Feuille d'exercices n°10

1. corrigé Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire canonique, défini par

$$u : \vec{v} = (x, y, z) \mapsto (y + az, z + bx, x + cy)$$

où a, b, c sont des constantes. Pour quelles valeurs de a, b et c l'endomorphisme u est-il une isométrie vectorielle? Répondre de trois façons:

1. par transformation de la base canonique en une base orthonormée,
2. par conservation de la norme,
3. par considération de la matrice M de u dans la base canonique.

2. corrigé Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ -1 & -2 & b \\ -2 & c & -2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Déterminer les réels a, b, c de façon que f soit une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

3. corrigé Soit E un espace vectoriel euclidien et a un vecteur non nul de E. On considère sur E l'application s_a définie par $s_a(x) = x - 2\frac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}a$ pour tout $x \in E$.

1. Démontrer que s_a est un endomorphisme de E.
2. Démontrer de deux façons que s_a est un isométrie vectorielle:
   - en démontrant que s_a conserve la norme,
   - en démontrant que s_a conserve le produit scalaire.
3. Calculer $s_a(x)$ dans les cas suivants: $x = a$, $x \perp a$. En déduire la matrice de s_a dans une base orthonormée dont le premier vecteur est $\frac{1}{\|a\|}a$.
4. En déduire que s_a est la réflexion d'hyperplan $(\mathrm{Vect}(a))^\perp$.

4. corrigé Soit f un isométrie vectorielle d'un espace euclidien E et F un sous-espace de E. Démontrer que $f(F^\perp) = f(F)^\perp$.

5. corrigé Soit M une matrice symétrique et P une matrice orthogonale. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est symétrique.

6. corrigé Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant $AA^T = A^TA$. Démontrer que la matrice $\Omega = (A^{-1})^TA$ est orthogonale.

7. corrigé Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^2$ suivants:

1. $f : (x, y) = \dfrac{1}{5}(4x + 3y, 3x - 4y)$
2. $g : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{5}(4x - 3y, 3x + 4y)$.

8. corrigé Soit

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

9. corrigé Soit

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

10. corrigé Soit

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

11. corrigé Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que

$$A = \alpha\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

soit la matrice d'une réflexion. Préciser alors cette réflexion.

12. corrigé Déterminer la matrice, dans la base canonique de:

1. de la réflexion s de plan P d'équation $x + y - 2z = 0$,
2. du retournement ρ d'axe $\mathrm{Vect}(1, -1, 1)$,
3. de la rotation r d'axe dirigé et orienté par $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

13. corrigé Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $\mathrm{Ker}\,(f - I_3)$. Que peut-on en déduire?
2. On pose $g = -f$. Démontrer que g est une rotation; en donner son axe orienté D et son angle θ.
3. En déduire, en raisonnant dans une base convenable, que f est la composée $r \circ s$ de la rotation d'axe D et d'angle $\theta + \pi$ par la réflexion par rapport au plan $D^\perp$.

14. corrigé Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier l'existence d'une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et d'une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^TAP$ puis déterminer de telles matrices.
2. En déduire qu'il existe une matrice symétrique $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives telle que $R^2 = A$.

15. corrigé Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres pour f.
2. Démontrer alors l'équivalence des propriétés suivantes:
   1. pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(u), u\rangle \geq 0$
   2. toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ de f sont ≥ 0.

1. énoncé

1. u est une isométrie si et seulement si u transforme la base canonique, qui est orthonormée, en une base orthonormée. Or

$$\begin{array}{rcl} u(\vec{\imath}) & = & (0,b,1) \\ u(\vec{\jmath}) & = & (1,0,c) \\ u(\vec{k}) & = & (a,1,0). \end{array}$$

On voit clairement que

$$\|u(\vec{\imath})\| = \|u(\vec{\jmath})\| = \|u(\vec{k})\| = 1 \iff a=b=c=0$$

et qu'alors

$$\langle u(\vec{\imath}), u(\vec{\jmath})\rangle = \langle u(\vec{\imath}), u(\vec{k})\rangle = \langle u(\vec{\jmath}), u(\vec{k})\rangle = 0.$$

Ainsi, u est une isométrie si et seulement si

$$a=b=c=0.$$

2. u est une isométrie si et seulement si u conserve la norme, donc si et seulement si pour tout $\vec{v}=(x,y,z)$, on a

$$\|u(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \|u(\vec{v})\|^2 & = & (y+az)^2+(z+bx)^2+(x+cy)^2 \\ & = & x^2(1+b^2)+y^2(1+c^2)+z^2(1+a^2)+2cxy+2bzx+2ayz \end{array}$$

et on a donc $\|u(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ pour tout $\vec{v}$ si et seulement si

$$x^2(1+b^2)+y^2(1+c^2)+z^2(1+a^2)+2cxy+2bzx+2ayz = x^2+y^2+z^2$$

donc si et seulement si pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$x^2b^2+y^2c^2+z^2a^2+2cxy+2bzx+2ayz=0.$$

