Feuille d'exercices n°3

Nature par le calcul

1. corrigé Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes et calculer leur valeur en cas de convergence:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t+2}\,dt\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{(2t+3)^2}\,dt\quad \int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t}\,dt\quad \int_0^{1}\frac{\ln t}{t}\,dt\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{t-i}\,dt.$$

2. corrigé Même question:

$$\int_0^{1}\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\,dt\quad \int_0^{1}\frac{1}{(1-t)^3}\,dt\quad \int_0^{+\infty}te^{-t^2}\,dt$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}}\,dt\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{3t^2+2}\,dt.$$

3. corrigé Même question:

$$\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt\quad \int_0^{+\infty}t^2e^{-3t}\,dt\quad \int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln t}\,dt$$
$$\int_0^{1}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt\quad \int_2^{+\infty}\frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt.$$

4. corrigé On considère l'intégrale impropre

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t^2)}\,dt.$$

1. Déterminer des réels a,b,c tels que

$$\forall t\in\mathbb{R}^*,\quad \frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{1+t^2}.$$

2. Démontrer alors que I est convergente et calculer I.

Nature par théorème de comparaison

5. corrigé Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2}\,dt,\quad \int_1^{+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t}\,dt,\quad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

$$\int_0^{1}\frac{\arctan t}{t}\,dt,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t}\,dt.$$

6. corrigé Même question:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\,dt\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\sin\sqrt{t}}\,dt.$$

7. corrigé Même question:

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{t}\,dt\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,dt\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin t}}{t^2}\,dt\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,dt\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\,dx\ (\alpha<\beta).$$

8. corrigé

1. Établir la convergence de l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx.$$

2. Calculer I en recherchant deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}.$$

Formule de changement de variable

9. corrigé Établir la convergence et calculer l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+5x^2}\,dx.$$

10. corrigé

1. Par une majoration convenable, établir la convergence de

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx.$$

2. Pour tout réel $a>0$, établir la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\,dx$$

et exprimer sa valeur en fonction de a et I.

11. corrigé

1. Prouver la convergence et calculer l'intégrale

$$I=\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt.$$

2. Au moyen du changement de variable $t=\frac{1}{x}$, prouver la convergence de l'intégrale

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4-x^3}}dx$$

et la calculer.

12. corrigé Soit $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

1. Démontrer que $I_1=\displaystyle\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ est convergente.
2. En déduire que I est convergente.
3. Calculer I en posant $t=\frac{1}{x}$.
4. Calculer I en posant $t=\sqrt{x^2-1}$.
5. Calculer I en posant $t=x+\sqrt{x^2-1}$.
6. Calculer I en posant $x=\operatorname{ch} t$.

Intégration par parties

13. corrigé À l'aide de la formule d'intégration par parties, prouver la convergence et calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$.

14. corrigé Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Établir la convergence de l'intégrale

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx.$$

2. Pour tout $n\geq 1$, établir une relation entre I_n et I_{n-1}.
3. Démontrer alors que $I_n=\dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$.

Intégrabilité

15. corrigé Prouver la convergence des intégrales suivantes:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt,\quad \int_0^{+\infty}e^{-x}\sin(x^2)\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t(1+t^2)}\,dt.$$

16. corrigé Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\sin x\,dx.$$

17. corrigé À l'aide du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables, établir la convergence des intégrales suivantes:

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^4}\,dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

18. corrigé Même question:

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx, \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \sin x dx (n \in \mathbb{N}), \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \times e^{-3x}}{e^x - e^{-x}} dx.$$

19. corrigé

1. À l'aide de la formule d'intégration par parties, démontrer la convergence de l'intégrale

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

2. Qu'en est-il de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$?

3. Pour tout réel $a \neq 0$, établir la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\, dt$$

et exprimer sa valeur en fonction de I.

20. corrigé Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale impropre $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$.

1. Établir la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \geq 1$, établir une relation entre I_n et I_{n-1}.

3. En déduire la valeur de I_n.

1. énoncé Diverge. $I=\frac{1}{6}$. $I=1$. Diverge. Diverge. Diverge (séparer parties réelle et imaginaire).

2. énoncé $I=4$. Diverge. $I=\frac{1}{2}$. $I=2$. $I=\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$ $\left(3t^2+2=2\left(\left[\sqrt{\frac{3}{2}}t\right]^2+1\right)\right.$ et changement de variable).

3. énoncé $I=2$. $I=\frac{2}{27}$. Diverge. $I=-4$ (intégrer par parties). $I=\frac{1}{\ln 2}$.

4. énoncé

1. $\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}$.
2. On a

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt &= \left[\ln t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^X\\ &= \ln\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{t}{\sqrt{t^2}}=1,$$

on a

$$\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\ln 1=0,$$

ce qui prouve la convergence de I et donne $I=\frac{1}{2}\ln 2$.

5. énoncé

1. La fonction $t\mapsto\frac{\cos^2 t}{t^2}$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$: l'intégrale $I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{t^2}\,dt$ n'est donc impropre qu'en $+\infty$. Pour tout $t\geq 1$,

$$0\leq\frac{\cos^2 t}{t^2}\leq\frac{1}{t^2}.$$

Or $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ converge (référence) donc I converge par théorème de comparaison par majoration des fonctions à valeurs positives.

2. La fonction $t\mapsto\frac{\ln(t+1)}{t}$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$: l'intégrale $I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t}\,dt$ n'est donc impropre qu'en $+\infty$. Pour tout $t\geq 1$,

$$\frac{\ln(t+1)}{t}\geq\frac{\ln 2}{t}\geq 0.$$

Or $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt$ diverge (référence) donc I diverge par théorème de comparaison par majoration des fonctions à valeurs positives.

3. La fonction $t\mapsto\frac{e^{-t}}{t}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$: l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est donc impropre aux deux bornes.

- *Étude de* $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Pour tout $t\geq 1$,

$$0\leq\frac{1}{t}\leq 1\quad\Longrightarrow\quad 0\leq\frac{e^{-t}}{t}\leq e^{-t}.$$

Or $\int_1^{+\infty}e^{-t}\,dt$ converge (référence) donc $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge par théorème de comparaison par majoration des fonctions à valeurs positives.

- *Étude de* $\int_0^1\frac{e^{-t}}{t}\,dt$. On a

$$\frac{e^{-t}}{t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{t}.$$

Or $\int_0^1\frac{1}{t}\,dt$ diverge (référence) donc $\int_0^1\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ diverge par théorème de comparaison par équivalence des fonctions à valeurs positives.

