Feuille d'exercices n°6

1. corrigé Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice

$$M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que p est une projection de $\mathbb{R}^4$ et en préciser ses éléments caractéristiques.
2. Dans une base adaptée à la relation de supplémentarité $\mathbb{R}^4=\operatorname{Im}p\oplus\operatorname{Ker}p$, déterminer la matrice Δ de p.

2. corrigé Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice

$$M=\begin{pmatrix}3&0&-1&1\\-5&-2&1&-2\\-4&-2&0&-2\\-3&1&1&-1\end{pmatrix}$$

et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F=\{\vec{v}=(x,y,z,t)\ /\ z=0,\ 2x+y+t=0\}.$$

1. Déterminer une base de F.
2. Démontrer que F est stable par u.
3. Démontrer que $G=\operatorname{Vect}\Big((1,0,0,0),(0,0,1,1)\Big)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer la matrice de u dans une base adaptée à la stabilité de F.

3. corrigé Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, soit

$$H=\{\vec{v}=(x,y,z,t),\ x+2y-z+t=0\}.$$

Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner la dimension et un supplémentaire.

4. corrigé Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1=(0,2,1,-1)$, $\vec{u}_2=(2,-1,1,0)$ et $F=\operatorname{Vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

1. Soit $\vec{v}\in\mathbb{R}^4$ et M la matrice de la famille de vecteurs $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{v})$ dans la base canonique. À quelle condition portant sur le rang de M le vecteur $\vec{v}$ appartient-t-il à F?
2. En déduire des conditions nécessaires suffisantes portant sur x,y,z,t pour $\vec{v}=(x,y,z,t)$ appartienne à F.
3. En déduire que F est l'intersection de deux hyperplans, que l'on déterminera.

5. corrigé Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$C_M=\{N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})/MN=NM\}.$$

Démontrer que C_M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. corrigé Soit $M=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ une matrice $n\times n$.

1. Déterminer le coefficient général de la matrice $A=M^2$ et calculer la somme des éléments diagonaux de A.
2. Déterminer le coefficient général de la matrice $B=M^TM$ (où M^T est la transposée de la matrice M) et calculer la somme des éléments diagonaux de B.

7. corrigé Calculer les déterminants:

$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\-2&1&1\end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\1&0&1&-1\\-1&1&1&1\\2&0&1&-1\end{vmatrix}.$$

8. corrigé Pour tout $n\geq 2$ on note

$$D_n=\begin{vmatrix}-1&2&0&\dots&0\\-1&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&2\\0&\dots&0&-1&-1\end{vmatrix}$$

(déterminant de taille $n\times n$). On a donc

$$D_2=\begin{vmatrix}-1&2\\-1&-1\end{vmatrix}\qquad D_3=\begin{vmatrix}-1&2&0\\-1&-1&2\\0&-1&-1\end{vmatrix}.$$

1. Établir une relation de récurrence entre D_n,D_{n-1},D_{n-2}.
2. En déduire la valeur de D_n.

1. énoncé

1. Un endomorphisme p d'un espace E (ici $E=\mathbb{R}^4$) est une projection dès lors que

$$p\circ p=p$$

(résultat du cours). D'autre part, M étant la matrice de p dans la base canonique, M^2 est la matrice de $p\circ p$ dans la base canonique d'après la théorie générale de la représentation matricielle. Après calculs, on constate que

$$M^2=M,$$

ce qui est donc la preuve que $p\circ p=p$.

Un vecteur $\vec{u}=(x,y,z,t)$ appartient à $\operatorname{Ker} p$ si et seulement si

$$M\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc si et seulement si

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}x-z=0\\ \\ y-t=0\end{array}\right. &\iff \vec{u}=(x,y,x,y)=x(1,0,1,0)+y(0,1,0,1)\\ &\iff \vec{u}\in\operatorname{Vect}\big((1,0,1,0),(0,1,0,1)\big)\end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Ker} p=\operatorname{Vect}\big((1,0,1,0),(0,1,0,1)\big)$$

et comme la famille $\big((1,0,1,0),(0,1,0,1)\big)$ est manifestement libre, c'est une base de $\operatorname{Ker} p$.