Ceci doit se produire en particulier pour

$$x=1, y=z=0,$$

ce qui conduit à

$$b=0,$$

puis lorsque

$$y=1, x=z=0,$$

ce qui donne

$$c=0$$

et enfin pour

$$z=1, x=y=0,$$

d'où

$$a=0.$$

Ainsi, u est une isométrie si et seulement si

$$a=b=c=0.$$

3. Soit M la matrice de u dans la base canonique:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ b & 0 & 1 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque la base canonique est orthonormée, u est une isométrie si et seulement si M est une matrice orthogonale, donc si et seulement si les colonnes de M sont de norme 1 et deux à deux orthogonales, ce qui aboutit exactement aux mêmes contraintes qu'avec la première approche.

2. énoncé Au moins 2 approches:

- u est une isométrie si et seulement si u transforme la base canonique, qui est orthonormée, en une base orthonormée. Or

$$\begin{array}{rcl} u(\vec{\imath}) & = & \frac{1}{3}(a,-1,-2) \\ u(\vec{\jmath}) & = & \frac{1}{3}(2,-2,c) \\ u(\vec{k}) & = & (1,b,-2). \end{array}$$

  On a

$$\begin{array}{rcl} \|u(\vec{\imath})\|^2 & = & \frac{1}{9}(a^2+5) \\ \|u(\vec{\jmath})\|^2 & = & \frac{1}{9}(c^2+8) \\ \|u(\vec{k})\|^2 & = & \frac{1}{9}(b^2+5) \\ \langle u(\vec{\imath}), u(\vec{\jmath})\rangle & = & \frac{1}{9}(2a-2c+2) \\ \langle u(\vec{\imath}), u(\vec{k})\rangle & = & \frac{1}{9}(a-b+4) \\ \langle u(\vec{\jmath}), u(\vec{k})\rangle & = & \frac{1}{9}(-2b-2c+2) \end{array}$$

  si bien que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{1}{9}(a^2+5)=1 \\ \frac{1}{9}(c^2+8)=1 \\ \frac{1}{9}(b^2+5)=1 \\ 2a-2c+2=0 \\ a-b+4=0 \\ -2b-2c+2=0 \end{cases}$$

donc si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ c^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ 2a - 2c + 2 = 0 \\ a - b + 4 = 0 \\ -2b - 2c + 2 = 0 \end{cases}$$

donc si et seulement si

$$\begin{cases} a = 2 \text{ ou } a = -2 \\ c = 1 \text{ ou } c = -1 \\ b = 2 \text{ ou } b = -2 \\ 2a - 2c + 2 = 0 \\ a - b + 4 = 0 \\ -2b - 2c + 2 = 0. \end{cases}$$

On voit immédiatement que L_1, L_2 et L_4 sont compatibles si et seulement si

$$a = -2, \ c = -1$$

que L_1, L_3 et L_5 sont compatibles si et seulement si

$$a = -2, \ b = 2$$

et qu'alors L_6 est satisfait Ainsi, u est une isométrie si et seulement si

$$a = -2, \ b = 2, \ c = -1.$$

- Puisque la base canonique est orthonormée, u est une isométrie si et seulement si A est une matrice orthogonale, donc si et seulement si les colonnes de A sont de norme 1 et deux à deux orthogonales, ce qui aboutit exactement aux mêmes contraintes qu'avec la première approche.

3. énoncé

1. Pour tous vecteurs x, y de E et tous scalaires α, β:

$$\begin{aligned} s_a(\alpha x \beta y) &= \alpha x + \beta y - 2\frac{\langle a, \alpha x + \beta y\rangle}{\langle a, a\rangle} a \\ &= \alpha x + \beta y - 2\frac{\alpha\langle a, x+\rangle + \beta\langle a, y\rangle}{\langle a, a\rangle} a \\ &= \alpha\left(x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a\right) + \beta\left(y - 2\frac{\langle a, y\rangle}{\langle a, a\rangle} a\right) \\ &= \alpha s_a(x) + \beta s_a(y), \end{aligned}$$

ce qui prouve que s_a est linéaire; enfin, il est clair que $s_a(x) \in E$ comme combinaison de vecteurs de E, ce qui prouve que s_a est un endomorphisme de E.

