Feuille d'exercices n°2

1. corrigé Résoudre l'équation différentielle

$$(E): \ \sqrt{1-x^2}y'(x) + xy(x) = -2x.$$

sur $]-1,1[$.

2. corrigé

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall u \in \,]-1,1[\,, \quad \frac{1}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}.$$

2. En déduire les primitives de la fonction

$$f : u \mapsto \frac{1}{1-u^2}$$

sur $]-1,1[$.

3. Au moyen du changement de variable $u = \cos x$, déterminer les primitives de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x}$$

sur $]0,\pi[$.

4. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x)\sin x - y(x)\cos x = \sin x + 3\sin(2x)$$

sur $I =]0,\pi[$.

3. corrigé Sur $\mathbb{R}$, résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} (x^2+1)^2y'(x) + 2x(x^2+1)y(x) = 1 \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

4. corrigé Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 2x.$$

5. corrigé Résoudre sur $\mathbb{R}$ l' équation différentielle:

$$(E): \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2\text{ch}\, x$$

(on pourra utiliser la définition de $\text{ch}\, x$).

6. corrigé

1. Déterminer tous les réels α tels que la fonction $y : x \mapsto x^\alpha$ soit solution de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = 0$$

sur $I =]0,+\infty[$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.
3. Justifier que le problème de Cauchy $\mathcal{P}$

$$\begin{cases} x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = 3 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$$

possède une solution et une seule définie sur I et déterminer cette solution.

7. corrigé Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^2+1)y''(x) - 2y(x) = x.$$

1. Déterminer une solution y_1 de l'équation (E).
2. Déterminer une solution polynomiale y_0 du deuxième degré de l'équation homogène associée (H).
3. Soit z une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; on pose $y(x) = y_0(x)z(x)$. Démontrer que y est solution de (H) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (F) sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Rappeler une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

   (b) Effectuer une intégration par parties dans

$$\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

et en déduire qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

5. Résoudre l'équation différentielle (F) sur $\mathbb{R}$ en posant $u = z'$.
6. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. énoncé

Les solutions de l'équation homogène associée (H) sont les fonctions

$$y(x) = C\exp\left(\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$$

et en reconnaissant, avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, la forme

$$\begin{aligned}\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx &= \int u'(x)u^{\alpha}(x)\,dx\\ &= \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) = 2u^{\frac{1}{2}}(x) + K\\ &= 2\sqrt{u(x)} + K,\end{aligned}$$

les solutions de (H) sont les fonctions

$$\begin{aligned}y(x) &= C\exp\left(\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)\\ &= C\exp\left(\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)\\ &= Ce^{\frac{1}{2}\times 2\sqrt{1-x^2}}\\ &= Ce^{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction constante

$$y_0 : x \mapsto -2$$

est clairement une solution de (E) sur $]-1,1[$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions

$$y(x) = Ce^{\sqrt{1-x^2}} - 2$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

2. énoncé

1. En procédant par identification, on obtient

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2(u+1)} - \frac{1}{2(u-1)}.$$

2. On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-u^2}\,du &= \int \left(\frac{1}{2(u+1)} - \frac{1}{2(u-1)}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\ln|u+1| - \frac{1}{2}\ln|u-1| + K\\ &= \frac{1}{2}\ln(u+1) - \frac{1}{2}(1-u) + K.\end{aligned}$$

3. En posant $u = \cos x$, on a

$$du = -\sin x\,dx \quad\Longrightarrow\quad dx = -\frac{1}{\sin x}\,du \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\sin x}\,dx = -\frac{1}{\sin^2 x}\,du$$

et puisque

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 = 1 - u^2,$$

on a

$$\frac{1}{\sin x}\,dx = -\frac{1}{1-u^2}\,du$$

et alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= -\int \frac{1}{1-u^2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\ln(1-u) - \frac{1}{2}\ln(1+u) + K\\ &= \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + K\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + K.\end{aligned}$$

4.

- Solutions de l'équation homogène:

$$\begin{aligned}y(x) &= Ce^{\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx}\\ &= Ce^{\ln|\sin x|}\\ &= Ce^{\ln(\sin x)}\\ &= C\sin x.\end{aligned}$$

- On applique la méthode de superposition des seconds membres.

