Chapitre I

Raisonnements, identités, complexes, systèmes (première année)

1 Logique, inclusion d'ensembles, injectivité, surjectivité, bijectivité, analyse-synthèse.

Comment démontrer une proposition?

- Cette question s'inscrit dans le cadre "on a des hypothèses, on veut aboutir à une conclusion".
- Ne pas partir de la conclusion!
- La proposition à démontrer est souvent une égalité (ou une inégalité).
- On partira alors du membre de gauche; dans ce membre de gauche, on essaiera de faire intervenir les hypothèses à notre disposition dans le but de faire apparaître le membre de droite désiré et on conclura.

Comment démontrer une équivalence $A \iff B$?

- Le plus souvent en deux temps.
- En supposant, et en écrivant clairement sur la copie: "on suppose que A a lieu"; on cherchera alors à établir B.
- En supposant ensuite que B a lieu et en cherchant alors à établir A.

Raisonnement par récurrence.

- Le raisonnement par récurrence est basé sur le principe suivant: si un bébé peut monter sur la première marche d'un escalier et s'il sait passer d'une marche à une autre, alors il peut atteindre n'importe quelle marche de l'escalier!
- Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Pour démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant un raisonnement par récurrence, on devra:
  - démontrer que la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie (étape appelée "initialisation" ou "amorce" de la récurrence, qui correspond à la faculté du bébé à gravir la première marche de l'escalier)
  - supposer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et démontrer alors, en utilisant les règles habituelles de la science mathématique, que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (étape appelée "hérédité").
  - On conclut la rédaction de la preuve par "du principe de récurrence, on déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$".
  - *Remarque.* De nombreuses démonstrations par récurrence reviennent à démontrer une identité du genre "$A_n = B_n$" (ou une inégalité). L'étape d'hérédité se déroulera alors très souvent de cette manière:
    * on partira de l'expression de A_{n+1},
    * on manipulera A_{n+1} dans le but d'exprimer A_{n+1} à l'aide de A_n,
    * on remplacera dans cette expressions A_n par B_n,
    * on conclura en faisant apparaître B_{n+1}.
  - ***Exemple typique.*** Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

* Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition: "$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$". Alors $\mathcal{P}_1$ est vraie puisque $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ alors que $\frac{1\times2\times3}{6} = 1$.
* Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et démontrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On part du membre de gauche de $\mathcal{P}_{n+1}$, dans lequel on cherche à faire apparaître le membre de gauche de $\mathcal{P}_n$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2.$$

* D'après l'hypothèse de récurrence, on peut alors écrire

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

et en conséquence

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[6(n+1)+n(2n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)\left[2n^2+7n+6\right]}{6}$$

et on voit en développant que $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$; on a donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},$$

et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
* Du principe de récurrence, on déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

- ***Récurrence forte.*** Certains raisonnements par récurrence nécessitent dans l'étape d'hérédité un recours à la proposition $\mathcal{P}_n$ et à la proposition $\mathcal{P}_{n-1}$. On parle alors de *récurrence forte.*

Exemple typique, très rigoureux

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{n+1} \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq a_n \leq n+2$.

- Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition: pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $1 \leq a_k \leq k+2$.

- $\mathcal{P}_1$ est vraie puisque $a_0 = a_1 = 1$.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi et donc que l'on a $1 \leq a_k \leq k+2$ pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$.
  * Puisque l'on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est que l'on suppose que $1 \leq a_k \leq k+2$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Pour démontrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, il n'y a plus qu'à démontrer que $1 \leq a_{n+1} \leq n+3$.
  * On a $a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n+1}$ et comme par hypothèse de récurrence,
  $$1 \leq a_n \leq n+2, \quad 1 \leq a_{n-1} \leq n+1,$$
  on a
  $$1 + \frac{1}{n+1} \leq a_n + \frac{a_{n-1}}{n+1} \leq n+2+\frac{n+1}{n+1} = n+2+1 = n+3$$
  et dans la mesure où $1 + \frac{1}{n+1} \geq 1$, on a bien $1 \leq a_{n+2} \leq n+3$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.
- Du principe de récurrence, on déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$ et en conséquence $1 \leq a_n \leq n+2$ pour tout entier n.

Contraposée.

- Une proposition $A \Longrightarrow B$ et sa contraposée $\text{non } B \Longrightarrow \text{non } A$ sont équivalentes.

  Exemples typiques.
  - "Toutes les chauve-souris sont des mammifères" est une affirmation que l'on peut reformuler en la proposition "si une certaine chose est une chauve-souris, alors c'est un mammifère".
  - Cette proposition est équivalente à sa contraposée: "si une certaine chose n'est pas un mammifère, alors ce n'est pas une chauve-souris".
  - "Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors la suite (u_n) tend vers 0".
  - En considérant sa contraposée, on en déduit donc que "si une suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ est divergente".

Réciproque.

- La réciproque de la proposition $A \Longrightarrow B$ est $B \Longrightarrow A$.
- Ces propositions ne sont pas équivalentes!
  - La proposition: "toutes les chauve-souris sont des mammifères" est vraie, mais la proposition réciproque "tous les mammifères sont des chauve-souris" est fausse!
  - La proposition: "si $\sum u_n$ est une série convergente, alors la suite (u_n) tend vers 0" est vraie, mais la proposition réciproque "si la suite (u_n) tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge" est fausse! Il est bien connu par exemple que la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente!

On ne confondra donc pas réciproque et contraposée, implication et équivalence!

Comment prouver une inclusion entre ensembles?

- Démontrer que $A \subset B$ revient à démontrer que tout élément de A appartient à B.
  - On partira alors d'un élément x de A; l'appartenance à l'ensemble B se traduit en général par le passage d'un "test".
  - On fera alors passer le test à x: son appartenance à A, qui se caractérise par une certaine qualité, doit être suffisante pour que le test soit passé avec succès.
- ***Exemple typique.*** soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Démontrer que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}\,(u \circ u)$.
  - Il s'agit donc de démontrer que tout élément appartenant à $\text{Ker}\,(u)$ appartient également à $\text{Ker}\,(u \circ u)$.
  - Soit donc $x \in \text{Ker}\,(u)$; on doit démontrer que $x \in \text{Ker}\,(u \circ u)$ i.e. $(u \circ u)(x) = \vec{0}$.
  - On a $(u \circ u)(x) = u(u(x))$, mais comme $x \in \text{Ker}\,(u)$, c'est que $u(x) = \vec{0}$.
  - On a alors $(u \circ u)(x) = u(\vec{0}) = \vec{0}$ (c'est une propriété bien connue des applications linéaires) i.e. $x \in \text{Ker}\,(u \circ u)$.
  - On a donc bien prouvé que $\text{Ker}\,(u) \subset \text{Ker}\,(u \circ u)$.
- ***Comment prouver que deux ensembles sont égaux?*** Naturellement, une égalité entre ensembles $A = B$ se prouvera par double inclusion: $A \subset B$ puis $B \subset A$, en procédant en deux étapes, bien distinctes. Typiquement, en algèbre linéaire, une seule inclusion pourra suffire en faisant valoir un argument de dimension.

Notions d'injectivité et de surjectivité. Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

- L'application f est dite ***injective*** dès lors que deux éléments quelconques différents de E ont des images différentes:
  $$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y).$$
  On démontre souvent l'injectivité par sa contraposée, en démontrant donc que si deux éléments ont la même image, c'est qu'ils sont égaux:
  $$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$
- *Exemples.*
  - $f : x \mapsto x^2$ n'est pas injective puisque deux réels non nuls opposés ont la même image.
  - Une application strictement monotone f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective (par exemple si f est strictement croissante, et $x \neq y$, on a soit $x < y$, et alors $f(x) < f(y)$, soit $x > y$ et alors $f(x) > f(y)$; dans les deux cas, $f(x) \neq f(y)$).
- L'application f est dite ***surjective*** dès lors que tout élément de l'ensemble d'arrivée F possède au moins un antécédent:
  $$\forall y \in F, \, \exists x \in E \ / \ f(x) = y.$$
- *Exemples.*
  - L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est surjective (car tout nombre > 0 possède deux racines carrées).
  - Mais l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas surjective (les nombres < 0 n'ont pas d'antécédent).

Comment démontrer qu'une application est bijective? Comment trouver sa réciproque?

- Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection de E dans F lorsque tout élément de F possède un unique antécédent par f;
- On prendra donc un élément quelconque y de F et on cherchera à prouver l'existence d'une seule solution à l'équation $f(x) = y$.
- Si tel est le cas, l'application réciproque f^{-1} est l'application qui à tout y de F associe son unique antécédent.
- Deux situations particulières typiques:
  - il est très fréquent de démontrer qu'une application f réalise une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J par des arguments de continuité et de stricte monotonie (cf. "théorème de la bijection"); il est à noter que l'expression de l'application réciproque f^{-1}, autrement dit la recherche effective des antécédents, est souvent inextricable.

– Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, on démontre très fréquemment que f réalise une bijection de E dans E en démontrant que $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ ou en démontrant que $\det(M) \neq 0$ où M est une matrice représentant f. L'expression de f^{-1} peut s'obtenir en recherchant un antécédent x à tout y de E, ce qui conduit en général à un système d'équations, ou passer par le calcul de M^{-1}.

Notion de restriction. Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et A une partie de E. La ***restriction*** de f à A est l'application $x \mapsto f(x)$ mais restreinte à A, ce qui signifie que son domaine de définition est A; on la note $f{\restriction}_A$.

- ***Exemple.*** La restriction d'une application peut avoir des propriétés que ne possède pas la fonction de départ. Par exemple, la fonction sinus n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa restriction à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'est.

Notion de prolongement. Soit $f : D =]\alpha, a[\cup]a, \beta[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ***Prolonger*** f au point a, c'est augmenter le domaine de définition de f en la définissant au point a par l'attribution d'une certaine valeur γ. On crée ainsi une nouvelle fonction $\overline{f}$, définie sur $]\alpha, \beta[$ par $\overline{f}(a) = \gamma$ et $\overline{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq a$.
- ***Exemple.*** Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
  - On peut prolonger f en 0 en posant $f(0) = -2$ mais ce prolongement n'est mathématiquement pas intéressant.
  - On peut prolonger f en 0 en posant $f(0) = 1$ ce qui est beaucoup plus intéressant car l'application $\overline{f}$ est alors continue en 0 (classique, car on sait que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0).