En définitive, I diverge.

4. La fonction $t\mapsto\frac{\arctan t}{t}$ est définie et continue sur $]0,1]$: l'intégrale $I=\int_0^1\frac{\arctan t}{t}\,dt$ n'est donc impropre qu'en 0. On produit classiquement un équivalent de $f:t\mapsto\arctan t$ au voisinage de 0 par l'intermédiaire d'une développement limité, lui-même obtenu par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1:

$$f(t)\underset{t\to 0}{=}f(0)+tf'(0)+o(t)$$

et puisque $f'(t)=\frac{1}{1+t^2}$, on a $f'(0)=1$ et aussi $f(0)=0$, d'où

$$\arctan t\underset{t\to 0}{=}t+o(t)\quad\Longrightarrow\quad\arctan t\underset{t\to 0}{\sim}t$$

et c'est pourquoi

$$\frac{\arctan t}{t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t}{t}=1.$$

Ainsi, la fonction $t\mapsto\frac{\arctan t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 en attribuant la valeur 1. Dès lors, I existe en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.

5. La fonction $t\mapsto\frac{\arctan t}{t}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$: l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t}\,dt$ est donc impropre aux deux bornes.

- *Étude de* $\int_0^1\frac{\arctan t}{t}\,dt$. Cette intégrale existe (étude précédente).

- *Étude de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}\, dt$. On sait que
$$\arctan t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$
et c'est pourquoi
$$\arctan t \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$
(typique en cas de limite finie non nulle). On a donc
$$\frac{\arctan t}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{t}.$$
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ diverge (référence) donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}\, dt$ diverge par théorème de comparaison par équivalence des fonctions à valeurs positives.

En définitive, I diverge.

6. énoncé

1. La fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^4+1}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$: l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$ n'est donc impropre qu'en $+\infty$. On a
$$\frac{x^2+1}{x^4+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}.$$
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dt$ converge (référence) donc I converge par théorème de comparaison par majoration des fonctions à valeurs positives.

2. La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est définie et continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $\sin t > 0$ pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$: l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, d$ n'est donc impropre qu'en 0. On va prouver que
$$\ln(\sin t) \underset{t\to}{\sim} \ln t$$
non par composition d'équivalents (absolument interdit) mais de la manière suivante:
$$\sin t \underset{t\to 0}{=} t + o(t).$$
Ce développement limité est une *égalité entre deux fonctions*: on peut donc "prendre" le $\ln$ des deux membres:
$$\ln(\sin t) \underset{t\to 0}{=} \ln\big(t + o(t)\big)$$
et suivant une technique bien connue ("la loi du plus fort": on met de force le terme prépondérant en facteur),
$$\begin{aligned}\ln(\sin t) &\underset{t\to 0}{=} \ln\big(t[1+o(1)]\big)\\ &= \ln t + \ln[1+o(1))].\end{aligned}$$
Or, par définition,
$$1 + o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$
et en conséquence
$$\ln[1+o(1)] \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \ln 1 = 0$$
alors que
$$\ln t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty.$$
Ainsi, $\ln[1+o(1)]$ est négligeable devant $\ln t$:
$$\frac{\ln[1+o(1)]}{\ln t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$
et c'est pourquoi, par définition de la notion d'équivalent:
$$\ln t + \ln[1+o(1))] \underset{t\to 0}{\sim} \ln t.$$
En définitive,
$$\ln(\sin t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln t.$$
Or $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ converge (référence) donc I converge par théorème de comparaison par équivalence des fonctions à valeurs positives.

3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2+\sin\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$: l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sin\sqrt{t}}\, dt$ est donc impropre aux deux bornes.

- *Étude de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+\sin\sqrt{t}}\, dt$. On a
$$\sin u \underset{u\to 0}{=} u + o(u),$$
d'où
$$\sin\sqrt{t} \underset{t\to 0^+}{=} \sqrt{t} + o(\sqrt{t})$$
et donc
$$t^2 + \sin\sqrt{t} \underset{t\to 0^+}{=} t^2 + \sqrt{t} + o(\sqrt{t})$$
mais de façon évidente,
$$t^2 \underset{t\to 0^+}{=} o(\sqrt{t})$$
si bien que
$$t^2 + \sin\sqrt{t} \underset{t\to 0^+}{=} \sqrt{t} + o(\sqrt{t})$$
et en conséquence,
$$t^2 + \sin\sqrt{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}.$$
Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ converge (référence) donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+\sin\sqrt{t}}\, dt$ converge par théorème de comparaison par équivalence des fonctions à valeurs positives.

- *Étude de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sin\sqrt{t}}\,dt$. De façon évidente,

$$\left|\sin\sqrt{t}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin\sqrt{t}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En d'autres termes,

$$\sin\sqrt{t} \underset{t\to+\infty}{=} o(t^2)$$

et c'est pourquoi

$$t^2+\sin\sqrt{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{t^2+\sin\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (référence) donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sin\sqrt{t}}\,dt$ converge par théorème de comparaison par équivalence des fonctions à valeurs positives.

En définitive, I converge.

7. énoncé

1. La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ est définie et continue sur $]0,\pi]$: l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos t}{t}\,dt$ n'est donc impropre qu'en 0. On a

$$\cos t \underset{t\to 0}{\sim} 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\cos t}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge (référence) donc I diverge par théorème de comparaison par équivalence des fonctions à valeurs positives.

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ est définie et continue sur $]-\infty,+\infty[$: l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt$ est donc impropre aux deux bornes.

- *Étude de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt$. On a

$$\frac{1}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,dt$ converge (référence) donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt$ converge par théorème de comparaison par équivalence des fonctions à valeurs positives et puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,dt$ en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt$ est convergente

- *Étude de* $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^4}\,dt$. La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$$

est paire. Il est alors immédiat que la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt$ entraîne la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^4}\,dt$.

En définitive, I converge.

3. La fonction $u \mapsto \frac{\sin^2 u}{u^2}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$: l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}du$ est donc impropre aux deux bornes.

- *Étude de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$. On a

$$\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u \Longrightarrow \sin^2 u \underset{u\to 0}{\sim} u^2 \Longrightarrow \frac{\sin^2 u}{u^2} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{u^2} = 1.$$

Ainsi, la fonction $u \mapsto \frac{\sin^2 u}{u^2}$ est prolongeable par continuité en 0 en attribuant la valeur 1. Dès lors, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.

