Feuille d'exercices n°8

Le plan est muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et toutes les coordonnées sont données relativement à ce repère.

Domaine d'étude

1. corrigé Déterminer un intervalle d'étude J pour les courbes suivantes et préciser les transformations géométriques permettant d'obtenir toute la courbe à partir de son tracé sur J. Ne pas les étudier.

$$f_1 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \operatorname{ch} t \\ y(t) = \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad f_2 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t}{t^2+1} \end{cases}$$

$$f_3 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \sin 4t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases} \qquad f_4 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$$

$$f_5 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 2t + \sin t \\ y(t) = \cos t - t \end{cases} \qquad f_6 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{t^2+1}{t} \\ y(t) = \frac{t^4+1}{t^2} \end{cases}$$

$$f_7 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \frac{t}{1+t^2}. \end{cases}$$

Tangente, normale

2. corrigé Écrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \left(t^3, (t+1)^2\right)$$

au point $M(t)$.

3. corrigé Écrire une équation cartésienne de la normale à la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \left(t^2, (t-1)^3\right)$$

au point $M(t)$.

4. corrigé En quel point de la courbe γ paramétrée par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

la tangente passe-t-elle par O?

5. corrigé Soit γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 + 1. \end{cases}$$

Existe-t-il des points de γ en lesquels la normale à γ passe par O?

6. corrigé Déterminer le projeté orthogonal du point O sur la tangente en $M(0)$ à la courbe γ paramétrée par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = -t^2 - t \\ y(t) = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$$

Étude locale

7. corrigé Soit γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

1. En effectuant des développements limités, donner les valeurs de $x^{(k)}(0)$ et $y^{(k)}(0)$ pour $k \in \{1,2,3,4\}$.
2. En déduire l'allure au voisinage du point de paramètre $t = 0$ de la courbe γ de paramétrisation $t \mapsto (x(t), y(t))$.

8. corrigé Faire une étude locale en $t = 0$ des courbes suivantes:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^3 \\ y(t) = t^2 - t^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 1 + t^2 + t^3 + t^4 \\ y(t) = -3 + t^2 + t^3 - t^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^3 + 2t^5 \\ y(t) = 1 - t^3 + t^5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = \sin^2 t - \dfrac{2}{3}t^3 \\ y(t) = \ln(1+t) - t. \end{cases}$$

9. corrigé On considère une courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto (x(t), y(t)), \quad t \in I$$

(où f est une fonction de classe C^∞ sur le domaine $I \subset \mathbb{R}$).

1. En se ramenant soigneusement à la définition, démontrer que si le point de paramètre t_0 est un point d'inflexion de γ, alors

$$\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

2. Démontrer que la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

possède un point d'inflexion; déterminer la position de γ par rapport à sa tangente en ce point.

3. Démontrer que la fonction

$$g : t \mapsto -2t^3 + 6t + 2$$

possède trois racines réelles. En déduire que la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto = \begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*$$

possède trois points d'inflexion.

Branches infinies

10. corrigé Déterminer les branches infinies de la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2-9} \\ y(t) = \frac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$$

et la position de γ par rapport à ses asymptotes.

11. corrigé Déterminer les branches infinies de la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = (t+2)e^{\frac{1}{t}} \\ y(t) = (t-2)e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

et mettre en évidence l'existence d'un point asymptote de γ.

Étude globale

12. corrigé Étudier (éventuellement réduction du domaine d'étude et symétries) la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin \frac{t}{3}. \end{cases}$$

13. corrigé On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{\sin^2 t}{2+\sin t}. \end{cases}$$

1. Comparer les points $M(t)$ et $M(\pi-t)$ et en déduire qu'il suffit d'étudier γ sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Étudier les variations de x et y sur I.
3. Déterminer les points stationnaires de γ et en préciser leur nature.
4. Tracer γ.

14. corrigé Soit γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}. \end{cases}$$

1. En faire l'étude (variations, asymptotes) et le tracé.
2. Démontrer que γ possède un point double et prouver que les tangentes à γ sont orthogonales en ce point.

15. corrigé Soit γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{2t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}^*.$$

1. Dresser sur un même tableau les variations de x et y.
2. Déterminer les points stationnaires de γ, leur nature et leur tangente à γ. Déterminer, s'il en existe, les points à tangente verticale et les points à tangente horizontale.
3. Étudier les branches infinies de γ. On mettra en particulier en évidence des asymptotes, et l'on précisera la position de γ par rapport à celles-ci.
4. Tracer γ en tenant compte de tous ces éléments d'étude.
5. Déterminer toutes les valeurs de t telles que $(f'(t), f''(t))$ soit liée. En déduire que γ possède un unique point d'inflexion, en un paramètre que l'on précisera.

Quelques courbes classiques

16. corrigé *Astroïde.* On considère la courbe γ paramétrée par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t. \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il suffit d'étudier γ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$; en faire alors l'étude et la tracer.
2. En tout point régulier $M(t)$ de γ, la tangente à γ coupe Ox en un point $A(t)$ et Oy en un point $B(t)$. Démontrer que la longueur $A(t)B(t)$ est constante.

17. corrigé *Lemniscate de Bernoulli.* On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} \\ y(t) = \frac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t}. \end{cases}$$

1. En faire l'étude et le tracé.
2. Soit $F(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $F'(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Démontrer qu'en tout point M de γ, $MF \times MF' = \frac{1}{2}$.

18. corrigé *Folium de Descartes.* On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

1. En faire l'étude: on étudiera en particulier:
   - la régularité de γ, ses points à tangente horizontale ou verticale,
   - une asymptote à γ et la position de γ par rapport à cette asymptote,
   - le point $M(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
2. Pour $t \neq 0$, comparer les points $M(t)$ et $M\left(\frac{1}{t}\right)$. Reprendre alors cette étude mais en se limitant à l'intervalle $]-1, 1]$ et en complétant l'étude par une symétrie que l'on précisera.

19. corrigé *Cardioïde.* Étudier la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

20. corrigé *Tractrice.* On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t - \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}. \end{cases}$$

1. En faire l'étude (symétries, asymptotes, tracé).
2. En tout point régulier $M(t)$ de γ, on note $A(t)$ l'intersection de l'axe Ox avec la tangente à γ en $M(t)$. Calculer la longueur $M(t)A(t)$.

21. corrigé *Courbe de Lissajous.* Étudier et tracer la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(3t). \end{cases}$$

22. corrigé *Cissoïde droite.* On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

1. En faire l'étude (symétries, points stationnaires et leur nature, branches infinies, tracé).
2. On considère la droite Δ d'équation $y = 1$. Pour tout point P de Δ, on considère le projeté orthogonal Q de P sur la droite Ox puis le projeté orthogonal M de Q sur la droite OP.

(a) Faire une figure.

(b) Déterminer le lieu du point M lorsque P décrit la droite Δ.

1. énoncé

- Pour f_1, étude sur $[0,+\infty[$ et symétrie par rapport à Oy.
- Pour f_2, étude sur $[0,+\infty[$ privé de 1 et symétrie par rapport à O.

  Mais on a aussi

  $$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{t}\right) &= -x(t) \\ y\left(\frac{1}{t}\right) &= y(t). \end{aligned}$$

  Les points $M(t)$ et $M\left(\frac{1}{t}\right)$ sont donc symétriques par rapport à Oy.

  Or lorsque t parcourt $]0,1]$, $\frac{1}{t}$ parcourt $[1,+\infty[$.

  On étudie et trace alors γ sur $]0,1]$; le symétrique de cette portion par rapport à Oy donnera γ en entier.

- Pour f_3, étude sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par π-périodicité de x et y, puis sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par imparité et parité respectives de x et y; on effectue alors une symétrie par rapport à Oy pour obtenir toute la courbe.

  Enfin,

  $$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right) &= -x(t) \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right) &= -y(t). \end{aligned}$$

  Les points $M(t)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ sont symétriques par rapport à O et lorsque t parcourt $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{\pi}{4}-t$ parcourt $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

  En conclusion:

  – on étudie et trace γ sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
  – La symétrie de cette portion par rapport à O donne la courbe sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
  – La symétrie de la courbe obtenue par rapport à Oy donne alors toute la courbe γ.

- Pour f_4, étude sur $[-\pi,\pi]$ par 2π-périodicité de x et y, puis sur $[0,\pi]$ par imparité respectives de x et y; on effectue alors une symétrie par rapport à O pour obtenir toute la courbe.

  Enfin,

  $$\begin{aligned} x(\pi-t) &= -x(t) \\ y(\pi-t) &= y(t). \end{aligned}$$

  Les points $M(t)$ et $M(\pi-t)$ sont symétriques par rapport à Oy et lorsque t parcourt $[0,\pi 2]$, $\overset{\pi}{-}t$ parcourt $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

  En conclusion:

  – on étudie et trace γ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
  – La symétrie de cette portion par rapport à Oy donne la courbe sur $[0,\pi]$.
  – La symétrie de la courbe obtenue par rapport à O donne alors toute la courbe γ.

- Pour f_5, le point $M(t+2\pi)$ se déduit du point $M(t)$ par la translation de vecteur $\vec{u}=(2\pi,-\pi)$. On étudie et trace alors γ sur $[0,2\pi]$; les translations de vecteurs $k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, permettent d'obtenir toute la courbe γ.
- Pour f_6, on étudie γ sur $]0,+\infty[$ car x est impaire et y est paire et toute la courbe s'obtient alors par une symétrie par rapport à Oy.
- Pour f_7, on a

  $$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{t}\right) &= -x(t) \\ y\left(\frac{1}{t}\right) &= y(t). \end{aligned}$$

  Les points $M(t)$ et $M\left(\frac{1}{t}\right)$ sont donc symétriques par rapport à Oy.

  Or lorsque t parcourt $]0,1]$, $\frac{1}{t}$ parcourt $[1,+\infty[$.

  On étudie et trace alors γ sur $]0,1]$; le symétrique de cette portion par rapport à Oy donnera γ en entier.

2. énoncé On a

$$f'(t)=(3t^2,2(t+1))$$

et ce vecteur n'est jamais nul et dirige donc la tangente en $M(t)$ qui est la droite passant par $M(t)$ et dirigée par $f'(t)$.

Un point $M(x,y)$ appartient à cette tangente si et seulement si $\overrightarrow{M(t)M}$ et $f'(t)$ sont liés, donc si et seulement si

$$\text{dét}\,(\overrightarrow{M(t)M},f'(t))=0,$$

ce qui donne après simplifications

$$2x(t+1)-3t^2y+t^2(t+1)(t+3)=0.$$

3. énoncé On a

$$f'(t)=(2t,3(t-1)^2)$$

et ce vecteur n'est jamais nul et dirige donc la tangente en $M(t)$ qui est la droite passant par $M(t)$ et dirigée par $f'(t)$.