Raisonnement par analyse-synthèse.

- C'est un principe qui s'apparente à une enquête judiciaire qui se termine au tribunal: les enquêteurs cherchent à accumuler suffisamment de preuves pour rendre possible la démonstration de la culpabilité de l'accusé au tribunal.
- En mathématiques, on peut être amené à effectuer un raisonnement par analyse-synthèse pour prouver l'existence et l'unicité de certains objets, typiquement pour démontrer qu'une fonction, un vecteur peut se décomposer à l'aide d'autres fonctions, d'autres vecteurs. Ce raisonnement s'effectue en deux étapes:
  - on suppose dans un premier temps que ce que l'on cherche à démontrer est vrai; on s'efforce alors de trouver, par des déductions, des propriétés qui caractérisent le ou les objets dont on est à la recherche: cela doit conduire à trouver un seul objet vérifiant ces propriétés (les enquêteurs constatent le crime: par des relevés, des interrogatoires, leur enquête conduit à un suspect). Cette phase s'appelle l'analyse.
  - La deuxième phase est la synthèse: on démontre que l'objet trouvé lors de l'analyse est effectivement solution du problème (la justice est amenée à prouver la culpabilité du suspect lors de son procès).
  - Il peut arriver que l'analyse aboutisse à trouver plusieurs objets; dans l'analyse, il faudra alors déterminer lequel de ces objets est effectivement la solution du problème.
- ***Exemple typique.*** Démontrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
  - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - *Analyse.* Supposons que l'on puisse écrire $f = g + h$, où g est une fonction paire et h une fonction impaire. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(x) - h(x) \end{cases}$$
(car g est censée être paire, donc $g(-x) = g(x)$ et h est censée être impaire, donc $h(-x) = -h(x)$). En faisant $\frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ puis $\frac{1}{2}(L_1 - L_2)$, on obtient
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) &= g(x) \\ \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) &= h(x). \end{cases}$$
L'analyse conduit donc aux seuls "suspects" $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
  - *Synthèse.* Démontrons que $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ est paire, que $h : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ est impaire et que $f = g + h$.
    - ∗ On a $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$, donc g est paire.
    - ∗ On a $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -h(x)$, donc h est impaire.
    - ∗ $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$.
  - En conclusion, on a démontré l'existence et l'unicité d'une fonction paire g et d'une fonction h impaire telles que $f = g + h$ (l'unicité est assurée par l'analyse, qui a conduit à un unique couple (g, h)).

2 Identités remarquables

Théorème I.2.1 Pour tous nombres réels ou complexes:

- ⋆ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- ⋆ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- ⋆ $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- ⋆ $(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3$
- ⋆ $(a_1 + \ldots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$
- ⋆ $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- ⋆ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- ⋆ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Exercice 1 Factoriser

(1) $x^3 - 8y^3$

(2) $x^3 + 8y^3$

(3) $a^3 - 5b^3$.

Exercice 2 Développer

(1) $(2x + 3iy)^2$

(2) $(3x - 2y)^3$

(3) $(x + 2y - 1)^2$

3 Trigonométrie

Théorème I.3.2

- *Formules d'addition:*

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a\cos b+\sin b\cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b-\sin b\cos a\\
\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b+\sin a\sin b\\
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x\\
\cos(2x) &= 2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x\\
\sin a+\sin b &= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\\
\sin a-\sin b &= 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\\
\cos a+\cos b &= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\\
\cos a-\cos b &= -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.
\end{aligned}$$

- *Formules de linéarisation:*

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2}\\
\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 Exprimer $\sin(2a+b)$ en fonction de $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$ et $\cos b$.

Exercice 4 Exprimer

(1) $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$

(2) $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

4 Nombres complexes

4.1 Module, argument, identités, écriture trigonométrique

Définition I.4.1 ***Module, conjugaison des nombres complexes.*** Pour tout nombre complexe $z=a+ib$ avec $a=\operatorname{Re} z$ et $b=\operatorname{Im} z$, on note

$$\overline{z}=a-ib$$

le conjugué de z.
Le module $|z|$ de z est défini par

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}.$$

Proposition I.4.3 ***Propriétés de la conjugaison et du module.*** Pour tous complexes z, z_1, z_2 et tout entier n, on a alors

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= z\overline{z}\\
&= a^2+b^2\\
\overline{z_1+z_2} &= \overline{z_1}+\overline{z_2}\\
\overline{z_1z_2} &= \overline{z_1}\times\overline{z_2}\\
\overline{z^n} &= \overline{z}^n\\
|z_1z_2| &= |z_1|\times|z_2|\\
|z^n| &= |z|^n\\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}.
\end{aligned}$$

Calcul de la partie réelle ou imaginaire d'une fraction

Soit à calculer la partie réelle (ou imaginaire) d'un nombre de la forme $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$. On multipliera alors numérateur et dénominateur par $\overline{Z_2}$:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{Z_1}{Z_2}\\
&= \frac{Z_1\overline{Z_2}}{Z_2\overline{Z_2}}\\
&= \frac{Z_1\overline{Z_2}}{|Z_2|^2}.
\end{aligned}$$

La quantité $|Z_2|^2$ étant réelle,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(Z) &= \operatorname{Re}\left(\frac{Z_1\overline{Z_2}}{|Z_2|^2}\right)\\
&= \frac{1}{|Z_2|^2}\operatorname{Re}(Z_1\overline{Z_2})\\
\operatorname{Im}(Z) &= \operatorname{Im}\left(\frac{Z_1\overline{Z_2}}{|Z_2|^2}\right)\\
&= \frac{1}{|Z_2|^2}\operatorname{Im}(Z_1\overline{Z_2})
\end{aligned}$$

ce qui a "chassé" les complexes du dénominateur.

Exercice 5 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants:

(1) $z_1=\frac{2+3i}{1-4i}$

(2) $z_2=\frac{i}{2-i}$

(3) $z_3=\frac{2}{2i-4}$.

Théorème I.4.4

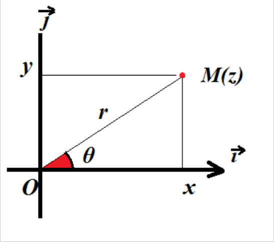
- ***Exponentielle complexe.*** Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$. Alors
$$\left|e^{i\theta}\right| = 1, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}.$$
- ***Formule de De Moivre.*** Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{Z}$:
$$\begin{array}{rcl}(e^{i\theta})^n & = & e^{in\theta}\\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n & = & \cos n\theta + i\sin n\theta.\end{array}$$
- ***Formule d'Euler.***
$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}).$$
- ***Exponentielle moitié.*** Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,
$$1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$1-e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 6 Utiliser les formules d'Euler et le développement de $(a+b)^3$ pour linéariser $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$.

Exercice 7 Utiliser la formule de de Moivre pour exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Théorème I.4.5 ***Écriture trigonométrique d'un nombre complexe.*** Soit z un nombre complexe non nul et $r=|z|$.

- Alors il existe un unique réel θ (modulo 2π) tel que $z = re^{i\theta}$. On dit que θ est un argument de z.
- Cette écriture sous la forme
$$\text{réel positif } \times e^{i\theta}$$
est unique (à un multiple de 2π près pour θ) et s'interprète géométriquement ainsi:

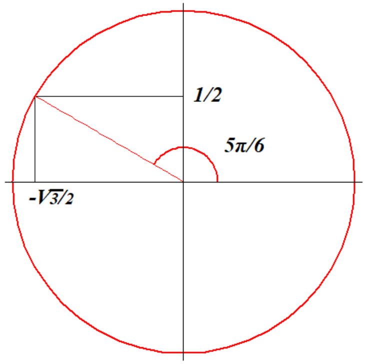


Ainsi, le point du plan M ayant pour affixe le nombre complexe z:
  - $|z| = OM$
  - θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$.
- Lorsque $z = a+ib$ (avec a,b réels), l'égalité
$$\begin{array}{rcl} z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta+i\sin\theta) & = & \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)\\ & = & a+ib\end{array}$$
donne par identification des parties réelles et imaginaires:
$$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{array}\right.$$

Exemple

Déterminer un argument du nombre complexe
$$z = -2\sqrt{3}+2i.$$

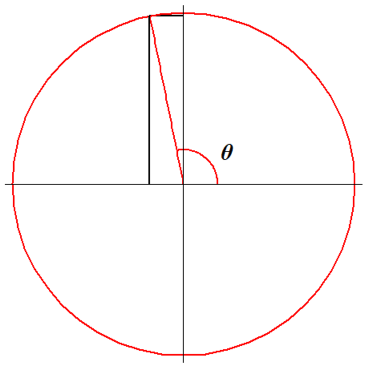
- On a $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2} = \sqrt{12+4} = 4.$
- Un argument θ de z vérifie donc
$$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.\end{array}\right.$$



- Le réel
$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$
est donc un argument de z.

Remarque. Certaines valeurs peuvent ne pas être remarquables! Par exemple, déterminer un argument du nombre complexe
$$z = -1 + 5i.$$

- On a $|z| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$
- Un argument θ de z vérifie donc
$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{26}} \\ \sin\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}. \end{cases}$$
- Puisque
$$\cos\theta < 0, \quad \sin\theta > 0,$$
on en déduit donc dans un premier temps:
$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$
et en particulier, $\theta \in [0, \pi]$.



- Or la fonction $\cos$ établit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ dont l'application réciproque est $\arccos$. C'est pourquoi
$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right).$$

Exercice 8 Déterminer un argument des nombres complexes suivants:

(1) -3

(2) $-2i$

(3) $\sqrt{3} + 3i$

(4) $1 + i$

(5) $1 - i$

(6) $-1 - i$.

4.2 Racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe; équations du deuxième degré

Racines n-ièmes de l'unité

Théorème I.4.6 Pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $z^n = 1$ possède n racines distinctes, appelées racines n-ièmes de l'unité: ce sont les complexes ω_k définis par
$$\omega_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$$
avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ (ou toute autre suite de n entiers consécutifs, comme $[\![1, n]\!]$). Le nombre 1, évidemment racine n-ème de l'unité, correspond à $k = 0$.
Ces nombres sont situés sur le cercle unité et sont les sommets d'un polygône régulier.
Leur somme est nulle.

