Feuille d'exercices n°10 premium

---

1. corrigé

1. Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel euclidien E, $\vec{n}$ un vecteur unitaire et normal à H et s la réflexion d'hyperplan H. Démontrer que

$$\forall \vec{x} \in E,\ s(\vec{x}) = \vec{x} - 2\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle \vec{n}.$$

2. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans d'un espace euclidien E, s_1 et s_2 les réflexions par rapport à H_1 et H_2 respectivement. Soit $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ des vecteurs normaux à H_1 et H_2 resp. On suppose H_1 et H_2 perpendiculaires i.e. $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$. Montrer que s_1 et s_2 commutent.

2. corrigé Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures?

3. corrigé Soit $n \geq 2$. Combien existe-t-il de matrices orthogonales $n \times n$ et dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$?

4. corrigé Soit E un espace euclidien.

1. Soit g un endomorphisme de E. On suppose que

$$\langle g(x), x \rangle = 0$$

pour tout $x \in E$. En considérant le vecteur $x + y$, démontrer que

$$\langle g(x), y \rangle = -\langle g(y), x \rangle$$

pour tout $(x, y) \in E^2$.

2. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer que deux des propriétés suivantes entraîne la troisième:

1. f est une isométrie,
2. $f^2 = -\mathrm{Id}_E$,
3. $\langle f(x), x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

5. corrigé Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

1. Démontrer que $\chi_{A^TA} = \chi_{AA^T}$.

2. Justifier que A^TA est une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que A^TA et AA^T sont semblables.

6. corrigé Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que

$$\mathrm{Tr}(A^TA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

où Tr désigne la trace.

2. On suppose A symétrique; on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, chacune répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

1. énoncé

1. Notons
$$g(\vec{x}) = \vec{x} - 2\langle\vec{x},\vec{n}\rangle\vec{n}.$$
Soit
$$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$$
une base de H; alors
$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, a)$$
est une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a
$$s(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$$
alors que
$$\vec{e}_i - 2\langle\vec{e}_i,\vec{n}\rangle\vec{n} = \vec{e}_i$$
puisque $\vec{e}_i \perp \vec{n}$. On a donc déjà $s(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)$. Enfin, $s(\vec{n}) = -\vec{n}$ alors que
$$\begin{aligned}\vec{n} - 2\langle\vec{n},\vec{n}\rangle\vec{n} &= \vec{n} - 2\vec{n} \\ &= -\vec{n}\end{aligned}$$
($\langle\vec{n},\vec{n}\rangle = 1$ car $\vec{n}$ est unitaire). Ainsi,
$$s(\vec{n}) = g(\vec{n}),$$
ce qui démontre que s et g coïncident sur une base. Dès lors, s et g sont confondues.

2. On a
$$s_i(\vec{x}) = \vec{x} - 2\langle\vec{x},\vec{n}_i\rangle\vec{n}_i.$$
Donc
$$\begin{aligned}s_2(s_1(\vec{x})) &= \vec{x} - 2\langle\vec{x},\vec{n}_1\rangle\vec{n}_1 - 2\langle\vec{x} - 2\langle\vec{x},\vec{n}_1\rangle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle\vec{n}_2 \\ &= \vec{x} - 2\langle\vec{x},\vec{n}_1\rangle\vec{n}_1 - 2\langle\vec{x},\vec{n}_2\rangle\vec{n}_2\end{aligned}$$
(après développement du produit scalaire, du fait que $\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle = 0$). On obtient la même expression pour $s_1(s_2(\vec{x}))$.

2. énoncé

La première colonne est
$$(\pm1, 0, \dots, 0)^T$$
(sa norme vaut 1); la deuxième colonne, de la forme
$$(a, b, 0, \dots, 0)^T,$$
est orthogonale à la première si et seulement si $a = 0$ puis
$$b = \pm1$$
pour qu'elle soit de norme 1. De même avec les autres colonnes. Donc la matrice est diagonale, constituée de ±1.

3. énoncé

Dans chaque colonne, on ne peut avoir qu'un seul ±1, les autres coefficients étant nuls (sous peine d'avoir une norme > 1).

- Pour la première colonne, on peut placer ±1 à n endroits, ce qui laisse $2n$ possibilités pour la première colonne.
- Pour la deuxième, on n'a plus que $(n-1)$ possibilités pour placer ±1 (afin d'avoir un produit scalaire nul avec la première), ce qui donne $2(n-1)$ possibilités pour former la deuxième colonne, et ainsi de suite.
- Il y a donc
$$2n \times 2(n-1) \times \dots 2.1 = 2^n n!$$
telles matrices.