2.
- Rappelons que pour tous vecteurs y, z de E:

$$\begin{aligned} \|y + z\|^2 &= \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle y, z\rangle \\ \|y - z\|^2 &= \|y\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle y, z\rangle. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in E$:

$$\|s_a(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a\|^2 - 2\langle x, 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a\rangle$$

et comme

$$\|\lambda a\|^2 = \lambda^2\|a\|^2, \ \langle \lambda a, a\rangle = \lambda\langle a, a\rangle = \lambda\|a\|^2,$$

on a

$$\|s_a(x)\|^2 = \|x\|^2 + 4\frac{\langle a, x\rangle^2}{\langle a, a\rangle^2}\|a\|^2 - 4\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}\langle x, a\rangle$$

et comme $\|a\|^2 = \langle a, a\rangle$ et $\langle x, a\rangle = \langle a, x\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned} \|s_a(x)\|^2 &= \|x\|^2 + 4\frac{\langle a, x\rangle^2}{\langle a, a\rangle} - 4\frac{\langle a, x\rangle^2}{\langle a, a\rangle} \\ &= \|x\|^2, \end{aligned}$$

ce qui démontre que s_a est une isométrie.

- Pour tous vecteurs x, y de E:

$$\langle s_a(x), s_a(y)\rangle = \langle x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a, y - 2\frac{\langle a, y\rangle}{\langle a, a\rangle} a\rangle$$

et par bilinéarité du produit scalaire, on obtient

$$\langle x, y\rangle + \langle x, -2\frac{\langle a, y\rangle}{\langle a, a\rangle} a\rangle + \langle -2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a, y\rangle + \langle -2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a, -2\frac{\langle a, y\rangle}{\langle a, a\rangle} a\rangle$$

et en utilisant à nouveau la bilinéarité du produit scalaire:

$$\langle s_a(x), s_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle - 2\frac{\langle a, y\rangle}{\langle a, a\rangle}\langle x, a\rangle - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}\langle a, y\rangle + 4\frac{\langle a, x\rangle\langle a, y\rangle}{\langle a, a\rangle\langle a, a\rangle}\langle a, a\rangle$$

et on voit que tous les termes du membre de droite s'annulent, sauf $\langle x, y\rangle$, ce qui donne finalement:

$$\langle s_a(x), s_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

et démontre que s_a conserve le produit scalaire et donc que s_a est une isométrie.

3. On a

$$\begin{aligned} s_a(a) &= a - 2\frac{\langle a, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \\ &= a - 2a = -a \end{aligned}$$

et lorsque $x \perp a$, on a $\langle a, x\rangle = 0$ et alors $s_a(x) = x$. Par linéarité, on a alors

$$\begin{aligned} s_a\left(\frac{1}{\|a\|}a\right) &= \frac{1}{\|a\|}s_a(a) \\ &= -\frac{1}{\|a\|}a. \end{aligned}$$

En notant $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ cette base orthonormée (avec $e_1 = \frac{1}{\|a\|}a$), on a donc

$$\begin{aligned} s_a(e_1) &= -e_1 \\ s_a(e_2) &= e_2, \ldots \\ s_a(e_n) &= e_n \end{aligned}$$

et la matrice de s_a dans cette base est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Il est immédiat que

$$D^2 = I_n$$

si bien que

$$s_a^2 = \mathrm{Id}$$

et donc s_a est une symétrie. Rappelons de manière générale que dans une symétrie s par rapport à un sous-espace A et parallèlement à un sous-espace B qui sont supplémentaires, les vecteurs de A sont invariants:

$$\forall v \in A,\ s(v) = v$$

et ceux de B sont transformés en leur opposé:

$$\forall v \in B,\ s(v) = -v.$$

Ici, puisque $(e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ et que l'on a

$$\begin{aligned} s_a(e_2) &= e_2 \\ &\vdots \\ s_a(e_n) &= e_n \end{aligned}$$

on en déduit que s_a laisse invariants tous les vecteurs de H:

$$\forall v \in H,\ s(v) = v.$$

Enfin, de

$$s_a(a) = -a$$

i.e. les vecteurs de $H^\perp$ sont transformés en leur opposé, on en déduit que s_a est la symétrie orthogonale par rapport à H (et donc la réflexion d'hyperplan H).

4. énoncé

- On montre que $f(F^\perp) \subset f(F)^\perp$. Pour cela, soit $y \in f(F^\perp)$ i.e. $y = f(z)$ avec $z \in F^\perp$; montrons que $y \in f(F)^\perp$ i.e. que y est orthogonal à tout $f(x)$ avec $x \in F$. On a

$$\begin{aligned} \langle y, f(x)\rangle &= \langle f(z), f(x)\rangle \\ &= \langle z, x\rangle \text{ (car } f \text{ conserve le produit scalaire)} \\ &= 0 \text{ car } z \in F^\perp \text{ alors que } x \in F. \end{aligned}$$

  CQFD dans ce sens.
- On conclut en montrant que les sous-espaces ont la même dimension, grâce au fait que f conserve les dimensions en sa qualité d'automorphisme.

