Feuille d'exercices n°11-12 premium

---

1. corrigé Déterminer un paramétrage normal (i.e. en tout point, le vecteur dérivé est unitaire) du cercle de centre O et de rayon R.

2. corrigé On considère la parabole γ d'équation $y^2 = 2px$, avec $p > 0$; soit M un point de la parabole.

1. Déterminer une paramétrisation $t \mapsto f(t)$ de γ et déterminer la courbure $c(t)$ de γ en $M(t)$.

2. Soit $N(t)$ le point d'intersection de la normale à γ en $M(t)$ avec la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$ (appelée directrice). Démontrer que $M(t)N(t) = -\frac{1}{2c(t)}$.

3. corrigé Soit γ une courbe régulière. On suppose que sa courbure est nulle en tout point. Démontrer que γ est une droite (ou plutôt une portion de droite). *Indication:* on considérera une paramétrisation par une abscisse curviligne de γ et on se ramènera à la définition de la courbure.

4. corrigé On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad (1+x^2)y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 1.$$

1. Justifier que pour tout réel t, il existe une solution y_t de (E) et une seule définie sur $\mathbb{R}$ telle que $y_t(0) = 0$ et $y_t'(0) = t$.

2. Déterminer l'ensemble décrit par les centres de courbure au point O des courbes intégrales (=graphes des solutions) du problème ci-dessus lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

5. corrigé Soit $p : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ de classe C^1, γ l'enveloppe de la famille de droites (D_θ) où

$$D_\theta : \ x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta),$$

$a \in \mathbb{R}^*$ fixé et les points $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$.
Déterminer p de façon à ce qu'en tout point $M(\theta)$ de γ, la différence des carrés des distances

$$d(A, T_\theta)^2 - d(B, T_\theta)^2$$

soit constante, où T_θ est la tangente à γ en $M(\theta)$.

6. corrigé On considère la parabole γ d'équation $y^2 = 2px$ avec $p \neq 0$ et F le point de coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$. Soit un point M de cette parabole. Démontrer que la projection orthogonale de F sur la tangente en M est située sur la tangente au sommet.

7. corrigé

1. Réduire et déterminer la nature de la conique γ d'équation

$$y^2 = 3x^2 + 2x + 1.$$

2. Soit A, B, C trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3. Démontrer que A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que les points d'affixe z, z^2 et z^5 soient alignés.

8. corrigé Soit un point d'une hyperbole Γ. La tangente en M recoupe les asymptotes en P et Q. Démontrer que M est le milieu du segment $[P, Q]$.

1. énoncé Le paramétrage "naturel"

$$f : t \mapsto \begin{cases} R\cos t \\ R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

ne convient pas puisque

$$f'(t) = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R}$$

alors que l'on souhaite avoir par définition 1. En revanche, le paramétrage

$$g : s \mapsto \begin{cases} R\cos \frac{s}{R} \\ R\sin \frac{s}{R} \end{cases} \qquad s \in [0, 2\pi R]$$

convient puisque

$$g'(s) = \left(-\frac{1}{R} \times R\sin\frac{s}{R}, \frac{1}{R} \times R\cos\frac{s}{R}\right) = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right)$$

et donc

$$\|g'(s)\| = 1.$$

Et c'est bien un paramétrage du cercle puisque lorsque s parcourt $[0, 2\pi R]$, $\frac{s}{R}$ parcourt $[0, 2\pi]$.

2. énoncé

1. Sur γ, on a $x = \frac{y^2}{2p}$ si bien que

$$f : t \mapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$$

est une paramétrisation de γ. On calcule:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{t}{p}, 1\right) \\ \|f'(t)\| &= \sqrt{\frac{t^2}{p^2} + 1} = \frac{\sqrt{t^2+p^2}}{p} \\ \vec{T}(t) &= \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+p^2}}, \frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}}\right). \end{aligned}$$

