$ en $(1,0)$.

3. énoncé

1. Cela revient à trouver c tel que $2c = 2c^2$, c'est à dire $c = 0$ ou $c = 1$. Donc les seules fonctions constantes vérifiant $(\boldsymbol{E})$ sont la fonction constante 0 et la fonction constante 1.

2. (a) Il existe alors x tel que $f(x) \neq 0$ (sinon f est la fonction constante 0). Prenant $y = 0$ dans $(\boldsymbol{E})$, il vient $2f(x) = 2f(x)f(0)$, d'où $f(0) = 1$. Ensuite, en prenant $x = 0$ dans $(\boldsymbol{E})$, il vient $f(y) + f(-y) = 2f(y)$. En dérivant, on obtient $f'(y) - f'(-y) = 2f'(y)$ et $y = 0$ donne $f'(0) = 0$.

(b) On a encore $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, c'est à dire $f(-y) = f(y)$, donc f est paire.

3. (a) Il est clair que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, car les applications $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto x-y$ et f le sont et par théorème de composition.

(b) On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= f'(x+y)+f'(x-y)\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= f'(x+y)-f'(x-y)\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) &= f''(x+y)+f''(x-y)\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) &= f''(x+y)+f''(x-y)\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) &= f''(x+y)-f''(x-y).
\end{aligned}$$

(c) Puisque f vérifie $(\boldsymbol{E})$, on a aussi $F(x,y)=2f(x)f(y)$. On a donc immédiatement

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=2f''(x)f(y),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=2f(x)f''(y).$$

Mais les formules ci-dessus montrent que l'on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y).$$

On en déduit

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 2f''(x)f(y)=2f(x)f''(y).$$

En prenant $y=0$, on obtient la relation $f''(x)-\alpha f(x)=0$, avec $\alpha=f''(0)$. On en déduit que f est de la forme

$$\begin{aligned}
f(x) &= ae^{x\sqrt{\alpha}}+be^{-x\sqrt{\alpha}} \quad \text{si } \alpha>0, && (1)\\
f(x) &= a\cos\left(x\sqrt{-\alpha}\right)+b\sin\left((x\sqrt{-\alpha}\right) \quad \text{si } \alpha<0, && (2)\\
f(x) &= ax+b \quad \text{si } \alpha=0. && (3)
\end{aligned}$$

4. Si f est constante, alors $f=0$ ou $f=1$. Si f est non constante, alors f est nécessairement du type (2), (3) ou (4). ci-dessus. *Réciproquement*, les fonctions de ce type satisfont-elles $(\boldsymbol{E})$? D'après **2**(a), on doit avoir $f(0)=1$ et $f'(0)=0$. Donc, aisément:

- si f est du type (3), alors $f(x)=\cos(x\sqrt{-\alpha})$ et il est immédiat de vérifier que f satisfait $(\boldsymbol{E})$ ($\cos(a+b)=\ldots$);
- si f est du type (2), alors $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{\alpha}}+e^{-x\sqrt{\alpha}}\right)=\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\alpha}\right)$ et il est immédiat de vérifier que f satisfait $(\boldsymbol{E})$ ($\operatorname{ch}(a+b)=\ldots$);
- si f est du type (4), alors $f(x)=1$ (cas en fait à écarter ici puisque f est supposée non constante).

En conclusion, les fonctions satisfaisant $(\boldsymbol{E})$ sont: la fonction constante 1, la fonction constante 0, les fonctions $x\mapsto \operatorname{ch}(x\sqrt{\alpha})$ et $x\mapsto\cos(x\sqrt{-\alpha})$, ces dernières, pour des raisons évidentes de parité, s'écrivant aussi $x\mapsto\operatorname{ch}(kx)$ et $x\mapsto\cos(kx)$ où k est un réel $\neq 0$ quelconque.

4. énoncé

1. En notant $X=(x,y)$, on a

$$\phi: t\mapsto f(tx,ty)$$

qui est, d'après un théorème de composition du cours, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ car $t\mapsto tx$ et $t\mapsto ty$ le sont et

$$\phi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty).$$

2. C'est clair: pour tout $k>0$ et tout $(x,y)\in U$, on a $x>0$ et $y>0$ et donc $tx>0$, $ty>0$ ce qui démontre que $(tx,ty)\in U$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
f(kx,ky) &= \frac{(kx)^2+(ky)^2}{(kx)^4+(ky)^4}=\frac{k^2(x^2+y^2)}{k^4(x^4+y^4)}=\frac{1}{k^2}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\\
&= k^{-2}f(x,y).
\end{aligned}$$

3. $f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ est positivement homogène de degré 2, $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ est positivement homogène de degré -1 et $f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$ est positivement homogène de degré 0 (les trpois vérifications sont immédiates).

4. D'une part,

$$\phi(t)=f(tX)=t^rf(X)\Longrightarrow \phi'(t)=rt^{r-1}f(X)$$

et d'autre part, d'après **1**,

$$\phi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty).$$

La comparaison des deux expressions de $\phi'(t)$ en prenant $t=1$ donne le résultat.

5. D'après **1**, $\phi: t\mapsto f(tx,ty)$ satisfait

$$\phi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty).$$

Or il est supposé que

$$\forall X=(x,y)\in U,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=rf(x,y)$$

et par hypothèse, $tX\in U$ donc en appliquant la relation ci-dessus au point tX, on a

$$tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=rf(tx,ty).$$

Ainsi,

$$\phi'(t)=\frac{1}{t}rf(tx,ty)=\frac{r}{t}\phi(t).$$

Donc φ satisfait une équation différentielle dont les solutions sont de la forme

$$Ce^{\int \frac{r}{t}\,dt} = Ce^{r\ln t} = Ct^r.$$

Il existe donc un réel C tel que

$$\forall t \in \left]0, +\infty\right[,\ \phi(t) = Ct^r,$$

c'est à dire

$$\forall t \in \left]0, +\infty\right[,\ f(tx, ty) = Ct^r.$$

En prenant en particulier $t = 1$:

$$f(x, y) = C$$

et on a donc

$$\forall t \in \left]0, +\infty\right[,\ f(tx, ty) = f(x, y)t^r,$$

ce qu'il fallait démontrer.