Ensuite, puisque

$$\dim(\operatorname{Ker} p)=2,$$

on déduit du théorème du rang que

$$\dim(\operatorname{Im} p)=2.$$

D'après le cours, les vecteurs colonnes de M constituent une famille génératrice de $\operatorname{Im} p$. Mais manifestement, les colonnes 1 et 2 de M, qui sont les vecteurs colonnes des images

$$p(\vec{e}_1)$$

et

$$p(\vec{e}_2)$$

des deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, sont linéairement indépendantes: elles constituent donc une famille libre à 2 vecteurs d'un sous-espace vectoriel que l'on sait être de dimension 2; ces deux vecteurs, à savoir

$$\left(\frac{1}{2}(1,0,-1,0),\frac{1}{2}(0,1,0,-1)\right)$$

constituent alors, d'après la théorie de la dimension, une base de $\operatorname{Im} p$.

2. Une base adaptée est la réunion d'une base de $\operatorname{Im} p$ et d'une base de $\operatorname{Ker} p$. Notons

$$\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$$

une telle base: les deux premiers sont dans $\operatorname{Im} p$ et les deux suivants dans $\operatorname{Ker} p$ (ce peut être les vecteurs de la question précédente, mais peu importe). Déterminons la matrice Δ de p dans cette base $\mathcal{B}$ en suivant le protocole: calculs des images par p des vecteurs de $\mathcal{B}$ et expressions de ces images ("codage") en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$.

- *Première colonne de* Δ. Puisque $\vec{e}_1\in\operatorname{Im} p$ et que la projection p a lieu sur $\operatorname{Im} p$, le vecteur $\vec{e}_1$ est invariant par cette projection:

  $$p(\vec{e}_1)=\vec{e}_1$$

  et la question est de savoir comment cette image s'exprime en fonction de $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, ce qui est trivial:

  $$\begin{aligned}p(\vec{e}_1)&=\vec{e}_1\\ &=1\times\vec{e}_1+0\times\vec{e}_2+0\times\vec{e}_3+0\times\vec{e}_4\end{aligned}$$

  et c'est pourquoi la première colonne de Δ est

  $$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

- *Deuxième colonne de* Δ. Puisque $\vec{e}_2\in\operatorname{Im} p$ et que la projection p a lieu sur $\operatorname{Im} p$, le vecteur $\vec{e}_2$ est invariant par cette projection:

  $$p(\vec{e}_2)=\vec{e}_2$$

  et la question est de savoir comment cette image s'exprime en fonction de $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, ce qui est trivial:

  $$\begin{aligned}p(\vec{e}_2)&=\vec{e}_2\\ &=0\times\vec{e}_1+1\times\vec{e}_2+0\times\vec{e}_3+0\times\vec{e}_4\end{aligned}$$

  et c'est pourquoi la deuxième colonne de Δ est

  $$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

- *Troisième colonne de* Δ. Puisque $\vec{e}_3 \in \operatorname{Ker} p$, on a
$$p(\vec{e}_3) = \vec{0}$$
et la question est de savoir comment cette image s'exprime en fonction de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, ce qui est trivial:
$$\begin{array}{rcl} p(\vec{e}_3) & = & \vec{0} \\ & = & 0 \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 + 0 \times \vec{e}_3 + 0 \times \vec{e}_4 \end{array}$$
et c'est pourquoi la troisième colonne de Δ est
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- *Quatrième colonne de* Δ. Puisque $\vec{e}_4 \in \operatorname{Ker} p$, on a
$$p(\vec{e}_4) = \vec{0}$$
et la question est de savoir comment cette image s'exprime en fonction de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, ce qui est trivial:
$$\begin{array}{rcl} p(\vec{e}_4) & = & \vec{0} \\ & = & 0 \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 + 0 \times \vec{e}_3 + 0 \times \vec{e}_4 \end{array}$$
et c'est pourquoi la quatrième colonne de Δ est
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En définitive,
$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. énoncé

1.

$$\begin{array}{rcl} \vec{v} = (x, y, z, t) & \iff & z = 0,\ 2x + y + t = 0 \\ & \iff & z = 0,\ t = -2x - y \\ & \iff & \vec{v} = (x, y, 0, -2x - y) \\ & \iff & \vec{v} = x(1, 0, 0, -2) + y(0, 1, 0 - 1) \end{array}$$

ce qui démontre que
$$F = \operatorname{Vect}\Big((1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -1)\Big)$$
et comme la famille
$$\Big((1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -1)\Big)$$
est manifestement libre, c'est une base de F.