Un point $M(x,y)$ appartient à la normale à γ en $M(t)$ si et seulement si $\overrightarrow{M(t)M}$ et $f'(t)$ sont orthogonaux, donc si et seulement si

$$\langle \overrightarrow{M(t)M}, f'(t)\rangle = 0,$$

ce qui donne après simplifications

$$2xt - 3y(t-1)^2 - 2t^3 - 3(t-1)^5 = 0.$$

4. énoncé Équation cartésienne de la tangente en $M(t)$:

$$\begin{vmatrix} x-(t^2+t) & 2t+1 \\ y-(t^2-1) & 2t \end{vmatrix} = 0 \iff 2tx - (2t+1)y - t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Elle passe par O si et seulement si

$$-t^2 - 2t - 1 = 0 - (t+1)^2 = 0 \iff t = -1.$$

Donc le point $M(-1)$ est le seul point de γ vérifiant cette propriété.

5. énoncé Équation cartésienne de la normale en $M(t)$:

$$\begin{aligned} &\langle (x-(t^2-2t), y-(t^2+1)), (2t-2, 2t)\rangle = 0 \\ \iff &(2t-2)x + 2ty - 4t^3 + 6t^2 - 6t = 0. \end{aligned}$$

Elle passe par O si et seulement si

$$-4t^3 + 6t^2 - 6t = 0 \iff -2t(2t^2 - 3t + 3) \iff t = 0$$

car $2t^2 - 3t + 3$ a un discriminant nul.

6. énoncé La tangente $T(0)$, qui passe par $(0,1)$ et dirigée par $(-1,2)$, admet l'équation

$$2x + y - 1 = 0.$$

$H(a,b)$ est le projeté orthogonal de O sur $T(0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} H \in T(0) \\ \overrightarrow{OH} \perp (-1,2), \end{cases}$$

ce qui se produit si et seulement si

$$\begin{cases} 2a + b - 1 &= 0 \\ -a + 2b &= 0 \end{cases} \iff a = \frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}.$$

7. énoncé

1. On a

$$\begin{aligned} x(t) &\underset{t\to 0}{=} t^2 - t^4 + o(t^4) \\ y(t) &\underset{t\to 0}{=} t^2 + o(t^4). \end{aligned}$$

De la formule de Taylor-Young, on déduit:

$$\begin{aligned} x'(0) &= 0 \\ x''(0) &= 1 \times 2! \\ &= 2 \\ x'''(0) &= 0 \\ x''''(0) &= -1 \times 4! \\ &= 24 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= 1 \times 2! \\ &= 2 \\ y'''(0) &= 0 \\ y''''(0) &= 0. \end{aligned}$$

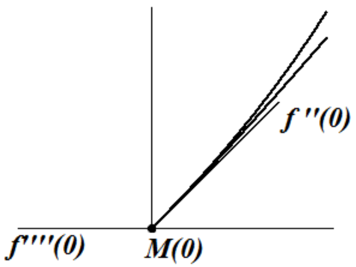
2. On a donc

$$\begin{aligned} f'(0) &= (0,0) \\ f''(0) &= (2,2) \end{aligned}$$

et la tangente à γ en $M(0)$ est dirigée par $f''(0)$. Puis

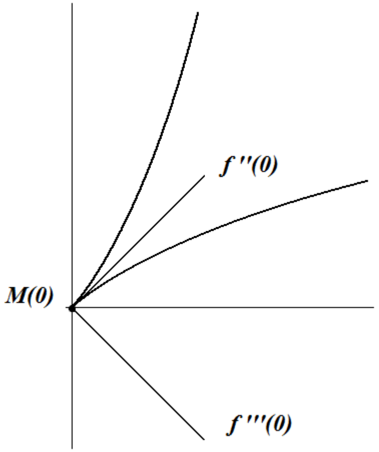
$$\begin{aligned} f'''(0) &= (0,0) \\ f''''(0) &= (-24,0), \end{aligned}$$

qui est le premier vecteur dérivé non colinéaire à $f''(0)$. On a donc affaire à un point de rebroussement de deuxième espèce.

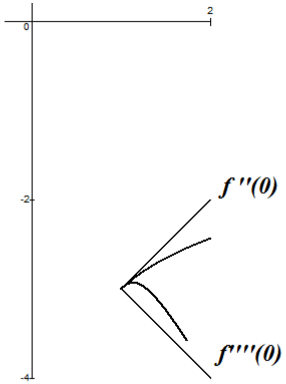


γ sur $[0.4, 0.4]$

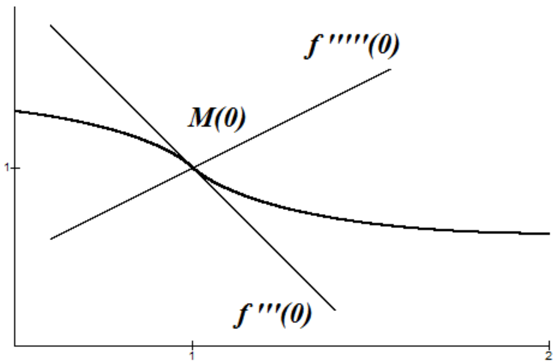
8. énoncé



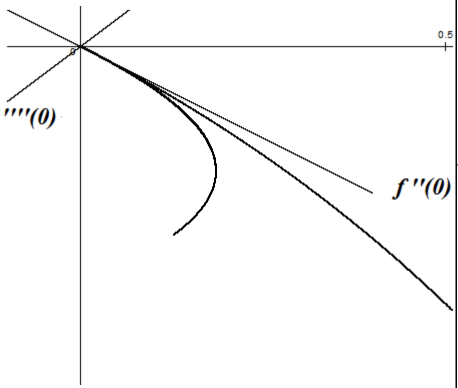
rebr. 1ère esp.



rebr. 2ème esp.



inflexion



rebr. 2ème esp.

9. énoncé

1. Si le point de paramètre t_0 est un point d'inflexion, c'est qu'il n'est pas un point birégulier, c'est à dire que les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont liés. C'est pourquoi leur déterminant est nul, d'où le résultat de l'énoncé.

Remarque. C'est une condition *nécessaire* à la présence d'un point d'inflexion mais pas une condition suffisante; en effet, un point de rebroussement (de première ou deuxième espèce) n'est pas un point d'inflexion mais c'est aussi un point non birégulier. C'est pourquoi un point de rebroussement satisfait lui aussi la propriété de l'énoncé.

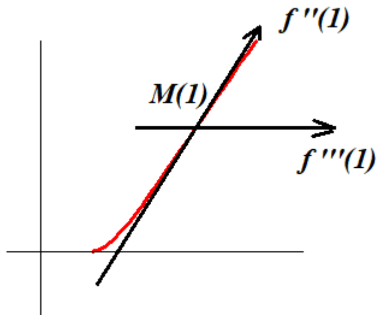
2. D'après **1**, les points d'inflexion de γ sont à rechercher parmi les points de paramètre t vérifiant

$$\begin{vmatrix} e^t & e^t \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est à dire $2e^t(1-t) = 0$. Ainsi, le point $M(1)$ est le seul point de γ *susceptible* d'être un point d'inflexion. Étudions donc ce point.

$$\begin{aligned} f'(t) = (e^t, 2t) &\implies f'(1) = (e, 2) \\ f''(t) = (e^t, 2) &\implies f''(1) = (e, 2) \\ f'''(t) = (e^t, 0) &\implies f'''(1) = (e, 0). \end{aligned}$$

Ainsi, le premier vecteur dérivé non nul en $t = 1$ est le vecteur $f'(1)$, qui dirige alors la tangente à γ en ce point, et le premier vecteur de dérivation supérieure à ne pas être colinéaire à $f'(1)$ est le vecteur $f'''(1)$. Avec les notations du cours, on a donc $p = 1$ et $q = 3$, ce qui démontre que le point $M(1)$ est effectivement un point d'inflexion.



3. L'étude des variations de g est immédiate

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(t)$	$-$		$+$	$-$
g	$+\infty$ ↘	-2 ↗	6 ↘	$+\infty$

Il résulte du théorème de la bijection (appliqué trois fois: sur les intervalles $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, +\infty[$) que g s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$.
On calcule

$$f'(t) = \left(2t+1, 1 - \frac{1}{t^2}\right), \quad f''(t) = \left(2, \frac{2}{t^3}\right)$$

si bien que

$$\begin{vmatrix} 2t+1 & 2 \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^3} - 2 + \frac{2}{t^2} = 0$$

et après réduction au même dénominateur

$$\begin{vmatrix} 2t+1 & 2 \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{6t + 2 - 2t^3}{t^3} = 0 \iff g(t) = 0.$$

D'après **1**, les points d'inflexion de γ sont donc à rechercher parmi les points dont le paramètre est une racine de g. Pour déterminer s'il s'agit effectivement de points d'inflexion, on doit démontrer que $(f'(t), f'''(t))$ est libre pour ces valeurs. Or

$$f'''(t) = \left(0, -\frac{6}{t^4}\right)$$

et pour tout réel $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\det(f'(t), f'''(t)) &= \begin{vmatrix} 2t+1 & 0 \\ 1-\frac{1}{t^2} & -\frac{6}{t^4} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{6(2t+1)}{t^4} = 0 \\
\iff & \quad t = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

mais puisque

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4},$$

le réel $-\frac{1}{2}$ n'est pas l'une des trois racines de g, ce qui prouve qu'en les points dont le paramètre est une racine de g, la famille $(f'(t), f'''(t))$ est libre. C'est pourquoi ces trois points sont bien des points d'inflexion de γ (et ce sont donc les seuls).

10. énoncé On étudie les limites de x et y aux bornes du domaine d'étude, à savoir $-\infty$, -3, 3 et $+\infty$. Comme dans tout contexte de recherche de limite, on pensera à produire des équivalents (et donc, quand il le faut, à priviligier les formes factorisées).

