Feuille d'exercices n°11

Éléments métriques

1. corrigé Soit $\gamma = (I, f)$ avec $I =]0, \pi[$ la courbe de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t. \end{cases}$$

1. Calculer et exprimer $\|f'(t)\|$ à l'aide de $\sin \frac{t}{2}$ et vérifier que γ est régulière.
2. Déterminer $\vec{T}(t)$ et $\vec{N}(t)$ en tout point de γ.
3. Déterminer en tout point de γ sa courbure $c(t)$; vérifier que γ et bi-régulière et déterminer en tout point $M(t)$ son centre de courbure $I(t)$.
4. Donner une détermination angulaire $t \mapsto \alpha(t)$ telle que $\vec{T}(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$ pour tout $t \in I$.
5. En déduire un nouveau calcul de la courbure à γ au point $M(t)$.

2. corrigé Calculer la longueur de l'astroïde γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

3. corrigé On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^3 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Démontrer que γ possède un point double. On notera t_1, t_2 avec $t_1 < t_2$ les paramètres donnant ce point double.
2. Déterminer la longueur de la boucle délimitée par ce point double.

4. corrigé Soit $\gamma = (I, f)$ avec $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ la courbe de paramérisation

$$f : t \mapsto = \begin{cases} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t. \end{cases}$$

1. Calculer $\|f'(t)\|$.
2. Déterminer $\vec{T}(t)$ et $\vec{N}(t)$ en tout point de γ.
3. Déterminer en tout point de γ son rayon de courbure $R(t)$ et les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de son centre de courbure $I(t)$.

5. corrigé On considère la courbe γ d'équation $y = \operatorname{ch} x$ (chaînette).

1. Déterminer la longueur de γ entre les points d'abscisse a et b $(a < b)$.
2. Déterminer le repère de Frenet et la courbure de γ au point $M(a)$.

Enveloppe d'une famille de droites

6. corrigé Dans les deux cas suivants, déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ données par les équations cartésiennes:

1. $(1 - t^2)x + 2ty - (1 + t^2) = 0$ (observer que cette droite passe par le point $(1, t)$),
2. $(t - 2)x + (3t - 2t^2)y + t^3 = 0$ (observer que cette droite passe par le point $(2t^3, t^2)$).

7. corrigé Soient a et b deux réels non nuls; on considère les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$. Un point M de la droite (AB) a pour projetés orthogonaux respectifs P et Q sur les axes Ox et Oy.

1. Paramétrer la droite (AB).
2. Déterminer l'enveloppe γ de la famille de droites (PQ).

8. corrigé Soit C le cercle de centre O et de rayon 1, paramétré par $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Pour tout point $M(t)$ de C, on note Δ_t la droite passant par $M(t)$ et dirigée par $\vec{\imath}$ et N_t la normale à C en $M(t)$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer un vecteur directeur de la droite D_t, symétrique de la droite Δ_t par rapport à N_t.
3. Déterminer l'enveloppe Γ de la famille (D_t), appelée *caustique par réflexion* du cercle $\mathcal{C}$ pour une source lumineuse située à l'infini.
4. Étudier et tracer Γ.

Développée

9. corrigé Déterminer et construire la développée de l'ellipse de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= a \cos t \\ y(t) &= b \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

avec $0 < b < a$.

10. corrigé On considère la courbe γ d'équation $y = \operatorname{ch} x$. Déterminer de deux manières la développée de γ.

11. corrigé On fixe un réel $a \neq 0$ et on considère la courbe γ de représentation paramétrique

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= e^{at} \cos t \\ y(t) &= e^{at} \sin t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

appelée spirale logarithmique.

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de γ.
2. Déterminer le repère de Frenet en tout point de γ.
3. Déterminer la développée C de γ.
4. Démontrer que C s'obtient à partir de γ par une transformation géométrique simple.

12. corrigé On considère la tractrice γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$$

1. Calculer et simplifier au maximum $f'(t)$. Vérifier que γ est régulière sur $]0, +\infty[$.
2. On note $\vec{T}(t)$ le vecteur unitaire tangent au point $M(t)$ avec $t > 0$.