Exemple

Les racines 3-ièmes de l'unité sont les nombres
$$1, \quad e^{2i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{4i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
On note $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$; alors les racines 3-ième de l'unité sont $1, j, j^2$ et
$$j^2 = e^{4i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}.$$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Théorème I.4.7 Pour tout nombre complexe $Z \neq 0$ et tout entier $n \geq 1$, l'équation $z^n = Z$ possède n racines distinctes, appelées racines n-ièmes de Z: ce sont les complexes z_k définis par
$$z_k = |Z|^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{i\theta_0}{n}}\, e^{2i\frac{k\pi}{n}},$$
où θ_0 est un argument de Z et $k \in [\![0, n-1]\!]$ (ou toute autre suite de n entiers consécutifs).

Exemple

Quelles sont les racines 4-ièmes de -1?

- Dans la mesure où -1 a pour argument π et module 1, on a

$$-1 = e^{i\pi}.$$

Avec les notations ci-dessus, on a donc $\theta_0 = \pi$ et $|Z| = 1$.

- Les racines 4-ièmes de -1 sont donc les nombres complexes $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{k\pi}{4}}$, $k \in \{0,1,2,3\}$, c'est à dire les nombres

$$\left\{ \begin{array}{c} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \\ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(-i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i). \end{array} \right.$$

Autre exemple

Soit un entier $n \geq 2$. Déterminer les racines n-ièmes du nombre complexe $1+i$.

- On a clairement

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

- Les racines n-ièmes du nombre complexe $1+i$ sont donc les nombres

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\pi}{4n}} e^{2i\frac{k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]$$

c'est à dire les nombres

$$2^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{i\pi}{n}\left(\frac{1}{4}+2k\right)},\ k \in [\![0, n-1]\!].$$

Racine carrée d'un nombre complexe

Ne pas confondre racine carrée dans $\mathbb{R}$:

- elle n'existe que sur $\mathbb{R}^+$,
- elle est unique,
- elle est notée $\sqrt{x}$

avec racine carrée dans $\mathbb{C}$:

- elle n'est pas unique: il y en a deux et elles sont opposées,
- elles existent pour tout nombre complexe,
- elles ne sont pas "notées".

Théorème I.4.8 Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Alors Z possède deux racines carrées i.e. il existe deux nombres complexes z tels que

$$z^2 = Z.$$

On les obtient en suivant ce protocole: on pose $z = x + iy$ et puisque $z^2 = Z$ donne $|z^2| = |Z|$, c'est à dire $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$, on a

$$\begin{aligned} z^2 = Z \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} (x+iy)^2 = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2}, \end{array} \right. \end{aligned}$$

système qui donne x^2, donc deux valeurs pour x, puis y.

Exemple

Déterminer les racines carrées de $3 + 4i$. Soit $z = x + iy$; alors

$$z^2 = 3 + 4i \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{3^2+4^2} \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & = & 4 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -2 \\ y & = & -1 \end{array} \right.$$

donc les racines carrées de $3 + 4i$ sont les nombres complexes $2 + i$ et $-2 - i$.

Proposition I.4.9 ***Cas particulier des racines d'un nombre négatif.*** Soit $b \in \mathbb{R}$ avec $b < 0$. Alors les racines carrées complexes de b sont les nombres complexes $i\sqrt{-b}$ et $-i\sqrt{-b}$.

Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré

Proposition I.4.10 On se donne trois nombres complexes a, b, c avec $a \neq 0$ et on considère l'équation du second degré

$$(E): \quad az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On pose à cet effet $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$, on calcule les deux racines carrées δ et $-\delta$ de Δ.
- L'équation (E) possède alors deux racines, les nombres complexes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (E) possède une seule racine, le nombre complexe $z = -\frac{b}{2a}$.

Avec les notations précédentes:

Proposition I.4.11 ***Cas particulier de coefficients réels.*** Si a, b, c sont réels:

- Si $\Delta > 0$, les racines sont les réels $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$, $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$.
- Si $\Delta < 0$, les racines sont les complexes $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2}$, $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2}$.

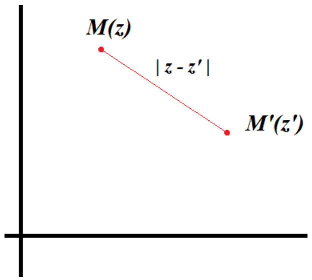
4.3 Interprétation géométrique: affixes, transformations géométriques élémentaires

Affixes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition I.4.2

- À tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$, appelé affixe de M.
- À tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$, appelé affixe de $\vec{u}$.
- Si A a pour affixe a et B a pour affixe b, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.
- ***Module et distance.*** Soit z, z' deux nombres complexes; alors $|z - z'|$ est la distance du point M d'affixe z au point M' d'affixe z': le module (comme la valeur absolue mais entre nombres réels) est l'instrument de mesure de la distance entre nombres complexes.



Affixes et transformations géométriques élémentaires

Proposition I.4.12

- *Translation:* $z \mapsto z + a$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.
- *Symétrie:* $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- *Rotation:* $z \mapsto e^{i\theta} z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.
- *Homothétie:* $z \mapsto k(z - \omega) + \omega$ est l'homothétie de centre Ω, point d'affixe ω et de rapport k (avec $k \in \mathbb{R}$).

Affixes et colinéarité

Proposition I.4.13

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (supposés non nuls) ont pour affixe a et b, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \iff \bar{a}b \in \mathbb{R}$.

Preuve: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v} = \lambda \vec{u} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, b = \lambda a \iff \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \iff \frac{b\bar{a}}{a\bar{a}} \in \mathbb{R} \iff b\bar{a} \in \mathbb{R}$$

(car $a\bar{a} = |a|^2$ est réel).

Affixes et alignement

Proposition I.4.14

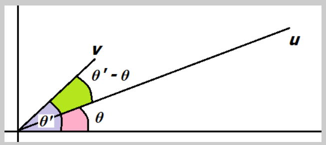
- Les points A, B, C, deux à deux distincts et d'affixe a, b, c, sont alignés $\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Preuve: A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc, de ce qui précède, si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Argument et angle de vecteurs

Proposition I.4.15

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls, ont pour affixe a et b, alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\arg\left(\frac{b}{a}\right)$.



Preuve. Posons $\theta = \arg(a)$ et $\theta' = \arg(b)$. Alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\theta' - \theta$. Or

$$a = |a|\, e^{i\theta}, \quad b = |b|\, e^{i\theta'} \implies \frac{b}{a} = \left|\frac{b}{a}\right| e^{i(\theta' - \theta)}$$

ce qui prouve que $\theta' - \theta$ est un argument de $\frac{b}{a}$.

5 Polynômes

5.1 Généralités: degré, identification, fonction associée, dérivées, Taylor

Définition I.5.3

- Le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les coefficients de $\mathbb{K}$ et X est l'indéterminée, est aussi noté $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec la convention $X^0 = 1$.
- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme de degré n, le coefficient a_n est appelé coefficient dominant.
- Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
- Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1, donc de la forme

$$P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n.$$

- Si P et Q sont deux polynômes, alors

$$\begin{aligned} \deg(P \times Q) &= \deg(P) + \deg(Q) \\ \deg(P + Q) &\leq \max\{\deg P, \deg Q\}. \end{aligned}$$

Remarque. Formellement, un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ qui est nulle à partir d'un certain rang. Lorsque cette suite n'est pas la suite nulle, on appelle degré de P le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré du polynôme $P = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.

Structure de l'ensemble des polynômes

Définition I.5.4 Pour les opérations d'addition des polynômes entre eux (loi interne) et de multiplication des polynômes par un scalaire (loi externe):

- l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- L'entier $n \in \mathbb{N}$ étant donné, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont le degré est inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$; c'est un espace vectoriel de dimension $n+1$ dont $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base.

Dérivation des polynômes

Théorème I.5.16

- Le ***polynôme dérivé*** du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est le polynôme P' défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

- Lorsque $\deg(P) \geq 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
- On définit les polynômes dérivés successifs $(P^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ de P par

$$P^{(0)} = P, \quad \forall j \in \mathbb{N},\ P^{(j+1)} = (P^{(j)})'.$$

- Si $\deg(P) = n$, alors $P^{(j)} = 0$ pour tout entier $j \geq n+1$.

Fonction polynomiale associée

Définition I.5.5 La ***fonction polynomiale associée*** au polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ est la fonction

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

Remarques.

- Il résulte des définitions que la fonction polynomiale associée au polynôme dérivé P' d'un polynôme P est la dérivée (au sens usuel de dérivation des fonctions) de la fonction polynomiale associée à P.
- Formellement, ce n'est pas le même objet que P, de même que la fonction constante égale à 1 n'est pas le même objet mathématique que l'entier 1. L'utilisation de la même lettre pour désigner le polynôme et la fonction polynomiale associée ne pose pas de problème.

Exemple

Soit $P = 2 + X - X^3$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 P(x)\,dx &= \int_0^1 (2 + x - x^3)\,dx \\ &= \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Principe d'identification des polynômes

Théorème I.5.17

- Deux fonctions polynomiales coïncident sur un intervalle I, c'est à dire

$$\forall x \in I, \quad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

si et seulement si $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

- En particulier une égalité telle que

$$\forall x \in I, \quad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

équivaut à $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Exemple typique

Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

- On a
$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$
donc $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ équivaut à
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}, \quad 1 = (a+b)x+a-b$$
i.e.
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}, \quad (a+b)x+a-b-1 = 0$$
donc à $a+b=0$ et $a-b-1=0$.
- On trouve $a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$, d'où
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Théorème I.5.18 ***Formule de Taylor pour les polynômes.*** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n = \deg P$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors
$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Remarquons que si $\deg P \leq n$, la formule ci-dessus est encore juste, puisque si $\deg(P) = r < n$, les dérivées $P^{(r+1)}, \ldots, P^{(n)}$ sont nulles et les termes de la somme ci-dessus pour k variant de $r+1$ à n sont alors nuls.