- On a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{t^3}{t^2-9} \\
&\underset{t\to+\pm\infty}{\sim} \frac{t^3}{t^2} \\
&= t,
\end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$x(t) \underset{x\to+\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$$

puis

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{t(t-2)}{t-3} \\
&\underset{t\to+\pm\infty}{\sim} \frac{t^2}{t} \\
&= t,
\end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$y(t) \underset{x\to+\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$$

- On a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{t^3}{t^2-9} \\
&= \frac{t^3}{(t-3)(t+3)} \\
&\underset{t\to-3}{\sim} \frac{-27}{-6(t+3)} \\
&= \frac{9}{2(t+3)}
\end{aligned}$$

et puisque

$$t+3 \underset{t\to-3^-}{\longrightarrow} 0^-,$$

on a

$$\frac{1}{t+3} \underset{t\to-3^-}{\longrightarrow} -\infty$$

et donc

$$x(t) \underset{t\to-3^-}{\longrightarrow} -\infty$$

et de la même manière,

$$x(t) \underset{t\to-3^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

- On a

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{t^3}{t^2-9} \\
&= \frac{t^3}{(t-3)(t+3)} \\
&\underset{t\to3}{\sim} \frac{27}{6(t-3)} \\
&= \frac{9}{2(t-3)}
\end{aligned}$$

et puisque

$$t-3 \underset{t\to3^-}{\longrightarrow} 0^-,$$

on a

$$\frac{1}{t-3} \underset{t\to3^-}{\longrightarrow} -\infty$$

et donc

$$x(t) \underset{t\to3^-}{\longrightarrow} -\infty$$

et de la même manière,

$$x(t) \underset{t\to3^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

On a donc des branches infinies lorsque t tend vers 3 , vers -3 et vers $\pm\infty$

- *Étude au voisinage de $t=-3$.* On a vu précédemment que

$$x(t) \underset{t\to-3^-}{\longrightarrow} -\infty$$

et

$$x(t) \underset{t\to-3^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t(t-2)}{t-3} \\ &\underset{t\to-3}{\sim} \frac{-3\times(-5)}{-6} \\ &= -\frac{5}{2}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la droite horizontale

$$y = -\frac{5}{2}$$

est asymptote à γ. On recherche à présent la position de γ par rapport à cette asymptote et on étudie donc le signe de

$$y(t) + \frac{5}{2}.$$

Après réduction au même dénominateur, on a

$$y(t) + \frac{5}{2} = \frac{2t^2+t-15}{2(t-3)}.$$

Il est question de déterminer le signe de cette expression et donc d'étudier le signe du numérateur et du dénominateur. Dans un premier temps,

$$t-3 \underset{t\to-3}{\longrightarrow} -6$$

et donc

$$y(t) + \frac{5}{2} \underset{t\to-3}{\sim} -\frac{2t^2+t-15}{12}$$

et c'est la raison pour laquelle on s'intéresse à présent au signe de $2t^2+t-15$. Puisque c'est un trinôme du second degré, il suffit d'en déterminer les racines et d'appliquer la règle ad hoc. Après calcul du discriminant, on trouve immédiatement que les racines sont -3 et $\frac{5}{2}$.

Remarque importante. La fonction y est définie et continue en $t=-3$ et

$$y(-3) = -\frac{5}{2}$$

et donc

$$y(-3) + \frac{5}{2} = 0$$

et donc

$$\frac{2t^2+t-15}{2(t-3)}$$

s'annule en $t=-3$ et c'est pourquoi, "les yeux fermés", -3 est racine de $2t^2+t-15$. Le produit des racines du trinôme

$$at^2+bt+c$$

étant égal à $\frac{c}{a}$ *(résultat à connaître!)*, on en déduit ici que la deuxième racine t_2 de $2t^2+t-15$ satisfait

$$-3t_2 = \frac{-15}{2},$$

et c'est pourquoi

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{-15}{-6} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Fin de la remarque.

Ainsi,

$$2t^2+t-15 \begin{cases} >0 & \text{sur }]-\infty,-3[\ \cup\ ]\frac{5}{2},+\infty[\\ <0 & \text{sur }]-3,\frac{5}{2}[\end{cases}$$

et en conséquence, puisque $y(t)+\frac{5}{2}$ est du même signe que $-\frac{2t^2+t-15}{12}$,

$$y(t) + \frac{5}{2} \begin{cases} <0 & \text{à gauche de } -3 \\ >0 & \text{à droite de } -3. \end{cases}$$

Donc γ est en-dessous de son asymptote lorsque t tend vers -3 à gauche et au-dessus lorsque t tend vers -3 à droite.

- *Étude au voisinage de* $\pm\infty$.

Puisque x et y tendent vers ∞ lorsque t tend vers $\pm\infty$, on étudie $\frac{y(t)}{x(t)}$:

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{x(t)} &\underset{t\to\pm\infty}{\sim} \frac{t}{t} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On étudie alors la différence $y(t)-x(t)$; après réduction au même dénominateur:

$$\begin{aligned} y(t)-x(t) &= \frac{(t-6)t}{t^2-9} \\ &\underset{t\to\pm\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

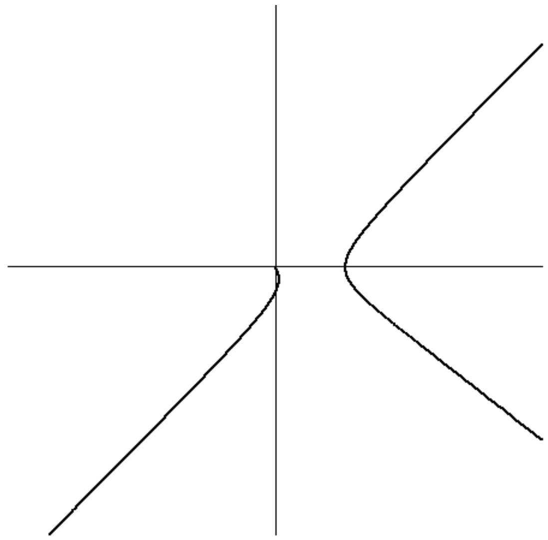
ce qui prouve que
$$y(t)-x(t)\underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow}1.$$
La droite d'équation cartésienne
$$y-x=1$$
est donc asymptote à γ. Ensuite, après réduction au même dénominateur,
$$\begin{aligned} y(t)-x(t)-1 &= -3\frac{2t-3}{t^2-9} \\ &\underset{t\to\pm\infty}{\sim} -3\frac{2t}{t^2} \\ &= -\frac{6}{t}\begin{cases} <0 & \text{au voisinage de } +\infty \\ >0 & \text{au voisinage de } -\infty \end{cases} \end{aligned}$$
donc γ est en-dessous de son asymptote lorsque t tend vers $+\infty$ et au-dessus lorsque t tend vers $-\infty$.

- *Étude au voisinage de* $t=3$. On a vu précédemment que
$$x(t)\underset{t\to3^-}{\longrightarrow}-\infty$$
et
$$x(t)\underset{t\to3^+}{\longrightarrow}+\infty.$$
Ensuite,
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t(t-2)}{t-3} \\ &\underset{t\to3}{\sim} \frac{3\times1}{t-3} \\ &= \frac{3}{t-3} \end{aligned}$$
et donc
$$y(t)\underset{t\to3^-}{\longrightarrow}-\infty$$
et
$$y(t)\underset{t\to3^+}{\longrightarrow}+\infty.$$
On étudie donc le rapport $\frac{y(t)}{x(t)}$; comme on a vu plus haut que
$$\begin{aligned} x(t) &\underset{t\to3}{\sim} \frac{9}{2(t-3)} \\ y(t) &\underset{t\to3}{\sim} \frac{3}{(t-3)} \end{aligned}$$
on a
$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{x(t)} &\underset{t\to3}{\sim} 3\times\frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$
Puisque cette limite est finie et non nulle, on étudie $y(t)-\frac{2}{3}x(t)$. Après réduction au même dénominateur
$$y(t)-\frac{2}{3}x(t)=\frac{t^2+6t)}{3(t+3)},$$
et de façon évidente,
$$y(t)-\frac{2}{3}x(t)\underset{t\to3}{\longrightarrow}\frac{3}{2},$$
ce qui démontre que la droite d'équation cartésienne
$$y-\frac{2}{3}x=\frac{3}{2}$$
est asymptote à γ. Ensuite, après réduction au même dénominateur
$$y(t)-\frac{2}{3}x(t)-\frac{3}{2}=\frac{2t^2+3t-27}{6(t+3)}.$$
D'une manière ou d'une autre ("les yeux fermés" ou pas), le trinôme
$$2t^2+3t-27$$
possède les racines 3 et $-\frac{9}{2}$.
  - Puisque $6(t+3)$ est positif au voisinage de 3 (à droite ou à gauche), $y(t)-\frac{2}{3}x(t)-\frac{3}{2}$ est du même signe que
$$2t^2+3t-27,$$
  - qui est <0 entre $\left]-\frac{9}{2},3\right[$ et >0 sur $]3,+\infty[$.
  - Donc γ est en-dessous de cette asymptote à gauche de 3 et au-dessus à droite de 3.

11. énoncé

- Il y a une branche infinie lorsque t tend vers 0 par valeurs >0 car alors $e^{\frac{1}{t}}$ tend vers $+\infty$ et donc x et y tendent respectivement vers $+\infty$, $-\infty$. On a ensuite
$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{x(t)} &= \frac{t-2}{t+2} \\ &\underset{t\to0^+}{\longrightarrow} -1 \end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned} y(x)-x(t) &= -4e^{\frac{1}{t}} \\ &\underset{t\to0^+}{\longrightarrow} -\infty. \end{aligned}$$
La droite d'équation $y=-x$ est donc une direction asymptotique à γ.

- Du fait que
$$e^{\frac{1}{t}} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1,$$
on a aussi
$$\begin{aligned} x(t) &= (t+2)e^{\frac{1}{t}} \\ &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \\ y(t) &= (t-2)e^{\frac{1}{t}} \\ &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty. \end{aligned}$$
On a ensuite
$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{x(t)} &= \frac{t-2}{t+2} \\ &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned} y(x)-x(t) &= -4e^{\frac{1}{t}} \\ &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -4. \end{aligned}$$
La droite d'équation
$$y-x=-4$$
est asymptote à γ lorsque t tend vers $+\infty$.
- Ce sont exactement les mêmes calculs: la droite d'équation
$$y-x=-4$$
est asymptote à γ lorsque t tend vers $-\infty$.
- Lorsque t tend vers 0 par valeurs <0, $\frac{1}{t}$ tend vers $-\infty$ et alors $e^{\frac{1}{t}}$ tend vers 0. Ainsi,
$$\begin{aligned} x(t) &\underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} 0 \\ y(t) &\underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$
Le point $(0,0)$ est donc un point asymptote de γ. On calcule ensuite
$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{x'(t)} &= \frac{t^2-t+2}{t^2-t-2} \\ &\underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} -1. \end{aligned}$$
La pente des tangentes à γ en $M(t)$ tend vers -1 lorsque t tend vers 0^-: on en déduit que la droite de pente -1 est tangente à γ au point asymptote $(0,0)$.



