Feuille d'exercices n°12

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et dans les énoncés, équations et coordonnées seront données dans ce repère.

1. corrigé Déterminer en fonction du réel k la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (E) d'équation cartésienne

$$x^2 - ky^2 = k+2.$$

2. corrigé On considère la conique γ d'équation cartésienne

$$2x^2 + xy + 2y^2 + 2x - 7y + 3 = 0$$

dans le repère $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. On considère le point Ω de coordonnées cartésiennes $(-1,2)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer une équation cartésienne de γ dans le repère $\mathcal{R}_1 = (\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *Note:* par la suite, pour ne pas alourdir les notations, on continuera à noter (x,y) les coordonnées dans $\mathcal{R}_1$.
2. Déterminer une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telle que l'on ait
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x^2 + 2y^2 + xy = X^T M X,$$
où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que
$$D = P^T M P.$$
4. Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Vérifier qu'en posant $X' = P^{-1}X$, on a
$$X^T M X = X'^T\, D\, X'.$$
5. En déduire l'existence d'une base orthonormée $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et de trois réels λ_1, λ_2, k tels qu'une équation de γ dans le repère $\mathcal{R}_2 = (\Omega;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ soit
$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = k,$$
(où (x',y') désignent les coordonnées dans $\mathcal{R}_2$ d'un point du plan).
6. En déduire la nature de γ. Donner ses éléments caractéristiques (axes et centre de symétrie, longueur des axes):
   - dans $\mathcal{R}_2$,
   - $\mathcal{R}$.

3. corrigé Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe γ d'équation cartésienne

$$3x^2 + 4xy - 3x - 2y - \frac{5}{4} = 0$$

dans le repère $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Ses éléments caractéristiques (centre, axes de symétrie, sommets) seront donnés dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

4. corrigé Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe γ d'équation cartésienne

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4(x+y) = 4$$

dans le repère $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Ses éléments caractéristiques (centre, axes de symétrie, asymptotes) seront donnés dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

5. corrigé Soit la courbe γ d'équation $-x^2 + 4xy + 2y^2 + x = 0$.

1. Quelle est la nature de γ ?
2. Soit A le point de coordonnées $(0,-\frac{3}{4})$. Déterminer les points de γ en lesquels la tangente passe par A.

6. corrigé Soit γ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

avec $a > b > 0$ et dont on note $[AA']$ le grand axe. Par A et A', on mène les tangentes T et T' respectivement. Par tout point M de γ distinct de A et A', la tangente à γ en M coupe T et T' en P et P' respectivement.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $AP \times A'P'$ ne dépend pas du point M.

1. énoncé

- Si $k=0$,
$$x^2=2 \iff x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}$$
donc E est la réunion de deux droites verticales.
- Si $k>0$, on pose
$$k=\frac{1}{B^2}$$
avec
$$B=\frac{1}{\sqrt{k}}$$
et comme alors $2+k>0$,
$$(E):\ \frac{x^2}{\left(\sqrt{2+k}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(B\sqrt{2+k}\right)^2}=1,$$
donc (E) est une hyperbole.
- Si $k<0$, on pose
$$k=-\frac{1}{b^2}$$
avec
$$B=\frac{1}{\sqrt{-k}}$$
et
$$(E):\ x^2+\frac{y^2}{B^2}=2+k$$
et alors
- si $2+k<0$ i.e. $k<-2$, (E) est vide,
- si $2+k=0$ i.e. $k=-2$, (E) est réduit au point O
- si $2+k>0$, donc si $-2<k<0$, alors
$$E:\ \frac{x^2}{\left(\sqrt{2+k}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(B\sqrt{2+k}\right)^2}=1,$$
donc (E) est un cercle si
$$\sqrt{2+k}=B\sqrt{2+k}$$
i.e. si
$$B=1$$
c'est à dire $k=-1$ et de rayon
$$\sqrt{2+k}$$
et une ellipse sinon, dont le grand axe est
- (Ox) si
$$\sqrt{2+k}>B\sqrt{2+k},$$
donc si $B<1$ i.e. $k<-1$
- (Oy) si
$$\sqrt{2+k}<B\sqrt{2+k}$$
donc si $B>1$ i.e. $k>-1$.