5. énoncé On a donc $M^T = M$ et $P^{-1} = P^T$ et alors, sachant que la transposition renverse l'ordre des facteurs:

$$\begin{aligned} \left(P^{-1}MP\right)^T &= P^T \times M^T \times (P^{-1})^T \\ &= P^{-1} \times M \times (P^T)^T \\ &= P^{-1} \times M \times P, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $P^{-1}MP$ est symétrique.

6. énoncé Quelques rappels:

- si M et N sont des matrices carrées inversibles de même taille, alors

$$(MN)^{-1} = N^{-1} \times M^{-1},$$

- pour toute matrice carrée inversible M,

$$\left(M^T\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^T,$$

- pour toutes matrices M, N (dont les tailles sont compatibles avec le produit matriciel),

$$(MN)^T = N^T \times M^T.$$

De $A\,A^T = A^T\,A$, prenons l'inverse des deux membres:

$$\left(A\,A^T\right)^{-1} = \left(A^T\,A\right)^{-1}$$

et donc avec les rappels:

$$\begin{aligned} \left(A^T\right)^{-1} \times A^{-1} &= A^{-1} \times \left(A^T\right)^{-1} \\ \Rightarrow (A^{-1})^T A^{-1} &= A^{-1}(A^{-1})^T \end{aligned}$$

i.e. A^{-1} commute avec sa transposée. On a alors

$$\begin{aligned} \Omega^T \times \Omega &= \left((A^{-1})^T A\right)^T \times (A^{-1})^T A \\ &= \left[A^T \times A^{-1}\right] \times \left[(A^{-1})^T A\right] \\ &= A^T \times \left(A^{-1} \times (A^{-1})^T\right) A \\ &= A^T \times \left((A^{-1})^T \times A^{-1}\right) A \\ &= \left(A^T \times (A^{-1})^T\right) \times (A^{-1} A) \end{aligned}$$

et comme

$$(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Omega^T \times \Omega &= \left(A^T \times \left(A^T\right)^{-1}\right) \times (A^{-1}A) \\ &= I_n \times I_n \\ &= I_n, \end{aligned}$$

ce qui démontre que Ω est orthogonale.

7. énoncé

1. La matrice de f dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

C'est une clairement matrice orthogonale de déterminant -1. Ainsi, f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D. D'après les propriétés des symétries,

$$D = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$$

et après calculs, on trouve

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(3, 1).$$

Ainsi, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \mathrm{Vect}(3, 1)$.

2. La matrice de g dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

C'est une clairement matrice orthogonale de déterminant 1. Ainsi, f est une rotation et son angle θ vérifie

$$\cos\theta = \frac{4}{5}, \quad \sin\theta = \frac{3}{5}.$$

Puisque $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$, on a $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}, 0\right]$, intervalle sur lequel on peut appliquer la fonction $\arcsin$ (ou $\arccos$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{4}{5}\right). \end{aligned}$$

8. énoncé A est orthogonale (vérification par les colonnes), donc f est une isométrie vectorielle. On calcule

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(2, 3, 0).$$

Puisque c'est une droite, on en déduit que f est une rotation, que l'on va orienter et diriger dans le sens du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3, 0)$. Notons θ son angle. On sait d'après le cours que

- $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}$ (où Tr est la trace),
- $\sin\theta = [\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{v})]$ (produit mixte), où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$.

Choisissons le vecteur $\vec{v} = (0, 0, 1)$. En utilisant A, ou en remarquant tout simplement que $\vec{v}$ est le troisième vecteur de la base canonique et qu'en conséquence, son image est codée par la troisième colonne de A, on a

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{7}(3, -2, -6).$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{6}{7} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{13}}{7}. \end{cases}$$

Puisque $\sin\theta > 0$, $\theta \in [0, \pi]$, intervalle sur lequel $\cos$ et $\arccos$ sont en bijection. On a donc

$$\theta = \arccos\left(-\frac{6}{7}\right).$$

9. énoncé A est orthogonale (vérification par les colonnes), donc f est une isométrie vectorielle.

- *Première approche.* On calcule $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ et on trouve le plan P d'équation

  $$x + 2y + 2z = 0.$$

  Le sous-espace vectoriel constitué par les vecteurs invariants de f étant un plan, on déduit du cours que f est la réflexion de plan P

- *Deuxième approche.* On remarque que A est symétrique, ce qui a pour conséquence
$$A^T = A.$$
Mais
$$A^T = A^{-1}$$
puisque A est orthogonale; c'est donc que
$$A = A^{-1}$$
i.e.
$$A^2 = I_3,$$
ce qui caractérise les symétries. Ainsi, f est une symétrie, soit par rapport à un plan (réflexion), soit par rapport à une droite (retournement). Dans une base adaptée (e_1, e_2, e_3) à la décomposition
$$\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$$
où
$$F = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$$
(vecteurs invariants), f serait représenté
  - dans le premier cas par la matrice
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
car F aurait pour base (e_1, e_2) et e_3 pour $F^\perp$
  - et par la matrice
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
dans le deuxième cas car F aurait pour base e_1 et (e_2, e_3) pour $F^\perp$.