12. énoncé x et y sont 6π-périodiques: étude sur $[-3\pi,3\pi]$.

Puisque x est paire et y impaire, étude sur $[0,3\pi]$ puis symétrie par rapport à Ox.

Ensuite,
$$x(3\pi-t)=-x(t),\ y(3\pi-t)=y(t)$$
donc les points $M(3\pi-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à Oy.

Or lorsque t parcourt $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, $3\pi-t$ parcourt $\left[\frac{3\pi}{2},3\pi\right]$: on fera une étude sur $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ puis une symétrie par rapport à Oy.

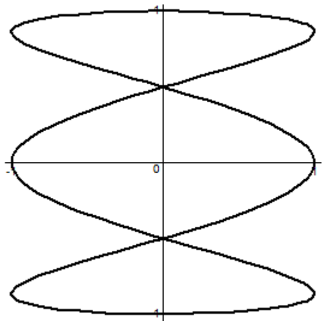
Finalement:

- étude sur $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ puis symétrie par rapport à Oy puis symétrie par rapport à Ox.
- $x'(t)=-\sin t$ s'annule en $0,\pi$ et
$$y'(t)=\frac{1}{3}\cos\frac{t}{3}$$
ne s'annule qu'en $\frac{3\pi}{2}$. Il n'y a donc pas de point où $(x'(t),y'(t))=(0,0)$ sur $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$: γ est régulière sur cet intervalle.

- Variations:

t	0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	1
x	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$	$\frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{6}$	$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1

- En $M(0)$ et $M(\pi)$ on a une tangente verticale et en $M(\frac{3\pi}{2})$ une tangente horizontale.



13. énoncé

1. Par 2π-périodicité de x et y, la courbe γ sera entièrement décrite lorsque le paramètre variera sur un intervalle de longueur 2π. Du fait que

$$\begin{aligned}\sin(\pi - t) &= \sin t \\ \cos(\pi - t) &= -\cos t,\end{aligned}$$

on a immédiatement

$$\begin{aligned}x(\pi - t) &= -x(t) \\ y(\pi - t) &= y(t).\end{aligned}$$

Les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe Oy. Lorsque t parcourt $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, i.e. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, on a

$$-\frac{\pi}{2} \leq -t \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \pi - t \leq \frac{3\pi}{2}$$

et en conséquence, $\pi - t$ parcourt $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Il en résulte qu'en étudiant γ sur

$$I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

la portion restante sur

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

s'obtiendra par symétrie par rapport à Oy.

2. On calcule et simplifie

$$y'(t) = \frac{\sin t \cos t(\sin t + 4)}{(2 + \sin t)^2}$$

et dans la mesure où on a évidemment

$$\forall t \in I, \, \sin t + 4 \geq 0,$$

$y'(t)$ est du signe de $\sin t \cos t$ et donc du signe de $\sin t$ sur I, d'où le tableau de variations:

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	-1	$+$	0	$-$	1
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

3. Le point $M(0)$ est le seul point stationnaire sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a bien sûr

$$\begin{aligned}x'(0) &= -\sin 0 \\ &= 0 \\ x''(0) &= -\cos 0 \\ &= -1 \\ x'''(0) &= \sin 0 \\ &= 0, \\ x''''(0) &= \cos 0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

On va calculer les valeurs des dérivées successives de y en 0 via un développement limité à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}\sin t &\underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \\ (\sin t)^2 &\underset{t\to 0}{=} \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 \\ &= t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)\end{aligned}$$

et comme ce développement commence par t^2, il suffira de développer $\frac{1}{2+\sin^t}$ à l'ordre 2 puisqu'à partir de l'ordre 3, on obtiendra des termes d'ordre ≥ 5.

$$\begin{aligned}
2+\sin t &= 2\left(1+\frac{1}{2}\sin t\right)\\
&\underset{t\to 0}{=} \\
&= 2\left(1+\frac{1}{2}t+o(t^2)\right)\\
\frac{1}{1+u} &\underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o(u)\\
\frac{1}{2+\sin^2 t} &= \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}\sin t\right)}\\
&= \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}t+o(t^2)\right)}\\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}t+\left(\frac{1}{2}t\right)^2+o(t^2)\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}t^2+o(t^2)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{\sin^2 t}{2+\sin t}\\
&\underset{t\to 0}{=} \left(t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^4)\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)\\
&= \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{24}t^4+o(t^4).
\end{aligned}$$

De la formule de Taylor et de l'unicité d'un développement limité on déduit:

$$\begin{aligned}
y'(0) &= 0\\
y''(0) &= \frac{1}{2}\times 2! = 1\\
y'''(0) &= -\frac{1}{4}\times 3! = -\frac{3}{2}\\
y''''(0) &= -\frac{1}{24}\times 4! = -1.
\end{aligned}$$

On a donc

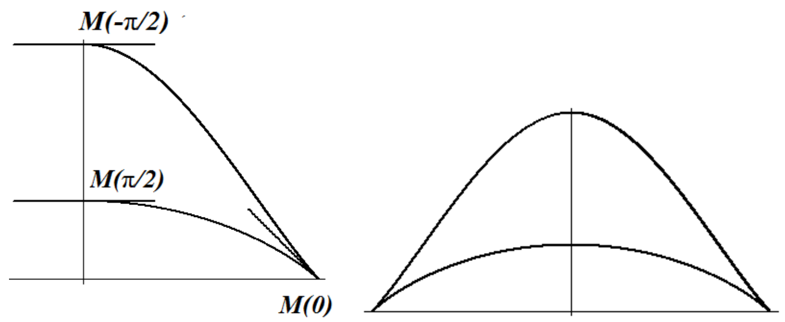
$$f''(0) = (-1, 1)$$

qui est le premier vecteur dérivé non nul en 0 et dirige donc la tangente à γ en $M(0)$. Ensuite,

$$f'''(0) = \left(0, -\frac{3}{2}\right),$$

manifestement non colinéaire à $f''(0)$. On a donc affaire à un point de rebroussement de 1ère espèce.

4. On a des tangentes horizontales aux points $M(-\frac{\pi}{2})$ et $M(\frac{\pi}{2})$, points de coordonnées respectives $(0,1)$, $(1,\frac{1}{3})$ puisqu'en ces points y' est nul.



sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

14. énoncé

1.

- Pas de symétrie apparente (pas de parité ou imparité des deux fonctions).

- On calcule et simplifie:

$$x'(t) = \frac{-1-t^2}{(t^2-1)^2}$$

qui est <0 pour tout t autre que ± 1 puis

$$y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

qui est >0 à l'extérieur de $[0,2]$, d'où les variations:

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
$y'(t)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$		$+$	
x	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$ ‖ $-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

- Puisque x' ne s'annule pas, il n'y a pas de point stationnaire.

- On a une tangente horizontale au point $M(0)$ puisque $y'(0) = 0$.

- Branches infinies:

– Lorsque t tend vers $\pm\infty$,

$$y(t) \to \pm\infty, \quad x(t) \to 0$$

donc γ présente l'asymptote verticale $y = 0$. De plus,

$$x(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+, \quad x(t) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^-,$$

ce qui démontre que γ est à droite de son asymptote lorsque t tend vers $+\infty$ et à gauche de son asymptote lorsque t tend vers $-\infty$.

– Lorsque t tend vers 1, y et x tendent vers l'infini et $\frac{y(t)}{x(t)} = t(t+1)$ tend vers 2. On calcule

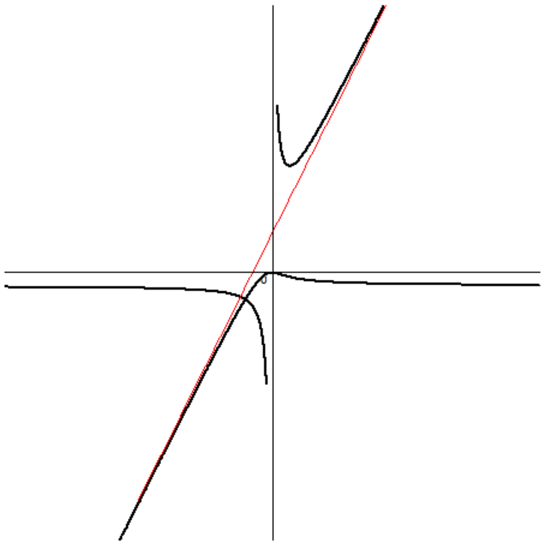
$$y(t) - 2x(t) = \frac{t(t+2)}{t+1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

Donc la droite $y - 2x = \frac{3}{2}$ est asymptote à γ. On calcule ensuite

$$y(t) - 2x(t) - \frac{3}{2} = \frac{(2t+3)(t-1)}{2(t+1)} \begin{cases} > 0 & \text{lorsque } t \to 1^+ \\ \\ < 0 & \text{lorsque } t \to 1^- \end{cases}$$

donc γ est au-dessus de son asymptote lorsque t tend vers 1 à droite et en-dessous lorsque t tend vers 1 à gauche.

– Lorsque t tend vers -1, x tend vers l'infini et y tend vers $-\frac{1}{2}$: la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote à γ.



2. Le phénomène de point double se produit lorsqu'il existe des paramètres t_1 et t_2 tels que $t_1 \neq t_2$ et $M(t_1) = M(t_2)$. On a

$$\begin{aligned}
M(t_1) = M(t_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{t_1}{t_1^2 - 1} = \dfrac{t_2}{t_2^2 - 1} \\ \\ \dfrac{t_1^2}{t_1 - 1} = \dfrac{t_2^2}{t_2 - 1} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{t_1(t_2^2 - 1) - t_2(t_1^2 - 1)}{(t_1^2 - 1)(t_2^2 - 1)} = 0 \\ \\ \dfrac{t_1^2(t_2 - 1) - t_2^2(t_1 - 1)}{(t_1 - 1)(t_2 - 1)} = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 t_2^2 - t_1^2 - t_2 t_1^2 + t_2^2 = 0 \\ \\ t_1^2 t_2 - t_1^2 - t_2^2 t_1 + t_2^2 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 t_2 (t_2 - t_1) - t_1 + t_2 = 0 \\ \\ t_1 t_2 (t_1 - t_2) + (t_2 - t_1)(t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (t_2 - t_1)(t_1 t_2 + 1) = 0 \\ \\ (t_1 - t_2)(t_1 t_2 - (t_1 + t_2)) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

et puisque $t_1 \neq t_2$,

$$\begin{aligned}
M(t_1) = M(t_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 t_2 + 1 = 0 \\ \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 t_2 = -1 \\ t_1 + t_2 = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc $t_2 = -1 - t_1$ et

$$\begin{aligned}
t_1 t_2 = -1 \quad &\Longleftrightarrow \quad t_1(-1 - t_1) = -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad -t_1^2 - t_1 + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } t_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned}
t_2 &= 1 - t_1 \\
&= \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

ou

$$t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Les points de paramètre

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

et

$$t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

offrent donc l'unique point double de γ (évidemment, t_1 et t_2 jouent un rôle parfaitement symétrique: on aurait pu poser $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ mais cela n'aurait évidemment pas fourni un autre point double, la seule chose qui compte, c'est la paire de paramètres $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et pas le nom qu'on leur donne). On calcule

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \frac{t_1}{t_1^2-1} \\ &= \frac{t_1}{-t_1} = -1 \end{aligned}$$

puisque t_1 vérifie

$$-t_1^2 - t_1 + 1 = 0$$

et en jouant à nouveau avec

$$-t_1^2 - t_1 + 1 = 0,$$

on a:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \frac{t_1^2}{t_1-1} \\ &= \frac{t_1^2}{-t_1^2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Le point double a donc pour coordonnées $(-1,-1)$.