2. énoncé

1. Soit A un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (x',y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$. Alors
$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-2, \end{cases}$$
formules de changement de coordonnées du repère $\mathcal{R}$ au repère $\mathcal{R}_\Omega$; on a donc
$$\begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'+2 \end{cases}$$
si bien que
$$\begin{aligned} A\in\gamma &\iff 2x^2+xy+2y^2+2x-7y+3=0 \\ &\iff 2(x'-1)^2+(x'-1)(y'+2)+2(y'+2)^2+2(x'-1)-7(y'+2)+3=0 \\ &\iff 2x'^2+x'y'+2y'^2-4x'+2x'+2x'-y'+8y'-7y'+2-2+8-2-14+3=0 \\ &\iff 2x'^2+2y'^2+xy-5=0,, \end{aligned}$$
qui est donc une équation cartésienne de γ dans $\mathcal{R}_1$.

2. Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Alors
$$\begin{aligned} X^TMX &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} \\ &= x(ax+by)+y(bx+cy) \\ &= ax^2+cy^2+2bxy \end{aligned}$$
et on voit qu'en prenant
$$a=2,\quad c=2,\quad b=\frac{1}{2},$$

c'est à dire
$$M = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix},$$
on a bien
$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x^2 + 2y^2 + xy &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= X^T M X. \end{aligned}$$

3. La matrice M étant symétrique et à coefficients réels, l'existence de D et de P est assurée par le théorème spectral. On trouve $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$ comme valeurs propres avec
$$\mathrm{Ker}\left(M - \frac{3}{2}I_2\right) = \mathrm{Vect}(1,-1), \qquad \mathrm{Ker}\left(M - \frac{5}{2}I_2\right) = \mathrm{Vect}(1,1)$$
si bien que $(1,-1),(1,1))$ est une base de vecteurs propres; comme le prévoit la théorie et comme on le constate effectivement, les sous espaces propres sont orthogonaux. Il suffit alors de normaliser ces vecteurs: en notant
$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),$$
la base
$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$
est une base orthonormée de vecteurs propres pour M, associés respectivement à $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$. On a donc
$$D = P^{-1}MP$$
avec
$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
et comme P est orthogonale (ses colonnes forment par définition même une base orthonormée), on a
$$P^{-1} = P^T$$
et alors
$$D = P^T MP.$$

4. On a
$$X = PX'$$
et alors
$$\begin{aligned} X^T MX &= (PX')^T M(PX') \\ &= X'^T \times P^T \times M \times P \times X' \\ &= X'^T DX'. \end{aligned}$$

5. Soit A un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_1$ et (x',y') ses coordonnées dans le repère
$$\mathcal{R}_2 = (\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2).$$
D'après les formules de changement de base, on a alors
$$X = PX'$$

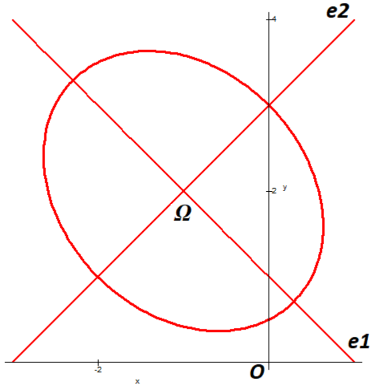
- D'après **2** :
$$2x^2 + 2y^2 + xy = X^T MX.$$
- D'après **4** :
$$X^T MX = X'^T DX'.$$
- Puisque
$$\begin{aligned} X'^T DX' &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x' \\ \frac{5}{2}y' \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2, \end{aligned}$$
  on a
$$2x^2 + 2y^2 + xy = \frac{3}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2$$
  et en conséquence,
$$2x^2 + 2y^2 + xy - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 - 5 = 0.$$
- Ainsi, un point A de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}_1$ appartient à γ si et seulement si ses coordonnées (x',y') dans $\mathcal{R}_2$ satisfont
$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 - 5 = 0$$
  et c'est pourquoi une équation de γ dans $\mathcal{R}_2$ est
$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 - 5 = 0.$$

6. On a

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 - 5 = 0 &\iff \frac{3}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 = 5 \\
&\iff \frac{3x'^2}{10} + \frac{y'^2}{2} = 1 \\
&\iff \frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, γ est une ellipse:

- dont le centre est l'origine du repère $\mathcal{R}_2$ i.e. le point Ω et donc le point de coordonnées $(-1, 2)$ dans le repère $\mathcal{R}$.
- Puisque $\frac{10}{3} > 2$, son grand axe est l'axe des abscisses du repère $\mathcal{R}_2$, c'est à dire la droite passant par le point Ω et dirigée par le vecteur $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.
- Le grand axe est de longueur $\sqrt{\frac{10}{3}}$ et le petit axe de longueur $\sqrt{2}$.