Dans un cas comme dans l'autre, A et D représentent f et sont donc semblables et ont alors même trace. Mais
$$\mathrm{Tr}(A) = 1$$
alors que
$$\mathrm{Tr}(D) = -1$$
dans le deuxième cas. C'est donc qu'on est dans le premier cas, celui d'une réflexion.

Après calculs, on trouve que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ est le plan P d'équation
$$x + 2y + 2z = 0.$$
On en conclut que f est la réflexion de plan P.

10. énoncé A est orthogonale (vérification par les colonnes), donc f est une isométrie vectorielle.

- *Première approche.* On calcule $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ et on trouve la droite
$$D = \mathrm{Vect}(1, 1, 1).$$
Le sous-espace vectoriel constitué par les vecteurs invariants de f étant une droite, on déduit du cours que f est une rotation. Orientons et dirigeons l'axe D de cette rotation suivant le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Notons θ son angle. On sait d'après le cours que
  - $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}$ (où Tr est la trace),
  - $\sin\theta = [\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{v})]$ (produit mixte), où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$.

Choisissons le vecteur
$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$
En utilisant A:
$$A \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
on en déduit que
$$f(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$
On obtient alors
$$\begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = -1 \end{cases}$$
et donc $\theta = \pi$. Ainsi, f est la rotation d'axe orienté et dirigé par $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et d'angle π, c'est à dire le retournement d'axe $D = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.
- *Deuxième approche.* On remarque que A est symétrique, ce qui a pour conséquence
$$A^T = A.$$
Mais
$$A^T = A^{-1}$$
puisque A est orthogonale; c'est donc que
$$A = A^{-1}$$
i.e.
$$A^2 = I_3,$$
ce qui caractérise les symétries. Ainsi, f est une symétrie, soit par rapport à un plan (réflexion), soit par rapport à une droite (retournement).

Dans une base adaptée (e_1, e_2, e_3) à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$ où $F = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ (vecteurs invariants), f est représenté

– dans le premier cas par la matrice $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ car F a pour base (e_1, e_2) et e_3 pour $F^\perp$

– et par la matrice $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ dans le deuxième cas car F a pour base e_1 et (e_2, e_3) pour $F^\perp$.

Dans un cas comme dans l'autre, A et D représentent f et sont donc semblables et ont alors même trace. Mais

$$\mathrm{Tr}(A) = -1$$

alors que

$$\mathrm{Tr}(D) = 1$$

dans le premier cas. C'est donc qu'on est dans le deuxième cas, celui d'un retournement.

Après calculs, on trouve que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$. On en conclut que f est le retournement d'axe $\mathrm{Vect}(1,1,1)$.

11. énoncé Les colonnes sont déjà deux à deux orthogonales et elles sont de norme 1 si et seulement si $|\alpha| = \frac{1}{7}$ et $\alpha = \frac{1}{7}$ ou $\alpha = -\frac{1}{7}$.

- Si $\alpha = \frac{1}{7}$, on trouve que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ est le plan P d'équation $-9x + 6y - 3z = 0$ et f est alors la réflexion de plan P.
- Si $\alpha = -\frac{1}{7}$, on trouve que

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(-3, 2, -1).$$

Les invariants de f forment une droite, donc f n'est pas une réflexion. Notons alors que f est une rotation.
Mais comme A est symétrique et orthogonale, on a

$$A^T = A$$

et

$$A^T = A^{-1},$$

ce qui donne

$$A = A^{-1}$$

ou encore

$$A^2 = I_3,$$

c'est à dire

$$f \circ f = \mathrm{Id}.$$

Ainsi, f est une symétrie et c'est donc le retournement d'axe $\mathrm{Vect}(-3, 2, -1)$.

12. énoncé

1. Plusieurs méthodes sont possibles.

- *Première méthode.* Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons

$$D = \mathrm{Vect}(1, 1, -2)$$

si bien que

$$D = P^\perp.$$

On sait alors que $\vec{u}$ s'écrit de manière unique

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in P,\ \vec{u}_2 \in D$$

et puisque $D = \mathrm{Vect}(1, 1, -2)$, $\vec{u}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{u}_1 + \lambda(1, 1, -2), \quad \vec{u}_1 \in P,\ \lambda \in \mathbb{R}\\ &= \vec{u}_1 + (\lambda, \lambda, -2\lambda).\end{aligned}$$