Comme on l'a vu, γ est régulière; les tangentes à γ en t_1 et t_2 sont respectivement dirigées par $f'(t_1)$ et $f'(t_2)$. Il s'agit donc de démontrer que ces deux vecteurs sont orthogonaux. On calcule

$$\begin{aligned} \langle f'(t_1), f'(t_2)\rangle &= \frac{(-1-t_1^2)(-1-t_2^2)}{(t_1^2-1)^2(t_2^2-1)^2} + \frac{t_1(t_1-2)t_2(t_2-2)}{(t_1-1)^2(t_2-1)^2} \\ &= \frac{(-1-t_1^2)(-1-t_2^2) + t_1t_2(t_1-2)(t_2-2)(t_1+1)^2(t_2+1)^2}{(t_1^2-1)^2(t_2^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Mais puisque t_1 et t_2 sont racines de $-t^2-t+1=0$, on a

$$-1-t_1^2 = -2+t_1, \quad -1-t_2^2 = -2+t_2$$

puis (somme et produit des racines d'un trinôme):

$$t_1t_2 = -1, \quad t_1+t_2 = -1.$$

Le numérateur N de l'expression ci-dessus vaut alors

$$\begin{aligned} N &= (-2+t_1)(-2+t_2) - (t_1-2)(t_2-2)(t_1+1)^2(t_2+1)^2 \\ &= (t_1-2)(t_2-2)\big(1-(t_1+1)^2(t_2+1)^2\big). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} (t_1+1)(t_2+1) &= t_1t_2+t_1+t_2+1 \\ &= -1-1+1 \\ &= -1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} N &= (t_1-2)(t_2-2)\big(1-1^2\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

15. énoncé

1. Remarquons que la fonction $t \mapsto x(t)$ est impaire mais que la fonction $t \mapsto y(t)$ ne possède aucune propriété de parité ou d'imparité. Aucune réduction du domaine d'étude ne semble donc possible.

On calcule

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1-\frac{1}{t^2} \\ &= \frac{t^2-1}{t^2} \\ y'(t) &= 1-\frac{1}{t^3} \\ &= \frac{t^3-1}{t^3}. \end{aligned}$$

- Le signe de $x'(t)$ est clair: c'est celui de son numérateur; celui-ci étant un trinôme du seconde degré de racines -1 et 1, il est négatif sur $[-1,1]$ et positif en dehors.
- Pour ce qui est du signe de $y'(t)$, l'identité

  $$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

  est à connaître. Elle donne ici

  $$t^3-1 = (t-1)(t^2+t+1)$$

  et puisque t^2+t+1 est un trinôme du second degré à discriminant < 0, il est toujours > 0 donc t^3-1 est du signe de $t-1$ et en conséquence

  $$t^3-1>0 \iff t>1.$$

Remarquons qu'un autre moyen de parvenir à ce résultat consiste à utiliser la fonction $s \mapsto \sqrt[3]{s}$, application réciproque, sur $\mathbb{R}$, de l'application $t \mapsto t^3$, croissante sur $\mathbb{R}$ et c'est pourquoi

$$t^3 > 1 \iff t > \sqrt[3]{1},$$

c'est à dire

$$t^3 > 1 \iff t > 1.$$

On a alors

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t^3-1		$+$		$-$		$-$		$+$	
t^3		$-$		$-$		$+$		$+$	
$y'(t)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

D'où le tableau de variations:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	2	$+$	||	$-$	0	$+$	

2. On voit que le point de paramètre 1, qui est le point de coordonnées $(2, \frac{3}{2})$, est le seul point stationnaire de γ i.e. le seul point de paramètre t en lequel $f'(t) = (0, 0)$. On calcule alors

$$f''(t) = \left(\frac{2}{t^3}, \frac{3}{t^4}\right) \implies f''(1) = (2, 3).$$

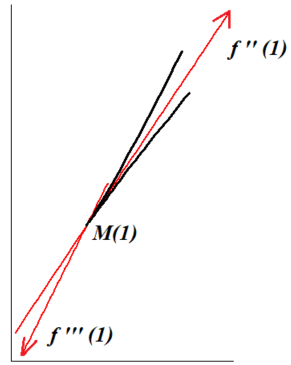
C'est donc le vecteur $f''(1)$ qui dirige la tangente en $M(1)$. On calcule ensuite

$$f'''(t) = \left(-\frac{6}{t^4}, -\frac{12}{t^5}\right) \implies f'''(1) = (-6, -12).$$

On a

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Les vecteurs $(f''(1), f'''(1))$ forment une famille libre et on en déduit que le point $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce avec localement l'allure suivante:



Mis à part le point $M(1)$, dont la tangente n'est ni horizontale ni verticale, la tangente en un point $M(t)$ est dirigée par le vecteur $f'(t) = (x'(t), y'(t))$. Celui-ci est vertical si et seulement si $x'(t) = 0$, ce qui se produit en $M(-1)$. Il est horizontal si et seulement si $y'(t) = 0$, ce qui ne se produit pas.

3. Branches infinies:

- Lorsque t tend vers $+\infty$

$$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t} = 1$$

puis

$$y(t) - x(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la droite d'équation $y - x = 0$ est asymptote à γ. De plus

$$y(t) - x(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{t},$$

ce qui démontre que $y(t) - x(t) < 0$ au voisinage de $+\infty$ et donc la courbe est située en-dessous de son asymptote lorsque t tend vers $+\infty$.

- De même, la droite $y - x$ est asymptote à γ lorsque t tend vers $-\infty$ mais la courbe est alors située au-dessus de son asymptote lorsque t tend vers $-\infty$.

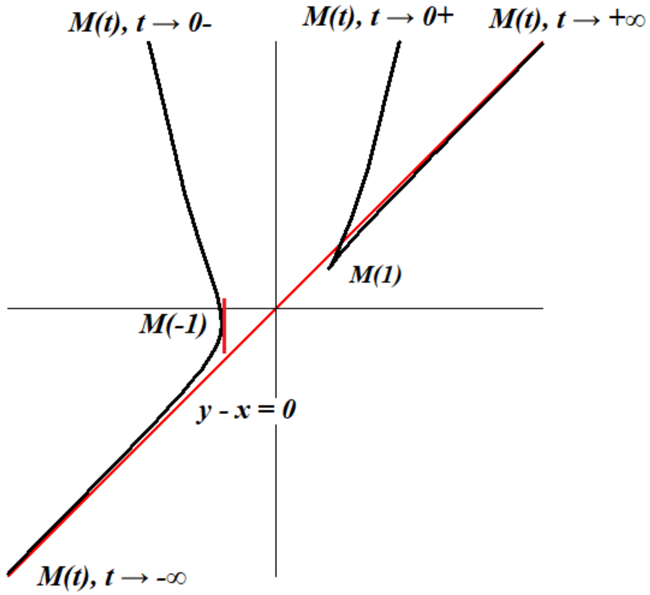
- Lorsque t tend vers 0^+

$$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{2t} \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui démontre que γ présente une branche parabolique dans la direction Oy.

- De même lorsque t tend vers 0^-.

4. D'où le tracé:



5. La famille $(f'(t), f''(t))$ est liée si et seulement si leur déterminant (calculé dans la base canonique!) est nul. On calcule et on simplifie:

$$\begin{aligned}\det(f'(t), f''(t)) &= \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{t^2} & \frac{2}{t^3} \\ & \\ 1-\frac{1}{t^3} & \frac{3}{t^4} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-2t^3+3t^2-1}{t^6}.\end{aligned}$$

Le polynôme $-2t^3+3t^2-1$ admet la racine "évidente" 1, *ce qui était prévisible*: on sait que $f'(1) = (0,0)$ et on a donc

$$\det(f'(1), f''(1)) = 0$$

ce qui garantit que $-2t^3+3t^2-1$ est nul en $t=1$. On effectue ensuite la division euclidienne de $-2t^3+3t^2-1$ par $t-1$:

$$\begin{array}{rrr|l} -2t^3 & +3t^2 & -1 & t-1 \\ \cline{4-4} 2t^3 & -2t^2 & & -2t^2+t+1 \\ \cline{1-2} & t^2 & & \\ & -t^2 & +t & \\ \cline{2-3} & & t-1 & \\ & & -t+1 & \\ \cline{3-3} & & 0 & \end{array}$$

Les racines de $-2t^2+t+1$ étant 1 et $-\frac{1}{2}$, on en déduit donc que la famille $(f'(t), f''(t))$ est liée pour $t=1$ et pour $t=-\frac{1}{2}$.

Un point d'inflexion est un point en lequel $p=1$ et $q=3$ (notations classiques) i.e. un point en lequel $f'(t) \neq (0,0)$, $f''(t)$ est colinéaire à $f'(t)$ et $f'''(t)$ est non colinéaire à $f'(t)$.

Comme on vient de le voir, la colinéarité de $f'(t)$ avec $f''(t)$ a lieu aux points $M(1)$ et $M\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Mais on a vu plus haut que le point $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce: ce n'est donc pas un point d'inflexion.

Il reste donc à voir si $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f'''\left(-\frac{1}{2}\right)$ sont linéairement indépendants. On a

$$\begin{aligned} f'(t) = \left(1-\frac{1}{t^2}, 1-\frac{1}{t^3}\right) \quad &\Longrightarrow \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = (-3, 9) \\ f'''(t) = \left(-\frac{6}{t^4}, -\frac{12}{t^5}\right) \quad &\Longrightarrow \quad f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = (-96, 384). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\det\left(f'\left(-\frac{1}{2}\right), f'''\left(-\frac{1}{2}\right)\right) &= \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -96 & 384 \end{vmatrix} \\ &= -1152+864 \\ &= 288 \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

les vecteurs $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f'''\left(-\frac{1}{2}\right)$ sont bien linéairement indépendants et le point $M\left(-\frac{1}{2}\right)$ est bien un point d'inflexion de γ, et c'est le seul.