- *Étude de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$. Pour tout $u \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\sin^2 u}{u^2} \leq \frac{1}{u^2}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,dt$ converge (référence) donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$ converge par théorème de comparaison par majoration des fonctions à valeurs positives.

En définitive, I converge.

4. La fonction $t \mapsto \frac{e^{\sin t}}{t^2}$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$: l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t^2}\,dt$ n'est donc impropre qu'en $+\infty$. Pour tout $t \geq 1$,

$$\sin t \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{\sin t} \leq e^1 = e \quad \Longrightarrow \quad \frac{e^{\sin t}}{t^2} \leq \frac{e}{t^2}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (référence) donc I converge par théorème de comparaison par majoration des fonctions à valeurs positives.

5. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}$ est définie et continue sur $]1,+\infty[$: l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,dt$ est donc impropre aux deux bornes.

- *Étude de* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,dt$. On a
$$t+1 \underset{t\to+\infty}{\sim} t$$
alors que
$$t^2-1 \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2,$$
ce qui entraîne:
$$\sqrt{t^2-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t^2} = t$$
en conséquence de quoi
$$\frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t\times t} = \frac{1}{t^2}.$$
Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (référence) donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,dt$ converge par théorème de comparaison par équivalence des fonctions à valeurs positives.

- *Étude de* $\int_1^{2} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,dt$. Puisque
$$t+1 \underset{t\to1}{\longrightarrow} 2,$$
on a
$$t+1 \underset{t\to1}{\sim} 2.$$
D'autre part,
$$\sqrt{t^2-1} = \sqrt{(t+1)(t-1)} = \sqrt{t+1}\times\sqrt{t-1}.$$
Puisque
$$t+1 \underset{t\to1}{\sim} 2,$$
on a
$$\sqrt{t+1} \underset{t\to1}{\sim} \sqrt{2}.$$
En conséquence,
$$\sqrt{t^2-1} \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{t-1}}.$$
Du théorème de comparaison par équivalence, on déduit que $\int_1^{2} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,dt$ et $\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt$ sont de même nature. Or on peut trouver la nature cette dernière en se ramenant à la définition i.e. par du calcul intégral: pour $a>1$,
$$\int_a^{2} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt = \left[2\sqrt{t-1}\right]_a^2 = 2 - 2\sqrt{a-1} \underset{a\to1}{\longrightarrow} 2,$$
ce qui prouve, par définition, la convergence de $\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt$. Ainsi, $\int_1^{2} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\,dt$ converge.

En définitive, I converge.

6. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$: l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\,dx$ est donc impropre aux deux bornes.

- *Étude de* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\,dx$. Puisque $\alpha<\beta$, on a
$$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right).$$
En conséquence,
$$x^\alpha+x^\beta \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\beta \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{x^\alpha+x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^\beta}.$$
Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx$ converge si et seulement si $\beta>1$, on déduit du théorème de comparaison par équivalence que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\,dx$ converge si et seulement si $\beta>1$.

- *Étude de* $\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\,dx$. Puisque $\beta>\alpha$, on a
$$x^\beta \underset{x\to0}{=} o\left(x^\alpha\right).$$
En conséquence,
$$x^\alpha+x^\beta \underset{x\to0}{\sim} x^\alpha \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{x^\alpha+x^\beta} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}.$$
Puisque $\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha<1$, on déduit du théorème de comparaison par équivalence que $\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha<1$.

En définitive, I converge si et seulement si $\alpha<1<\beta$.

8. énoncé

1. $(x+1)(x+2)$ ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale n'est impropre qu'à la borne $+\infty$ et

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2},$$

ce qui assure la convergence ce $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$ par comparaison, puis la convergence de I, puisque l'intégrale existe (fonction continue sur un segment) sur $[0,1]$.

2. On trouve $a=1$, $b=-1$ puis

$$\int_0^X \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_0^X \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= \ln\frac{X+1}{X+2} - \ln\frac{1}{2} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Ainsi, $I=\ln 2$.

Formule de changement de variable

9. énoncé I n'est impropre qu'en $+\infty$ et l'équivalence

$$\frac{1}{1+5x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5x^2}$$

prouve, à l'aide du théorème de comparaison et le fait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}$ converge, que I converge. Pour le calcul, on écrit

$$5x^2 = \left(\sqrt{5}x\right)^2$$

et on réalise le changement de variable $u=\sqrt{5}x$.

Approche recommandée. En posant $u=\sqrt{5}x$, on a

$$du = \sqrt{5}\,dx$$
$$\frac{1}{1+5x^2}\,dx = \frac{1}{1+\left(\sqrt{5}x\right)^2}\,dx = \frac{1}{1+u^2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\,du$$
$$x=0 \Longrightarrow u=0, \quad x\to+\infty \Longrightarrow u\to+\infty$$

si bien que d'après la formule de changement de variable, I est de même nature que

$$J = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du$$

et ces intégrales sont égales en cas de convergence.

Or

$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{1}{1+u^2}\,du &= [\arctan u]_0^X \\ &= \arctan X \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

c'est donc que par définition, J est convergente et

$$J = \frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\pi}{2}.$$

C'est pourquoi I est convergente

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\pi}{2}.$$

Avec la formule rigoureuse du cours (à ne pas lire obligatoirement).

Rappel. Il faut toujours introduire l'application (la "machine") qui "fabrique" l'expression de l'ancienne variable, ici x, en fonction de la nouvelle variable, ici u. Puisque ici, on a

$$u=\sqrt{5}x \iff x = \frac{1}{\sqrt{5}}u,$$

on considérera donc l'application $\varphi : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}}u$. Il faut ensuite trouver l'intervalle que doit parcourir la nouvelle variable u pour que $x=\varphi(u)$ parcourt l'intervalle d'intégration initial $[0,+\infty[$. Cela s'obtient par considératon de φ^{-1}: on a $u=\varphi^{-1}(x)=\sqrt{5}x$ et l'intervalle recherché est l'intervalle $\varphi^{-1}([0,+\infty[)$; il est clair que lorsque x parcourt $[0,+\infty[$, $\varphi^{-1}(x)=\sqrt{5}x$ parcourt $[0,+\infty[$. L'intervalle recherché pour u est donc $[0,+\infty[$.