2. On utilise le critère du cours:

> Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ une base de F. Alors F est stable par u si et seulement si
> $$\forall i \in [\![1, r]\!],\ u(\vec{e}_i) \in F.$$

On calcule
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
si bien que
$$u(1, 0, 0, -2) = (1, -1, 0, -1).$$
Le vecteur $(1, -1, 0, -1)$ vérifie bien $z = 0$ et $2x + y + t = 0$ ce qui est la preuve que $(1, -1, 0, -1)$ appartient à F. De même,
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
si bien que
$$u(0, 1, 0, -1) = (0, 1, 0, -1)$$
qui appartient évidemment à F. La preuve de la stabilité de F par u a été apportée.

3. On applique ce critère:

> Dans un espace E de dimension finie, les sous-espaces A et B sont supplémentaires si et seulement si la réunion d'une base de A et d'une base de B est une base de E.

Une base de F est
$$\Big((1,0,0,-2),(0,1,0,-1)\Big)$$
et une base de G est
$$\Big((1,0,0,0),(0,0,1,0)\Big).$$
Pour démontrer que
$$\Big((1,0,0,-2),(0,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\Big)$$
est une base de $\mathbb{R}^4$, on va calculer le déterminant Δ de ces vecteurs dans la base canonique:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$
En développant Δ suivant la troisième colonne,
$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
et en développant Δ suivant la deuxième colonne:
$$\begin{aligned} \Delta &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2. \end{aligned}$$
Ce déterminant est non nul, ce qui est la preuve que
$$\Big((1,0,0,-2),(0,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,1)\Big)$$
est une base de $\mathbb{R}^4$ et que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

4. Il s'agit donc de mettre en pratique ce résultat:

> Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de dimension r, stable par u. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E, dite *adaptée*, dans laquelle la matrice N de u a la forme
> $$N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
> où A est carrée de taille $r \times r$, C est de taille $r \times (n-r)$, D est carrée de taille $(n-r) \times (n-r)$ et où 0 est la matrice nulle de taille $(n-r) \times r$.
> Une telle base $\mathcal{B}$ est obtenue par réunion d'une base de F et d'une base d'un supplémentaire quelconque de F.

On sait donc que la matrice de u dans la base
$$\mathcal{B} = \Big((1,0,0,-2),(0,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,1)\Big)$$
aura cette forme. Construisons cette matrice N, en suivant le protocole.

- On a calculé
$$u(1,0,0,-2) = (1,-1,0,-1)$$
et la question est de savoir comment ce vecteur se décompose dans la base $\mathcal{B}$; on sait, d'après la stabilité de F par u, que ce vecteur appartient à F et qu'il n'est donc combinaison que de
$$\Big((1,0,0,-2),(0,1,0,-1)\Big),$$
(ces deux vecteurs constituant une base de F). On peut donc rechercher deux scalaires a, b tels que
$$(1,-1,0,-1) = a(1,0,0,-2) + b(0,1,0,-1).$$
On trouve sans difficulté $a = 1$ et $b = -1$:
$$(1,-1,0,-1) = (1,0,0,-2) - (0,1,0,-1)$$
et en conséquence
$$\begin{aligned} u(1,0,0,-2) &= (1,-1,0,-1) \\ &= (1,0,0,-2) - (0,1,0,-1) \\ &= 1 \times (1,0,0,-2) + (-1) \times (0,1,0,-1) + 0 \times (1,0,0,0) + 0 \times (0,0,1,1). \end{aligned}$$
La première colonne de N est donc
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- On a calculé
$$u(0,1,0,-1) = (0,1,0,-1)$$
et la question est de savoir comment ce vecteur se décompose dans la base $\mathcal{B}$; c'est trivial:
$$\begin{aligned} u(0,1,0,-1) &= (0,1,0,-1) \\ &= 0 \times (1,0,0,-2) + 1 \times (0,1,0,-1) + 0 \times (1,0,0,0) + 0 \times (0,0,1,1). \end{aligned}$$
La deuxième colonne de N est donc
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- On a
$$u(1,0,0,0)=(3,-5,-4,-3)$$
(on le voit sur la matrice M: l'image de $(1,0,0,0)$, premier vecteur de la base canonique, est justement "codée" par la première colonne de Msi on ne le "voit pas", on peut bien entendu calculer $M\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$). La question est de savoir comment ce vecteur se décompose dans la base $\mathcal{B}$. On recherche donc quatre scalaires a,b,c,d tels que
$$(3,-5,-4,-3)=a(1,0,0,-2)+b(0,1,0,-1)+c(1,0,0,0)+d(0,0,1,1)$$
c'est à dire tels que
$$(3,-5,-4,-3)=(a+c,b,d,-2a-b+d),$$
ce qui se produit si et seulement si
$$\begin{cases} a+c=3 \\ b=-5 \\ d=-4 \\ -2a-b+d=-3 \end{cases}$$
et conduit à
$$\begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ c=1 \\ d=-4. \end{cases}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} u(1,0,0,0) &= (3,-5,-4,-3) \\ &= 2(1,0,0,-2)-5(0,1,0,-1)+(1,0,0,0)-4(0,0,1,0). \end{aligned}$$
La troisième colonne de N est donc
$$\begin{pmatrix}2\\-5\\1\\-4\end{pmatrix}.$$