16. énoncé

1.
- Les fonctions x et y sont 2π périodiques, si bien que γ est entièrement décrite sur un intervalle de longueur 2π. D'autre part, x est paire et y est impaire, donc γ est symétrique par rapport à l'axe Ox: on peut donc étudier γ sur $[0, \pi]$.

- On a aussi

$$\begin{aligned}
x(\pi - t) &= \cos^3(\pi - t) \\
&= (-\cos t)^3 = -\cos^3 t \\
&= -x(t) \\
y(\pi - t) &= \sin^3(\pi - t) \\
&= \sin^3(t) \\
&= y(t).
\end{aligned}$$

La courbe γ est donc symétrique par rapport à l'axe Oy et on peut ramener l'étude de γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, pour le moment, en effectuant le tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et les symétriques de ces tracés par rapport à Ox et à Oy, on obtient toute la courbe γ.

- On a enfin

$$\begin{aligned}
x(\frac{\pi}{2} - t) &= \cos^3(\frac{\pi}{2} - t) \\
&= \sin^3 t \\
&= y(t) \\
y(\frac{\pi}{2} - t) &= \sin^3(\frac{\pi}{2} - t) \\
&= \cos^3 t \\
&= x(t).
\end{aligned}$$

La courbe γ est donc symétrique par rapport à la droite $y = x$ et on peut ramener l'étude de γ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Ainsi, en effectuant le tracé sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et les symétriques de ces tracés par rapport à Ox, à Oy et à la droite $y = x$, on obtient toute la courbe γ.

- Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -3\sin t \cos^2 t \\
&\leq 0 \\
y'(t) &= 3\cos t \sin^2 t \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

et donc x est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et y croissante.

- Il est clair que pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a

$$x'(t) = 0 \iff t = 0, \quad y'(t) = 0 \iff t = 0,$$

si bien que le point $M(0)$ est le seul point stationnaire de γ. Pour en déterminer sa nature, on va passer par la technique des développements limités:

$$\begin{aligned}
\cos t &\underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \\
\Longrightarrow \quad (\cos t)^3 &\underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{3}{2}t^2 + o(t^3) \\
\sin t &\underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\
\Longrightarrow \quad (\sin t)^3 &\underset{t\to 0}{=} t^3 + o(t^3).
\end{aligned}$$

DL	$x(t)$	$\underset{t\to 0}{=}$	1		$-\frac{3}{2}t^2$		$+o(t^3)$
Taylor	$x(t)$	$\underset{t\to 0}{=}$	$x(0)$	$+x'(0)$	$+\frac{1}{2}x''(0)t^2$	$+\frac{1}{6}x'''(0)t^3$	$+o(t^3)$
Identif.				$x'(0) = 0$	$x''(0) = -3$	$x'''(0) = 0$	

DL	$y(t)$	$\underset{t\to 0}{=}$				t^3	$+o(t^3)$
Taylor	$y(t)$	$\underset{t\to 0}{=}$	$y(0)$	$+y'(0)$	$+\frac{1}{2}y''(0)t^2$	$+\frac{1}{6}y'''(0)t^3$	$+o(t^3)$
Identif.				$y'(0) = 0$	$y''(0) = 0$	$y'''(0) = 6$	

On en déduit les vecteurs dérivés:

$$f'(0) = (0,0), \quad f''(0) = (-3,0), \quad f'''(0) = (0,6)$$

et on en conclut $p = 2$, $q = 3$: la tangente est dirigée par le vecteur $f''(0) = (-3,0)$ et le point $M(0)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

- *Remarque importante:* en un point régulier $M(t)$, la tangente à γ est dirigée par

$$f'(t) = (-3\sin t\cos^2 t, 3\cos t\sin^2 t) = 3\sin t\cos t \times (-\cos t, \sin t).$$

Le vecteur $f'(t)$ est donc colinéaire au vecteur

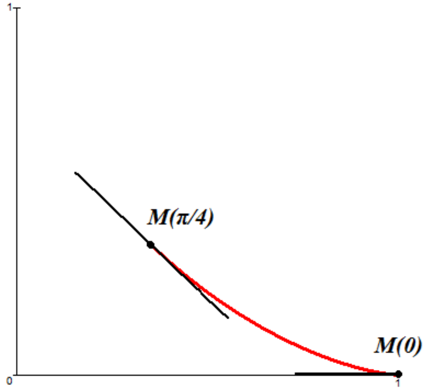
$$\vec{T}(t) = (-\cos t, \sin t)$$

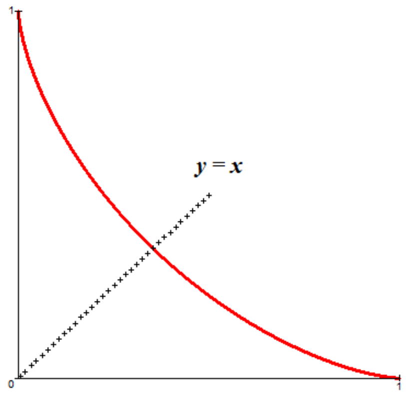
et dirige donc lui aussi la tangente et a l'avantage d'être nettement plus simple.

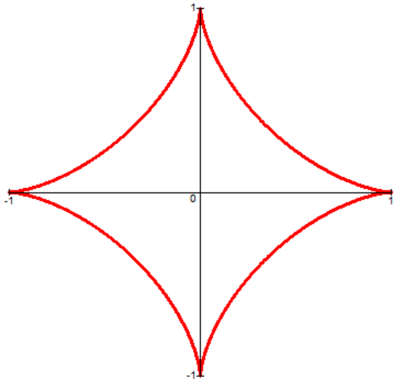
- Ainsi, par exemple, la tangente au point $M(\frac{\pi}{4})$ est dirigée par

$$(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

qui est d'ailleurs colinéaire au vecteur $(-1,1)$, encore plus simple.







2. Comme vu ci-dessus, la tangente D_t à γ en $M(t)$ est dirigée par $(-\cos t, \sin t)$. Une équation cartésienne de D_t est donc

$$\begin{vmatrix} x-\cos^3 t & -\cos t \\ y-\sin^3 t & \sin t \end{vmatrix} = 0,$$

c'est à dire

$$x\sin t + y\cos t - \sin t\cos^3 t - \cos t\sin^3 t = 0.$$

Le point A s'obtient en faisant $y=0$ et B en faisant $x=0$. On obtient

$$A\left(\cos^3 t + \cos t\sin^2 t, 0\right),\ B\left(0, \sin t\cos^2 t + \sin^3 t\right)$$

et on vérifie que

$$AB^2 = \left(\cos^3 t + \cos t\sin^2 t\right)^2 + \left(\sin t\cos^2 t + \sin^3 t\right)^2 = 1,$$

d'où le résultat.

17. énoncé

- Par 2π-périodicité de x et y, étude sur $[-\pi, \pi]$.

  Puisque x et y sont impaires , on fait une étude sur $[0, \pi]$ et on complète par une symétrie de centre 0.

  De plus, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$: les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à Ox.

  Or lorsque t parcourt $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\pi - t$ parcourt $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

  On fera donc l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on complète par une symétrie par rapport à Ox, ce qui donnera donc la courbe sur $[0, \pi]$ puis par symétrie par rapport à O, ce qui donnera γ en entier.

- On calcule et simplifie

  $$x'(t) = \frac{\cos t(1+\cos^2 t + 2\sin^2 t)}{(1+\cos^2 t)^2}$$

  qui est ≥ 0 et, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, nul seulement en $\frac{\pi}{2}$ puis

  $$y'(t) = \frac{3\cos^2 t - 1}{(1+\cos^2 t)^2}$$

  et en posant $a = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a (puisque $\cos$ décroît sur $[0, \frac{\pi}{2}]$):

  $$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ y'(t) \geq 0 \iff t \leq a,$$

  d'où les variations:

t	0		a		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	$\frac{1}{2}$		$+$		0
x	0	$\nearrow$	$x(a)$	$\nearrow$	1
$y'(t)$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	-1
y	0	$\nearrow$	$y(a)$	$\searrow$	0

- On voit enfin que γ ne présente pas de point stationnaire.

- On a une tangente verticale au point $M(\frac{\pi}{2})$, point de coordonnées $(1, 0)$ puisque $x'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

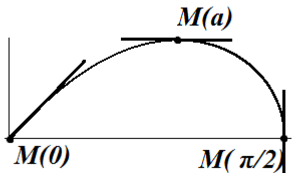
- On a une tangente verticale au point $M(a)$ puisque $y'(a) = 0$. Comme $\cos a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, on a

  $$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

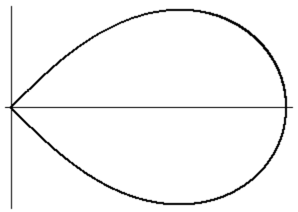
le point $M(a)$ est le point de coordonnées

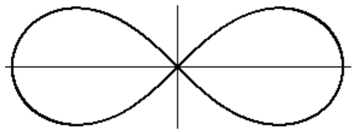
$$x(a) = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\frac{1}{3}} \approx 0,6,\ y(a) = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} \approx 0,35.$$

- Tangente paralèlle à $y = x$ au point $M(0)$ (qui est le point de coordonnées $(0,0)$) puisque $f'(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



sur $[0, \frac{\pi}{2}]$


sur $[0, \pi]$


sur $[-\pi, \pi]$

18. énoncé

1. On calcule

$$x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \qquad y'(t) = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

et on a

$$x'(t) \geq 0 \iff 1-2t^3 \geq 0 \iff \frac{1}{2} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

(par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ sur $\mathbb{R}$) alors que pour y', on a

$$2 - t^3 \geq 0 \iff 2 \geq \sqrt[3]{t}$$

avec changement de signe supplémentaire en 0:

t	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$2-\sqrt[3]{t}$		$+$		$+$	0	$-$	
t		$+$	0	$-$		$-$	
$t(2-\sqrt[3]{t})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les limites aux différentes s'obtiennent facilement, d'où le tableau:

t	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\|$	$+$		$+$	0	$-$	$-$		
x	0	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	b	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	d	$\nearrow$	c	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

avec

$$a = x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \approx 0,53 \quad b = x\left(\sqrt[3]{2}\right) \approx 0,42$$

$$d = y\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \approx 0,42 \quad c = x\left(\sqrt[3]{2}\right) \approx 0,53.$$

- On voit donc que γ ne possède pas de point stationnaire: $f'(t) \neq (0,0)$ pour tout t; on a une tangente horizontale au point $M(0) = (0,0)$ (puisque $y'(0) = 0$) et des tangentes verticales aux points $M\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ et $M(\sqrt[3]{2})$.