Exercice 10 Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}.$$

Exercice 11 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 12

(1) Soit P un polynôme, autre que le polynôme nul et vérifiant
$$P'^2 = 4P.$$
Déterminer le degré d de P.

(2) En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P'^2 = 4P$.

5.2 Racines, multiplicité, somme et produit des racines. Polynômes scindés

Racines

Définition I.5.6

- Une racine de P dans $\mathbb{K}$ (on dit aussi un zéro de P) est un élément $a \in \mathbb{K}$ tel que $P(a) = 0$.
- Ceci se produit si et seulement si $X-a$ divise P c'est à dire si l'on peut écrire $P = (X-a)Q$ où Q est un polynôme.

Proposition I.5.19 ***Nombre maximum de racines; lien avec le polynôme nul.***

- Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}$ possède *au plus* n racines distinctes.
- Donc un polynôme possédant strictement plus de racines que son degré est le polynôme nul.
- Le seul polynôme possédant une infinité de racines est le polynôme nul.

Exemple

Soit P et Q deux polynômes tels que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad P(\sin t) = Q(\sin t).$$

Démontrer que $P = Q$.

- Lorsque t parcourt $[0, \frac{\pi}{2}]$, le réel $\sin t$ parcourt la totalité de l'intervalle $[0,1]$. On peut donc affirmer:
$$\forall x \in [0,1], \quad P(x) = Q(x).$$
- Tous les réels de l'intervalle $[0,1]$ sont donc des racines du polynôme $P-Q$.
- Le polynôme $P-Q$ possède donc une infinité de racines; dès lors, $P-Q$ est le polynôme nul. Ainsi, $P=Q$.

Exercice 13 Soit P et Q deux polynômes tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = Q(n).$$

Démontrer que $P = Q$.

Exercice 14 Soit P un polynôme tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P^2(\arctan t) = 0.$$

Démontrer que P est le polynôme nul.

Exercice 15 Soit P et Q deux polynômes à coefficients réels tels que

$$\forall t \in [0,\pi], \quad P'(\cos t) = Q'(\cos t).$$

Démontrer qu'il existe un réel k tel que $P = Q + k$.

Exercice 16 Soit un entier $N \geq 1$ et P un polynôme de degré $\leq N$ tel que

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad P(k) = 0.$$

Démontrer que P est le polynôme nul.

Factorisation après avoir trouvé une racine

Proposition I.5.20 Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ dont on connaît une racine a. On peut déterminer le polynôme Q tel que $P = (X-a)Q$:

- en écrivant Q sous la forme $b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}$,
- en développant $(X-a)(b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1})$
- et en identifiant ce développement avec le polynôme P, ce qui conduit à un système.

Exemple

Soit $P = X^3 - 3X - 2$.

- On a $P(-1) = 0$,
- En écrivant $P = (X+1)(aX^2 + bX + c)$, on a

$$(X+1)(aX^2 + bX + c)) = aX^3 + (b+a)X^2 + (b+c)X + c.$$

  – On a donc d'après le principe d'identifiaction de deux polynômes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b+a & = & 0 \\ b+c & = & -3 \\ c & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & -2 \end{array}\right.$$

  d'où $P = (X+1)(X^2 - X - 2)$.

  – On poursuit la factorisation en recherchant les racines de $X^2 - X - 2$. On trouve les racines 1 et -2 et alors:

$$X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$$

  et finalement

$$\begin{array}{rcl} P & = & (X+1)(X+1)(X-2) \\ & = & (X+1)^2(X-2). \end{array}$$

Exercice 17 Soit $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

(1) Vérifier que -2 est racine de P.

(2) Factoriser P sous la forme $P = (X+2)Q$ et en déduire les autres racines de P.

Ordre de multiplicité: définition fondamentale

Définition I.5.7 Une racine a du polynôme P est dite d'ordre de multiplicité α ($\alpha \in \mathbb{N}$) lorsque $(X-a)^\alpha$ divise P et $(X-a)^{\alpha+1}$ ne divise pas P, c'est à dire lorsque l'on peut écrire

$$P(X) = (X-a)^\alpha Q(X)$$

où Q est un polynôme tel que $Q(a) \neq 0$.

Exemple

Soit $P = (X+2)^3(X-4)$. Alors -2 est une racine de P de multiplicité 3 (on dit aussi racine triple) de P alors que 4 est une racine de P de multiplicité 1 (on dit aussi racine simple) de P.

Proposition I.5.21 Une racine a du polynôme P est de multiplicité *au moins égale à* α ($\alpha \in \mathbb{N}$) lorsque $(X-a)^\alpha$ divise P, c'est à dire lorsque l'on peut écrire

$$P(X) = (X-a)^\alpha Q(X)$$

où Q est un polynôme.

Exemple

Soit B un polynôme et

$$P = (X+2)^3 B.$$

Alors -2 est une racine de P de multiplicité au moins 3. La connaissance de la multiplicité exacte de -2 dépend bien entendu de B:

- Si $B = X - 4$, -2 n'est pas racine de B et alors -2 est une racine de P de multiplicité 3.
- Si $B = (X+2)^2(X-4)$, -2 est une racine de P de multiplicité 5.
- Si -2 est une racine de B (sans en connaître sa multiplicité!), alors B est divisible par $X+2$, donc P est divisible par $(X+2)^4$ et -2 est une racine de P de multiplicité au moins égale à 4.

Théorème I.5.22 ***Résultat fondamental.*** Une racine a de P est de multiplicité α si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(\alpha-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(\alpha)}(a) \neq 0.$$

Exemple

Soit $P = 6X^3 + 11X^2 + 4X - 1$. Alors -1 est racine de multiplicité 2 (on dit aussi racine double) de P car:

- $P(-1) = -6 + 11 - 4 - 1 = 0$ donc -1 est une racine de P,
- $P' = 18X^2 + 22X + 4$
- $P'(-1) = 18 - 22 + 4 = 0$. Ainsi, -1 est également une racine de P'.
- $P'' = 36X + 22$ donc $P(-1) = -36 + 22 = -14 \neq 0$. Ainsi, -1 n'est pas racine de P''. On en déduit que -1 est une racine de P multiplicité 2.
- On en conclut que l'on peut écrire P sous la forme $P = (X+1)^2 Q$ et en recherchant Q sous la forme $Q = aX + b$, on trouve aisément par identification $Q = 6X - 1$.
- Ainsi, $P = (X+1)^2(6X-1)$ et on en conclut que P possède la racine double -1 et la racine simple $\frac{1}{6}$.

Théorème I.5.23 ***Conséquences.*** Soit P un polynôme et $a \in \mathbb{K}$.

- Alors a est une racine de P de multiplicité au moins égale à 2 si et seulement si

$$P(a) = 0, \ P'(a) = 0.$$

- De même, a est une racine de P de multiplicité au moins égale à 3 si et seulement si

$$P(a) = 0, \ P'(a) = 0, \ P''(a) = 0$$

  et ainsi de suite.

Exercice 18 Soit $P = 2X^4 - 5X^3 - 12X^2 - X + 4$.

(1) Vérifier que -1 est racine de P et déterminer sa multiplicité.

(2) En déduire les autres racines de P.

Racine complexe d'un polynôme à coefficients réels

Proposition I.5.24 Si $z \in C$ est une racine de multiplicité α du polyôme *à coefficients réels* P, alors $\overline{z}$ est également une racine de P, avec la même multiplicité α.

Démonstration 1

Exemple

Soit $P = X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 4X^2 + X - 2$.

- Alors

$$\begin{array}{rcl} P(i) & = & i^5 - 2i^4 + 2i^3 - 4i^2 + i - 2 \\ & = & i - 2 - 2i + 4 + i - 2 \\ & = & 0 \\ P' & = & 5X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 8X + 1 \\ P'(i) & = & 5i^4 - 8i^3 + 6i^2 - 8i + 1 \\ & = & 5 + 8i - 6 - 8i + 1 \\ & = & 0 \\ P'' & = & 20X^3 - 24X^2 + 12X - 8 \\ P''(i) & = & 20i^3 - 24i^2 + 12i - 8 \\ & = & -20i + 24 + 12i - 8 \\ & = & -8i + 16 \\ & \neq & 0, \end{array}$$

  ce qui démontre que i est une racine de P de multiplicité 2. On peut donc écrire P sous la forme

$$P = (X - i)^2 Q,$$

  où Q est un polynôme de degré 3.

- Puisque P est à coefficients réels, on en déduit que $-i$ est également une racine de P de multiplicité 2. On peut donc écrire P sous la forme

$$\begin{array}{rcl} P & = & (X - i)^2 (X + i)^2 R \\ & = & (X^2 + 1)^2 R, \end{array}$$

  où R est un polynôme de degré 1.

- En écrivant $R = aX + b$, on voit immédiatement par considération des termes de plus haut degré dans l'égalité

$$X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 4X^2 + X - 2 = (X^2 + 1)^2 (aX + b)$$

  que $a = 1$ et par considération des termes constants, on voit que $b = -2$.

- Ainsi,

$$X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 4X^2 + X - 2 = (X^2 + 1)^2 (X - 2).$$

Somme et produit des racines d'un polynôme

Théorème I.5.25 Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ un polynôme de degré n et $z_1, \ldots, z_n$ ses racines, chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité. Alors

$$z_1 + \ldots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad z_1 \times \ldots \times z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

En particulier, si $P = aX^2 + bX + c$ la somme s et p des racines de P sont données par

$$s = -\frac{b}{a}, \quad p = \frac{c}{a}.$$

Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

On se donne deux nombres s et p (réels ou complexes) et l'on recherche deux nombres x_1 et x_2 (réels ou complexes) tels que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p. \end{cases}$$

Le report de L_1 : $x_2 - s - x_1$ dans L_2 donne

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases} & \Longleftrightarrow & \begin{cases} x_2 = s - x_1 \\ x_1(s - x_1) = p \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} x_2 = s - x_1 \\ x_1^2 - sx_1 + p = 0. \end{cases} \end{array}$$

Ainsi, x_1 et x_2 (mêmes calculs) sont les racines du polynôme

$$X^2 - sX + p.$$

Polynôme scindé

Définition I.5.8 Un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ si on peut l'écrire comme produit de polynômes du premier degré de $\mathbb{K}[X]$, donc s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$P = a_n (X - \lambda_1) \times \ldots \times (X - \lambda_n)$$

Les éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de P; en regroupant les racines distinctes, en les renommant $r_1, \ldots, r_p$ avec leurs ordres de multiplicité respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, le polynôme P s'écrit alors

$$P = a_n (X - r_1)^{\alpha_1} \times \ldots \times (X - r_p)^{\alpha_p},$$

auquel cas

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n.$$

Remarque. La présence du facteur a_n s'explique par la comparaison des termes de degré n des deux membres de l'égalité

$$a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n = a_n (X - \lambda_1) \times \ldots \times (X - \lambda_n).$$

Exemples

- Le polynôme $P = X^2 - 4$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ puisque l'on a
$$P = (X-2)(X+2).$$
- Le polynôme $P = X^2 + 4$ est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ puisque l'on a
$$P = (X-2i)(X+2i).$$
- Le polynôme $P = X^2 + 4$, sans racine réelle, n'est donc pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - z^2 - z - 2 = 0$ sachant que la somme de deux des racines vaut -1.