3. énoncé On applique le protocole, qui débute par la réduction de la partie quadratique

$$3x^2 + 4xy$$

de l'équation.

- Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Avec ce choix de M, pour toute matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned}
X^T M X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 2x \end{pmatrix} \\
&= 3x^2 + 2xy + 2xy \\
&= 3x^2 + 4xy.
\end{aligned}$$

- Comme M est symétrique et à coefficients réels, il existe d'après le théorème spectral une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que

$$D = P^T M P.$$

On obtient ces matrices en recherchant les valeurs propres de M et en déterminant une base orthonormée de vecteurs propres. On trouve -1 et 4 comme valeurs propres avec

$$\text{Ker }(M + I_2) = \text{Vect}(1, -2), \qquad \text{Ker }(M - 4I_2) = \text{Vect}(2, 1)$$

si bien que $\big((1, -2), (2, 1)\big)$ est une base de vecteurs propres; comme le prévoit la théorie et comme on le constate effectivement, les sous espaces propres sont orthogonaux. Il suffit alors de normaliser ces vecteurs: en notant

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1),$$

la base

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

est une base orthonormée de vecteurs propres pour M, associés respectivement à -1, 4. On a donc

$$D = P^{-1} M P$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

et comme P est orthogonale (ses colonnes forment par définition même une base orthonormée), on a $P^{-1} = P^T$ et alors

$$D = P^T M P.$$

- Considérons le repère
$$\mathcal{R}' = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)\,.$$
Soit A un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (x',y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$.
En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a
$$X = PX'$$
d'après les formules de changement de base.

- D'autre part,
$$M = (P^T)^{-1} D P^{-1} = PD\,P^T$$
car P est orthogonale. On a donc
$$\begin{aligned} X^T M X &= (PX')^T M (PX') \\ &= X'^T \times\ P^T \times (PD\,P^T) PX' \\ &= X'^T (P^T P) D (P^T P) X' \\ &= X'^T \times I_2 \times D \times I_2 \times X' \\ &= X'^T D X'. \end{aligned}$$

- Or
$$\begin{aligned} X'^T D X' &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x' \\ 4y' \end{pmatrix} \\ &= -x'^2 + 4y'^2. \end{aligned}$$

- Ainsi,
$$3x^2 + 4xy = -x'^2 + 4y'^2. \tag{1}$$

La deuxième phase consiste en la gestion de la partie affine
$$-3x - 2y - \frac{5}{4}$$
de l'équation.

- La formule de changement de base
$$X = PX'$$
donne ici
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') \end{cases}$$
si bien que
$$\begin{aligned} -3x - 2y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-3x' - 6y' + 4x' - 2y') && (2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 8y') && (3) \end{aligned}$$

- Combinons (1) et (2): soit A un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (x',y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$. Alors
$$x^2 + 4xy - 3x - 2y - \frac{5}{4} = -x'^2 + 4y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 8y') - \frac{5}{4}$$
si bien que
$$\begin{aligned} A \in \gamma &\iff x^2 + 4xy - 3x - 2y - \frac{5}{4} = 0 \\ &\iff -x'^2 + 4y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 8y') - \frac{5}{4} = 0, \end{aligned}$$
et en conséquence
$$-x'^2 + 4y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 8y') - \frac{5}{4} = 0$$
est une équation de γ dans le repère $\mathcal{R}'$.

La dernière phase consiste à canoniser les expressions en x' et y' afin de préparer le terrain pour un changement d'origine.