   (a) On considère une détermination angulaire $t \mapsto \alpha(t)$ de classe C^1 telle que $\vec{T}(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$. Déterminer $\alpha'(t)$.

   (b) En déduire la courbure $c(t)$ à γ en $M(t)$. Démontrer alors que γ est birégulière et déterminer le cercle de courbure à γ en $M(t)$.
3. Retrouver ce résultat en déterminant l'enveloppe des normales à γ.

1. énoncé *Très classique.*

1. On a

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1-\cos t \\ y'(t) &= \sin t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} \\ &= \sqrt{2-2\cos t} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}. \end{aligned}$$

Or

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

donc

$$1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$$

et

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} \\ &= 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| \end{aligned}$$

et comme $t \in]0, 2\pi[$, on a

$$\frac{t}{2} \in]0, \pi[$$

et alors

$$\sin\frac{t}{2} > 0$$

et donc

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= 2\sin\frac{t}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\forall t \in]0, 2\pi[\,,\ f'(t) \neq \vec{0},$$

ce qui est la preuve que γ est régulière.

2. On a

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{1}{\|f'(t)\|}f'(t) \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}(1-\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

On a déjà

$$1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$$

puis

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin\left(2\frac{t}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \left(\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}, \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right) \\ &= \left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

puis

$$\vec{N}(t) = \left(-\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}\right).$$

3. On a

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= \frac{1}{2}(\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{N}(t) \end{aligned}$$

alors que Frenet prévoit

$$\vec{T}'(t) = S'(t)c(t)\vec{N}(t),$$

avec $S'(t) = \|f'(t)\|$. On a donc

$$S'(t)c(t) = -\frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} c(t) &= -\frac{1}{2S'(t)} \\ &= -\frac{1}{-4\sin\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

il est manifeste que

$$\forall t \in]0, 2\pi[\,,\ c(t) \neq 0,$$

ce qui est la garantie, d'après le cours, que tout point de γ est birégulier et donc que γ est birégulière. On a alors ensuite

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{1}{c(t)} \\ &= -4\sin\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, le centre de courbure est le point $I(t)$ défini par

$$\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\vec{N}(t),$$

d'où

$$I(t) = \begin{cases} t - \sin t + 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ 1 - \cos t - 4\sin^2\frac{t}{2}. \end{cases}$$

Remarque. On a

$$\begin{aligned} 4\sin^2\frac{t}{2} &= 2\times 2\sin^2\frac{t}{2} \\ &= 2\sin t \end{aligned}$$

et

$$1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$$

donc

$$4\sin^2\frac{t}{2} = 2 - 2\cos t$$

d'où

$$\begin{aligned} t - \sin t + 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} &= t - \sin t + 2\sin t \\ &= t + \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos t - 4\sin^2\frac{t}{2} &= 1 - \cos t - 2 + 2\cos t \\ &= -1 + \cos t \end{aligned}$$

donc

$$I(t) = \begin{cases} t + \sin t \\ -1 + \cos t. \end{cases}$$

Or

$$t - \sin t = -\pi + (t+\pi) + \sin(t+\pi)$$

et

$$\begin{aligned} -1 + \cos t &= -1 + \cos(t+\pi) \\ &= -2 + 1 + \cos(t+\pi). \end{aligned}$$

On voit donc que $I(t)$ est le translaté du point $M(t+\pi)$ par le vecteur

$$(-\pi, -2).$$

Quand t varie dans $\mathbb{R}$, $t+\pi$ décrit tout $\mathbb{R}$; donc la courbe décrite par I est la translatée de γ dans la translation de vecteur $(-\pi, -2)$.

4. On a calculé

$$\vec{T}(t) = \left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)$$

et on a

$$\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)\right)$$

si bien que

$$\alpha : t \mapsto \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$$

est une détermination angulaire de $\vec{T}(t)$.