5.3 Divisibilité, division euclidienne

Divisibilité

Définition I.5.9 Le polynôme B divise le polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$. On dit alors que A est un multiple de B et que B est un diviseur de A.

Exemples

- $B = X - 2$ divise $A = (X-2)(2X^2+2)$.
- Soit $A = 3X^3 - 6X^2 - X + 2$; alors 2 est racine de A et on peut donc écrire A sous la forme $A = (X-2)Q$. C'est pourquoi $X - 2$ divise A.
- Soit $A = 2X^3 - 4X^2 - X + 3$; alors 2 n'est pas racine de A. C'est pourquoi $X - 2$ ne divise pas A.

Division euclidienne

Théorème I.5.26 Quels que soient les polynômes A et B dans $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, il existe un couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que
$$\begin{array}{rcl} A & = & BQ + R \\ \deg(R) & < & \deg(B) \end{array}$$
et un tel couple est unique. Q est appelé quotient et R reste dans la division de A par B. De façon évidente, le polynôme B divise le polynôme A si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

Premier exemple

En présence de polynômes dont les degrés sont concrets, on peut poser la division:
$$\begin{array}{rrl|l} & X^3 + X^2 & + X - 1 & X^2 - 1 \\ - & X^3 & + X & X + 1 \\ \hline & & X^2 + 2X - 1 & \\ & - & X^2 \quad\quad + 1 & \\ \hline & & 2X & \end{array}$$

Ainsi,
$$X^3 + X^2 + X - 1 = (X^2-1)(X+1) + 2X.$$
On peut aussi procéder par développement et identification: dans la division euclidienne
$$X^3 + X^2 + X + 1 = B(X^2 - 1) + R, \quad \deg(R) < 2,$$
on en déduit que B est de degré 1. On écrit donc a priori
$$X^3 + X^2 + X + 1 = (aX + b)(X^2 - 1) + cX + d.$$
Après développement et identification, on trouve $B = X + 1$ et $R = 2X$.

Deuxième exemple, typique

Déterminer le reste dans la division euclidienne du polynôme X^p par le polynôme $P = (X-1)(X-2)$.

! Surtout ne pas "poser" les divisions: cette disposition de calcul ne fonctionne qu'avec des polynômes dont les degrés sont "concrets".

- ***Méthode importante.*** On écrit
$$X^p = PQ + R, \tag{5.1}$$
avec $\deg(R) < \deg(P)$, donc $\deg(R) < 2$ et R s'écrit alors $R = aX + b$.
- On "remplace" X par 1 puis par 2 dans (5.1), à savoir par les racines de P (rigoureusement, on considère les fonctions polynomiales associées, que l'on applique ensuite en $x = 1$ et en $x = 2$); on obtient:
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = P(1)Q(1) + R(1) \\ 2^p = P(2)Q(2) + R(2) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 1 = a + b \\ 2^p = 2a + b \end{array} \right.$$
car $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$, donc les produits $P(1)Q(1)$ et $P(2)Q(2)$ sont nuls.
- On résout le système, on obtient $a = 2^p - 1$, $b = 2 - 2^p$ et donc
$$R = (2^p - 1)X + 2 - 2^p.$$

Exercice 20 Soit a et b des nombres réels, $A = X^3 + 2X^2 + aX + b$ et $B = X^2 + X + 1$. Déterminer les réels a et b de façon à ce que B divise A.

Exercice 21 On considère les polynômes
$$P = X^4 - X + b, \quad Q = X^2 - aX + 1$$
où a et b sont deux réels.

(1) Effectuer la division euclidienne de P par Q.

(2) Résoudre l'équation $a^3 - 2a - 1 = 0$.

(3) En déduire toutes les valeurs de a et b telles que Q divise P.

Exercice 22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de A_n par B dans les cas suivants:

(1) $A_n = (X-3)^n + (X-2)^n - 2$, $B = (X-3)(X-2)$.

(2) $A_n = nX^{n+1} - nX^n + 2n$, $B = (X-1)^2$. *On observera dans ce cas* que 1 est racine double de B et que l'on aura donc intérêt à dériver l'égalité $A = BQ + R$.

5.4 Polynômes irréductibles. Théorème de d'Alembert; décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles

Polynômes irréductibles

Définition I.5.10 Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 1 est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X)$ lorsqu'il est impossible d'écrire P sous la forme de produit de deux polynômes dont chacun a un degré ≥ 1. En d'autres termes, P est irréductible lorsque les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes et les multiples scalaires de P:

$$\big(P = AB,\ (A,B) \in \mathbb{K}[X] \times K[X]\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(A = \text{constante},\ B = \lambda P\big) \text{ ou } \big(B = \text{constante},\ A = \lambda P\big).$$

Exemples

- X^3+1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ puisqu'en utilisant l'identité de Bernoulli
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2),$$
on a
$$X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1).$$
Ce même polynôme n'est pas irréductible non plus dans $\mathbb{C}[X]$ puisque cette égalité est encore valable dans $\mathbb{C}[X]$!
- X^2+1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$, puisque
$$X^2+1 = (X+i)(X-i).$$
- Mais X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ puisque dans le cas contraire, on pourrait écrire
$$X^2+1 = AB$$
avec A et B dans $\mathbb{R}[X]$ et tous deux du premier degré. Or un polynôme du premier degré de $\mathbb{R}[X]$ possède évidemment une racine dans $\mathbb{R}$; ainsi, A et B possèdent chacun une racine dans $\mathbb{R}$ et en conséquence X^2+1 aussi, ce qui est absurde.
- *Attention! Un polynôme sans racine peut fort bien ne pas être irréductible!* Le polynôme $(X^2+1)^2$ ne possède pas de racine dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ puisque
$$(X^2+1)^2 = (X^2+1) \times (X^2+1).$$

Théorème de d'Alembert

Théorème I.5.27

- Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont uniquement les polynômes de degré 1.
- Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ s'écrit de manière unique comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et peut alors s'écrire
$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$
ou encore
$$P = a_n \prod_{\ell=1}^{r} (X - z_\ell)^{\alpha_\ell}$$
où $z_1, \ldots, z_r$ sont les r racines de P deux à deux distinctes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leurs multiplicités; on a alors $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.
- Ainsi, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ possède n racines, chacune étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité.

Exemples de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

La décomposition d'un polynôme s'obtient le plus souvent en recherchant ses racines ou/et en se basant sur une astuce de factorisation.

- Les racines de X^4-1 sautent aux yeux: 1, -1 i et $-i$. Ainsi,
$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$$
est la décomposition de X^4-1 en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
- Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$,
$$X^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$
est, dans la mesure où les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont ses racines (simples), la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de X^n-1.
- Soit un entier $n \geq 1$ et
$$P_n = 1 + X + \ldots + X^n.$$
On obtient sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de la manière suivante:
  - on a
$$\begin{aligned}(X-1)P_n &= (X-1)(1+X+\ldots+X^n)\\ &= X + X^2 + \ldots + X^{n+1} - (1+X+\ldots+X^n)\\ &= X^{n+1} - 1.\end{aligned}$$
  - On a donc
$$\begin{aligned}(X-1)P_n &= X^{n+1} - 1\\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)\end{aligned}$$
(résultat précédent à l'ordre $n+1$).
  - Or
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right) &= \underbrace{(X - e^{\frac{2i(n+1)\pi}{n+1}})}_{k=n+1} \times \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)\\ &= (X - e^{2i\pi}) \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)\\ &= (X-1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right).\end{aligned}$$
  - Ainsi,
$$(X-1)P_n = (X-1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)$$
et c'est pourquoi
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right),$$
qui est la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Théorème I.5.28 Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont:

- les polynômes de degré 1,
- les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.
- *Tous les autres polynômes sont donc non irréductibles.*
- Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ s'écrit de manière unique comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et unitaires (i.e. de coefficient dominant égal à 1):
$$P = a_n \prod_{k=1}^{i}(X - r_k) \times \prod_{k=1}^{j}(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)$$
où $a_n, r_1, \ldots, r_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, \beta_1, \ldots, \beta_j$ sont des réels avec $\alpha_k^2 - 4\beta_k < 0$ pour tout k.

Premier exemple

L'écriture comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ s'obtient parfois en jouant sur des identités algébriques.

- On a par exemple
$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 \\ &= (X^2+1)^2 - 2X^2 \\ &= (X^2 + 1 + \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X). \end{aligned}$$
Puisque $X^2 + 1 + \sqrt{2}X$ et $X^2 + 1 - \sqrt{2}X$ ont tous deux un discriminant < 0, ils sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi,
$$X^4 + 1 = (X^2 + 1 + \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)$$
est l'écriture de $X^4 + 1$ comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- Concernant $X^8 - 1$, on a alors
$$\begin{aligned} X^8 - 1 &= (X^4 - 1)(X^4 + 1) \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1), \end{aligned}$$
qui est donc sa décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Deuxième exemple

On peut parfois passer par la décomposition dans $C[X]$ et donc rechercher les racines complexes et se baser sur le principe suivant: les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées; le regroupement des parties conjuguées donne alors un facteur irréductible de $\mathbb{R}[X]$:
$$\begin{aligned} (X - z)(X - \overline{z}) &= X^2 - (z + \overline{z})X + z\overline{z} \\ &= X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2 \end{aligned}$$
dont le discriminant Δ vaut
$$4\mathrm{Re}(z)^2 - 4|z|^2.$$
Or lorsque $z = x + iy$ est un complexe non réel, on a $y \neq 0$ et alors
$$|z|^2 = x^2 + y^2 > x^2 = \mathrm{Re}(z)^2$$
et c'est pourquoi $\Delta < 0$.

