Programmes des colles de la semaine 8, du 18 au 22 novembre 2023

Diagonalisation.

- u est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base de l'espace formée de vecteurs propres ou, de façon équivalente, lorsqu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
- Une matrice carrée (à coefficients dans $\mathbb{K}$) est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$) lorsqu'elle est semblable (sur $\mathbb{K}$) à une matrice diagonale ou, de façon équivalente, si son endomorphisme canoniquement associé (de $\mathbb{K}^n$) est diagonalisable.
- Un endomorphisme (resp. matrice carrée) est diagonalisable:
  - si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres = dimension de l'espace ambiant
  - ou si et seulement si toutes les racines de son polynôme caractéristique sont dans $\mathbb{K}$ et si multiplicité=dimension du sous-espace propre pour toute valeur propre (démonstration hors-programme).
- Application au calcul de puissances de matrices.

Trigonalisation

- Un endomorphisme u d'un espace E de dimension finie est dit trigonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle u est représenté par une matrice triangulaire.
- Une matrice carrée M est dite trigonalisable dans $\mathbb{K}$ lorsque M est semblable, dans $\mathbb{K}$, à une matrice triangulaire à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Théorèmes admis:
  - une matrice carrée à coefficients réels est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme caractéristique ne possède que des racines réelles,
  - toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
- Exemples concrets de trigonalisation (montrer que telle matrice 3×3 est semblable à telle matrice triangulaire).
- Application au calcul de puissances de matrices.

Courbes paramétrées planes. Le plan est muni d'un repère $\mathcal{R}$ une courbe est paramétrée par une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $f(t)$ est le point du plan de coordonnées $f(t)$ dans $\mathcal{R}$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur les notations: $t \mapsto M(t)$, $t \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right.$ etc.

- Exemples de recherche de domaines d'étude/éléments de symétries de la courbe.
- Notion de point régulier, de point stationnaire. Tangente en un point régulier, en un point stationnaire.
- Disposition locale d'une courbe: ordinaire, point d'inflexion, points de rebroussement de première et deuxième espèce.
- Utilisation de développements limités pour les études locales.
- Branches infinies; construction à partir de tableaux de variations.
- *Toutes les fonctions rencontrées seront de classe suffisante; aucune difficulté théorique ne sera soulevée.*