  – Recherche d'une solution particulière y_1 par méthode de la variation de la constante à l'équation différentielle

  $$(E_1):\quad y'(x)\sin x - y(x)\cos x = \sin x.$$

  On pose $y_1(x) = C(x)y_0(x)$, avec $y_0(x) = \sin x$; alors y_1 est solution de (E_1) sur I si et seulement si

  $$\begin{aligned}C'(x) &= \frac{\sin x}{\sin x \times \sin x}\\ &= \frac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

  et donc si et seulement si , d'après ***(3)***, il existe un réel K tel que

  $$C(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + K.$$

  En prenant $K = 0$, une solution de (E_1) est donc

  $$y(x) = \frac{1}{2}\sin x \times \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

– Recherche d'une solution particulière y_2 par méthode de la variation de la constante à l'équation différentielle

$$(E_2): \quad y'(x)\sin x - y(x)\cos x = 3\sin 2x.$$

On pose $y_2(x) = C(x)y_0(x)$, avec $y_0(x) = \sin x$; alors y_2 est solution de (E_2) sur I si et seulement si

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{3\sin 2x}{\sin x \times \sin x} \\ &= \frac{3\sin 2x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \quad \Longrightarrow \quad \frac{3\sin 2x}{\sin^2 x} = \frac{6\cos x}{\sin x}$$

et on doit donc avoir

$$C'(x) = \frac{6\cos x}{\sin x}.$$

En reconnaissant la forme

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + L,$$

il existe alors un réel L tel que

$$C(x) \quad = \quad 6\ln|\sin x| + L = 3\ln(\sin x) + L.$$

En prenant $L = 0$, une solution de (E_2) est donc

$$y_2(x) \quad = \quad 6\sin x \times \ln(\sin x).$$

D'après le principe de superposition des seconds membres, une solution de (E) est $y_1 + y_2$ si bien que les solutions de (E) sur I sont les fonctions

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin x \times \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + 6\sin x \times \ln(\sin x) + C\sin x,$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

3. énoncé

- Solutions de l'équation homogène:

$$y(x) = \frac{C}{x^2+1}.$$

- Méthode de variation de la constante: $y(x) = C(x)y_0(x)$, avec $y_0(x) = \frac{1}{x^2+1}$, est solution de l'équation différentielle sur $]0,\pi[$ si et seulement si

$$C'(x) = \frac{1}{x^2+1} \iff \exists K \in \mathbb{R} \,/\, C(x) = \arctan x + K.$$

- Solution générale de l'équation différentielle:

$$\begin{aligned} y(x) &= (\arctan x + K) \times \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{\arctan x}{x^2+1} + \frac{K}{x^2+1} \end{aligned}$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

On a alors

$$y(0) = -1 \iff K = -1$$

si bien que

$$y(x) = \frac{\arctan x - 1}{x^2+1}$$

est l'unique solution de ce problème de Cauchy.

4. énoncé

- Racines de l'équation caractéristique: $-1+i$, $-1-i$.
- Solutions de l'équation homogène associée:

$$y(x) = e^{-x}\big(a\sin x + b\cos x\big).$$

- Solution particulière polynomiale: du premier degré puisque le second membre l'est. Par identification, on trouve $y_0(x) = -1 + x$.
- Solution générale:

$$y(x) = -1 + x + e^{-x}\big(a\sin x + b\cos x\big)$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

5. énoncé

1.
- Racines de l'équation caractéristique: 1 est racine double.
- Solutions de l'équation homogène associée:

$$y(x) = ae^x + bxe^x$$

Pour déterminer une solution particulière, on écrit $2\mathrm{ch}\, x = e^x + e^{-x}$ et on applique le principe de superposition des seconds membres.

- Dans la mesure où 1 est racine double de l'équation caractéristique associée, une solution particulière y_1 à l'équation

$$(E_1): \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x$$

est, d'après le cours (cf. page 86), de la forme Ax^2e^x. Après calculs, on trouve $A = \frac{1}{2}$, d'où la solution

$$y_1(x) = \frac{1}{2}x^2e^x.$$

- Dans la mesure où -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique associée, une solution particulière y_2 à l'équation

$$(E_1): \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$$

est, d'après le cours (cf. page 86), de la forme Ae^{-x}. Après calculs, on trouve $A = \frac{1}{4}$, d'où la solution

$$y_2(x) = \frac{1}{4}e^{-x}.$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + ae^x + bxe^x,$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

6. énoncé

1. On pose donc $y(x) = x^\alpha$. Alors

$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) &= \alpha(\alpha-1)x^\alpha + 2\alpha x^\alpha - 6x^\alpha \\ &= \big(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6\big)x^\alpha. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\forall x \in I,\ x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in I,\ \big(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6\big)x^\alpha = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu pour tout réel $x > 0$, ce qui se produit évidemment si et seulement si

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6 \iff \alpha^2 + \alpha - 6 = 0,$$

trinôme dont les racines sont -3 et 2.

Ainsi,

$$y_1 : x \mapsto \frac{1}{x^3}, \qquad y_2 : x \mapsto x^2$$

sont des solutions de (E) sur I.