Formellement, l'application $\varphi : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}}u$ est une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et on a $\varphi'(u)=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ainsi, en notant

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+5x^2},$$

on a

$$f(\varphi(u))\varphi'(u) = \frac{1}{1+5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}u\right)^2}\times\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+u^2}$$

et en cas de croissance, la formule

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

donne ici

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+5x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du.$$

On poursuit ensuite comme ci-dessus:

$$\int_0^X \frac{1}{1+u^2}\,du = [\arctan u]_0^X = \arctan X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

et par définition on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\pi}{2}.$$

10. énoncé

1. L'intégrale n'est impropre qu'à la borne $+\infty$. Pour tout réel $x \geq 1$, on a

$$x \geq 1 \Longrightarrow x^2 \geq x \Longrightarrow -x^2 \leq -x \Longrightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

et puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente (référence), il résulte du théorème de comparaison par majoration des fonctions à valeurs positives que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ est convergente. Enfin, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étant définie et continue sur le segment $[0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ existe. Dès lors, I existe.

2. Pour le calcul, on écrit

$$ax^2 = \left(\sqrt{a}x\right)^2$$

et on réalise le changement de variable $u = \sqrt{a}x$.

Approche recommandée. En posant $u = \sqrt{a}x$, on a

$$\begin{aligned} du &= \sqrt{a}\,dx \\ e^{-ax^2}\,dx &= e^{-\left(\sqrt{a}x\right)^2}\,dx \\ &= e^{-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{a}}\,du \end{aligned}$$

puis

$$x = 0 \Longrightarrow u = 0, \quad x \to +\infty \Longrightarrow u \to +\infty.$$

D'après la formule de changement de variable, $I(a)$ est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{a}}\,du,$$

c'est à dire convergente d'après **1**, et de même valeur en cas de convergence. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx &= \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{a}}\,du \\ &= \frac{I}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Avec la formule rigoureuse du cours (à ne pas lire obligatoirement).

Rappel. Il faut toujours introduire l'application (la "machine") qui "fabrique" l'expression de l'ancienne variable, ici x, en fonction de la nouvelle variable, ici u. Puisque ici, on a

$$u = \sqrt{a}x \iff x = \frac{1}{\sqrt{a}}u,$$

on considérera donc l'application $\varphi : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}}u$. Il faut ensuite trouver l'intervalle que doit parcourir la nouvelle variable u pour que $x = \varphi(u)$ parcourt l'intervalle d'intégration initial $[0, +\infty[$. Cela s'obtient par considératon de φ^{-1}: on a $u = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{a}x$ et l'intervalle recherché est l'intervalle $\varphi^{-1}([0,+\infty[)$; il est clair que lorsque x parcourt $[0,+\infty[$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{a}x$ parcourt $[0,+\infty[$. L'intervalle recherché pour u est donc $[0,+\infty[$.

Formellement, l'application $\varphi : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}}u$ est une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et on a $\varphi'(u) = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Ainsi, en notant

$$f : x \mapsto e^{-ax^2},$$

on a

$$f(\varphi(u))\varphi'(u) = e^{-a\times\left(\frac{1}{\sqrt{a}}u\right)^2}\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-u^2}$$

et en cas de croissance, la formule

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du \\ &= \frac{I}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

11. énoncé

1. L'intégrale est impropre à la borne 1.

- *Première méthode.* Le changement de variable

  $$u = 1 - t$$

  transforme I en

  $$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

que l'on sait être convergente (Riemann) et d'après la formule de changement de variable, ces intégrales sont alors égales. On calcule

$$\begin{aligned}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du &= \left[2\sqrt{u}\right]_x^1 \\ &= 2-2\sqrt{x} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2.\end{aligned}$$

Ainsi, par définition,

$$J=2$$

et alors

$$\begin{aligned}I &= J \\ &= 2.\end{aligned}$$

- *Deuxième méthode.* On se ramène à la définition: on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt &= \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x \\ &= 2-2\sqrt{1-x} \\ &\underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2,\end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence de l'intégrale et qu'elle vaut 2.

2. *Approche recommandée.* En posant $t=\frac{1}{x}$, on a

$$\begin{aligned}dt=-\frac{1}{x^2}\,dx \quad\Longrightarrow\quad dx &= -x^2\,dt \\ &= -\frac{1}{t^2}\,dt \\ \frac{1}{\sqrt{x^4-x^3}}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^3}}}\times\frac{-1}{t^2}\,dt\end{aligned}$$

et comme $t^2=\sqrt{t^4}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^3}}}\times\frac{-1}{t^2}\,dt &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{t^4}{t^4}-\frac{t^4}{t^3}}}\,dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt\end{aligned}$$

Puis

$$x=1\Longrightarrow t=1,\quad x\to+\infty\Longrightarrow t\to 0.$$

D'après la formule de changement de variable, J est de même nature que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

et donc de même nature que I, c'est à dire convergente d'après **1**; et en cas de convergence, ce qui est donc le cas, on a égalité des intégrales:

$$J=I,$$

c'est à dire

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4-x^3}}dx=2.$$

Avec la formule rigoureuse du cours (à ne pas lire obligatoirement).

Rappel. Il faut toujours introduire l'application (la "machine") qui "fabrique" l'expression de l'ancienne variable, ici x, en fonction de la nouvelle variable, ici t. Puisque ici, on a

$$t=\frac{1}{x}\iff x=\frac{1}{t},$$

on considérera donc l'application $\varphi: t\mapsto\frac{1}{t}$. Il faut ensuite trouver l'intervalle que doit parcourir la nouvelle variable t pour que $x=\varphi(t)$ parcourt l'intervalle d'intégration initial $]1,+\infty[$. Cela s'obtient par considératon de φ^{-1}: on a $t=\varphi^{-1}(x)=\frac{1}{x}$ et l'intervalle recherché est l'intervalle $\varphi^{-1}(]1,+\infty[)$; il est clair que lorsque x parcourt $]1,+\infty[$, $\varphi^{-1}(x)=\frac{1}{x}$ parcourt $]0,1[$. L'intervalle recherché pour t est donc $]0,1[$.

Formellement, l'application $\varphi:t\mapsto\frac{1}{t}$ est une bijection strictement décroissante de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$ et on a $\varphi'(t)=-\frac{1}{t^2}$. Ainsi, en notant

$$f:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^4-x^3}},$$

on a

$$\begin{aligned}f(\varphi(t))\varphi'(t) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^3}}}\times\frac{-1}{t^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^3}}}=-\frac{1}{\sqrt{1-t}}\end{aligned}$$

et en cas de décroissance, la formule

$$\int_1^{+\infty}f(x)\,dx=-\int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

donne ici

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4-x^3}}dx &= \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt \\ &= I=2.\end{aligned}$$

12. énoncé

1. L'intégrale est impropre à la borne 1.

- *Première méthode.* Le changement de variable
$$u = x - 1$$
transforme I_1 en
$$J_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$
que l'on sait être convergente (Riemann); d'après la formule de changement de variable, ces intégrales sont de même nature et c'est pourquoi I_1 existe.