- On écrit

$$\begin{aligned}
-x'^2+\frac{1}{\sqrt{5}}x' &= -\left(x'^2-\frac{1}{\sqrt{5}}x'\right)\\
&= -\left(\left[x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]^2-\frac{1}{20}\right)\\
&= -\left[x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]^2+\frac{1}{20}\\
4y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}} &= 4\left(y'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)\\
&= 4\left(\left[y'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^2-\frac{1}{5}\right)\\
&= 4\left[y'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^2-\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

  et en conséquence

$$\begin{aligned}
-x'^2+4y'^2+\frac{1}{\sqrt{5}}(x'-8y')-\frac{5}{4} &= -\left[x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]^2+\frac{1}{20}+4\left[y'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^2-\frac{4}{5}-\frac{5}{4}\\
&= -\left[x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]^2+4\left[y'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^2-2
\end{aligned}$$

  et en conséquence

$$-\left[x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]^2+4\left[y'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]^2-2=0$$

  est une équation de γ dans le repère $\mathcal{R}'$.

- Soit Ω le point de coordonnées

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

  dans le repère $\mathcal{R}'=(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, A un point du plan, (x',y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$ et (x'',y'') ses coordonnéesdans le repère

$$\mathcal{R}''=(\Omega,\vec{e}_1,\vec{e}_2)\,.$$

  Alors

$$\begin{cases} x''=x'-\frac{1}{2\sqrt{5}}\\ \\ y''=y'-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

  et on voit donc qu'une équation de γ dans le repère $\mathcal{R}''$ est

$$-x''^2+4y'2-2=0$$

  ou encore

$$-\frac{x''^2}{2}+2y''^2=1,$$

  qui s'écrit aussi

$$\frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{x''^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

Ainsi, γ est une hyperbole:

- dont le centre est le point Ω,
- ses axes de symétries sont les droite $(\Omega,\vec{e}_1)$ et $(\Omega,\vec{e}_2)$
- ses sommets sont les points A et A' de coordonnées respectives

$$\left(0,\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\qquad\left(0,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

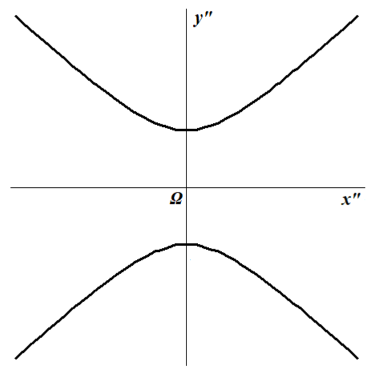
  dans le repère $\mathcal{R}''$
- ses asymptotes sont les droites d'équation

$$x''=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}y'',\quad x''=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}y''$$

  dans le repère $\mathcal{R}''$, c'est à dire

$$x''=2y'',\qquad x''=-2y''$$

  et a donc cette allure



Il reste à préciser ses éléments dans le repère $\mathcal{R}=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- Entre coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ et (x',y') dans $\mathcal{R}'$, on a vu plus haut que l'on a les relations

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y') \\ \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'+y'). \end{cases}$$

Le point Ω ayant pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

dans $\mathcal{R}'$, ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont donc

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}) \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-\frac{2}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}) \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \\ \\ 0. \end{cases}$$

- Les axes de γ sont donc les deux droites passant par Ω et dirigées respectivmeent par

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2), \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1).$$

- Entre coordonnées (x',y') dans $\mathcal{R}'$ et (x'',y'') dans $\mathcal{R}''$, on a les relations

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \\ y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \\ y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

si bien que le sommet A a pour coordonnées

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \\ \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

dans $\mathcal{R}'$. Entre coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ et (x',y') dans $\mathcal{R}'$, on a vu plus haut que l'on a les relations

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y') \\ \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'+y'). \end{cases}$$

Le sommet A a donc pour coordonnées

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + 2\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\frac{2}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

dans $\mathcal{R}$. Inutile de simplifier. On procède de même pour l'autre sommet A'.

- Entre coordonnées (x',y') dans $\mathcal{R}'$ et (x'',y'') dans $\mathcal{R}''$, on a les relations

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \\ y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

La formule de changement de base

$$X = PX'$$

s'écrit

$$X' = P^{-1}X$$

c'est à dire

$$X' = P^T X$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Longrightarrow P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

si bien qu'entre coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ et (x',y') dans $\mathcal{R}'$, on a les relations

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y) \\ \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y). \end{cases}$$

et donc entre coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ et (x'', y'') dans $\mathcal{R}''$, on a les relations

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y) - \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y) - \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