- On est en présence d'une branche infinie lorsque t tend vers -1. On a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t \underset{t \to -1}{\longrightarrow} -1$$

puis, du fait que $1 + t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$:

$$\begin{aligned} y(t) + x(t) &= \frac{t^2+t}{1+t^3} \\ &= \frac{t(1+t)}{(1+t)(1-t+t^2)} \\ &= \frac{t}{1-t+t^2} \\ &\underset{t \to -1}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, la droite d'équation

$$y + x = -\frac{1}{3}$$

est asymptote à γ en -1. Enfin,

$$\begin{array}{rcl} y(t)+x(t)+\frac{1}{3} & = & \frac{t}{1-t+t^2}+\frac{1}{3} \\ & = & \frac{1+2t+t^2}{3(1-t+t^2)} \\ & = & \frac{(1+t)^2}{3(1-t+t^2)} \\ & > & 0 \end{array}$$

(car $1-t+t^2>0$ pour tout t: trinôme à discriminant <0) et on en conclut que la courbe est constamment au-dessus de son asymptote.

- *Autre méthode pour étudier la branche infinie.* Dans $y(t)+x(t)$, on pose

$$t=-1+h,$$

si bien que lorsque $h\to 0$ lorsque $t\to -1$.

Pourquoi ce changement? L'idée est la suivante: les expressions en jeu étant polynomiales en t, elles deviendront polynomales en h et il est très facile de déterminer un équivalent d'un polynôme au voisinage de 0: c'est le terme de plus bas degré. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} y(x)+x(t) & = & \frac{t^2+t}{1+t^3} \\ & = & \frac{(-1++h)^2+(-1+h)}{1+(-1+h)^3} \\ & = & \frac{-h+h^2}{3h-3h^2+h^3} \text{ (développement et simplification)} \\ & \underset{h\to 0}{\sim} & \frac{-h}{3h} \\ & = & -\frac{1}{3}. \end{array}$$

Ainsi,

$$y(t)+x(t)\underset{t\to -1}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$

et on retrouve l'asymptote d'équation

$$y+x=-\frac{1}{3}.$$

Pour l'étude de la position de γ par rapport à cette asymptote, même changement $t=-1+h$, même principe:

$$\begin{array}{rcl} y(t)+x(t)+\frac{1}{3} & = & \frac{-h+h^2}{3h-3h^2+h^3}+\frac{1}{3} \\ & = & \frac{h^3}{3(3h-3h^2+h^3)} \text{ (réduction, développement et simplification)} \\ & \underset{h\to 0}{\sim} & \frac{h^3}{3\times 3h} \\ & = & \frac{h^2}{9} \\ & > & 0, \end{array}$$

et on en conclut que γ est (localement) au-dessus de la courbe. En fait, on peut observer que

$$\begin{array}{rcl} \frac{h^3}{3(3h-3h^2+h^3)} & = & \frac{h^2}{3(3-3h+h^2)} \\ & > & 0 \end{array}$$

(car le dénominateur est un trinôme à discriminant >0), si bien que la courbe est en tout point au-dessus de son asymptote.

- On a clairement

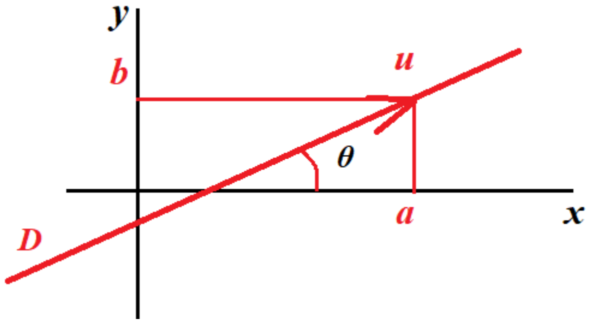
$$\begin{array}{c} x(t)\underset{t\to\pm\infty}{\sim}\frac{t}{t^3}=\frac{1}{t^2}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0 \\ y(t)\underset{t\to\pm\infty}{\sim}\frac{t^2}{t^3}=\frac{1}{t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0 \end{array}$$

si bien que le point $M(t)$ tend vers le point $(0,0)$: on dit aussi que le point $(0,0)$ est un "point limite" de γ. Remarquons que

$$\begin{array}{rcl} x(t) & \underset{t\to\pm\infty}{\sim} & \frac{1}{t^2}>0 \text{ au voisinage de } \pm\infty \\ y(t) & \underset{t\to\pm\infty}{\sim} & \frac{1}{t}\begin{cases} >0 \text{ au voisinage de } +\infty \\ <0 \text{ au voisinage de } -\infty \end{cases} \end{array}$$

si bien que $M(t)$ tend vers l'origine en étant dans le quart de plan supérieur droit, resp. inférieur droit, lorsque tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$. Mais comment? Horizontalement, verticalement, obliquement?

Rappel. La pente d'une droite D dirigée par le vecteur $\vec{u}=(a,b)$ avec $a\neq 0$ est le réel $\frac{b}{a}$; cette pente est la tangente de l'angle formé par la droite D et l'axe (Ox):



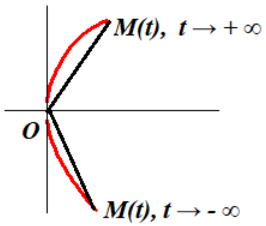
– *Première approche.* On étudie la pente de la droite $(OM(t))$, droite dirigée par

$$\overrightarrow{OM(t)} = (x(t), y(t))$$

dont la pente est

$$\begin{aligned}\frac{y(t)}{x(t)} &= \frac{t^2}{t}\\ &= t.\end{aligned}$$

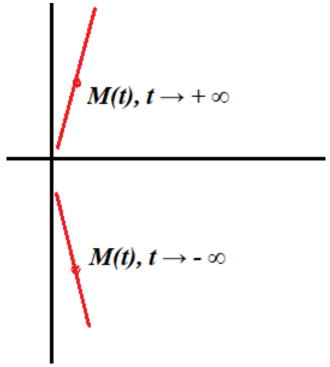
Cette pente tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque t tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), ce qui signifie que la droite $(OM(t))$ tend vers la verticale, d'où l'allure suivante:



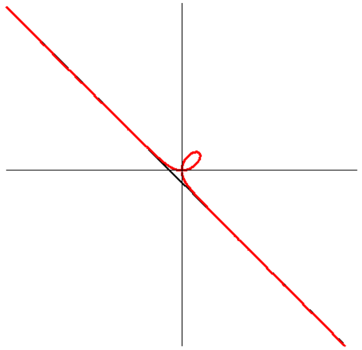
– *Deuxième approche.* On étudie la pente de la tangente à γ en $M(t)$. Cette tangente est dirigée par $(x'(t), y'(t))$ dont la pente est

$$\begin{aligned}\frac{y'(t)}{x'(t)} &= \frac{2t-t^4}{1-2t^3}\\ &\underset{t\to\pm\infty}{\sim} \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Cette pente tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque t tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), ce qui signifie que la tangente à la courbe γ en $M(t)$ tend vers la verticale, d'où l'allure suivante:



En tenant compte de tous ces éléments:



2. On calcule

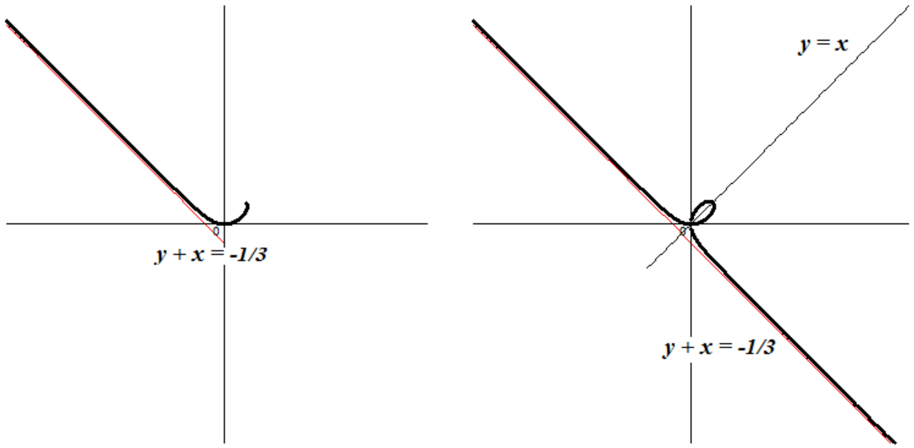
$$\begin{aligned}x\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^3}}\\ &= \frac{t^3\times\frac{1}{t}}{t^3\left(1+\frac{1}{t^3}\right)}\\ &= \frac{t^2}{t^3+1}\\ &= y(t)\\ y\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^3}}\\ &= \frac{t^3\times\frac{1}{t^2}}{t^3\left(1+\frac{1}{t^3}\right)}\\ &= \frac{t}{t^3+1}\\ &= x(t).\end{aligned}$$

Ainsi, les points $M\left(\frac{1}{t}\right)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Lorsque t parcourt $]-1,1]$, le réel $\frac{1}{t}$ parcourt

$$]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[,$$

donc en traçant γ sur $]-1,1]$ et les symétriques de ces points par rapport à la droite $y=x$, on obtient tous les points de γ.



19. énoncé Par 2π-périodicité de x et y, on étudie γ sur un intervalle de longueur 2π.

Puisque x est paire et y est impaire, on fera une étude sur $[0,\pi]$ et on complétera par une symétrie par rapport à Ox.