- *Deuxième méthode.* On se ramène alors à la définition: pour $a > 1$,
$$\begin{aligned}\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx &= \left[2\sqrt{x-1}\right]_a^2 \\ &= 2\left(1 - \sqrt{a-1}\right)\end{aligned}$$
et puisque
$$2\left(1-\sqrt{a-1}\right) \underset{a\to 1}{\longrightarrow} 2,$$
ce qui signifie par définition que $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$ converge.

2. L'intégrale est impropre aux deux bornes. On va donc étudier
$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$$
et
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx.$$

- On a
$$\begin{aligned}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\times x} \\ &= \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$
et puisque $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge (Riemann), on déduit du théorème de comparaison que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$ converge.

- On a
$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}$$
et comme
$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} &\underset{x\to 1}{\longrightarrow} \sqrt{2} \\ &\neq 0,\end{aligned}$$
on a
$$\sqrt{x+1} \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}$$
et alors
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1} &\underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{x-1}\times\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} &\underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} \\ \Longrightarrow \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} &\underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{1\times\sqrt{2}\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$
On déduit alors de **1** et du théorème de comparaison par équivalence que $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$ converge.

- En conclusion, I converge.

3. *Approche recommandée.* Le changement de variable
$$x = \frac{1}{t}$$
donne
$$dx = \frac{-1}{t^2}\, dt$$
puis
$$\begin{aligned}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx &= \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \times \frac{-1}{t^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{t\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}\, dt \\ &= -\frac{1}{t\times\frac{1}{t}\sqrt{1-t^2}}\, dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.\end{aligned}$$
Ensuite,
$$x = 1 \Longrightarrow t = 1, \qquad x \to +\infty \Longrightarrow t \to 0.$$
Ce changement de variable transforme donc I en
$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

D'après la formule de changement de variable, I et J sont de même nature, et égales en cas d'existence. Or

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= [\arcsin t]_0^a \\ &= \arcsin a \\ &\underset{a\to 1}{\longrightarrow} \arcsin 1 \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et c'est pourquoi, par définition, J est convergente et

$$J = \frac{\pi}{2}$$

En définitive, I existe et

$$I = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Avec la formule rigoureuse du cours (à ne pas lire obligatoirement). Par la suite, on notera

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\cdot$$

Rappel. Il faut toujours introduire l'application (la "machine") qui "fabrique" l'expression de l'ancienne variable, ici x, en fonction de la nouvelle variable, ici t. Puisque ici on a $x = \frac{1}{t}$, on considérera donc l'application $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$. Il faut ensuite trouver l'intervalle que doit parcourir la nouvelle variable t pour que $x = \varphi(t)$ parcourt l'intervalle d'intégration initial $[1, +\infty[$. Cela s'obtient par considératon de φ^{-1}: on a $t = \varphi^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ et l'intervalle recherché est l'intervalle $\varphi^{-1}([1, +\infty[)$; il est clair que lorsque x parcourt $[1, +\infty, 1[$, $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ parcourt $]0, 1]$ (mais dans l'autre sens). L'intervalle recherché pour t est donc $]0, 1]$.

Formellement: l'application

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$$

est une bijection strictement décroissante de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$. On a donc

$$I = -\int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Or

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \times \frac{-1}{t^2} = -\frac{1}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\frac{1}{1-t^2}$$

et en cas de décroissance, la formule

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = -\int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

donne ici

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = [\arcsin t]_0^a = \arcsin a \quad &\underset{a\to 1}{\longrightarrow} \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

En définitive, $I = \frac{\pi}{2}$.

4. *Approche recommandée.* Le changement de variable

$$t = \sqrt{x^2-1}$$

donne

$$dt = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

puis

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Or

$$t = \sqrt{x^2-1}$$

donne $x^2 = t^2 + 1$ (par élévation des deux membres au carré), d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \\ &= \frac{1}{t^2}dt.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad t = 0, \qquad x \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad t \to +\infty.$$

Ce changement de variable transforme donc I en

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

D'après la formule de changement de variable, I et J sont de même nature, et égales en cas d'existence. Or

$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{1}{t^2+1}\,dt &= [\arctan t]_0^X \\ &= \arctan X \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et c'est pourquoi, par définition, J est convergente et

$$J = \frac{\pi}{2}$$

En définitive, I existe et

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Avec la formule rigoureuse du cours (à ne pas lire obligatoirement).

Rappel. Il faut toujours introduire l'application (la "machine") qui "fabrique" l'expression de l'ancienne variable, ici x, en fonction de la nouvelle variable, ici t. Puisque ici on a

$$t = \sqrt{x^2-1} \iff x = \sqrt{t^2+1},$$

on considérera donc l'application $\varphi : t \mapsto \sqrt{t^2+1}$. Il faut ensuite trouver l'intervalle que doit parcourir la nouvelle variable t pour que $x = \varphi(t)$ parcourt l'intervalle d'intégration initial $[1, +\infty[$. Cela s'obtient par considératon de φ^{-1}: on a $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$ et l'intervalle recherché est l'intervalle $\varphi^{-1}([1, +\infty[)$; il est clair que lorsque x parcourt $[1, +\infty[$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$ parcourt $[0, +\infty[$. L'intervalle recherché pour u est donc $[0, +\infty[$.

Formellement, l'application $\varphi : t \mapsto \sqrt{t^2+1}$ est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$ et on a $\varphi'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. Ainsi,

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1} \times t} \times \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{t^2+1}$$

et en cas de croissance, la formule

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 1 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

donne ici

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{X\to+\infty} \arctan X = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

5. *Première approche (recommandée en première lecture).* En posant $t = x + \sqrt{x^2-1}$, on a

$$\begin{aligned} & t = x + \sqrt{x^2-1} \iff t - x = \sqrt{x^2-1} \\ & \iff t^2 + x^2 - 2tx = x^2 - 1 \iff x = \frac{t^2+1}{2t} \end{aligned}$$

et on calcule

$$dx = \frac{t^2-1}{2t^2}dt$$

et comme

$$\sqrt{x^2-1} = t - x = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t},$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx &= \frac{1}{\frac{t^2+1}{2t} \times \frac{t^2-1}{2t}} \times \frac{t^2-1}{2t^2}dt \\ &= \frac{2}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$x = 1 \implies t = 1, \qquad x \to +\infty \implies t \to +\infty$$

et alors

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2+1}\,dt.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{2}{t^2+1}\,dt &= [2\arctan t]_1^X = 2(\arctan X - \arctan 1) \\ &= 2\left(\arctan X - \frac{\pi}{4}\right) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et ainsi $I = \frac{\pi}{2}$.

