Feuille d'exercices n°14

1. corrigé On se donne une fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer toutes les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes:

1. $f:(x,y)\mapsto F\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$
2. $f:(u,v)\mapsto F\left(v^2-2u^2\right)$, définie sur $\mathbb{R}^2$.

2. corrigé En utilisant les notations adaptées aux noms des variables, calculer la dérivée première et seconde de la fonction F définie de la manière suivante:

1. $F:t\mapsto f(2\cos t,3\sin t)$, où $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$
2. $F:t\mapsto f(t^2,t^3)$, où $f:(u,v)\mapsto f(u,v)$ est définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

3. corrigé Soit l'intervalle $I=\,]-1,1[$.

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait

$$\frac{1}{t^2-1}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+1}$$

pour tout réel $t\in I$.

(b) En déduire les primitives de la fonction

$$t\mapsto\frac{1}{t^2-1}$$

sur I.

(c) Après en avoir recherché une solution particulière, résoudre l'équation différentielle

$$(E):\quad (t^2-1)u'(t)+2tu(t)=t$$

sur l'intervalle I.

2. Soit $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq 0,\ |y|<|x|\}$.

(a) Représenter le domaine U.

(b) Soit ϕ une application définie et de classe C^2 sur l'intervalle I, à valeurs réelles et soit f la fonction définie sur U par

$$\forall(x,y)\in U,\ f(x,y)=\phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Déterminer les applications ϕ telles que

$$\forall(x,y)\in U,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}.$$

4. corrigé Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et

$$\begin{array}{rcl} f:U=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right).\end{array}$$

Justifier que f est de classe C^2 sur U et démontrer que pour tout $(x,y)\in U$,

$$x^2\partial_1(\partial_1 f)(x,y)+2xy\partial_1(\partial_2 f)(x,y)+y^2\partial_2(\partial_2 f)(x,y)=0.$$

5. corrigé Soit $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et

$$F:(r,\theta)\mapsto f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

1. Calculer les dérivées premières et secondes de F.
2. En déduire l'expression de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

en tout point (r,θ) tel que $r\neq 0$.

6. corrigé Trouver les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f:(x,y)\mapsto x^3+y^3+3xy$.

7. corrigé On considère la fonction f suivante

$$f:(x,y)\mapsto x^3+3xy^2-3x^2,$$

définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer ses points critiques.
2. Déterminer ses extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$. *Indication:* en $(0,0)$, on pourra considérer les points de la forme $(x,\sqrt{x})$.

8. corrigé Trouver les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4-(x-y)^3$.

9. corrigé

1. Démontrer que l'application

$$\varphi:(u,v)\mapsto\left(u,\frac{v-u}{2}\right)$$

est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Justifier que φ et φ^{-1}, que l'on explicitera, sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Démontrer que la fonction f, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(E):\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2y$$

si et seulement si la fonction $g=f\circ\varphi$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(E'):\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\frac{1}{4}vu^2-\frac{1}{4}u^3.$$

3. Déterminer toutes les solutions de (E') sur $\mathbb{R}^2$ et en déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

10. corrigé Soit $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x>0,y>0\}$.

1. Démontrer que l'application

$$\varphi:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

établit une bijection de $D=\,]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[$ sur U. Justifier que φ et φ^{-1}, que l'on explicitera, sont de classe C^1 sur leur domaine de définition.

2. Démontrer que la fonction f, de classe C^1 sur U, est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(E):\quad \forall(x,y)\in U,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x$$

si et seulement si la fonction $F=f\circ\varphi$ est solution d'une équation aux dérivées partielles (E') sur D, que l'on déterminera.

3. Déterminer toutes les solutions de (E') sur D et en déduire toutes les solutions de (E) sur U.

1. énoncé

1.
   - $\partial_1 f(x,y) = \frac{2x}{y} F'\left(\frac{x^2}{y}\right)$
   - $\partial_2 f(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} F'\left(\frac{x^2}{y}\right)$
   - $\partial_1\partial_1 f(x,y) = \frac{2}{y} F'\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{4x^2}{y^2} F''\left(\frac{x^2}{y}\right)$
   - $\partial_2\partial_2 f(x,y) = \frac{2x^2}{y^3} F'\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{x^4}{y^4} F''\left(\frac{x^2}{y}\right)$
   - $\partial_2\partial_1 f(x,y) = \partial_1\partial_2 f(x,y) = -\frac{2x}{y^2} F'\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{2x^3}{y^3} F''\left(\frac{x^2}{y}\right)$
2.
   - $\partial_1 f(u,v) = -4uF'(v^2-2u^2)$
   - $\partial_2 f(u,v) = 2vF'(v^2-2u^2)$
   - $\partial_1\partial_1 f(u,v) = -4F'(v^2-2u^2) + 16u^2F''(v^2-2u^2)$
   - $\partial_2\partial_2 f(v,v) = 2F'(v^2-2u^2) + 4u^2F''(v^2-2u^2)$
   - $\partial_2\partial_1 f(u,v) = \partial_1\partial_2 f(u,v) = -8uvF''(v^2-2u^2)$