En notant $Y(t)$ l'ordonnée de $\vec{T}(t)$, on a

$$Y'(t) = \frac{-pt}{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et on calcule, par dérivation d'un produit, la dérivée de l'abscisse $X(t)$ de $\vec{T}(t)$ et on obtient:

$$X'(t) = \frac{p^2}{\sqrt{t^2+p^2}} \implies \vec{T}'(t) = \left(\frac{p^2}{\sqrt{t^2+p^2}}, \frac{-pt}{\sqrt{t^2+p^2}}\right).$$

Puisque

$$\vec{N}(t) = \left(\frac{-p}{\sqrt{t^2+p^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+p^2}}\right)$$

et la formule de Frenet

$$\vec{T}'(t) = c(t)\|f'(t)\|\vec{N}(t)$$

donne, au niveau des abscisses:

$$\frac{p^2}{\sqrt{t^2+p^2}} = c(t)\|f'(t)\|\frac{-p}{\sqrt{t^2+p^2}} \implies c(t) = \frac{-p^2}{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$; recherchons l'ordonnée y de $N\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ de manière à ce que $\overrightarrow{M(t)N}$ soit normal à γ en $M(t)$ i.e. tel que $\overrightarrow{M(t)N}$ doit orthogonal à $f'(t)$. On obtient facilement:

$$\langle\overrightarrow{M(t)N}, f'(t)\rangle = 0 \iff y = \frac{3t}{2} + \frac{t^3}{2p^2}.$$

On calcule ensuite sans problème

$$\|\overrightarrow{MN}\| = \frac{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2},$$

d'où le résultat.

3. énoncé Soit $s \mapsto g(s)$ une paramétrisation normale de γ (ou encore paramétrée par une abscisse curviligne). On a alors par définition

$$g'(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$$

et

$$s \mapsto \alpha(s)$$

est une fonction angulaire. Par définition, $c(s) = \alpha'(s)$ ($c =$ courbure) donc ici

$$\alpha'(s) = 0$$

et on a donc

$$\alpha(s) = \alpha_0 = \text{ constante.}$$

Ainsi,

$$g'(s) = ((\cos\alpha_0, \sin\alpha_0) = (K, L)$$

($K, L =$ constantes) d'où

$$g(s) = (Ks + A, Ls + B)$$

($A, B =$ constantes). Dans la mesure où

$$s \mapsto (Ks + A, Ls + B), \;\; s \in \mathbb{R},$$

est une paramétrisation de droite, on en déduit que γ est incluse dans cette droite (au départ, s n'est pas censé varier dans tout $\mathbb{R}$).

4. énoncé

1. Les fonctions

$$a : x \mapsto 1 + x^2,\ b : x \mapsto -x,\ c : x \mapsto -2,\ d : x \mapsto 1$$

sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Dès lors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = t \end{cases}$$

possède une solution et une seule définie sur tout $\mathbb{R}$ d'après la théorie des équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

2. Fixons pour le moment $t \in \mathbb{R}$; puisque $y_t(0) = 0$, le graphe γ_t de y_t passe bien par O. Ce graphe admet la paramétrisation

$$f_t : x \mapsto (x, y_t(x)).$$

Déterminons alors le centre de courbure de cette courbe au point O, c'est à dire au point de paramètre $x = 0$. On calcule

$$f_t'(x) = (1, y_t'(x)) \implies \|f_t'(x)\| = \sqrt{1 + y_t'^2(x)}$$

et donc en notant $(\vec{T}_t(x), \vec{N}_t(x))$ les vecteurs du repère de Frenet au point de paramètre x de γ_t, on a

$$\begin{aligned} \vec{T}_t(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+y_t'^2(x)}}, \frac{y_t'(x)}{\sqrt{1+y_t'^2(x)}}\right) \\ \vec{N}_t(x) &= \left(\frac{-y_t'(x)}{\sqrt{1+y_t'^2(x)}}, \frac{1}{\sqrt{1+y_t'^2(x)}}\right). \end{aligned}$$