L'asymptote d'équation

$$x'' = 2y''$$

dans le repère $\mathcal{R}''$ a donc pour équation

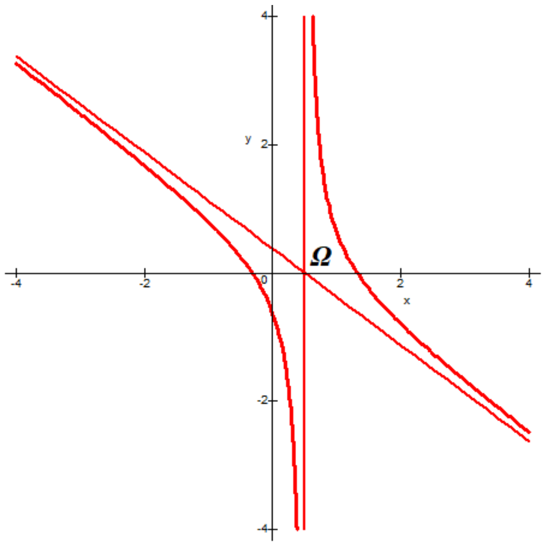
$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y) - \frac{1}{2\sqrt{5}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y) - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

dans le repère $\mathcal{R}$, c'est à dire

$$3x + 4y - \frac{3}{2} = 0.$$

En procédant de même, l'autre a pour équation

$$x - \frac{1}{2} = 0.$$



4. énoncé On applique le protocole du cours:

- $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice de la partie quadratique de l'équation, dont les valeurs propres sont 2 et 8 et dont $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de vecteurs propres avec

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1),\ \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$

- Soit A un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$ et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}.$$

D'après les formules de changement de repère, on a

$$X = PX'$$

et on sait que

$$\begin{aligned} 5x^2 - 6xy + 5y^2 &= X^T MX \\ &= X'^T DX' \\ &= 2x'^2 + 8y'^2. \end{aligned}$$

- La relation

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ \\ y' \end{pmatrix},$$

s'écrit

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \end{cases}$$

si bien que

$$\begin{aligned} A \in \gamma &\iff 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4(x+y) = 4 \\ &\iff 2x'^2 + 8y'^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') + \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\right) = 4 \\ &\iff 2x'^2 + 8y'^2 - 4\sqrt{2}x' = 4, \end{aligned}$$

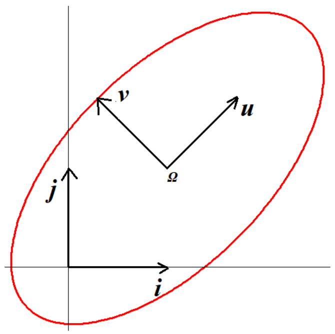
qui est alors une équation de γ dans $\mathcal{R}'=(O;\vec{u},\vec{v})$. Ensuite,

$$\begin{aligned} 2x'^2+8y'^2-4\sqrt{2}x'=4 &\iff 2\left(x'^2-2\sqrt{2}x\right)+8y'^2=4 \\ &\iff 2\left(\left[x'-\sqrt{2}\right]^2-2\right)+8y'^2=4 \\ &\iff 2\left[x'-\sqrt{2}\right]^2-4+8y'^2=4 \\ &\iff 2\left[x'-\sqrt{2}\right]^2+8y'^2=8 \\ &\iff \frac{(x'-\sqrt{2})^2}{2^2}+y'^2=1 \end{aligned}$$

- si bien que dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ où Ω est le point de coordonnées $(\sqrt{2},0)$ dans $\mathcal{R}'$, une équation de γ est
$$\frac{x''^2}{2^2}+y''^2=1.$$

On reconnaît donc:

- l'ellipse de centre Ω, de grand axe $(\Omega,\vec{u})$, de petit axe $(\Omega,\vec{v})$, de demi grand axe 2 et de demi petit axe 1,
- son centre a pour coordonnées $(\sqrt{2},0)$ dans $\mathcal{R}'$ et donc $(1,1)$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$
- ses sommets ont pour coordonnées $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,1)$ et $(0,-1)$ dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$.



5. énoncé

1. La matrice associée à la partie quadratique de l'équation est

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}\det(M) &= -6\\ &< 0\end{aligned}$$

si bien que γ est une hyperbole (éventuellement dégénérée mais elle ne l'est pas si on se réfère à la remarque finale).