Avec la formule rigoureuse du cours.

Rappel. Il faut toujours introduire l'application (la "machine") qui "fabrique" l'expression de l'ancienne variable, ici x, en fonction de la nouvelle variable, ici t.

L'application $g : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$ est continue et strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur lui-même; on a alors pour $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} & t = x + \sqrt{x^2-1} \iff t - x = \sqrt{x^2-1} \\ & \iff t^2 + x^2 - 2tx = x^2 - 1 \iff x = \frac{t^2+1}{2t} \end{aligned}$$

et donc $\varphi : t \mapsto \frac{t^2+1}{2t}$ établit une bijection strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur lui-même et φ est clairement de classe C^1 avec $\varphi'(t) = \frac{t^2-1}{2t^2}$. On a

$$\begin{aligned} f(\varphi(t))\varphi'(t) &= \frac{1}{\frac{t^2+1}{2t}(t - \frac{t^2+1}{2t})} \times \frac{t^2-1}{2t^2} \\ &= \frac{4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} \times \frac{t^2-1}{2t^2} = \frac{2}{t^2+1} \end{aligned}$$

et en cas de croissance, la formule

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

donne ici

$$I = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\lim_{X\to+\infty}\int_1^{X} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$= 2\lim_{X\to+\infty}(\arctan X - \arctan 1) = 2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

6. *Première approche (recommandée en première lecture).* Poser $x = \operatorname{ch} t$ contient un sous-entendu, à savoir *on peut* poser $x = \operatorname{ch} t$; plus rigoureusement, tout réel $x \in [1+\infty[$ peut s'écrire $x = \operatorname{ch} t$ avec $t \in [0, +\infty[$ et ce du fait que la fonction $t \mapsto \operatorname{ch} t$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et établit, d'après le théorème de la bijection, une bijection de $[0, +\infty[$ sur

$$\left[\operatorname{ch} 0, \lim_{t\to+\infty} \operatorname{ch} t\right[= [1, +\infty[\,.$$

On a alors

$$dx = \operatorname{sh} t\,dt$$

puis

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = |\operatorname{sh} t|$$

et puisque $t \geq 0$, on a $\operatorname{sh} t \geq 0$ et alors $|\operatorname{sh} t| = \operatorname{sh} t$. On alors

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{1}{\operatorname{ch} t \times \operatorname{sh} t} \times \operatorname{sh} t\,dt = \frac{1}{\operatorname{ch} t}dt$$

puis (du fait que $\operatorname{ch} t = 1$ pour $t = 0$):

$$x = 1 \quad\Longrightarrow\quad t = 0, \qquad x \to +\infty \quad\Longrightarrow\quad t \to +\infty.$$

Ainsi,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt.$$

On écrit ensuite

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}} = 2\frac{1}{e^t+e^{-t}}.$$

- *Première méthode.* On multiplie numérateur et dénominateur par e^t et du fait que $e^t \times e^{-t} = 1$, on a

$$\frac{1}{e^t+e^{-t}} = \frac{e^t}{(e^t)^2+1}$$

et on reconnaît la forme $\dfrac{u'(t)}{u^2(t)+1}$ si bien que

$$\int_0^T \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt = \int_0^T \frac{e^t}{(e^t)^2+1}\,dt = \left[\arctan\left(e^t\right)\right]_0^T$$
$$= \arctan\left(e^T\right) - \arctan 1 \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

ce qui donne finalement $I = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

- *Deuxième méthode.* On écrit à nouveau

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}} = 2\frac{1}{e^t+e^{-t}}$$

et on effectue le changement de variable $u = e^t$. On a alors

$$du = e^t\,dt \quad\Longrightarrow\quad dt = \frac{1}{e^t}\,du = \frac{1}{u}\,du.$$

Puis, du fait que $e^{-t} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{u}$:

$$2\frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt = 2\frac{1}{u+\frac{1}{u}} \times \frac{1}{u}\,du = \frac{2}{u^2+1}\,du.$$

Enfin,

$$t = 0 \quad\Longrightarrow\quad u = 1, \qquad t \to +\infty \quad\Longrightarrow\quad u \to +\infty$$

et c'est pourquoi

$$I = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du$$

et on termine classiquement:

$$\int_1^X \frac{1}{u^2+1}\,du = [\arctan u]_1^X = \arctan X - \arctan 1$$
$$\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

ce qui donne $I = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Avec la formule rigoureuse du cours.

Rappel. Il faut toujours introduire l'application (la "machine") qui "fabrique" l'expression de l'ancienne variable, ici x, en fonction de la nouvelle variable, ici t. Puisque ici on a $x = \operatorname{ch} t$, on considérera donc l'application $\varphi : t \mapsto \operatorname{ch} t$.

L'application $\varphi : t \mapsto \operatorname{ch} t$ réalise une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$ avec $\varphi'(t) = \operatorname{sh} t$. On a

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} \times \operatorname{sh} t = \frac{1}{\operatorname{ch} t\sqrt{\operatorname{sh}^2 t}} \times \operatorname{sh} t = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$$

et en cas de croissance, la formule

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

On a donc

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^t + e^{-t}}\,dt.$$

L'idée est ensuite d'effectuer le changement de variable $u = e^t$. Comme on a $u = e^t \iff \ln u = t$, on introduit l'application $\varphi : u \mapsto \ln u$, qui est de classe C^1 et strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ avec $\varphi'(u) = \frac{1}{u}$. En notant $g : t \mapsto \frac{2}{e^t+e^{-t}}$, on a

$$g(\varphi(u))\varphi'(u) = \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \times \frac{1}{u} = \frac{2}{u^2+1}.$$

Ainsi,

$$I = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{\pi}{2}$$

(intégrale rencontrée en **4**).