5. D'après le cours,

$$c(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|f'(t)\|}.$$

On a donc

$$c(t) = -\frac{1}{4\sin\frac{t}{2}}.$$

2. énoncé

1. On a

$$f'(t) = (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t)$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\cos t\sin t(-\cos t, \sin t) \\ \|f'(t)\| &= |3\cos t\sin t|\,\|(-\cos t, \sin t)\| \\ &= |3\cos t\sin t|\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3\,|\cos t\sin t|\;dt. \end{aligned}$$

Rappelons qu'il est indispensable de se débarrasser des valeurs absolues dans le calcul des primitives (une primitive de la valeur absolue n'est pas la valeur d'une primitive). Par 2π-périodicité des fonctions en jeu, on a

$$L = 3\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t\sin t|\;dt$$

et par parité de $t \mapsto |\cos t\sin t|\;dt$,

$$L = 6\int_0^{\pi} |\cos t\sin t|\;dt.$$

- *Première méthode.* On a

$$L = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left|\cos t \sin t\right| \, dt + 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|\cos t \sin t\right| \, dt.$$

Or sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\cos t \sin t \geq 0$$

et sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on a

$$\cos t \sin t \leq 0$$

donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ |\cos t \sin t| &= \cos t \sin t \\ \forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \ |\cos t \sin t| &= -\cos t \sin t \end{aligned}$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} L &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos t \sin t \, dt - 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \sin t \, dt \\ &= 6 \left[\frac{1}{2} \sin^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 6 \left[\frac{1}{2} \sin^2\right]_{\frac{\pi}{2}} \pi \\ &= 3 - (-3) \\ &= 6. \end{aligned}$$

- *Deuxième méthode.* La fonction

$$t \mapsto |\cos t \sin t|$$

est périodique de période π; on a donc

$$\int_0^{\pi} |\cos t \sin t| \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t| \, dt$$

puis par parité,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t| \, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t| \, dt,$$

et comme $\cos t \sin t \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a finalement

$$L = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos t \sin t \, dt$$

$$12 \left[\frac{1}{2} \sin^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

3. énoncé

1. On a un point double dès lors qu'il existe dux paramètres distincs t_1 et t_2 tels que $M(t_1)$ et $M(t_2)$ soient confondus, donc tels que $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 3t_1^2 - 1 = 3t_2^2 - 1 \\ 3t_1^3 - t_1 = 3t_2^3 - t_2 \\ t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

Il est immédiat que

$$x(t_1) = x(t_2) \iff t_1^2 = t_2^2,$$

d'où

$$t_2 = -t_1$$

(puisque l'on a la contrainte $t_1 \neq t_2$). Comme

$$(-t_1)^3 = -t_1^3,$$

le report de $t_2 = -t_1$ dans L_2 donne

$$3t_1^3 - t_1 = -3t_1^3 + t_1$$

c'est à dire

$$2t_1 \left(3t_1^2 - 1\right) = 0,$$

d'où

$$t_1 = 0$$

ou

$$3t_1^2 - 1 = 0.$$

Mais $t_1 = 0$ donnerait $t_2 = 0$, on aurait $t_1 = t_2$, ce que l'on ne veut pas. C'est donc que

$$3t_1^2 - 1 = 0$$

i.e.

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

et alors

$$t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

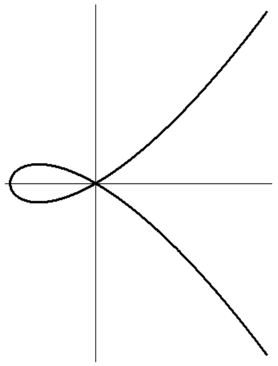
ou

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

et alors

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Les solutions obtenues pour t_1 et t_2 sont évidemment symétriques (le système à résoudre est d'emblée symétrique en t_1, t_2), et donnent naissance au seul point double de paramètre $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (ou le point $M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, mais c'est le même!), qui est le point de coordonnées $(0,0)$. Pour information:



2. Par définition,

$$L = \int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \|f'(t)\|\, dt.$$

On calcule

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \sqrt{81t^4 + 18t^2 + 1} \\ &= \sqrt{(9t^2+1)^2} \\ &= \left|9t^2+1\right| \\ &= 9t^2+1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (9t^2+1)\, dt \\ &= \left[3t^3+1\right]_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4. énoncé

1. On a

$$f'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$$

et comme $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on voit que $f'(t)$ n'est jamais le vecteur nul: γ est donc régulière. On a ensuite

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t) \\ \|f'(t)\| &= |3\cos t\sin t|\, \|(-\cos t, \sin t)\| \\ &= |3\cos t \sin t| \\ &= 3\cos t\sin t. \end{aligned}$$

2. On a donc

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{1}{3\cos t\sin t} 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t) \\ &= (-\cos t, \sin t) \\ \vec{N}(t) &= (-\sin t, -\cos t). \end{aligned}$$

3. On a

$$\vec{T}'(t) = (\sin t, \cos t).$$

On voit donc que $\vec{T}'(t)$ est bien colinéaire à $\vec{N}(t)$; plus précisément:

$$\vec{T}'(t) = -\vec{N}(t),$$

alors que la théorie prévoit

$$\vec{T}'(t) = S'(t)c(t)\vec{N}(t).$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} S'(t)c(t) &= -1 \\ c(t) &= -\frac{1}{S'(t)} = -\frac{1}{\|f'(t)\|} \\ c(t) &= -\frac{1}{3\cos t\sin t}. \end{aligned}$$

Le centre de courbure $I(t)$ est défini par

$$\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\vec{N}(t),$$

et les coordonnées $(X(t), Y(t))$ sont donc

$$\begin{aligned} X(t) &= \cos^3 t - 3\cos t\sin t(-\sin t) \\ &= \cos^3 t + 3\cos t \sin^2 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sin^3 t - 3\cos t\sin t(-\cos t) \\ &= \sin^3 t + 3\cos^2 t\sin t. \end{aligned}$$

4. Sachant que

5. énoncé

1. γ admet la paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \operatorname{ch} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} f'(t) &= (1, \operatorname{sh} t) \\ \|f'(t)\| &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \\ &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} \\ &= \operatorname{ch} t \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \|f'(t)\|\, dt \\ &= \int_a^b \operatorname{ch} t\, dt \\ &= [\operatorname{sh} t]_a^b \\ &= \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}, \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right) \\ \vec{N}(t) &= \left(-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}, \frac{1}{\operatorname{ch} t}\right) \end{aligned}$$

puis

$$\vec{T}'(t) = \left(\frac{-\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right)$$

ce qui conduit, avec la formule de Frenet, à

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| c(t) &= \frac{1}{\operatorname{ch} t} \\ c(t) &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \end{aligned}$$

6. énoncé

1. On a bien

$$(1 - t^2) \times 1 + 2t \times t - (1 + t^2) = 0,$$

donc D_t passe par $A(t) = (1, t)$. Ensuite, D_t est dirigée par

$$\vec{u}(t) = (-2t, 1 - t^2).$$

On calcule ensuite

$$\det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)) = -2 - 2t^2,$$

toujours non nul, ce qui garantit l'existence d'une enveloppe. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -\frac{\det(A'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))} \\ &= \frac{t}{1 + t^2}, \end{aligned}$$

ce qui donne pour paramétrisation de l'enveloppe:

$$F : t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ t + \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

En posant $\theta = 2 \arctan t$, de sorte que $t = \tan \frac{\theta}{2}$, on a la paramétrisation

$$\theta \mapsto \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta, \end{cases}$$

si bien que l'enveloppe est le cercle de centre O et de rayon 1.