Mais alors

$$\vec{u}_1 \in P \iff \vec{u} - (\lambda, \lambda, -2\lambda) \in P$$

et puisque

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{u} - (\lambda, \lambda, -2\lambda)\\ &= (x - \lambda, y - \lambda, z + 2\lambda),\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \in P &\iff (x - \lambda, y - \lambda, z + 2\lambda) \in P\\ &\iff (x - \lambda) + (y - \lambda) - 2(z + 2\lambda) = 0\\ &\iff \lambda = \frac{1}{6}(x + y - 2z),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= (x - \lambda, y - \lambda, z + 2\lambda)\\ &= (x - \frac{1}{6}(x + y - 2z), y - \frac{1}{6}(x + y - 2z), z + \frac{2}{6}(x + y - 2z))\\ \vec{u}_2 &= \lambda(1, 1, -2)\\ &= \frac{1}{6}(x + y - 2z)(1, 1, -2)\\ &= \left(\frac{1}{6}(x + y - 2z), \frac{1}{6}(x + y - 2z), -\frac{2}{6}(x + y - 2z)\right)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}s(\vec{u}) &= \vec{u}_1 - \vec{u}_2\\ &= \left(x - \frac{2}{6}(x + y - 2z), y - \frac{2}{6}(x + y - 2z), z + \frac{4}{6}(x + y - 2z)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(2x - y + 2z, -x + 2y + 2z, 2x + 2y - z\right).\end{aligned}$$

On en déduit la matrice M de s dans la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: il suffit de calculer avec cette formule

$$\begin{aligned} s(\vec{\imath}) &= s(1,0,0) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ s(\vec{\jmath}) &= s(0,1,0) \\ &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ s(\vec{k}) &= s(0,0,1) \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

et d'écrire ces vecteurs verticalement. Ainsi,

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- *Deuxième méthode.* Dans une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée de P, la matrice D de s est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

puisque c'est la traduction du fait que

$$\begin{aligned} s(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 \\ s(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2 \\ s(\vec{e}_3) &= -\vec{e}_3. \end{aligned}$$

  - On prendra bien sûr

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2),$$

    vecteur unitaire normal à P.
  - Posons

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0).$$

    C'est un vecteur orthogonal à $\vec{e}_3$, donc dans P, et unitaire.
  - Posons

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1). \end{aligned}$$

    C'est un vecteur unitaire, orthogonal à $\vec{e}_3$ donc dans P, et orthogonal à $\vec{e}_2$; c'est pourquoi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre et constitue une base de P qui est du coup une base orthonormée de P.
  - Ainsi,

$$\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

    est une base orthonormée de l'espace et alors D est la matrice de s dans $\mathcal{B}_0$.

  En notant M la matrice de s dans la base canonique (la matrice recherchée donc), on a d'après les formules de changement de base

$$D = Q^{-1}MQ,$$

  où Q est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_0$, c'est à dire

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

  On a donc

$$\begin{aligned} M &= QDQ^{-1} \\ &= QDQ^T \end{aligned}$$

  car Q est une matrice orthogonale (ce que l'on constate effectivement) en tant que matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée. On calcule alors

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- *Troisième méthode.* Rappelons ces deux résultats du cours (p. 142 et p. 260):
  - Soit E un espace vectoriel,
    * A et B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:

$$E = A \oplus B,$$

    * p la projection sur A et parallèlement à B,
    * s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B.
    * Alors

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E$$

      i.e. pour tout vecteur $\vec{v} \in E$,

$$s(\vec{v}) = 2p(\vec{v}) - \vec{v}.$$

  - Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, H un hyperplan de E, $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, normal à H et p la projection orthogonale sur H. Alors

$$\forall \vec{v} \in E,\ p(\vec{v}) = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \vec{n}.$$

On en conclut qu'ici, en notant p la projection orthogonale sur le plan P et

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$$

un vecteur unitaire au plan P, on a

$$\begin{array}{rcl}\forall \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ s(\vec{v}) & = & 2p(\vec{v}) - \vec{v} \\ & = & 2\vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle \vec{n} - \vec{v} \\ & = & \vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle \vec{n} \\ & = & (x, y, z) - 2 \times \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y - 2z) \times \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \\ & = & (x, y, z) - \frac{1}{3}\left(x + y - 2z, x + y - 2z, -2x - 2y + 4z\right) \\ & = & \frac{1}{3}\left(2x - y + 2z, -x + 2y + 2z, 2x + 2y - z\right)\end{array}$$

et dans la mesure où l'on retrouve la même formule qu'avec la première méthode, on conclut de la même façon.