13. énoncé En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Puisque

$$[u(x)v(x)]_0^X = -Xe^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

le crochet $[uv]_0^{+\infty}$ existe (et vaut 0). Donc d'après la formule d'intégration par parties, I est de même nature que

$$J = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

et donc convergente (intégrale de référence). De plus,

$$I = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

et par un calcul archi-classique:

$$\int_0^X e^{-x}\,dx = \left[e^{-x}\right]_0^X \quad = \quad 1 - e^{-X} \quad \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 1$$

et c'est pourquoi par définition

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

et en conséquence, $I = 1$.

14. énoncé

1. I_n converge par équivalence en $+\infty$.

2. En posant $u(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ et $v'(x)$, on obtient aisément

$$I_{n-1} = 2n\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$

puis en écrivant $x^2 = x^2 + 1 - 1$, on obtient

$$I_{n-1} = 2n(I_{n-1} - I_n),$$

c'est à dire $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

3. On a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(via $\arctan$) et la proposition est vraie est au rang $n = 0$. On démontre alors l'égalité de l'énoncé au moyen d'une récurrence aisée utilisant ***2***.

15. énoncé

Pour tout $t \geq 1$, on a $|\sin t| \leq 1$ d'où $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente (c'est une intégrale de Riemann). Il résulte alors du théorème de comparaison par majoration que

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\,dt$$

est convergente. Ainsi, la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et il découle alors du théorème d'intégrabilité (ou théorème de convergence absolue) que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

est convergente.

On a

$$\left|e^{-x}\sin(x^2)\right| \leq e^{-x}.$$

La convergence de l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ et le théorème de comparaison entraînent que $x \mapsto e^{-x}\sin(x^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x^2)\,dx$ converge, l'intégrabilité entraînant la convergence de l'intégrale (théorème de convergence absolue).

Pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t^2)}\,dt$, la fonction

$$t \mapsto \frac{\sin t}{t(1+t^2)}$$

est définie et continue sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre aux deux bornes.

- On a
$$\frac{\sin t}{t(1+t^2)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t\times 1} = 1,$$
donc la fonction $t\mapsto \frac{\sin t}{t(1+t^2)}$ est prolongeable par continuité en 0 et alors
$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t(1+t^2)}\,dt$$
existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- Ensuite,
$$\left|\frac{\sin t}{t(1+t^2)}\right| \leq \frac{1}{t(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}.$$
  - Puisque
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$$
converge (référence), alors l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt$$
converge aussi par théorème de comparaison par équivalence,
  - et alors
$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t(1+t^2)}\right|\,dt$$
converge par théorème de comparaison par majoration.
  - Enfin, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t^2)}\,dt$ converge alors par théorème de convergence absolue.

En définitive,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t^2)}\,dt$$
converge.

16. énoncé En 0, $\frac{\sin x}{x+1}$ ne pose pas de problème alors que
$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$
si bien que $x\mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0; dès lors, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge en tant qu'intégrale d'une fonction sur un segment. Donc $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\sin x\,dx$ converge. Ensuite,
$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x} = \frac{-1}{x(x+1)}$$
et
$$\left|\frac{\sin x}{x(x+1)}\right| \leq \frac{1}{x(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (référence), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ converge aussi par théorème de comparaison par équivalence et alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x(x+1)}\right|\,dx$ converge par théorème de comparaison par majoration. Enfin, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)}\,dt$ converge par thóerème d'intégrabilité. En définitive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\sin x\,dx$ converge.

17. énoncé

On a
$$e^{-X} \underset{X\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{X}\right)$$
car c'est le classique résultat de croissance comparée
$$Xe^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}.$$
En posant $X=x^2$, on a $X\to+\infty$ lorsque $x\to+\infty$ et on en déduit:
$$e^{-x^2} \underset{x_to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
lorsque x tend vers $+\infty$. Du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables et de la convergence de l'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$, on déduit la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Puisque $x\mapsto e^{-x^2}$ est définie et continue sur $[0,1]$, elle y possède une intégrale et en conséquence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

On a
$$\frac{\ln x}{x^4} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
car par croissance comparée,
$$x^2\times\frac{\ln x}{x^4} = \frac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables et de la convergence de l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$, on déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4}\, dx$.

C'est grosso-modo la même situation que la situation précédente mais il faut être très précis quant au choix de la relation de prépondérance. On a

$$\frac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

car par croissance comparée,

$$x^{\frac{3}{2}} \times \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables et de la convergence de l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$, on déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

18. énoncé

On a

$$x^4 e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

c'est à dire

$$x^6 e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car en posant $X = x^2$, on a $X \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et alors

$$x^6 e^{-x^2} = X^3 e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée classique. Du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables et de la convergence de l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$, on déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx$. Puisque $x \mapsto x^4 e^{-x^2}$ est définie et continue sur $[0,1]$, elle y possède une intégrale et en conséquence, $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx$ converge.

On a

$$x^n e^{-x} \sin x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

puisque

$$\left|x^n e^{-x} \sin x \times x^2\right| = |\sin x| \times \left|x^{n+2} e^{-x}\right| \leq \left|x^{n+2} e^{-x}\right|$$

et puisque

$$x^{n+2} e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, on a

$$x^n e^{-x} \sin x \times x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par théorème d'encadrement. Du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables et de la convergence de l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$, on déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} x^n e^{-x} \sin x\, dx$. Puisque $x \mapsto x^n e^{-x} \sin x$ est définie et continue sur $[0,1]$, elle y possède une intégrale et en conséquence, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \sin x\, dx$ converge.

La troisième intégrale est impropre aux deux bornes. On a

$$e^x - e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x - (1-x) + o(x) = 2x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x,$$

d'où $\frac{\sin x \times e^{-3x}}{e^x - e^{-x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x \times 1}{2x} \to \frac{1}{2}$. Ayant affaire à une fonction prolongeable par continuité sur un segment, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin x \times e^{-3x}}{e^x - e^{-x}}\, dx$ est convergente. Ensuite,

$$\left|\frac{\sin x \times e^{-3x}}{e^x - e^{-x}}\right| \leq \frac{e^{-3x}}{e^x - e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-3x}}{e^x} = e^{-2x}.$$

La convergence de l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} e^{-2x}\, dx$ entraîne alors, par théorème de comparaison par comparaison, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{e^x - e^{-x}}\, dx$ qui entraîne à son tour, par théorème de comparaison par majorations, la convergence de $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x \times e^{-3x}}{e^x - e^{-x}}\right|\, dx$ qui entraîne à son tour, par théorème de convergence absolue (théorème d'intégrabilité), la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \times e^{-3x}}{e^x - e^{-x}}\, dx$.