On calcule et simplifie:

$$\vec{T}_t\,'(x) = \left(\frac{-y_t'(x)y_t''(x)}{(1+y_t'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y_t''(x)}{(1+y_t'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Évaluons tout cela en O, c'est à dire pour $x = 0$. Puisque (E) donne, pour $x = 0$:

$$(1+0^2)y_t''(0) - 0 \times y_t'(0) - 2y_t(0) = 1$$

et que $y_t(0) = 0$, on obtient $y_t''(0) = 1$; et comme $y_t'(0) = t$, on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{T}_t\,'(0) &= \left(\frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ \vec{N}_t(0) &= \left(\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right), \end{aligned}$$

on voit que

$$\vec{T}_t\,'(0) = \frac{1}{1+t^2}\vec{N}_t(0)$$

alors que d'après Frenet, en notant $c_t(0)$ la courbure à γ_t au point O, on a

$$\vec{T}_t\,'(0) = c_t(0)\|f_t'(0)\|.$$

On a donc

$$c_t(0)\|f_t'(0)\| = \frac{1}{1+t^2} \implies c_t(0) = \frac{1}{1+t^2\|f_t'(0)\|} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbure est non nulle; ainsi, le point O est birégulier et le centre de courbure $I_t(0)$ à γ_t au point O est alors défini par

$$\overrightarrow{OI_t(0)} = \frac{1}{c_t(0)}\vec{N}_t(0).$$

On obtient

$$I_t(0) = \left(-t(1+t^2), (1+t^2)\right).$$

Ainsi, l'ensemble décrit par les centres de courbure au point O des courbes intégrales est la courbe Γ de paramétrisation

$$t \mapsto \begin{cases} X(t) = -t(1+t^2) \\ Y(t) = (1+t^2). \end{cases}$$

5. énoncé Il est parfaitement inutile de calculer une paramétrisation de l'enveloppe γ, dans la mesure où T_θ est par définition même la droite D_θ. La distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à la droite $\Delta : \alpha x + \beta y + c = 0$ étant donnée par

$$d(M, \Delta) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + c|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \implies d(M, \Delta)^2 = \frac{(\alpha x_0 + \beta y_0 + c)^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

on a

$$\begin{aligned} d(A, T_\theta)^2 - d(B, T_\theta)^2 &= (a\cos\theta - p(\theta))^2 - (-a\cos\theta - p(\theta))^2 \\ &= -4ap(\theta)\cos\theta, \end{aligned}$$

quantité constante si et seulement si p est de la forme

$$p(\theta) = \frac{K}{\cos\theta}.$$

6. énoncé γ admet la paramétrisation

$$f : t \mapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$$

si bien que la tangente à γ en un un point $M(t)$ est dirigée par $f'(t) = \left(\frac{t}{p}, 1\right)$ et admet dont la paramétrisation

$$\lambda \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{2p} + \lambda \times \frac{t}{p} \\ t + \lambda \times 1. \end{cases}$$

Rechercher le projeté orthogonal de F sur cette tangente, c'est rechercher un point F' de cette tangente tel que $\overrightarrow{FF'}$ soit orthogonal à cette tangente et donc à $f'(t)$, vecteur directeur de cette tangente. Grâce à la paramétrisation, rechercher un tel point F', c'est rechercher un scalaire λ tel que

$$\left\langle \left(\frac{t^2}{2p} + \lambda\frac{t}{p} - \frac{p}{2}, t + \lambda\right), \left(\frac{t}{p}, 1\right) \right\rangle = 0$$

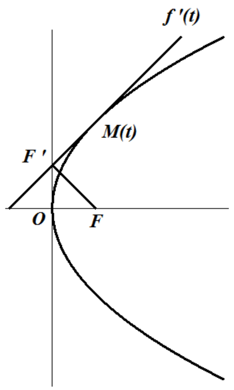
ce qui conduit très rapidement à $\lambda = -\frac{t}{2}$ et donne alors le point

$$F' = \left(0, \frac{t}{2}\right).$$

La tangente à γ au sommet, i.e. le point O, atteint pour $t = 0$ est la droite passant par O et dirigée par

$$f'(0) = (0, 1).$$

C'est donc l'axe Oy et on voit que le point F' appartient à cet axe.