2. On a bien

$$(t - 2) \times 2t^3 + (3t - 2t^2) \times t^2 + t^3 = 0,$$

donc D_t passe par $A(t) = (2t^3, t^2)$. Ensuite, D_t est dirigée par

$$\vec{u}(t) = (2t^2 - 3t, t - 2).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)) &= 2t^2 - 8t + 6 \\ &= 2(t - 1)(t - 3), \end{aligned}$$

qui s'annule en 1 et en 3, ce qui garantit l'existence d'une enveloppe lorsque t parcourt $J = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -\frac{\det(A'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))} \\ &= \frac{t^2}{t - 1}, \end{aligned}$$

ce qui donne tous calculs faits pour paramétrisation de l'enveloppe:

$$F : t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{t-1} \\ \frac{t}{t-1}. \end{cases}$$

7. énoncé

1. La droite (AB) passe par $A(a,0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AB}=(-a,b)$. Elle admet donc la paramétrisation

$$t\mapsto\begin{cases}a-ta\\ tb\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}.$$

2. Un point de la droite (AB) est un point $M(t)$ de coordonnées $(a-ta,tb)$, $t\in\mathbb{R}$. Les projetés respectifs $P(t)$ et $Q(t)$ de $M(t)$ sur Oxet Oy sont alors donnés par

$$\begin{aligned}P(t)&=(a-ta,0)\\ Q(t)&=(0,tb).\end{aligned}$$

La droite $(P(t)Q(t))$ est la droite passant par $P(t)$ et dirigée par

$$\begin{aligned}\vec u(t)&=\overrightarrow{P(t)Q(t)}\\ &=(ta-a,tb).\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}\det(\vec u\,'(t),\vec u(t))&=\begin{vmatrix}a & ta-a\\ b & tb\end{vmatrix}\\ &=ab\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

D'après le cours, cette famille de normales possède une enveloppe et elle admet la paramétrisation

$$F:t\mapsto P(t)+\lambda(t)\vec u(t),$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=-\frac{\det(P'(t),\vec u(t))}{\det(\vec u'(t),\vec u(t))}\\ &=-\frac{\begin{vmatrix}-a & ta-a\\ 0 & tb\end{vmatrix}}{ab}=t\end{aligned}$$

et on obtient donc la paramétrisation

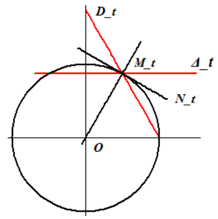
$$F:t\mapsto P(t)+\lambda(t)\vec u(t)=\begin{cases}a-ta+t(ta-a)\\ \\ 0+t^2b,\end{cases}$$

c'est à dire

$$F:t\mapsto\begin{cases}X(t)=a(t-1)^2\\ \\ Y(t)=bt^2.\end{cases}$$

8. énoncé

1. Figure:



2. La droite N_t est dirigée par

$$\overrightarrow{OM}(t)=(\cos t,\sin t),$$

vecteur que l'on notera $\vec a(t)$. La droite Δ_t étant dirigée par $\vec\imath$, il s'agit de déterminer l'image de $\vec\imath$ dans la symétrie orthogonale s_t par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec a(t))$ Un vecteur orthogonal à $\vec a(t)$ est

$$\vec b(t)=(-\sin t,\cos t)$$

et comme la base $(\vec a(t),\vec b(t))$ est orthonormée[1], on a

$$\begin{aligned}\vec\imath&=\langle\vec\imath,\vec a(t)\rangle\vec a(t)+\langle\vec\imath,\vec b(t)\rangle\vec b(t)\\ &=\cos t\,\vec a(t)-\sin t\,\vec b(t)\end{aligned}$$

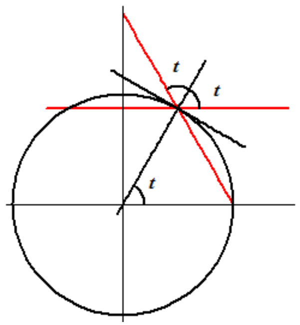
si bien que[2]

$$\begin{aligned}s_t(\vec\imath)&=\cos t\,\vec a(t)+\sin t\,\vec b(t)\\ &=(\cos^2 t-\sin^2 t,2\sin t\cos t)\end{aligned}$$

et on voit que

$$s_t(\vec\imath)=(\cos 2t,\sin 2t).$$

On peut retrouver ce vecteur en raisonnant à partir de la figure suivante:



[1] Les composantes d'un vecteur dans une base orthonormée sont égales aux produits scalaires du vecteur avec les vecteurs de la base orthonormée.