- Concernant le poynôme $X^4 + 1$, ses racines complexes sont les racines 4-ème de -1. Puisque $Z = -1$ a pour module $|Z| = 1$ et argument $\theta_0 = \pi$, les racines quatrièmes de -1, en appliquant la formule
$$z_k = |Z|^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{i\theta_0}{n}}\, e^{2i\frac{k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]$$
sont les nombres complexes
$$e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{k\pi}{4}},\ k \in \{0, 1, 2, 3\},$$
c'est à dire les nombres
$$\left\{\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{4}} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)i = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\pi} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \\ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{2i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{3\pi}{2}} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(-i) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i). \end{aligned}\right.$$
Ainsi
$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right) \\ &= \left[\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\right]\left[\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\right)\right] \end{aligned}$$
(les racines conjuguées sont ainsi rapprochées) et puisque
$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right| = 1$$
et
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
on a
$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

6 Résolution de systèmes d'équations

On appliquera essentiellement la méthode du pivot de Gauß, qui consiste à échelonner la matrice du système, comme sur cet exemple.

Soit à résoudre le système
$$\left\{\begin{aligned} 2x + 5y + 4z + 5t &= 4 \\ x + 5y + 6z + 12t &= 6 \\ x + 2z + 5t &= 2. \end{aligned}\right.$$

- On écrit la matrice augmentée du système:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 12 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$
- On réduit la matrice du système par des opérations élémentaires sur les ***lignes*** (cela ne change pas l'ordre des inconnues) en effectuant la même suite d'opérations sur la matrice augmentée:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 12 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 12 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \mathbf{5} & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & -12 & -4 \end{array}\right)$$

et on obtient donc le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{lllll} \mathbf{1}x & & +2z & +5t & = 2 \\ & \mathbf{5}y & +4z & +7t & = 4 \\ & & \mathbf{-4}z & -12t & = -4. \end{array}\right.$$

- En gras figurent les pivots affectant les ***inconnues principales*** qui sont ici x, y, z; il y a trois inconnues principales, autant que le rang de la matrice du système (nombre de pivots). Ce rang est appelé aussi ***rang du système***. Les autres inconnues, ici t, sont appelées ***inconnues secondaires*** ou ***paramètres***. Les inconnues secondaires sont passées dans le second membre et l'on obtient un système ***triangulaire***

$$\left\{\begin{array}{llll} x & & +2z & = 2-5t \\ & 5y & +4z & = 4-7t \\ & & -4z & = -4+12t. \end{array}\right.$$

que l'on résout naturellement de bas en haut:

$$\left\{\begin{array}{lll} z & = & 1-3t \\ y & = & \frac{1}{5}(-4z-7t+4) \\ x & = & -2z-5t+2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} z & = & 1-3t \\ y & = & t \\ x & = & t \end{array}\right.$$

et l'ensemble des solutions est formé des quadruplets

$$\{(t, t, 1-3t, t) \;/\; t \in \mathbb{R}\}.$$

- Le nombre de paramètres est égal à la différence entre le nombre d'inconnues et le rang du système.
- Un système est dit incompatible lorsqu'après opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, on obtient une ligne de la forme

$$0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \mid b$$

avec $b \neq 0$ (ce qui correspond bien entendu à une équation du type $0 = b$).

Exercice 23 Résoudre les systèmes suivants:

(1) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-z=1 \\ 4x+y+2z=6 \\ x-3y+z=2. \end{array}\right.$

(2) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 3x-y=1 \\ 4x+z=4. \end{array}\right.$

(3) $\left\{\begin{array}{l} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \\ x+17y+4z=0. \end{array}\right.$

(4) $\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=1 \\ 2x-y+z=2. \end{array}\right.$

Exercice 24 Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$(S_m) \quad \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x+y+mz=0 \\ mx-y+z=0 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(1) Déterminer en fonction de m le rang du système (S_m).

(2) Déterminer en fonction de m les solutions du système (S_m).

Chapitre II

Fonctions usuelles, inégalités (première année)

1 Logarithme, exponentielle, ch, sh

Théorème II.1.1 La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ vérifiant: pour tout $(x,x',a)\in\mathbb{R}^3$,

$$e^{x+x'}=e^x\times e^{x'}\qquad \frac{1}{e^x}=e^{-x}\qquad \frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}\qquad (e^x)^a=e^{ax}.$$

Du théorème de la bijection (cf. chapitre suivant), il résulte que la fonction $\exp$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ et la fonction $\ln$ en est sa fonction réciproque:

Théorème II.1.2 La fonction $\ln$ est l'application réciproque de la fonction exponentielle:

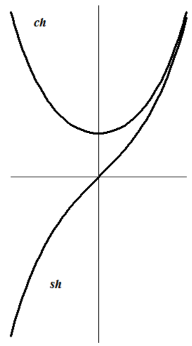
- elle est donc définie et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et établit une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$.
- pour tout $t>0$,
$$e^{\ln t}=t$$
- pour tout réel x,
$$\ln(e^x)=x$$
- pour tout $(x,x',a)\in\,]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[\,\times\mathbb{R}$:
$$\ln(xx')=\ln x+\ln x'\qquad \ln\frac{1}{x}=-\ln x\qquad \ln\frac{x}{x'}=\ln x-\ln x'\qquad \ln(x^a)=a\ln x.$$

Théorème II.1.3 ***Fonctions puissances.***

- Pour tout réel α et tout réel $x>0$, on note x^α le réel $e^{\alpha\ln x}$:
$$\forall x>0,\ x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$$
- Pour tous réels strictement positifs x,y et tous réels α,β:
$$(xy)^\alpha=x^\alpha\times y^\alpha\qquad x^{\alpha+\beta}=x^\alpha\times x^\beta\qquad (x^\alpha)^\beta=x^{\alpha\beta}.$$

Théorème II.1.4 ***Fonctions hyperboliques.***

- On définit les fonctions ch et sh par
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\qquad \mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$
- La fonction ch est de classe C^∞ et paire. De plus, $\frac{d}{dx}(\mathrm{ch}\,x)=\mathrm{sh}\,x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- La fonction sh est de classe C^∞ et impaire. De plus, $\frac{d}{dx}(\mathrm{sh}\,x)=\mathrm{ch}\,x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1.$$



Exercice 25 Simplifier:

(1) $e^{\ln 7}$
(2) $e^{-\ln 8}$
(3) $2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$
(4) $e^{5\ln\frac{1}{2}}$
(5) $\ln(\ln e^e)$
(6) $e^{\ln 2+\ln 3}$
(7) $e^{3\ln 2-2\ln 3}$

Exercice 26 Pour $x>0$ et $y\in\mathbb{R}^*$, vrai ou faux?

(1) $\ln(x+5)=\ln x+\ln 5$
(2) $\sqrt{\ln x}=\frac{1}{2}\ln x$

(3) $\ln 3x = \ln 3 + \ln x$

(4) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

(5) $\frac{\ln x}{\ln 3} = \ln x - \ln 3$

(6) $(e^x)^3 = e^{x^3}$

(7) $2^x = e^{2\ln x}$

(8) $\ln(y^2) = 2\ln y$

Exercice 27 Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes?

(1) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$

(2) $a^b a^c = a^{bc}$

(3) $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$

(4) $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$

(5) $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$

(6) $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$.

Exercice 28 Simplifier $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$ pour $x > 1$.

Exercice 29 Simplifier a^b pour $a = e^{x^2}$ et $b = \dfrac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 30 Résoudre les équations suivantes:

(1) $2\ln x + 7 = 0$

(2) $e^{\frac{x}{10}} = 2$

(3) $9e^{-2x} = 1$

(4) $5 - \ln(3x-2) = 0$

(5) $\ln(x+1) = 1 + \ln(2x-1)$

(6) $(\ln x)^2 - 2\ln(x^2) - 5 = 0$

(7) $\ln(x^2) = -1$

Exercice 31 Résoudre les équations suivantes:

(1) $e^{3x+2} = 5^{1-2x}$

(2) $3\ln(x^2) - (\ln x)^2 = 0$

(3) $e^{3x} - 5e^x = 0$

(4) $e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

(5) $(\ln x)^2 + 3\ln x = 4$.

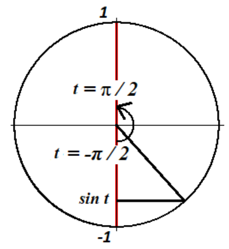
Exercice 32 Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

(1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$

(2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

2 arcsin, arccos, arctan

Comme chacun sait, il existe une infinité de réels dont le sinus prend une valeur donnée entre -1 et 1. Cependant, parmi tous ces réels, il n'en existe qu'un de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

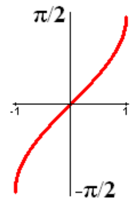


sin bijection de [-π,π] sur [-1,1]

Plus formellement:

Théorème II.2.5

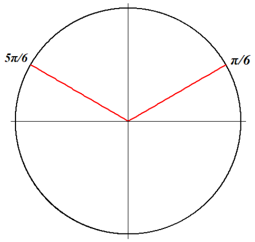
- L'application sinus est une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur l'intervalle $[-1,1]$; elle y est continue et strictement croissante.
- l'application $\arcsin$ en est son application réciproque: elle établit donc une bijection de l'intervalle $[-1,1]$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; elle y est continue et strictement croissante. On a donc
- $\forall x \in [-1,1]$,
$$\arcsin x = t \iff t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \sin t = x.$$
- L'application $\arcsin$ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ avec
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



arcsin

Exemple fondamental

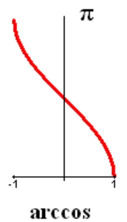
On a
$$\arcsin\left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \frac{\pi}{6}$$
car $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.