19. énoncé

1. On pose $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$; alors $u'(t) = \frac{-1}{t^2}$ et $v(t) = -\cos t$. Puisque

$$[u(t)v(t)]_1^T = -\frac{\cos T}{T} + \cos 1 \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \cos 1,$$

le crochet $[uv]_0^{+\infty}$ existe (et vaut $\cos 1$). D'après la formule d'intégration par parties, J est alors de même nature que

$$\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\, dt,$$

c'est à dire de même nature que

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt.$$

Or

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2},$$

ce qui assure l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ sur $[1,+\infty[$ (par majoration) et dès lors l'existence de K, puis celle de J.

2. On a
$$\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$
donc $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0; dès lors, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ existe comme intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment. Il résulte alors de **1** que I existe.

3. Afin de se ramener à I, on va établir la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt$ à l'aide du théorème de changement de variable en posant:

- $u = at$ si $a > 0$,
- $u = -at$ si $a < 0$.

Il faut toujours introduire l'application (la "machine") qui "fabrique" l'expression de l'ancienne variable, ici t, en fonction de la nouvelle variable, ici u.

- Si $a > 0$, on a
$$u = at \iff x = \frac{1}{a}u,$$
et on considérera donc l'application $\varphi : u \mapsto \frac{1}{a}u$. Il faut ensuite trouver l'intervalle que doit parcourir la nouvelle variable u pour que $t = \varphi(u)$ parcourt l'intervalle d'intégration initial $]0,+\infty[$. Cela s'obtient par considération de φ^{-1}: on a $u = \varphi^{-1}(t) = at$ et l'intervalle recherché est l'intervalle $\varphi^{-1}(]0,+\infty[)$. il est clair que lorsque t parcourt $]0,+\infty[$, $\varphi^{-1}(t) = at$ parcourt $]0,+\infty[$. L'intervalle recherché pour u est donc $]0,+\infty[$.

  Formellement, l'application $\varphi : u \mapsto \frac{1}{a}u$ est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et on a $\varphi'(u) = \frac{1}{a}$. Ainsi, en notant
$$f : x \mapsto \frac{\sin(at)}{t},$$
on a
$$f(\varphi(u))\varphi'(u) = \frac{\sin\left(a\frac{1}{a}u\right)}{\frac{1}{a}u} \times \frac{1}{a} = \frac{\sin u}{u}$$
et le théorème de changement de variable affirme que les intégrales
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt, \quad \int_0^{+\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$
c'est à dire
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$
sont de même nature; elles sont donc convergentes puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ est convergente d'après **2** et de surcroît égales d'après ce même théorème. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt$ converge et
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

- Si $a < 0$, on a
$$u = -at \iff x = -\frac{1}{a}u,$$
et on considérera donc l'application $\varphi : u \mapsto -\frac{1}{a}u$. Il faut ensuite trouver l'intervalle que doit parcourir la nouvelle variable u pour que $t = \varphi(u)$ parcourt l'intervalle d'intégration initial $]0,+\infty[$. Cela s'obtient par considération de φ^{-1}: on a $u = \varphi^{-1}(t) = -at$ et l'intervalle recherché est l'intervalle $\varphi^{-1}(]0,+\infty[)$. il est clair que lorsque t parcourt $]0,+\infty[$, $\varphi^{-1}(t) = -at$ parcourt $]0,+\infty[$. L'intervalle recherché pour u est donc $]0,+\infty[$.

  Formellement, l'application $\varphi : u \mapsto -\frac{1}{a}u$ est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et on a $\varphi'(u) = -\frac{1}{a}$. Ainsi, en notant
$$f : x \mapsto \frac{\sin(at)}{t},$$
on a
$$f(\varphi(u))\varphi'(u) = \frac{\sin a\left(-\frac{1}{a}u\right)}{-\frac{1}{a}u} \times \frac{-1}{a} = -\frac{\sin u}{u}$$
et le théorème de changement de variable affirme que les intégrales
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt, \quad \int_0^{+\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$
c'est à dire
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{-\sin u}{u}\,du$$
sont de même nature; elles sont donc convergentes puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ est convergente d'après **2** et de surcroît égales d'après ce même théorème. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt$ converge et
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

En définitive, pour tout réel $a \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt$ converge et
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,dt = \begin{cases} I & \text{si } a > 0 \\ -I & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

20. énoncé

1. On a
$$x^n e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables et de la convergence de l'intégrale de référence
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx,$$
on déduit la convergence de
$$\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx.$$
Puisque
$$x \mapsto x^n e^{-x}$$
est définie et continue sur $[0,1]$, elle y possède une intégrale et en conséquence,
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$$
converge.

2. En posant
$$u(x) = x^n,\ v'(x) = e^{-x},$$
on a
$$u'(x) = nx^{n-1},\ v(x) = -e^{-x}$$
puis par croissance comparée
$$\begin{array}{rcl} u(x)v(x) & = & -x^n e^{-x} \\ & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & 0 \end{array}$$
(l'intégrale n'étant impropre qu'en $+\infty$, seule la limite en $+\infty$ était à considérer). Ainsi, $[uv]_0^{+\infty}$ existe et vaut $0 - u(0)v(0) = 0$. D'après la formule d'intégration par parties,
$$\begin{array}{rcl} I_n & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\, dx \\ & = & [uv]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\, dx \\ & = & n\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\, dx \\ & = & nI_{n-1}. \end{array}$$

3. On a
$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^X e^{-x}\, dx & = & [-e^{-x}]_0^X \\ & = & 1 - e^{-X} \\ & \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 \end{array}$$
et donc par définition:
$$\begin{array}{rcl} I_0 & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \\ & = & 1. \end{array}$$
Ensuite,
$$\begin{array}{rcl} I_n & = & nI_{n-1} \\ & = & n(n-1)I_{n-1} \\ & = & \dots \\ & = & n(n-1) \times \dots \times I_0 \\ & = & n!. \end{array}$$
On peut préférer une démonstration par récurrence formelle: démontrons par récurrence sur l'entier n que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$

- La proposition est vraie pour $n = 0$ puisque $I_0 = 1$ et que $0! = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour un enteir $n \geq 0$. Alors
$$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & (n+1)I_n \text{ (d'après \textbf{2.})} \\ & = & (n+1)n! \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ & = & (n+1)! \text{ (propriété de la factorielle)} \end{array}$$
et la proposition est donc vraie au rang $n+1$.

Du principe de récurrence, on déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.