[2] Dans le contexte $E=A\oplus B$ (et ici $A=\mathrm{Vect}(\vec a(t))$ et $B=\mathrm{Vect}(\vec b(t))$), tout vecteur $\vec v$ de E s'écrit de manière unique

$$\vec v=\vec v_1+\vec v_2$$

avec $(\vec v_1,\vec v_2)\in A\times B$ et par définition de la symétrie s par rapport à A et parallèlement à B, on a alors

$$s(\vec v)=\vec v_1-\vec v_2.$$

3. Ainsi, D_t passe par $M(t)$ et est dirigée par

$$\vec{u}(t) = (\cos 2t, \sin 2t).$$

En suivant le protocole du cours, on obtient sans difficulté que la famille de droites (D_t) possède une enveloppe, dont une paramétrisation est

$$F : t \mapsto \begin{cases} X(t) = \cos t - \frac{1}{2}\cos t \cos(2t) \\ Y(t) = \sin t - \frac{1}{2}\cos t \sin(2t) \end{cases}$$

ou encore, après quelques manipulations

$$\begin{cases} X(t) = \frac{1}{2}\cos t(1 + 2\sin^2 t) \\ Y(t) = \sin^3 t. \end{cases}$$

4. Puisque X est paire et Y est impaire, on fera une étude sur $[0, \pi]$ que l'on complétera par une symétrie par rapport à Ox et puisque

$$\begin{array}{rcl} X(\pi - t) & = & -X(t) \\ Y(\pi - t) & = & Y(t), \end{array}$$

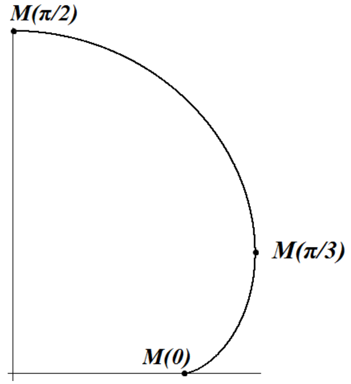
les point $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à Oy. On fera une étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ que l'on complétera par une symétrie par rapport à Oy. Après simplifications, on a

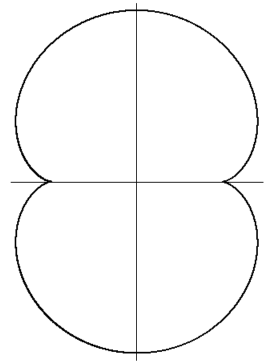
$$\begin{cases} X'(t) = \frac{3}{2}\sin t(1 - 2\sin^2 t) \\ Y'(t) = 3\sin^2 t \cos t \end{cases}$$

et les variations s'en déduisent immédiatement:

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	-1
x	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	1

Le point le paramètre $t = 0$ est le seul point stationnaire de Γ et au moyen d'un développement limité de X et de Y au voisinage de $t = 0$, on obtient aisément que l'on a un point de rebroussement de première espèce, avec une tangente dirigée par le vecteur $(\frac{3}{2}, 0)$. D'où la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis, avec les symétries, toute la courbe Γ:





9. énoncé La développée est, si elle existe, l'enveloppe de la famille des normales à l'ellipse. On a

$$f'(t) = (-a\sin t, b\cos t).$$

La normale à l'ellipse au point $M(t)$ est donc la droite passant par $M(t)$ et dirigée par $\vec{u}(t) = (-b\cos t, -a\sin t)$. On calcule

$$\det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)) = -ab \neq 0,$$

ce qui garantit l'existence d'une enveloppe à la famille des normales. Ensuite, on calcule

$$\lambda(t) = -\frac{\det(M'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))} = \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}$$