- On calcule
$$M\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$
et donc
$$u(0,0,1,1)=(0,-1,-2,0).$$
La question est de savoir comment ce vecteur se décompose dans la base $\mathcal{B}$. On recherche donc quatre scalaires a,b,c,d tels que
$$(0,-1,-2,0)=a(1,0,0,-2)+b(0,1,0,-1)+c(1,0,0,0)+d(0,0,1,1)$$
c'est à dire tels que
$$(0,-1,-2,0)=(a+c,b,d,-2a-b+d),$$
ce qui se produit si et seulement si
$$\begin{cases} a+c=0 \\ b=-1 \\ d=-2 \\ -2a-b+d=0 \end{cases}$$
et conduit à
$$\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=\frac{1}{2} \\ d=-2. \end{cases}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} u(0,0,1,1) &= (0,-1,-2,0) \\ &= -\frac{1}{2}(1,0,0,-2)-(0,1,0,-1)+\frac{1}{2}\times(1,0,0,0)-2\times(0,0,1,0). \end{aligned}$$
La quatrième colonne de N est donc
$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

et a bien la forme prévue par la théorie.

3. énoncé Considérons l'application φ définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$\forall \vec{v} = (x, y, z, t) \longmapsto x + 2y - z + t.$$

Il est immédiat que φ est une application linéaire et puisque φ est à valeurs réelles, c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ et il est clair que cette forme linéaire n'est pas la forme linéaire nulle. Ensuite, par définition même de la notion de noyau d'une application linéaire,

$$H = \mathrm{Ker}\,(\varphi).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \dim(H) &= \dim(\mathbb{R}^4) - 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Tout vecteur $\vec{v}$ n'appartenant pas à H, comme le vecteur $(1, 0, 0, 0)$, dirige un supplémentaire de H:

$$\mathbb{R}^4 = H \oplus \mathrm{Vect}(1, 0, 0, 0).$$

4. énoncé

1. Le vecteur $\vec{v} \in F$ si et seulement si $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ donc si et seulement si le rang de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v})$ vaut 2 (car rang égal à 3 serait synonyme de liberté de la famille).

2. Soit donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & x \\ 2 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \\ -1 & 0 & t \end{pmatrix}$ la matrice de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v})$ dans la base canonique. On échange L_1 et L_4 (pour bénéficier du pivot -1; alors M a même rang que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & t \\ 2 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}$$

et en nettoyant C_1 puis C_2, M a même rang que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & t \\ 0 & -1 & y + 2t \\ 0 & 0 & z + t \\ 0 & 0 & x + 2y + 4t = 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est au moins de rang 2 (il y a au moins les deux pivots -1 et -1) et ne possède pas de troisième pivot si et seulement si

$$z + t = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + 4t = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{v} \in F &\iff \mathrm{rg}(M) = 2 \\ &\iff z + t = 0,\ x + 2y + 4t = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \{\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / z + t = 0,\ x + 2y + 4t = 0\}.$$

3. Notons

$$H_1 = \{\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / z + t = 0\}$$

et

$$H_2 = \{\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y + 4t = 0\}.$$

On a donc

$$F = H_1 \cap H_2.$$

D'autre part, les applications

$$\varphi_1 : (x, y, z, t) \longmapsto z + t$$

et

$$\varphi_2 : (x, y, z, t) \longmapsto x + 2y + 4t$$

sont clairement des applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ de $\mathbb{R}$ i.e. des formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ (et il est clair qu'aucune des deux n'est la forme linéaire nulle) et par définition même de la notion de noyau,

$$H_1 = \mathrm{Ker}\,(\varphi_1), \quad H_2 = \mathrm{Ker}\,(\varphi_2)$$

de sorte que, d'après le cours, H_1 et H_2 sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$. On a donc écrit F comme l'intersection de deux hyperplans.