2. Dans une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace où $(\vec{e}_1)$ est une base orthonormée de D, la matrice D de ρ est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

puisque c'est la traduction du fait que

$$\rho(\vec{e}_1) = \vec{e}_1,\ \rho(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2,\ \rho(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3.$$

$$\begin{array}{rcl}\rho(\vec{e}_1) & = & \vec{e}_1 \\ \rho(\vec{e}_2) & = & -\vec{e}_2 \\ \rho(\vec{e}_3) & = & -\vec{e}_3.\end{array}$$

- On prendra bien sûr

  $$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1),$$

  vecteur unitaire qui dirige D.
- Posons

  $$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

  C'est un vecteur orthogonal à $\vec{e}_2$ et unitaire.
- Posons

  $$\begin{array}{rcl}\vec{e}_3 & = & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \\ & = & \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2).\end{array}$$

  C'est un vecteur unitaire, orthogonal à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$.
- Ainsi,

  $$\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

  est une base orthonormée de l'espace et alors D est la matrice de ρ dans $\mathcal{B}_0$.

En notant M la matrice de s dans la base canonique (la matrice recherchée donc), on a

$$D = Q^{-1}MQ$$

d'après les formules de changement de base, où Q est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_0$, c'est à dire

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl}M & = & QDQ^{-1} \\ & = & QDQ^T\end{array}$$

car Q est une matrice orthogonale (ce que l'on constate effectivement) en tant que matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée. On calcule alors

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}_0 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace, la matrice R de r est

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta = \frac{\pi}{3}$: c'est le théorème fondamental sur les rotations. On a donc

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Posons

  $$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

  C'est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et unitaire.

- Posons

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u}\wedge\vec{v}\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,-2).\end{aligned}$$

Des propriétés du produit vectoriel,

$$\mathcal{B}_0 = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$

est une base orthonormée directe de l'espace et alors R est la matrice de r dans $\mathcal{B}_0$.

En notant M la matrice de r dans la base canonique (la matrice recherchée donc), on a

$$D = Q^{-1}MQ$$

d'après les formules de changement de base, où Q est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_0$, c'est à dire

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}M &= QDQ^{-1}\\ &= QDQ^{T}\end{aligned}$$

car Q est une matrice orthogonale (ce que l'on constate effectivement) en tant que matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée. On calcule alors

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. énoncé

1. On vérifie sans peine que A est une matrice orthogonale, si bien que f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et après calcul, on trouve

$$\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) = \{\vec{0}\},$$

ce qui démontre que f n'est ni une réflexion, ni une rotation.

2. Évidemment, g est toujours une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$, puisque

$$\begin{aligned}\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^3,\ \|g(\vec{v})\| &= \|-f(\vec{v})\|\\ &= \|f(\vec{v})\|\\ &= \|\vec{v}\|.\end{aligned}$$

Par le calcul, on trouve

$$\mathrm{Ker}\,(g-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$$

avec

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1).$$

Puisque $\mathrm{Ker}\,(g-\mathrm{Id})$ est une droite vectorielle, on en déduit que g est une rotation. Dirigeons et orientons son axe par le vecteur $\vec{u}$. Notons θ son angle. Dans la mesure où g est représentée par $-A$, on a d'après le cours

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(-A)-1}{2}\\ \sin\theta = [\vec{u},\vec{v},g(\vec{v})]\end{cases}$$

où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire et orthogonal à $\vec{u}$, de notre choix, comme le vecteur

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).$$

On trouve alors

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

puis on calcule

$$-A\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

et en conséquence

$$g(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),$$

si bien que

$$\begin{aligned}[\vec{u},\vec{v},g(\vec{v})] &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\times 3\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

De

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$$

on déduit immédiatement

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

3. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe (par exemple, celle du **2**) et s la réflexion par rapport au plan

$$D^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Dans la mesure où, par définition,

$$\begin{aligned} s(\vec{e}_1) &= -\vec{e}_1 \\ s(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2 \\ s(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3, \end{aligned}$$

s est représentée dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors que g est représentée dans cette même base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

si bien que $f = -g$ est représenté dans cette même base $\mathcal{B}$ par la matrice

$$\begin{aligned} R' &= -R \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} R \times \Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= -R, \end{aligned}$$

ce qui est la preuve que

$$f = r \circ s.$$

14. énoncé

1. Puisque A est symétrique à coefficients réels, l'existence de D et P est assurée par le théorème spectral.

- Les valeurs propres de A sont 1 et 4 et $\mathrm{Ker}\,(A - I_3)$ est le plan d'équation

$$-x + y + z = 0.$$

- Puisque les sous-espaces propres sont orthogonaux, $\mathrm{Ker}\,(A - 4I_3)$ est la droite dirigée par $(-1, 1, 1)$.
- Une base orthonormée de vecteurs propres $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ s'obtient donc:
  - en prenant un vecteur unitaire du plan $-x + y + z = 0$, comme

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),$$

    vecteur propre associé à la valeur propre 1,
  - le vecteur

$$\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1),$$

    vecteur propre associé à la valeur propre 4,
  - le vecteur

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{w} \wedge \vec{u} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -2), \end{aligned}$$

    vecteur propre associé à la valeur propre 1 car $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$, donc dans le plan $-x + y + z$.