7. énoncé

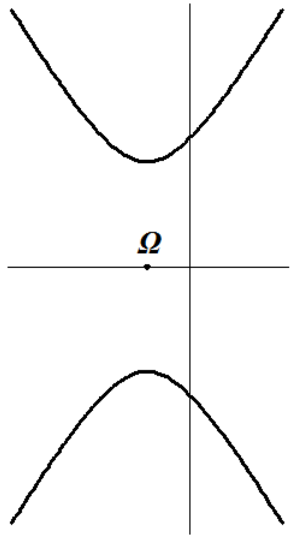
1. On a

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x + 1 &= 3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) + 1 \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

donc γ a pour équation

$$y^2 - 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \iff \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} - \frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1$$

et en plaçant l'origine en $\Omega\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, on reconnaît une hyperbole de centre Ω, ses deux branches étant dirigées vers le haut et vers le bas.

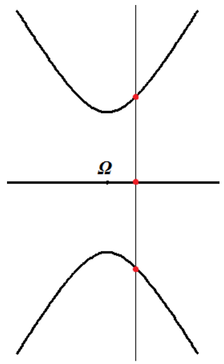


2. Quelques rappels:

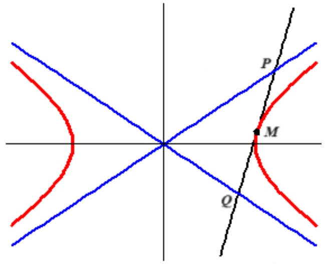
- À tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, on associe le nombre complexe $a = x + iy$, appelé affixe de M.
- À tout vecteur $\vec{u} = (x, y)$, on associe le nombre complexe $a = x + iy$, appelé affixe de $\vec{u}$.
- Si A a pour affixe a et B a pour affixe b, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (supposés non nuls) ont pour affixe a et b, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si
$$\frac{b}{a} \in \mathbb{R}.$$
- *Preuve:* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si
$$\exists\lambda \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v} = \lambda\vec{u} \iff \exists\lambda \in \mathbb{R} \,/\, b = \lambda a \iff \frac{b}{a} \in \mathbb{R}.$$
- Les points A, B, C, deux à deux distincts et d'affixe z_1, z_2, z_3, sont alignés si et seulement si
$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

- *Preuve:* A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc, de ce qui précède, si et seulement si
$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R},$$
ce qui est équivalent, bien sûr, à
$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}$$
(car de manière évidente, un nombre complexe non nul est réel si et seulement si son inverse est réel).

3. Il est évidemment sous-entendu que sont écartés les points M pour lesquels deux des affixes z, z^2, z^5 proviendraient de points confondus; à ce titre,
$$\begin{aligned} z = z^2 &\iff z \in \{0,1\},\ z^2 = z^5 \\ &\iff z \in \{0,1,j,j^2\},\ z = z^5 \\ &\iff z \in \{0,1,-1,i,-i\} \end{aligned}$$
(avec $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$, les complexes $1, j, j^2$ étant les trois racines cubiques de l'unité). Les points d'affixe
$$0, 1, -1, i, -i, j, j^2$$
étant exclus, l'alignement se produit si et seulement si $\frac{z^5-z}{z^2-z}$ est réel. Or
$$\begin{aligned} \frac{z^5 - z}{z^2 - z} &= \frac{z^4 - 1}{z - 1} \\ &= \frac{(z-1)(z+1)(z^2+1)}{z-1} \\ &= (z+1)(z^2+1). \end{aligned}$$
En posant $z = x + iy$,
$$(z+1)(z^2+1) = (x+1+iy)(x^2-y^2+1+2ixy),$$
dont la partie imaginaire est
$$2x^2y + 2xy + yx^2 - y^3 + y,$$
qui se factorise en
$$y(3x^2 + 2x + 1 - y^2).$$
Ainsi, l'alignement se produit si et seulement si la partie imaginaire de $\frac{z^5-z}{z^2-z}$ est nulle donc si et seulement si
$$y = 0 \quad \text{ou} \quad 3x^2 + 2x + 1 - y^2 = 0,$$
donc l'ensemble recherché est la réunion de l'axe Ox et de l'hyperbole γ, à laquelle on retire a priori les points d'affixe
$$0, 1, -1, i, -i, j, j^2$$
et donc à laquelle on retire seulement le point O, le point $(0, 1)$ et le point $(0, -1)$ (vérification facile).