De même:

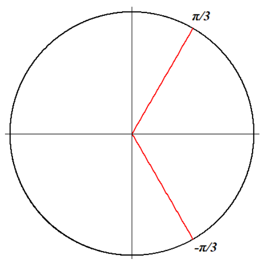
Théorème II.2.6

- L'application cosinus est une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$; elle y est continue et strictement décroissante.
- l'application $\arccos$ en est son application réciproque: elle établit donc une bijection de l'intervalle $[-1, 1]$ sur l'intervalle $[0, \pi]$; elle y est continue et strictement décroissante. On a donc
- $\forall x \in [-1, 1]$,
$$\arccos x = t \iff t \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \cos t = x.$$
- L'application arccos est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ avec
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

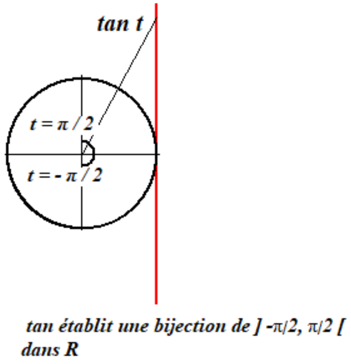


Exemple fondamental

On a
$$\arccos\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{3}$$
car $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

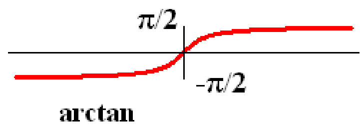


Enfin concernant la fonction $\tan$:



Théorème II.2.7

- L'application tangente établit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$:
- Son application réciproque $\arctan$ est définie, de classe C^∞ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
- On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\arctan x = y \iff y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \tan y = x.$$



Exercice 33 Déterminer
$$\arcsin(0),\ \arccos(0),\ \arcsin(1),\ \arccos(1),\ \arcsin\left(\frac{1}{2}\right),\ \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right),\ \arccos\left(\frac{1}{2}\right),\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Exercice 34 Déterminer
$$\arcsin(\sin\pi) \quad \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)\right) \quad \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right).$$

Exercice 35 Déterminer
$$\arctan(0),\ \arctan(1),\ \arctan(-1),\ \arctan(\sqrt{3}),\ \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Exercice 36 Soit $x \in [-1, 1]$.

(1) Justifier que $\sin(\arcsin x) = x$.

(2) En déduire:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

(3) En déduire:

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3 Partie entière

Définition II.3.1 La partie entière $\lfloor x \rfloor$ du réel x est, parmi tous les entiers inférieurs ou égaux à x, le plus grand:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc si l'on imagine $\mathbb{R}$ comme une règle graduée et que x est situé entre deux graduations, sa partie entière est la graduation de gauche.

- $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$
- $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$
- $\lfloor -0.1 \rfloor = -1$
- $\lfloor 0.1 \rfloor = 0$
- De façon évidente, $\lfloor p \rfloor = p$ pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$.
- On a

$$\lfloor 3.5 \rfloor = 3, \quad \lfloor 10 \times 3.5 \rfloor = \lfloor 35 \rfloor = 35 \neq 10 \times \lfloor 3.5 \rfloor,$$

ce qui met en lumière la non linéarité de l'application partie entière.

Exercice 37 Démontrer: pour tout réel x et tout entier $p \in \mathbb{Z}$:

$$\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p.$$

Un exercice corrigé

Démontrer que pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

- Posons $X = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Démontrer $\lfloor X \rfloor = \lfloor x \rfloor$ revient par définition à démontrer que

$$\lfloor x \rfloor \leq X < \lfloor x \rfloor + 1,$$

c'est à dire

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor + n.$$

- Or par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

et en conséquence

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n. \tag{3.1}$$

- Puisque $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on a

$$\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor = n\lfloor x \rfloor$$

et la fonction partie entière est clairement croissante, donc

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx \quad \Longrightarrow \quad \lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor,$$

c'est à dire

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \tag{3.2}$$

.

- Enfin, on a par définition

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx$$

et donc (3.1) donne

$$\lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor + n,$$

et avec (3.2), on obtient

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor + n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 38 Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer:

$$\lfloor 10^n x \rfloor\, 10^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Exercice 39 Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor\right) = \frac{x}{2}.$$

4 Inégalités

4.1 Règles de base

- Si l'on multiplie (notamment en simplifiant) les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement positif, le sens de l'inégalité est conservé. Par exemple,

$$\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}y \iff x < y$$

- mais si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité doit être renversé. Par exemple,

$$-3x < -3y \iff x > y.$$

- On ne peut pas simplifier les deux membres d'une inégalité par un nombre lorsque l'on ignore le signe de celui-ci; on pourra être amené à distinguer des cas. Par exemple,

$$ax < ay \iff \begin{cases} x < y & \text{si } a > 0 \\ x > y & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

- Un nombre non nul est du même signe que son inverse:

$$\frac{1}{x} > 0 \iff x > 0, \qquad \frac{1}{t} < 0 \iff t < 0.$$

- Du fait de la décroissance de l'application $u \mapsto \frac{1}{u}$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, on a

$$x \leq y < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

$$0 < x \leq y \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

Il en résulte ce principe important:

– pour majorer $\dfrac{1}{u(x)}$, on cherchera à *minorer* $u(x)$,

– pour minorer $\dfrac{1}{u(x)}$, on cherchera à *majorer* $u(x)$;

- On ne peut "faire passer" un réel de l'autre côté d'une inégalité par passage à l'inverse que lorsque ce nombre est > 0; s'il est < 0, il faut renverser l'inégalité:

$$\frac{1}{x} < a \iff \begin{cases} 1 < ax & \text{si } x > 0 \\ 1 > ax & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- ***Signe d'une fraction.*** Comme pour un produit, on pourra dresser un tableau de signes:

  – si a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs, $\frac{a}{b}$ est positif,

  – si a et b sont de signe opposé, $\frac{a}{b}$ est négatif.

Exemple

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{2x-3} < -2$.

- Pour $x \neq \frac{2}{3}$, on a

$$\frac{1}{2x-3} < -2 \iff \frac{1}{2x-3} + 2 < 0 \iff \frac{4x-5}{2x-3} < 0$$

d'où le tableau de signe:

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x-5}{2x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

et donc

$$\frac{1}{2x-3} \iff x \in \left]\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right[.$$

Exercice 40 Résoudre les inéquations suivantes:

(1) $\dfrac{1}{2x-3} > 0$

(2) $\dfrac{1}{2-3x} > 0$

(3) $\dfrac{1}{3x-4} < 0$

(4) $\dfrac{1}{1-4x} < 0$

(5) $\dfrac{1}{3x-2} \leq 2$

(6) $\dfrac{1}{3x-2} \geq -2$

(7) $\dfrac{1}{1-2x} < 1$

(8) $\dfrac{1}{1-2x} > -3$

Théorème II.4.8 ***Signe d'un trinôme du second degré.*** Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.

- Si P possède deux racines réelles distinctes r_1, r_2 avec $r_1 < r_2$, alors $P(x)$ est du signe de a sur $]-\infty, r_1] \cup [r_2, +\infty]$ et du signe opposé à a sur $[r_1, r_2]$. *En résumé:* "un trinôme est du signe de son coefficient dominant, sauf entre les racines".
- Si P ne possède pas de racines réelles, ou une racine double, $P(x)$ est toujours du signe de a.

Note concernant les racines de certains trinômes. Pour certains trinômes, les racines sont évidentes:

- les racines de $x^2 - 4$ sont 2 et -2 puisque $x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$,
- les racines de $x^2 - 5$ sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$,
- les racines de $x^2 - 3x$ sont 0 et 3 puisque $x^2 - 3x = x(x-3)$,
- le trinôme $x^2 + 4$ ne possède pas de racine réelle mais ses racines complexes sont $2i$ et $-2i$ puisqu'en se basant sur la fait que $i^2 = -1$,

$$x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4 \iff x^2 = (2i)^2 \iff x = 2i \text{ ou } x = -2i;$$

Il eut été inutile, néfaste et ridicule de calculer leur discriminant.

Exercice 41 Résoudre les inéquations suivantes:

(1) $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

(2) $-3x^2 + 2x - 1 < 0$

(3) $3x^2 - 4 > 0$

(4) $(2x-1)(x+3) > 0$

(5) $(3-2x)(2x-1) \leq 0$

(6) $\frac{1}{x^2-x+1} < 0$

(7) $\frac{1}{x^2-x-1} > 1$

(8) $x + 1 > \frac{1}{x-1}$

(9) $2 - x \geq \frac{-3}{2x+1}$.

4.2 Obtention de majorations ou de minorations: principes et exemples de base

- Suivant le contexte, il s'agit de trouver une estimation du maximum ou du minimum d'une fonction sur un intervalle ("estimation", car la recherche du maximum ou du minimum par étude des variations de la fonction est souvent inextricable).
- Le principe est simple: à partir des renseignements (majoration, minoration, encadrement) dont on dispose sur la variable, on cherchera à obtenir des renseignements sur la fonction à partir des règles qui régissent les inégalités:

  – bien prendre garde aux signes des différents facteurs constituant l'expression,

  – une majoration d'une expression conduit à une minoration de son inverse et vice-versa.

Premier exemple

On pose $f_1(x) = \frac{1}{3+2x}$. Majorer $f_1(x)$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

- Pour majorer $\frac{1}{3+2x}$, on cherchera à minorer $3+2x$.
- On a
$$\forall x \in [2, +\infty[\,, \quad x \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad 2x \geq 4 \quad \Longrightarrow \quad 3+2x \geq 7$$
et en conséquence,
$$\forall x \in [2, +\infty[\,, \quad \frac{1}{3+2x} \leq \frac{1}{7}.$$

Deuxième exemple

On pose $f_2(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$. Encadrer $f_2(x)$ sur l'intervalle $[1, 3]$.