4. énoncé

1. On a donc par hypothèse,
$$\langle g(x+y), x+y\rangle = 0.$$
Mais par linéarité de g et par bilinéarité du produit scalaire,
$$\langle g(x+y), x+y\rangle = \langle g(x), x\rangle + \langle g(y), y\rangle + \langle g(x), y\rangle + \langle g(y), x\rangle$$
et comme
$$\begin{aligned}\langle g(x), x\rangle &= \langle g(y), y\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$
on a
$$\langle g(x), y\rangle = -\langle g(y), x\rangle.$$

2. Supposons **1** et **2**; démontrons alors **3**. Soit $x \in E$; on écrit, grâce à **2**:
$$x = -f(f(x)).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\langle f(x), x\rangle &= \langle f(x), -f(f(x))\rangle \\ &= -\langle f(x), f(f(x))\rangle.\end{aligned}$$
Mais f, en sa qualité d'isométrie vectorielle, conserve le produit scalaire:
$$\langle f(y), f(z)\rangle = \langle y, z\rangle$$
pour tous vecteurs y, z. Ainsi,
$$\langle f(x), f(f(x))\rangle = \langle x, f(x)\rangle.$$
Ainsi,
$$\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle,$$

et c'est pourquoi $\langle f(x), x\rangle = 0$.

Supposons **1** et **3**; démontrons alors **2**. Soit $x \in E$; il s'agit de démontrer que

$$f^2(x) + x = \vec{0}$$

et donc de démontrer que

$$\|f^2(x) + x\|^2 = 0.$$

On a

$$\|f^2(x) + x\|^2 = \langle f^2(x) + x, f^2(x) + x\rangle$$

et par bilinéarité:

$$\langle f^2(x) + x, f^2(x) + x\rangle = \langle f^2(x), f^2(x)\rangle + \langle x, x\rangle + 2\langle f^2(x), x\rangle.$$

Puisque f est une isométrie,

$$\begin{aligned} \langle f^2(x), f^2(x)\rangle &= \langle f(x), f(x)\rangle \\ &= \langle x, x\rangle \end{aligned}$$

et donc

$$\langle f^2(x) + x, f^2(x) + x\rangle = 2\langle x, x\rangle + 2\langle f^2(x), x\rangle.$$

D'autre part, d'après la première question,

$$\langle f(y), z\rangle = -\langle y, f(z)\rangle$$

pour tous vecteurs y, z. Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle f^2(x), x\rangle &= \langle f(f((x)), x\rangle \\ &= -\langle f(x), f(x)\rangle \end{aligned}$$

et comme f est une isométrie,

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle.$$

Ainsi,

$$\langle f^2(x), x\rangle = -\langle x, x\rangle$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned} \langle f^2(x) + x, f^2(x) + x\rangle &= 2\langle x, x\rangle - 2\langle x, x\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons **2** et **3**; démontrons alors **1**. Soit $x \in E$; il s'agit de démontrer que f conserve la norme i.e.

$$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2,$$

c'est à dire

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle.$$

En utilisant à nouveau, d'après la première question,

$$\forall (y, z) \in E^2,\ \langle f(y), z\rangle = -\langle y, f(z)\rangle$$

on a

$$\langle f(x), f(x)\rangle = -\langle x, f(f(x))\rangle$$

mais comme $f^2 = -\mathrm{Id}_E$, on a

$$f(f(x)) = -x$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(x)\rangle &= -\langle x, -x\rangle \\ &= \langle x, x\rangle, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. énoncé

1. En jouant sur le fait que

$$\det(MN) = \det(M) \times \det(N),$$

on a

$$\begin{aligned} \chi_{A^TA}(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A^TA) \\ &= \det((\lambda A^{-1} - A^T)A) \\ &= \det(\lambda A^{-1} - A^T) \times \det(A) \\ &= \det(A) \times \det(\lambda A^{-1} - A^T) \\ &= \det(A(\lambda A^{-1} - A^T)) \\ &= \det(\lambda I_n - AA^T) \\ &= \chi_{AA^T}(\lambda). \end{aligned}$$

2. La matrice A^TA est symétrique:

$$\begin{aligned} (A^TA)^T &= A^T \times (A^T)^T \\ &= A^TA \end{aligned}$$

et étant à coefficients réels, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. La matrice A^TA est donc semblable à une matrice diagonale D sur laquelle on y trouve les valeurs propres de A^TA, chacune répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité.

- Mais la matrice AA^T est elle aussi symétrique:

  $$\begin{aligned} (AA^T)^T &= (A^T)^T \times A^T \\ &= AA^T \end{aligned}$$

  donc diagonalisable et alors semblable à une matrice diagonale D' sur laquelle on y trouve les valeurs propres de AA^T, chacune répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité.

- Mais comme A^TA et AA^T ont le même polynôme caractéristique, elles ont exactement les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités si bien que les matrices D et D' sont confondues.

- Ainsi, A^TA et AA^T sont semblables à une même matrice et sont dès lors semblables.

6. énoncé

1. Écrivons

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}) \\ A^T &= (b_{ij}) \end{aligned}$$

avec

$$b_{ij} = a_{ji}$$

d'où

$$A^TA = (c_{ij})$$

avec

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} \\ c_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \\ \mathrm{Tr}(A^TA) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat (le nom des indices ne jouant évidemment aucun rôle).

2. La matrice A, symétrique à coefficients réels, est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et semblable à

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors les matrices A^2 et

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

sont semblables et ont même trace, donc

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \sum \lambda_i^2.$$

Mais A étant symétrique,

$$A^T = A$$

et donc

$$A^2 = A^TA$$

et alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A^2) &= \mathrm{Tr}(A^TA) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2, \end{aligned}$$

d'où le résultat.