2. énoncé

1. On a

$$F'(t) = -2\sin t\frac{\partial f}{\partial x}(2\cos t, 3\sin t) + 3\cos t\frac{\partial f}{\partial y}(2\cos t, 3\sin t)$$

puis

$$\begin{aligned} F''(t) = \quad & -2\cos t\,\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) \\ & -2\sin t\left(-2\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2\cos t, 3\sin t) + 3\cos t\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2\cos t, 3\sin t)\right) \\ & -3\sin t\frac{\partial f}{\partial y}(2\cos t, 3\sin t) \\ & +3\cos t\left(-2\sin t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2\cos t, 3\sin t) + 3\cos t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2\cos t, 3\sin t)\right). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, on obtient après développement

$$\begin{aligned} F''(t) &= -2\cos t\,\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) - 3\sin t\frac{\partial f}{\partial y}(2\cos t, 3\sin t) \\ &+ 4\sin^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2\cos t, 3\sin t) + 9\cos^2 t\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2\cos t, 3\sin t) \\ &- 12\sin t\cos t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2\cos t, 3\sin t). \end{aligned}$$

2. On a

$$F'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial u}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial v}(t^2, t^3)$$

puis

$$\begin{aligned} F''(t) = \quad & 2\frac{\partial f}{\partial u}(t^2, t^3) \\ + \quad & 2t\left(2t\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(t^2, t^3)\right) \\ + \quad & 6t\frac{\partial f}{\partial v}(t^2, t^3) \\ + \quad & 3t^2\left(2t\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(t^2, t^3)\right). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$, on obtient après développement

$$\begin{aligned} F''(t) &= 2\frac{\partial f}{\partial u}(t^2, t^3) + 6t\,\frac{\partial f}{\partial v}(t^2, t^3) \\ &+ 4t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(t^2, t^3) + 9t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(t^2, t^3) \\ &+ 12t^3\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(t^2, t^3). \end{aligned}$$

3. énoncé

1. (a) Par une identification , on trouve

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1}.$$

(b) On a alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-t^2}\,dt &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|t+1| - \ln|t-1|\right) + K \end{aligned}$$

et sur I, on a $-1 < t < 1$, donc $t-1 < 0$ et $t+1 > 0$ d'où $\frac{t-1}{t+1} < 0$ si bien que

$$|t+1| = t+1, \quad |t-1| = 1-t$$

et donc les primitives de $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ sur I se présentent sous la forme

$$t \mapsto \frac{1}{2}(\ln(t+1) - \ln(1-t) + K = \frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{1-t} + K.$$

(c) La fonction constante $t \mapsto \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E) alors que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$C\exp\left(\int \frac{-2t}{t^2-1}\,dt\right) = C\exp\left(-\ln\left|t^2-1\right|\right) = \frac{C}{|t^2-1|}$$

et sur I, on
$$t^2-1=(t-1)(t+1)<0$$
donc les solutions de (E) sur I sont les fonctions
$$y:t\mapsto \frac{1}{2}+\frac{C}{1-t^2},$$
où C est une constante quelconque.

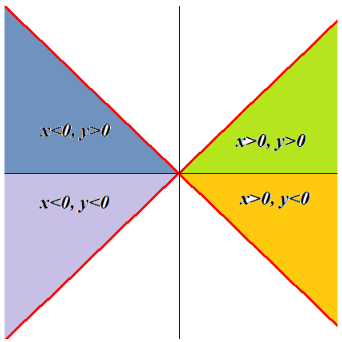
2. (a) On étudie $|y|<|x|$ suivant les signes de x et y.

- Si $x>0$ et $y>0$ (on est donc dans la zone verte), on a $|x|=x$, $|y|=y$ et alors
$$|y|<|x| \iff y<x$$
donc si et seulement si le point de coordonnées (x,y) est situé en-dessous de la droite $y=x$.

- Si $x>0$ et $y<0$ (on est donc dans la zone rose) on a $|x|=x$, $|y|=-y$ et alors
$$|y|<|x| \iff -y<x$$
i.e. $y>-x$ donc si et seulement si le point de coordonnées (x,y) est situé au-dessus de la droite $y=-x$.