On a donc

$$D = P^T A P$$

avec

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Deux approches possibles.

- *Méthode de l'algébriste linéaire chevronné.* C'est une situation archi-classique où la résolution d'une certaine équation impliquant une certaine matrice, ici A, est ramenée à un problème concernant une matrice qui lui est semblable, en l'occurrence la matrice diagonale D.

La matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vérifie manifestement

$$\Delta^2 = D$$

et a ses valeurs propres > 0. En conséquence,

$$\begin{aligned} R &= P\Delta P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vérifie

$$\begin{aligned} R^2 &= P\Delta^2 P^{-1} \\ &= PDP^{-1} = A \end{aligned}$$

et comme R est semblable à Δ, elle a les mêmes valeurs propres qu'elle et sont donc > 0.

- *Même méthode, mais plus développée.* En termes d'endomorphismes canoniquement associés, la méthode est naturelle.
  - Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
  - Soit R une matrice 3×3 et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice R.
  - On sait alors que R^2 est la matrice, dans la base canonique, associée à l'endomorphisme u^2 (c'est à dire $u \circ u$) si bien que

    $$R^2 = B \iff u^2 = f.$$

  - Maintenant, soit Δ la matrice de u dans la base de vecteurs propres de f

    $$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

    Des formules de changement de base, on a

    $$\Delta = P^{-1}AP.$$

    Puisque f est représenté par la matrice diagonale D ci-dessus, on a

    $$u^2 = v \iff \Delta^2 = D$$

    si bien que le problème

    $$R^2 = B$$

    est ramené au problème

    $$\begin{aligned} \Delta^2 &= D \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

    et ce problème admet la solution triviale

    $$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

    et il suffit maintenant de remonter à R:

    $$\Delta = P^{-1}RP \implies R = P\Delta P^{-1}$$

    et en conclusion, la matrice

    $$R = P\Delta P^{-1}$$

    vérifie

    $$R^2 = A.$$

    C'est la même matrice R que ci-dessus et on conclut donc de la même façon.

15. énoncé

1. Puisque A est symétrique à coefficients réels, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}AP$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ dont les vecteurs ont pour composantes les colonnes de P, de sorte que P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ si bien que d'après les formules de changement de base, D est la matrice de f dans $\mathcal{B}$. Puisque D est diagonale, les vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ sont des vecteurs propres de f.

2. C'est un résultat du cours: f étant représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par une matrice symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f.

3. Raisonnons en deux temps.

- Supposons pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

  $$\langle f(u), u\rangle \geq 0.$$

  Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé; on a alors

  $$f(v) = \lambda v$$

  et par hypothèse,

  $$\langle f(v), v\rangle \geq 0.$$

Or

$$\begin{array}{rcl}\langle f(v), v\rangle & = & \langle \lambda v, v\rangle \\ & = & \lambda\langle v, v\rangle \\ & = & \lambda\|v\|^2.\end{array}$$

C'est donc que

$$\lambda\|v\|^2 \geq 0$$

et comme v n'est pas le vecteur nul (en sa qualité de vecteur propre), on a

$$\|v\|^2 > 0$$

et en conséquence $\lambda \geq 0$.

- Supposons que toutes les valeurs propres

$$\lambda_1, \ldots \lambda_r$$

de f sont toutes ≥ 0. Soit u un vecteur que l'on décompose dans la base orthonormée de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$u = u_1 e_1 + \ldots + u_n e_n.$$

En supposant que e_1 soit associé à la valeur propre λ_1,..., e_n associé à la valeur propre λ_n i.e.

$$\begin{array}{rcl}f(e_1) & = & \lambda_1 e_1 \\ & & \ldots \\ f(e_n) & = & \lambda_n e_n,\end{array}$$

on a par linéarité

$$\begin{array}{rcl}f(u) & = & u_1 f(e_1) + \ldots + u_n f(e_n) \\ & = & u_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + u_n \lambda_n e_n.\end{array}$$

Ainsi, les composantes de u dans la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ sont

$$(u_1, \ldots, u_n)$$

alors que celles de $f(u)$ sont

$$(\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n).$$

D'après un résultat du cours, la base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, on a alors

$$\langle f(u), u\rangle = u_1 \times \lambda_1 u_1 + \ldots + u_n \lambda_n u_n$$

et donc

$$\begin{array}{rcl}\langle f(u), u\rangle & = & \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2 \\ & \geq & 0\end{array}$$

puisque les λ_i sont ≥ 0 ainsi que les u_i^2. L'équivalence est établie.