Puisque

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$
$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

on a

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\sin t+2\sin 2t \\ &= 4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2} \\ y'(t) &= 2\cos t-2\cos 2t \\ &= 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

- Pour $t\in[0,\pi]$, on a $\frac{t}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et alors $\sin\frac{t}{2}\geq 0$.
- $\frac{3t}{2}$ parcourt $[0,\frac{3\pi}{2}]$ et $\cos\frac{3t}{2}\geq 0$ lorsque

$$0\leq\frac{3t}{2}\leq\frac{\pi}{2}$$

i.e. lorsque

$$0\leq t\leq\frac{\pi}{3}$$

et $\cos\frac{3t}{2}\leq 0$ lorsque

$$\frac{\pi}{2}\leq\frac{3t}{2}\leq\frac{3\pi}{2}$$

i.e. lorsque

$$\frac{\pi}{3}\leq t\leq\pi.$$

- On a $\sin\frac{3t}{2}\geq 0$ lorsque

$$0\leq\frac{3t}{2}\leq\pi$$

i.e lorsque

$$0\leq t\leq\frac{2\pi}{3}$$

et $\sin\frac{3t}{2}\leq 0$ lorsque

$$\pi\leq\frac{3t}{2}\leq\frac{3\pi}{2}$$

i.e lorsque

$$\frac{2\pi}{3}\leq t\leq\pi.$$

D'où les variations:

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0
$y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4
x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

- Le point $M(0)$ est le seul point singulier. On calcule

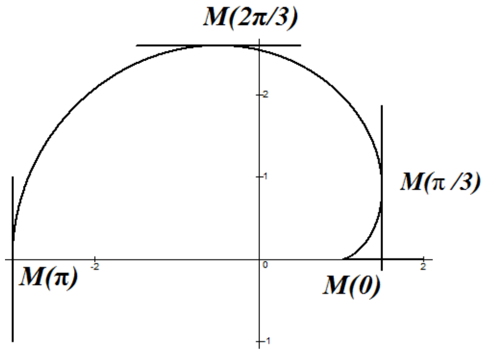
$$x''(0)=2,\ y''(0)=0$$

donc la tangente en $M(0)$ est dirigée par $f''(0)=(2,0)$ puis

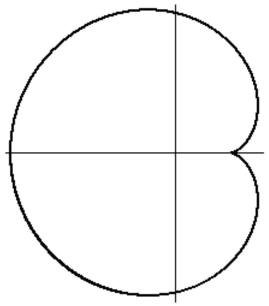
$$x'''(0)=0,\ y'''(0)=6$$

et le vecteur $f'''(0)=(0,6)$ est non lié au vecteur $f''(0)$. On a donc affaire à un point de rebroussement de 1ère espèce.

- On a une tangente verticale au point $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, point de paramètre $t=\frac{\pi}{3}$ et au point $(3,0)$, point de paramètre $t=\pi$. On a une tangente horizontale au point $\left(-\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, point de paramètre $t=\frac{2\pi}{3}$.



sur $[0,\pi]$



sur $[-\pi,\pi]$

20. énoncé

1. x est impaire et y est paire: étude sur $[0,+\infty[$ et symétrie par rapport à Oy.

$$x'(t) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t},\ y'(t) = -\frac{\operatorname{sh}\ t}{\operatorname{ch}^2 t},$$

d'où les variations sur $[0,+\infty[$:

t	0 $\qquad$ $+\infty$
$x'(t)$	0 $\quad +$
$y'(t)$	0 $\quad -$
x	0 $\nearrow$ $+\infty$
y	1 $\searrow$ 0

Le point $M(0)$ est le seul point stationnaire de γ.

Pour calculer $f''(0)$ et $f'''(0)$, on va effecuter des développements limités de x et y à l'ordre 3 et donc des développements limités de x' et y' à l'ordre 2:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} &\underset{t\to 0}{=} \frac{\left(t+o(t^2)\right)^2}{\left(1+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right)^2} \\
&= \frac{t^2+o(t^2)}{1+t^2+o(t^2)} \\
&\underset{t\to 0}{=} \left(t^2+o(t^2)\right)\times\left(1-t^2+o(t^2)\right) \\
&= t^2+o(t^2).
\end{aligned}$$

On a donc (identification coefficients d'un DL-développement de Taylor-Young):

$$\begin{aligned}
(x')'(0) &= 0 \\
(x')''(0) &= 1\times 2! \\
&= 2.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} &\underset{t\to 0}{=} -\frac{t+o(t^2)}{\left(1+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right)^2} \\
&= -\frac{t+o(t^2)}{1+t^2+o(t^2)} \\
&\underset{t\to 0}{=} -\left(t+o(t^2)\right)\times\left(1-t^2+o(t^2)\right) \\
&= -t+o(t^2).
\end{aligned}$$

On a donc (identification coefficients d'un DL-développement de Taylor-Young):

$$\begin{aligned}
(y')'(0) &= -1 \\
(y')''(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f''(0) = (0,-1),$$

vecteur non nul qui dirige donc la tangente à γ en $M(0)$ et

$$f'''(0) = (-2,0),$$

non colinéaire à $f''(0)$. On a donc affaire à un point de rebroussement de 1-ère espèce en $M(0)$.

Enfin,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} t &= \frac{e^t-e^{-t}}{2} \\
&\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2} \\
\operatorname{ch} t &= \frac{e^t+e^{-t}}{2} \\
&\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2} \\
\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} &\underset{t\to+\infty}{\sim} 1 \\
\Rightarrow x(t) &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

alors que

$$y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

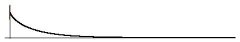
La droite d'équation

$$y = 0$$

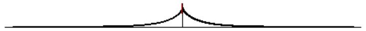
est asymptote à γ et puisque

$$y(t) \geq 0$$

pour tout réel t, γ est toujours au-dessus de son asymptote.



sur $[0,+\infty[$



sur $[-\infty,+\infty[$

2. En un point régulier $M(t)$ de γ, i.e. pour $t\neq 0$, la tangente est dirigée par

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}, -\frac{\operatorname{sh}\ t}{\operatorname{ch}^2 t}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}\times(\operatorname{sh} t,-1), \end{aligned}$$

si bien que le vecteur $(\operatorname{sh} t,-1)$ est lui aussi un vecteur directeur de cette tangente, qui a alors pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x-t+\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} & \operatorname{sh} t \\ y-\frac{1}{\operatorname{ch} t} & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

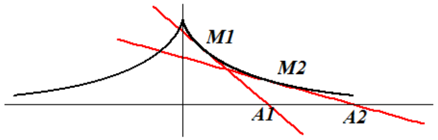
c'est à dire

$$-x-y\operatorname{sh} t+t=0.$$

Le point A s'obtient en prenant $y=0$, ce qui donne $x=t$, donc $A(t,0)$ et alors

$$\begin{aligned} MA^2 &= \left(t-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}-t\right)^2+\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}+\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2 t+1}{\operatorname{ch}^2 t}=\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc la longueur MA est constante égale à 1.

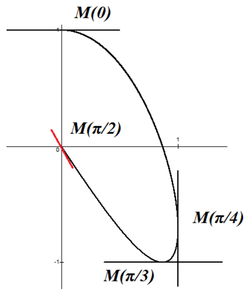


21. énoncé

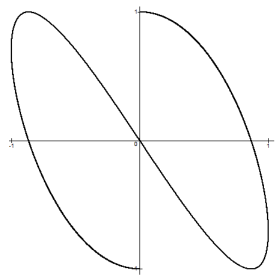
- Par 2π-périodicité commune de x et y, on étudiera γ sur un intervalle de longueur $[2\pi]$ et comme x est impaire et alors que y est paire, on fera étude sur $[0,\pi]$, que l'on complétera pas une symétrie par rapport à Oy.
- On a ensuite
$$x(\pi-t)=-x(t),\ y(\pi-t)=-y(t)$$
si bien que les points $M(\pi-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à 0. Or lorsque t parcourt $[0,\frac{\pi}{2}]$, $\pi-t$ parcourt $[\frac{\pi}{2},\pi]$.
- En définitive, on fera une étude sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ que l'on complétera par une symétrie par rapport à O et par rapport à Oy.
- On a facilement:

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1	$-$	-2
$y'(t)$	0	-1	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-$	0	$+$	3
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
y	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

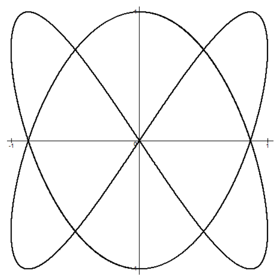
- Il n'y a pas de point stationnaire.
- Tangente horizontale au point $M(0)$ de coordonnées $(0,1)$ et au point $M(\frac{\pi}{3})$ de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$. Tangente verticale au point $M(\frac{\pi}{4})$ de coordonnées $\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Au point $M(\frac{\pi}{2})$, point de coordonnées $(0,0)$, la tangente est dirigée par $(-2,3)$.



sur $[0,\frac{\pi}{2}]$



sur $[0,\pi]$



sur $[-\pi,\pi]$

22. énoncé

1. Par imparité de x et parité de y, on étudiera γ sur $[0,+\infty[$ et on complétera par une symétrie par rapport à Oy. On calcule

$$x'(t)=\frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}\qquad y'(t)=\frac{2t}{(1+t^2)^2},$$

d'où les variations

t	0	$+\infty$
$x'(t)$	0 $+$	
$y'(t)$	0 $+$	
x	0 $\nearrow$	$+\infty$
y	0 $\nearrow$	1

Le point $M(0)$ est le seul point stationnaire. On a

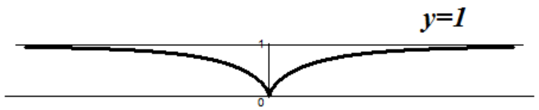
$$\begin{aligned} x(t) &\underset{t\to 0}{=} t^3(1-t^2+o(t^2)) \\ &= t^3-t^5+o(t^5) \\ y(t) &\underset{t\to 0}{=} t^2(1-t^2+o(t^2)) \\ &= t^2-t^4+o(t^4) \end{aligned}$$

et de la formule de Taylor-Young on déduit:

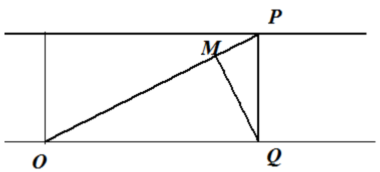
$$f'(0)=(0,0) \quad f''(0)=(0,2) \quad f'''(0)=(6,0),$$

ce qui démontre que $M(0)$ est un point de rebroussement de 1-ère espèce, la tangente étant dirigée par $f''(0)$ en ce point, donc verticale.

Enfin, il est clair que la droite d'équation $y=1$ est asymptote à γ, lorsque t tend $+\infty$ et vers $-\infty$.



2. (a) Figure:



(b) Notons $(t,1)$ les coordonnées de P; alors celles de Q sont $(t,0)$. Soit (x,y) les coordonnées de M; alors $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{MQ}$, donc

$$\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{MQ}\rangle=0 \iff t(t-x)-y=0,$$

c'est à dire

$$t^2-tx-y=0.$$

D'autre part, $M\in(PQ)$, donc

$$\begin{vmatrix} x & t \\ y & 1 \end{vmatrix}=0 \iff x-ty=0.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} t^2-tx-y=0 \\ x-ty=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=ty \\ t^2-t^y-y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{t^3}{1+t^2} \\ y=\frac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

Donc le point M décrit la courbe γ.