- Si $x<0$ et $y>0$ (on est donc dans la zone bleue), on a $|x|=-x$, $|y|=y$ et alors
$$|y|<|x| \iff y<-x$$
donc si et seulement si le point de coordonnées (x,y) est situé en-dessous de la droite $-y=x$.

- Si $x<0$ et $y<0$ (on est donc dans la zone grise), on a $|x|=-x$, $|y|=-y$ et alors
$$|y|<|x| \iff -y<-x$$
donc si et seulement si le point de coordonnées (x,y) est situé au-dessus de la droite $y=x$.



(b) On calcule:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{y}{x^2}\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{2y}{x^3}\phi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\phi''\left(\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x}\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{1}{x^2}\phi''\left(\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \left(\frac{y^2}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)\phi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2y}{x^3}\phi'\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$
si bien que
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{y}{x^3}\\
\iff \left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\phi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2y}{x}\phi'\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{y}{x}\\
\iff (t^2-1)\phi''(t)+2t\phi'(t) &= t
\end{aligned}$$
où on a posé $t=\frac{y}{x}$. En posant $u=\phi'$, on a
$$(t^2-1)u'(t)+2tu(t)=t$$
et de **1**(c), on déduit
$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{C}{1-t^2}.$$
D'après **1**(b), on a alors
$$\begin{aligned}
\phi'(t)=u(t) &= \frac{1}{2}+\frac{C}{1-t^2}\\
&\implies \phi(t)=\frac{t}{2}+\frac{C}{2}\ln\frac{t+1}{1-t}+CK
\end{aligned}$$
où C et K sont des réels quelconques et c'est pourquoi les fonctions ϕ solutions de notre problème s'écrivent
$$\phi(t)=\frac{t}{2}+a\ln\frac{t+1}{1-t}+b$$
où a et b sont des réels quelconques.

4. énoncé f est C^2 d'après les théorèmes généraux et

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x \times \frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\\
&= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\\
\partial_1(\partial_1 f) &= -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \times \frac{-y}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\
&= \frac{y^2}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\
\partial_2(\partial_1 f) &= \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \times \frac{1}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\
&= -\frac{y}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\
\partial_2 f(x,y) &= x \times \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\\
&= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\\
\partial_2(\partial_2) f &= \frac{1}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

et le résultat en découle.

5. énoncé

1. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) &= \cos\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right]\\
&+ \sin\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

(regroupement des dérivées partielles croisées rendu possible par Schwarz). Puis

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\
&- r\sin\theta\left[-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right]\\
&+ r\cos\theta\left[-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\\
&= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\
&+ r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}(r,\theta) &= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right]\\
&+ r\cos\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\\
&= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\
&+ r\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

2. On voit alors que

$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) = r^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] - r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).$$

C'est l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

6. énoncé La fonction f est de classe C^2 sur le domaine ouvert $\mathbb{R}^2$; un extrémum est donc nécessairement un point critique.

On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 + 3y\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3y^2 + 3x
\end{aligned}$$

si bien que (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x^2 \\ x^4 + x = 0. \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} x^4 + x = 0 &\iff x(x^3+1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 = -1 \\ &\iff x \in \{0, -1\} \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x^2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -x^2 \\ x = -1 \end{cases}$$

et on en conclut que f possède deux points critiques: les points $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

On trouve les points critiques $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

- $H = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ en $(0,0)$, dont le déterminant vaut $-9 < 0$, donc f ne présente pas d'extremum local en $(0,0)$ (point col).
- $H = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ en $(-1,-1)$, dont le déterminant vaut $27 > 0$ et de trace $-12 < 0$, donc f présente un maximum local en $(-1,-1)$.

7. énoncé

1. On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 6xy \end{aligned}$$

si bien que (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(2,0)$.

2. La fonction f est de classe C^2 sur le domaine ouvert $\mathbb{R}^2$; un extrémum est donc nécessairement un point critique. On calcule ensuite la matrice hessienne H en ces points:

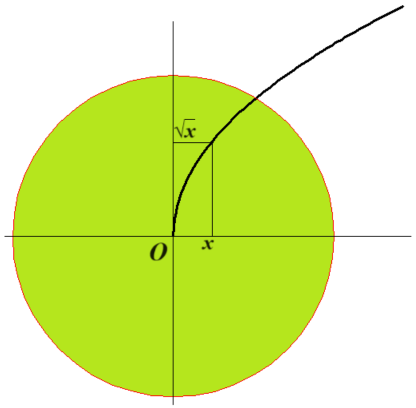
- $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ en $(2,0)$, dont le déterminant vaut $72 > 0$ et de trace $18 > 0$, donc f présente un minimum local en $(-1,-1)$.
- $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $(0,0)$, dont le déterminant est nul: la théorie du cours ne s'applique pas. Il faut raisonner "à l'ancienne":
  - On a

    $$\begin{aligned} f(x,0) &= x^3 - 3x^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

    dès que $x < 0$; or tout voisinage de $(0,0)$ contient évidemment des points de l'axe Ox d'abscisse x avec $x < 0$ et en ces points, f prend une valeur strictement inférieure à celle prise en $(0,0)$, ce qui prouve que f ne présente pas de minimum local en $(0,0)$.
  - On a

    $$\begin{aligned} f(x,\sqrt{x}) &= x^3 + 3x^2 - 3x^2 \\ &= x^3 \\ &> 0 \end{aligned}$$

dès que $x > 0$; or tout voisinage de $(0,0)$ contient des points $(x, \sqrt{x})$ avec $x > 0$



et en ces points, f prend une valeur strictement supérieure à celle prise en $(0,0)$, ce qui prouve que f ne présente pas de maximum local en $(0,0)$.

Ainsi, $(2,0)$ est le seul extremum local de f et ce point est un point minimum local.

8. énoncé La fonction f est de classe C^2 sur le domaine ouvert $\mathbb{R}^2$; un extremum est donc nécessairement un point critique. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 3(x-y)^2 = 0 \\ \\ 4y^3 + 3(x-y)^2 = 0. \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne

$$x^3 + y^3 = 0,$$

c'est à dire

$$y = -x$$

et alors L_1 donne

$$4x^3 - 12x^2 = 0$$

i.e. $x = 0$ ou $x = 3$. Donc les points critiques sont $(0,0)$ et $(3,-3)$.

- La matrice hessienne en $(3,-3)$ est la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 72 & 36 \\ \\ 36 & 72 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant $72^2 - 36^2$ est clairement > 0 et de trace $144 > 0$, donc f présente un minimum local en $(3,-3)$.

- La matrice hessienne est nulle en $(0,0)$; mais

$$f(x,x) = 2x^4 \geq 0$$

alors que

$$\begin{aligned} f(x,-x) &= 2x^4 - 8x^3 \\ &< 0 \end{aligned}$$

dès que $x < 0$. Puisque tout voisinage de $(0,0)$ contient des points de la forme (x,x) et des points de la forme $(x,-x)$ avec $x < 0$, on en conclut que f ne présente ni maximum ni minimum en $(0,0)$.

9. énoncé

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; alors

$$\varphi(u,v) = (x,y) \iff \begin{cases} u = x \\ \\ v = x + 2y. \end{cases}$$

Donc tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ possède un unique antécédant par φ et φ est donc une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même avec

$$\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto (x, x+2y).$$

Il est clair que φ et φ^{-1} sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Remarquons que l'on aurait pu observer que φ est une application linéaire de déterminant $\frac{1}{2}$ donc φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ i.e. une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

2. De $g = f \circ \varphi$ et donc

$$f = g \circ \varphi^{-1},$$

on déduit, puisque φ et φ^{-1} sont de classe C^1, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Rappelons cette formule, qui résulte de la règle de la chaîne (cf. cours): dans le contexte

$$g : (u,v) \longmapsto f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)),$$

on a

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\varphi(u,v)\Big) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\varphi(u,v)\Big) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\varphi(u,v)\Big) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\varphi(u,v)\Big) \end{cases}$$

où on a posé

$$\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)).$$

On a alors ici :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(u, \frac{v-u}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(u, \frac{v-u}{2}\right) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(u, \frac{v-u}{2}\right). \end{aligned}$$

Pour bien comprendre ce qui va suivre, imaginons cette situation : soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable; alors

$$\forall x\in[-1,1],\ F'(x)+F(x)=x^3$$

si et seulement si

$$\forall t\in[0,\pi],\ F'(\cos t)+F(\cos t)=\cos^3 t.$$

En effet, tout réel $x\in[-1,1]$ peut être représenté par le $\cos$ d'un angle entre 0 et π. Plus rigoureusement, parce que la fonction $\cos$ établit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

Ici, la situation est tout à fait comparable: la clé est, comme avec la fonction $\cos$ entre $[0,\pi]$ et $[-1,1]$, la bijection que φ établit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