8. énoncé On se place dans un repère dans lequel Γ admet l'équation
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Les asymptotes sont alors les droites
$$D_1 :\ y = \frac{b}{a}x \quad D_2 :\ y = -\frac{b}{a}x.$$



Notons (x_0, y_0) les coordonnées de M. La tangente à Γ au point M a pour équation
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$
et son intersection P avec D_1 satisfait donc
$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ \frac{xx_0}{a^2} - \frac{xy_0}{ab} = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x\left(\frac{bx_0 - ay_0}{a^2b}\right) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que

$$bx_0 - ay_0 \neq 0$$

car si $bx_0 - ay_0 = 0$, on aurait $y_0 = \frac{b}{a}x_0$ (ce qui semble moralement inacceptable: l'hyperbole ne croise pas ses asymptotes) et alors

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

donnerait

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 1,$$

ce qui est absurde. Ainsi

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x\left(\frac{bx_0 - ay_0}{a^2b}\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x = \frac{a^2b}{bx_0 - ay_0} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0} \\ x = \frac{a^2b}{bx_0 - ay_0}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$P\left(\frac{a^2b}{bx_0 - ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0}\right).$$

Son intersection Q avec D_2 satisfait donc

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{xy_0}{ab} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ x\left(\frac{bx_0 + ay_0}{a^2b}\right) = 1. \end{cases}$$

Remarquons que

$$bx_0 + ay_0 \neq 0$$

car si $bx_0 + ay_0 = 0$, on aurait $y_0 = -\frac{b}{a}x_0$ et alors

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

donnerait

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 1,$$

ce qui est absurde. Ainsi

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ x\left(\frac{bx_0 + ay_0}{a^2b}\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ x = \frac{a^2b}{bx_0 + ay_0} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{ab^2}{bx_0 + ay_0} \\ x = \frac{a^2b}{bx_0 + ay_0} \end{cases}$$

Ainsi,

$$Q\left(\frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}, -\frac{ab^2}{bx_0 - ay_0}\right).$$

L'abscisse x_m du milieu de $[P, Q]$ est donc

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2b}{bx_0 - ay_0} + \frac{a^2b}{bx_0 + ay_0}\right) \\ &= \frac{a^2b}{2} \times \frac{(bx_0 + ay_0) + (bx_0 - ay_0)}{(bx_0 - ay_0)(bx_0 + ay_0)} \\ &= \frac{a^2b}{2} \times \frac{2bx_0}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \\ &= \frac{a^2b^2x_0}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2}. \end{aligned}$$

Mais de

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

on déduit

$$\frac{b^2x_0^2 - a^2y_0^2}{a^2b^2} = 1,$$

et donc

$$b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2.$$

il en résulte

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{a^2b^2x_0}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \\ &= \frac{a^2b^2x_0}{a^2b^2} \\ &= x_0. \end{aligned}$$

Ensuite l'ordonnée y_m du milieu de $[P, Q]$ est donc

$$\begin{aligned} y_m &= \frac{1}{2}\left(\frac{ab^2}{bx_0 - ay_0} - \frac{ab^2}{bx_0 + ay_0}\right) \\ &= \frac{ab^2}{2} \times \frac{(bx_0 + ay_0) - (bx_0 - ay_0)}{(bx_0 - ay_0)(bx_0 + ay_0)} \\ &= \frac{ab^2}{2} \times \frac{2ay_0}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \\ &= \frac{a^2b^2y_0}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \end{aligned}$$

et comme

$$b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

il en résulte

$$\begin{aligned} y_m &= \frac{a^2b^2y_0}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \\ &= \frac{a^2b^2y_0}{a^2b^2} \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Les coordonnées du mlieu de $[PQ]$ sont donc (x_0, y_0), ce qui prouve que ce milieu est bien le point M.