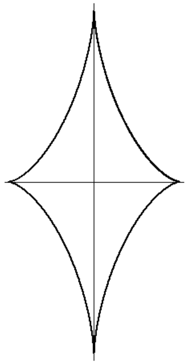
ce qui donne la paramétrisation suivante de l'enveloppe des normales, et donc de la développée:

$$F : t \mapsto M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = \begin{cases} X(t) = a\cos t - \frac{\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{a} \\ Y(t) = b\sin t - \frac{\sin t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{b} \end{cases}$$

et après simplifications:

$$\begin{cases} X(t) = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ Y(t) = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t. \end{cases}$$

Pour information: Γ a l'allure suivante:



10. énoncé

Première approche: lieu des centres de courbure. On a

$$\vec{T}(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}, \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right), \ \vec{N}(t) = \left(-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}, \frac{1}{\operatorname{ch} t}\right)$$

puis

$$\vec{T}'(t) = \left(\frac{-\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right)$$

ce qui conduit, avec la formule de Frenet, à

$$\|f'(t)\| c(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \implies c(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

Puisque $c(t) \neq 0$ pour tout réel t, γ est bi-régulière et le centre de courbure $I(t)$ est défini en tout point par

$$\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\vec{N}(t)$$

avec

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{1}{c(t)} \\ &= \operatorname{ch}^2 t, \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement

$$I(t) = \begin{cases} t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \\ 2\operatorname{ch} t. \end{cases}$$

Deuxième approche: enveloppe des normales. La normale à γ en $M(t)$ passe évidemment par $M(t)$ et est dirigée par un vecteur orthogonal à $f'(t)$, comme le vecteur

$$\vec{u}(t) = (-\operatorname{sh} t, 1).$$

On calcule

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)) &= \begin{vmatrix} -\operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\operatorname{ch} t \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

D'après le cours, cette famille de normales possède une enveloppe et elle admet la paramétrisation

$$F : t \mapsto M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t),$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -\frac{\det(M'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))} \\ &= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & 1 \end{vmatrix}}{-\operatorname{ch} t} \\ &= \frac{1 + \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t} \\ &= \operatorname{ch} t \end{aligned}$$

et on obtient donc la paramétrisation

$$F : t \mapsto M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = \begin{cases} t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \\ 2\operatorname{ch} t. \end{cases}$$

11. énoncé

1. On calcule

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{at}(a\cos t - \sin t, a\sin t + \cos t) \\ \|f'(t)\| &= e^{at}\sqrt{a^2+1} \end{aligned}$$

et on a donc

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \|f'(u)\|\, du \\ &= \sqrt{a^2+1}\int_0^t e^{au}\, du \\ &= \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\left(e^{at} - 1\right). \end{aligned}$$

2. On voit que $\|f'(t)\| \neq 0$ i.e. $f'(t) \neq \vec{0}$ et ce pour tout réel t. La courbe γ est donc régulière, ce qui justifie l'existence du repère de Frenet $(M(t); \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ avec

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a\cos t - \sin t, a\sin t + \cos t)$$

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-(a\sin t + \cos t), a\cos t + \sin t).$$

3. On va rechercher la courbure, le rayon de courbure puis le centre de courbure. On a

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\sin t - \cos t, a\cos t - \sin t)$$

et on voit que $\vec{T}'(t) = \vec{N}(t)$ alors que la formule de Frenet prévoit

$$\vec{T}'(t) = c(t)\|f'(t)\|\vec{N}(t).$$

On a donc

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{\|f'(t)\|} \\ &= \frac{1}{e^{at}\sqrt{a^2+1}}. \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c(t) \neq 0$. La courbe γ est donc birégulière et admet donc en tout point un cercle de courbure, de rayon $|R(t)|$ avec

$$R(t) = \frac{1}{c(t)} = e^{at}\sqrt{a^2+1}$$

et de centre $I(t)$ défini par $\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\vec{N}(t)$, ce qui donne

$$I(t) = \begin{cases} X(t) = e^{at}\cos t + \sqrt{a^2+1}e^{at} \times \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\big(-(a\sin t + \cos t)\big) \\ Y(t) = e^{at}\sin t + \sqrt{a^2+1}e^{at} \times \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a\cos t - \sin t) \end{cases}$$