5. énoncé Il est clair que $M \in C_M$ (il est clair aussi que $0 \in C_M$), donc $C_M \neq \emptyset$. Ensuite, soit N, N' appartenant à C_M et a, b, des scalaires; il s'agit de démontrer que

$$aN + bN' \in C_M.$$

On a

$$\begin{aligned} (aN + bN')M &= aNM + bN'M \\ &= aMN + bMN' \text{ (car } N, N' \in C_M) \\ &= M \times aN + M \times bN' \\ &= M(aN + bN'), \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$(aN + bN')M = M(aN + bN')$$

et donc que

$$aN + bN' \in C_M.$$

Ainsi, C_M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. énoncé

1. *Rappel.* Si $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, alors la matrice $C=AB$ a pour coefficients $(c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ avec

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

En notant (c_{ij}) les coefficients de la matrice M^2, cette formule donne

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}.$$

Ses éléments diagonaux sont les coefficients $(c_{ii})_{1\le i\le n}$. On a donc

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}$$

et la somme de ses éléments diagonaux est en conséquence

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}\right).$$

2. La matrice M^T a pour coefficients $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ avec

$$\alpha_{ij}=a_{ji}.$$

En notant (d_{ij}) les coefficients de la matrice M^TM, la formule rappelée ci-dessus donne

$$\begin{aligned}d_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}.\end{aligned}$$

Ses éléments diagonaux sont les coefficients $(d_{ii})_{1\le i\le n}$. On a donc

$$d_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{ki}$$

et la somme de ses éléments diagonaux est en conséquence

$$\sum_{i=1}^{n}d_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}^2\right).$$

On reconnaît la somme des carrés de tous les coefficients de la matrice M.

7. énoncé $D_1=-2,\ D_2=-8,\ D_3=-2.$

8. énoncé

1. Il est fortement conseillé de chercher à établir une telle relation en travaillant sur des exemples. Ainsi, par deux développements successifs suivant la première colonne (les détails très faciles sont laissés au soin du lecteur), on a

$$D_4=-D_3+2D_2.$$

Plus généralement, on a donc

$$D_n=\begin{vmatrix}-1&2&0&0&\dots&\dots&\dots&0\\-1&-1&2&0&\ddots&&&0\\0&-1&-1&2&0&\ddots&&\vdots\\\vdots&0&-1&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&0&0&\ddots&\ddots&\ddots&&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&2\\0&0&0&\dots&\dots&0&-1&-1\end{vmatrix}$$

et en développant suivant la première colonne, en tenant compte de la répartition des signes $+$ ou $-$ sur les différentes cases, on obtient

$$D_n=-1\times\begin{vmatrix}-1&2&0&\dots&&&0\\-1&-1&2&0&&&\vdots\\0&-1&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\0&0&\ddots&\ddots&\ddots&&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&2\\0&0&\dots&\dots&0&-1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&0&\dots&\dots&\dots&0\\-1&-1&2&0&&&0\\0&-1&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\0&0&\ddots&\ddots&\ddots&&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&2\\0&0&\dots&\dots&0&-1&-1\end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant, qui est un déterminant de taille $(n-1)\times(n-1)$, est le déterminant D_{n-1}. Le second, qui est un déterminant de taille $(n-2)\times(n-2)$ vaut, en le développant suivant sa première colonne:

$$2\times\begin{vmatrix}-1&2&0&\dots&&0\\-1&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&2\\0&\dots&\dots&0&-1&-1\end{vmatrix}$$

c'est à dire

$$2D_{n-2}.$$

On a donc la relation

$$D_n = -D_{n-1} + 2D_{n-2}$$

2. On reconnaît une suite récurrente d'ordre deux. dont l'équation caractéristique

$$r^2 = -r + 2$$

admet les racines 1 et -2. Il existe alors deux scalaires a et b tels que

$$\forall n \geq 2,\ D_n = a + b(-2)^n.$$

Dans la mesure où, après calcul, on a

$$D_2 = 3, \qquad D_3 = -5,$$

on a alors

$$\begin{cases} a + 4b = 3 \quad (n = 2) \\ \\ a - 8b = -5 \quad (n = 3) \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3}$$

si bien que

$$\forall n \geq 2,\ D_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n.$$