D'après 1, tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique

$$(x,y)=\left(u,\frac{v-u}{2}\right)$$

et donc on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2y$$

si et seulement si

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial f}{\partial x}\left(u,\frac{v-u}{2}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(u,\frac{v-u}{2}\right)=u^2\frac{v-u}{2}$$

donc si et seulement si

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=u^2\frac{v-u}{4}=\frac{v}{4}u^2-\frac{1}{4}u^3$$

i.e. f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si g est solution de (E') sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit v fixé et $h:u\mapsto g(u,v)$, qui est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$; alors

$$\forall u\in\mathbb{R},\ h'(u)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$$

et g est donc solution de (E') sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$\forall u\in\mathbb{R},\ h'(u)=u^2\frac{v-u}{4}=\frac{v}{4}u^2-\frac{1}{4}u^3$$

donc si et seulement s'il existe un réel $C(v)$ tel que

$$\forall u\in\mathbb{R},\ h(u)=\frac{v}{12}u^3-\frac{u^4}{16}+C(v).$$

Ainsi, g est solution de (E') sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe une fonction $C:v\mapsto C(v)$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=\frac{v}{12}u^3-\frac{u^4}{16}+C(v)$$

et il est clair que C doit être de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ pour que g soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, de $f=g\circ\varphi^{-1}$ i.e.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=g(x,x+2y),$$

on déduit alors que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe une fonction C, définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\frac{x+2y}{12}x^3-\frac{x^4}{16}+C(x+2y).$$

Une telle solution est par exemple

$$f(x,y)=\frac{x+2y}{12}x^3-\frac{x^4}{16}+(\sin 3(x+2y))^2,$$

qui correspond au choix de

$$C:v\mapsto(\sin 3v)^2.$$

10. énoncé

1. Tout d'abord, φ est bien à valeurs dans U puisque pour tout $(r,\theta)\in\left]0,+\infty\right[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $r\cos\theta>0$ et $r\sin\theta>0$. Ensuite, soit $(x,y)\in U$; alors il existe $(r,\theta)\in U$ tel que $\varphi(x,y)\in U$ si et seulement si

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ r>0, 0<\theta<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

- *Analyse:* $L_1^2+L_2^2$ donne $r^2=x^2+y^2$ et puisque r doit être >0, $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Ensuite, L_1 donne

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ impose

$$\theta=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ainsi, si r et θ existent, alors nécessairement

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- *Synthèse:* posons

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
r\cos\theta &= \sqrt{x^2+y^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&= x\\
\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta}\\
&= \sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}\\
&= \sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}}\\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
r\sin\theta &= \sqrt{x^2+y^2}\times\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&= y.
\end{aligned}$$

On a donc bien prouvé l'existence et l'unicité d'un couple $(r,\theta)\in D$ tel que $\varphi(r,\theta)=(x,y)$, ce qui prouve φ est une bijection de D sur U et par définition,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}: U &\longrightarrow D\\
(r,\theta) &\longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).
\end{aligned}$$

Remarque: on a aussi

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et puisque $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\theta=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
U &\longrightarrow D\\
(r,\theta) &\longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).
\end{aligned}$$

est une autre expression de φ^{-1}.

2. De $F=f\circ\varphi$ et donc $f=F\circ\varphi^{-1}$, on déduit, puisque φ et φ^{-1} sont de classe C^1, que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\\
\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta).
\end{aligned}$$

D'après 1, tout $(x,y)\in U$ s'écrit de manière unique $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ avec $(r,\theta)\in D$ et en conséquence,

$$\begin{aligned}
&\forall(x,y)\in U,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\\
\iff &\forall(r,\theta)\in V,\ r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)=r\cos\theta\\
\iff &\forall(r,\theta)\in V,\ r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=r\cos\theta\\
\forall(r,\theta)\in V,\ \iff &\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de (E) sur U si et seulement si $F=f\circ\varphi$ est solution de

$$(E'):\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta$$

sur D.

3. Soit θ fixé et $h:r\mapsto F(r,\theta)$, qui est une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ car F est de classe C^1 sur D; alors

$$\forall r\in\,]0,+\infty[\,,\ h'(r)=\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$$

ce qui se produit si et seulement s'il existe une fonction C d'une variable telle que

$$h(r)=r\cos\theta+C(\theta).$$

Ainsi, F est solution de (E') sur D si et seulement s'il existe une fonction $C:\theta\mapsto C(\theta)$ telle que

$$\forall(r,\theta)\in D,\ F(r,\theta)=r\cos\theta+C(\theta)$$

et il est clair que C doit être de classe C^1 sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ pour que F soit de classe C^1 sur D. Enfin, de $f=F\circ\varphi^{-1}$, on obtient, puisque $r\cos\theta=x$ et $\theta=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

$$f(x,y)=x+C\left(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Une telle solution est par exemple

$$f(x,y)=x+e^{-2\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}},$$

qui correspond au choix de

$$C:\theta\mapsto e^{-2\theta}.$$