2. Il s'agit donc de trouver les points $M(x,y)$ du plan satisfaisant

$$-x^2+4xy+2y^2+x=0$$

i.e. $M\in\gamma$, en lesquels la tangente passe par A. En notant

$$f:(x,y)\mapsto -x^2+4xy+2y^2+x,$$

on a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x,y)=(-2x+4y+1,4x+4y)$$

et d'après le rappel ci-dessus, la tangente à γ en M passe par $A\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ si et seulement si

$$x(-2x+4y+1)+(y+\frac{3}{4})(4x+4y)=0.$$

Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} -x^2+4xy+2y^2+x=0 \\ x(-2x+4y+1)+(y+\frac{3}{4})(4x+4y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x^2+4xy+2y^2+x=0 \\ -2x^2+8xy+4y^2+4x+3y=0. \end{cases}$$

L_2-2L_1 donne

$$2x+3y=0$$

et donc

$$y=-\frac{2}{3}x$$

que l'on reporte dans L_1:

$$-x^2-\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{9}x^2+x=0,$$

c'est à dire

$$-25x^2+9x=0,$$

dont les racines sont $x=0$ et $x=\frac{9}{25}$, ce qui donne respectivement $y=0$ et $y=-\frac{6}{25}$.

Ainsi, les points de γ en lesquels la tangente passe par A sont les points $O(0,0)$ et $B\left(\frac{9}{25},-\frac{6}{25}\right)$.

Remarque. En suivant le protocole du cours, une équation réduite de γ est

$$-2x^2+3y^2=-\frac{1}{12},$$

ou encore

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}=1$$

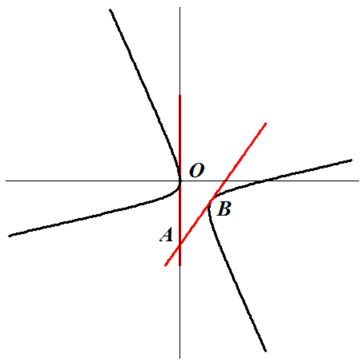
dans le repère orthonormé $(\Omega;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ où Ω est le point de coordonnées

$$\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right)$$

et

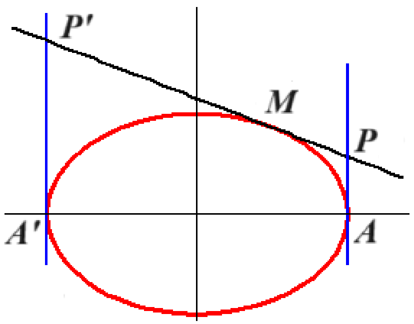
$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)\\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\end{aligned}$$

si bien que γ est une hyperbole de centre Ω et d'axes $(\Omega,\vec{e}_1)$, $(\Omega,\vec{e}_2)$.



6. énoncé

1. Disons que A et A' sont les sommets respectifs de coordonnnées $(a,0)$ et $(-a,0)$.



2. Notons (x_0,y_0) les coordonnées de M. On a donc $y_0\neq 0$.

- Le point P a pour coordonnées (a,y); ses coordonnées vérifiant l'équation

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

de la tangente en M à γ, on a

$$\frac{ax_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

ce qui donne

$$y=\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\frac{b^2}{y_0}$$

et donc le point P a pour coordonnées

$$\left(a,\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\frac{b^2}{y_0}\right).$$

Comme $A(a,0)$, on a

$$AP=\sqrt{\left(1-\frac{x_0}{a}\right)^2\frac{b^4}{y_0^2}}.$$

De même, le point P' a pour coordonnées

$$\left(-a,\left(1+\frac{x_0}{a}\right)\frac{b^2}{y_0}\right)$$

et

$$AP'=\sqrt{\left(1+\frac{x_0}{a}\right)^2\frac{b^4}{y_0^2}}.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}AP\times AP' &= \sqrt{\left(1-\frac{x_0}{a}\right)^2\frac{b^4}{y_0^2}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)^2\frac{b^4}{y_0^2}}\\ &= \sqrt{\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)^2}\times\frac{b^4}{y_0^2}.\end{aligned}$$

Mais puisque M est un point de γ, on a

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

et donc

$$1-\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}$$

si bien que

$$
\begin{aligned}
AP \times AP' &= \sqrt{\frac{y_0^4}{b^4}} \times \frac{b^4}{y_0^2} \\
&= b^2
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que le produit $AP \times AP'$ est constant.