ce qui donne finalement la paramétrisation suivante de C:

$$\begin{cases} X(t) = -ae^{at}\sin t \\ Y(t) = ae^{at}\cos t. \end{cases}$$

En notant Φ l'application

$$(x,y) \mapsto (-ay, ax),$$

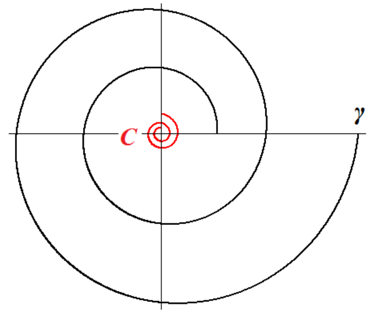
on voit que la courbe C est l'image par Φ de la courbe γ. Or Φ est la composée de l'application

$$H : (x,y) \mapsto (ax, ay),$$

qui est l'homothétie de centre O et de rapport a, par l'application

$$R : (x,y) \mapsto (-y, x),$$

qui est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



a = 0.1

12. énoncé

1. Compte-tenu de $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} \\ y'(t) &= \frac{-\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, \\ f'(t) &= \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}(\operatorname{sh} t, -1) \\ \|f'(t)\| &= \frac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{ch} t} \\ &= \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \end{aligned}$$

car $\operatorname{sh} t > 0$ sur $]0, +\infty[$. On voit donc que $\|f'(t)\| \neq 0$ i.e. $f'(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, ce qui prouve la régularité.

2. (a) On calcule

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{1}{\|f'(t)\|}f'(t) \\ &= \left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}, \frac{-1}{\operatorname{ch} t}\right) \end{aligned}$$

et en tenant compte de $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, on a

$$\vec{T}'(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\right).$$

D'autre part, $\vec{T}(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t))$ donne

$$\vec{T}'(t)(-\alpha'(t)\sin\alpha(t), \alpha'(t)\cos\alpha(t))$$

et la comparaison de ces deux expressions de $\vec{T}'(t)$ donne

$$\alpha'(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

(b) Par théorème, $c(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|f'(t)\|}$, ce qui donne après simplifications

$$c(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} t}.$$

Puisque $c(t) \neq 0$, la courbe γ est birégulière; on a

$$\begin{array}{rcl} R(t) & = & \operatorname{sh} t \\ \vec{N}(t) & = & \left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}, \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right) \end{array}$$

le centre de courbure $I(t)$, défini par $\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\vec{N}(t)$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} X(t) = t - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} + \operatorname{sh} t \times \frac{1}{\operatorname{ch} t} \\ Y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} + \operatorname{sh} t \times \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} X(t) = t \\ Y(t) = \operatorname{ch} t. \end{cases}$$

3. On a

$$f'(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}(\operatorname{sh} t, -1),$$

vecteur qui dirige la tangente à γ en $M(t)$, donc la normale est dirigée par

$$\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}(1, \operatorname{sh} t)$$

ou même mieux par

$$\vec{u}(t) = (1, \operatorname{sh} t),$$

qui lui est colinéaire et beaucoup plus simple. On calcule

$$\begin{array}{rcl} \det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)) & = & -\operatorname{ch} t \\ \det(M'(t)\vec{u}(t)) & = & \det(f'(t), \vec{u}(t)) = \operatorname{sh} t \end{array}$$

et on a donc

$$\begin{array}{rcl} \lambda(t) & = & -\dfrac{\det(M'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))} \\ & = & \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \end{array}$$

et l'enveloppe des normales à γ admet donc la paramétrisation

$$F : t \mapsto M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = \begin{cases} X(t) = t - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} + \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \times 1 \\ Y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} + \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \times \operatorname{sh} t \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} X(t) = t \\ Y(t) = \operatorname{ch} t \end{cases}$$

et on retrouve bien entendu la même paramétrisation que précédemment.