2. Les fonctions

$$a : x \mapsto x^2,\ b : x \mapsto 2x,\ c : x \mapsto -6$$

sont définies, continues sur I et a ne s'annule pas sur I. Il en résulte que l'ensemble S des solutions de (E) sur I constitue un espace vectoriel de dimension 2. Par ailleurs, il est clair que la famille (y_1, y_2) est une famille libre (ces deux fonctions sont manifestement non proportionnelles) et forme donc une famille libre de S. Comme S est un espace vectoriel de dimension 2, cette famille libre à deux éléments est une base de S et c'est pourquoi toute solution y de (E) sur I est une combinaison de y_1 et y_2: les solutions de (E) sur I sont les fonctions

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

autrement dit les fonctions

$$y : x \longmapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta x^2,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

3. de la non annulation sur I du coefficient de y'' dans (E) et de la continuité des fonctions

$$a : x \mapsto x^2,\ b : x \mapsto 2x,\ c : x \mapsto -6$$

sur I, on déduit du cours l'existence et l'unicité au problème de Cauchy $\mathcal{P}$. Par ailleurs, il est absolument évident que la fonction constante

$$y : x \longmapsto -\frac{1}{2}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$(E') : \ x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = 3,$$

si bien que les solutions de (E) sur I sont les fonctions

$$y : x \longmapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta x^2 - \frac{1}{2},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Il s'agit donc de déterminer les scalaires α et β de sorte que la fonction

$$y : x \longmapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta x^2 - \frac{1}{2}$$

satisfasse

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = -1. \end{cases}$$

Puisque l'on a alors

$$y'(x) = -\frac{3\alpha}{x^4} + 2\beta x$$

on a

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta - \frac{1}{2} = 0 \\ -3\alpha + 2\beta = -1 \end{cases}$$

et on trouve

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{5} \\ \beta = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Ainsi, ce problème de Cauchy possède l'unique solution

$$y : x \longmapsto \frac{1}{5x^3} + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{2}.$$

7. énoncé

1. La fonction $y_1 : x \mapsto -\frac{x}{2}$ est clairement solution de (E).

2. En procédant par identification, on trouve les polynômes $x \mapsto a(x^2+1)$. On prendra alors $y_0(x) = x^2+1$.

3. Remarquons que le changement $y(x) = y_0(x)z(x)$ est possible puisque y_0 ne s'annule pas sur I, la nouvelle inconnue étant alors définie par

$$z(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)},$$

ce qui n'aurait pas de sens si y_0 s'annulait. Après calculs, on obtient l'équation différentielle

$$(x^2+1)^2 z''(x) + 4x(x^2+1)z'(x) = 0$$

autrement dit

$$(x^2+1)z''(x) + 4xz'(x) = 0.$$

4. (a) $x \mapsto \arctan x$.

(b) En posant $u(t) = \frac{1}{t^2+1}$ et $v'(t) = 1$, on a

$$u'(t) = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}, \qquad v(t) = t$$

et alors

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt &= \left[\frac{t}{t^2+1}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt,\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\arctan x = \frac{x}{x^2+1} + 2\int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

et donc

$$\int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{(t^2+1)^2} &= \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^2} \\ \int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt &= \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt - \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \arctan x - \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Il en résulte:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt &= \arctan x - \int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \arctan x - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

5. En posant $u = z'$, on a à résoudre

$$(x^2+1)u'(x) + 4xu(x) = 0,$$

dont les solutions sont les fonctions

$$u(x) = Ce^{-\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx}$$

et en reconnaissant la forme

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|,$$

on a

$$\begin{aligned}u(x) &= Ce^{-2\ln|x^2+1|} = Ce^{-2\ln(x^2+1)} = \frac{C}{e^{2\ln(x^2+1)}} = \frac{C}{e^{\ln(x^2+1)^2}} \\ &= \frac{C}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

De ***(4)***(b), on déduit alors qu'il existe une constante K telle que

$$z(x) = C\left(\frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + K.$$

6. La question ***(3)***(b) a mis en évidence l'équivalence entre: y est solution de (H) si et seulement si z est solution de (F); les solutions de (F) ayant été obtenues ci-dessus, on en déduit que y est solution de (H) si et seulement si

$$\begin{aligned}y(x) &= y_0(x)\left(C\left(\frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + K\right) \\ &= K(x^2+1) + C\left(\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x + \frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

avec $(C,K) \in \mathbb{R}^2$. Disposant d'une solution ("particulière") y_1 de l'équation (E), on en déduit que les solutions de (e) sont les fonctions

$$\begin{aligned}y(x) &= y_1 + K(x^2+1) + C\left(\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x + \frac{x}{2}\right) \\ &= -\frac{x}{2} + K(x^2+1) + C\left(\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x + \frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

avec $(C,K) \in \mathbb{R}^2$.