- On a
$$\forall x \in [1, 3]\,, \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad 2 \leq 2x \leq 6 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq 2x-3 \leq 3$$
et puisque la quantité $3x+2$ est > 0 sur $[1, 2]$,
$$\forall x \in [1, 3]\,, \quad -1 \leq 2x-3 \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{3x+2} \leq \frac{2x-3}{3x+2} \leq \frac{3}{3x+2}.$$
- Ensuite,
$$\forall x \in [1, 2] \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \Longrightarrow \quad 3 \leq 3x \leq 6 \quad \Longrightarrow \quad 5 \leq 3x+2 \leq 8.$$
et puisque $3x+2 > 0$:
$$5 \leq 3x+2 \leq 8 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{8} \leq \frac{1}{3x+2} \leq \frac{1}{5}.$$
- Enfin,
$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+2} \leq \frac{1}{5} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{3}{3x+2} \leq \frac{3}{5} \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{3x+2} \geq -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

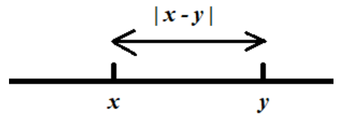
et en conséquence:

$$\forall x \in [1, 3], \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{3x+2} & \leq & \dfrac{2x-3}{3x+2} & \leq & \dfrac{3}{3x+2} \\ & & \dfrac{3}{3x+2} & \leq & \dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{1}{5} & \leq & -\dfrac{1}{3x+2} & & \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{5} \leq \frac{2x-3}{3x+2} \leq \frac{3}{5}.$$

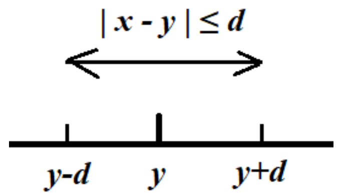
4.3 Inégalités, carrés racines carrées et valeurs absolues: principes de base

Valeur absolue

On a bien sûr
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
mais la valeur absolue sert surtout à mesurer la distance entre nombres réels (considérés comme des points de la droite réelle): la quantité $|x-y|$ est la distance du point d'abscisse x au point d'abscisse y.



Ainsi,
$$|x-y| \leq d \iff y-d \leq x \leq y+d.$$



Propriétés de base

Proposition II.4.9

- Pour tout réel $a > 0$,
$$\begin{aligned} |x| < a \quad &\iff \quad -a < x < a \quad &&\iff \quad x \in]-a, a[\\ |x| > a \quad &\iff \quad x > a \text{ ou } x < -a \quad &&\iff \quad x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[\,. \end{aligned}$$
- Pour tous réels A, B:
$$|AB| = |A| \times |B|$$
et pour $B \neq 0$,
$$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}.$$
- Pour tout réel x et tout entier n,
$$|x^n| = |x|^n\,.$$

Exemple

Résoudre l'inéquation $|2x-3| \geq 1$.

- On a
$$\begin{aligned} |2x-3| \geq 1 \quad &\iff \quad 2x-3 \geq 1 \text{ ou } 2x-3 \leq -1 \\ &\iff \quad x \geq 2 \text{ ou } x \leq 1. \end{aligned}$$
- L'ensemble des solutions est donc
$$]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\,.$$

Exercice 42 Résoudre les inégalités suivantes:

(1) $|x-2| \leq 3$

(2) $|x+2| \geq 2$

(3) $|2x-3|<1$

(4) $\frac{1}{|x-2|}\leq 3$

(5) $1\leq \frac{1}{|3-2x|}$.

Majoration en valeur absolue

- Un encadrement conduit à une majoration, suivant ce principe:

$$a\leq f(x)\leq b \Longrightarrow |f(x)|\leq \max\{|a|,|b||\}$$

qui inclut les situations plus ou moins triviales telles que

$$0\leq f(x)\leq b\Longrightarrow |f(x)|\leq b,\qquad a\leq f(x)\leq 0\Longrightarrow |f(x)|\leq A \text{ (avec } A=-a).$$

Exemple

On pose $f(x)=2x-1$; majorer $|f(x)|$ pour $x\in[-3,2]$.

- On a
$$-3\leq x\leq 2 \quad\Longrightarrow -6\leq 2x\leq 4 \quad\Longrightarrow -7\leq 2x-1\leq 3.$$
- En conséquence,
$$\forall x\in[-3,2]\,,\quad |2x-3|\leq 7.$$

- Un réel et son opposé ont la même valeur absolue:

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad |-y|=|y|.$$

Exemple

On pose $f(x)=-\frac{1}{x+3}$; majorer $|f(x)|$ pour $x\in[0,+\infty[$.

- On a
$$|f(x)|=\left|-\frac{1}{x+3}\right|=\left|\frac{1}{x+3}\right|$$
et puisque de façon évidente, pour tout $x\in[0,+\infty[$, on a $\frac{1}{x+3}>0$, c'est que
$$\forall x\in[0,+\infty[\,,\ \left|\frac{1}{x+3}\right|=\frac{1}{x+3}.$$
- Ensuite,
$$x\geq 0\quad\Longrightarrow\quad x+3\geq 3\quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{x+3}\leq\frac{1}{3}.$$
- Il en résulte:
$$\forall x\in[0,+\infty[\,,\quad |f(x)|\leq\frac{1}{3}.$$

- La valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad |xy|=|x|\times|y|.$$

Exemple

On pose $f(x)=(3x-2)\sin x$. Majorer $|f(x)|$ pour $x\in[-1,2]$.

- On a
$$-1\leq x\leq 2\Longrightarrow -3\leq 3x\leq 6\Longrightarrow -5\leq 3x-2\leq 4\Longrightarrow |3x-2|\leq 5$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\ -1\leq\sin x\leq 1\Longrightarrow |\sin x|\leq 1.$$
- En conséquence,
$$\forall x\in[-1,2],\quad |(3x-2)\sin x|\leq 5\times 1=5.$$

- La valeur absolue d'une somme (quelle qu'en soit le nombre de termes) est inférieure à la somme des valeurs absolues (c'est *l'inégalité triangulaire*):

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad |x+y|\leq|x|+|y|$$
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad |x+y+z|\leq|x|+|y|+z|\ldots$$

et puisque $|-y|=|y|$,

$$|x-y|=|x+(-y)|\leq|x|+|-y|=|x|+|y|,$$

on a donc aussi

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad |x-y|\leq|x|+|y|.$$

Exemple

On pose $f(x)=\cos x-5\sin x-3x$. Majorer $|f(x)|$ pour $x\in[-\pi,\pi]$.

- On applique l'inégalité triangulaire:
$$|\cos x-5\sin x-3x|\leq|\cos x|+|5\sin x|+|3x|=|\cos x|+5|\sin x|+3|x|.$$
- De façon évidente,
$$\forall x\in[-\pi,\pi],\ -1\leq\cos x\leq 1,\ -1\leq\sin x\leq 1\quad\Longrightarrow\quad|\cos x|\leq 1,\ |\sin x|\leq 1$$
puis
$$\forall x\in[-\pi,\pi],\quad |x|\leq\pi\quad\Longrightarrow\quad 3|x|\leq 3\pi.$$
- Ainsi,
$$\forall x\in[-\pi,\pi],\quad |f(x)|\leq 1+5+3\pi=3\pi+6.$$

Exercice 43 Majorer les fonctions suivantes sur les intervalles indiqués:

(1) $f_1(x)=4x-5$ sur $[-2,2]$

(2) $f_2(x)=\dfrac{\sin(2x)}{3x-1}$ sur $[1,+\infty[$

(3) $f_3(x)=-3-5\sin x$ sur $[-\pi,\pi]$

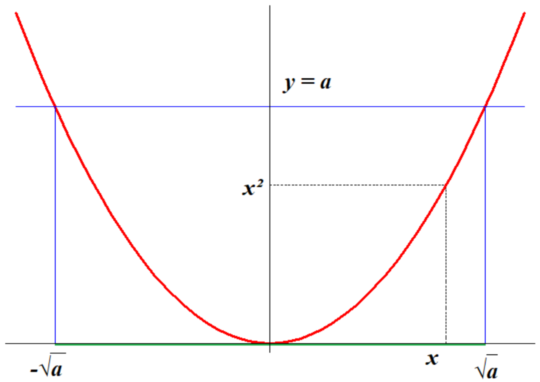
(4) $f_4(x)=(2-3x)(3-4\cos x)$ sur $[-\pi,\pi]$.

4.4 De la manière de se débarrasser des carrés

Proposition II.4.10 Si $a \geq 0$, alors

$$x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a} \iff |x| \leq \sqrt{a}.$$

- ***Première preuve:*** $x^2 - a$ est un trinôme dont les racines sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$ donc est ≤ 0 à l'intérieur des racines (le coefficient de x^2 étant > 0)
- ***Deuxième preuve:*** la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$; or x^2 et a sont dans cet intervalle. Donc
$$x^2 \leq a \iff \sqrt{x^2} \leq \sqrt{a}$$
(une fonction croissante conserve les inégalités: c'est la définition même). Or
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|,$$
d'où le résultat.
- ***Interprétation graphique.***
  - On trace le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$: les points de ce graphe ont pour coordonnées (x, x^2), $x \in \mathbb{R}$.
  - On trace la droite horizontale d'équation $y = a$.



  - Les points du graphe situés sous cette droite ont une ordonnée $\leq a$: ce sont donc les points de coordonnées (x, x^2) tels que $x^2 \leq a$.
  - Les abscisses x de ces points sont donc telles que $x^2 \leq a$: ces abscisses couvrent l'intervalle $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$.

Proposition II.4.11 Si $a \geq 0$, alors

$$x^2 \geq a \iff (x \leq -\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x \geq \sqrt{a}) \iff |x| \geq \sqrt{a}.$$

Lémonstration basée sur les mêmes arguments et l'interpétation graphique est analogue.

De façon évidente, si $a < 0$

$$x^2 \leq a \text{ n'a jamais lieu,} \qquad x^2 \geq a \text{ a toujours lieu}$$

(tout nombre positif est supérieur à tout nombre négatif, aucun nombre positif n'est inférieur à un nombre négatif).

Exemple

Résoudre l'inéquation $(2x-1)^2 \geq 3$.

- ***Première approche:*** en prenant la racine carrée des deux membres (qui sont positifs),
$$(2x-1)^2 \geq 3 \iff |2x-1| \geq \sqrt{3} \iff 2x-3 \geq \sqrt{3} \text{ ou } 2x-3 \leq -\sqrt{3}$$
$$\iff x \geq \frac{3+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$
donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est
$$\left]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[.$$
- ***Deuxième approche:*** on développe tout:
$$(2x-1)^2 \geq 3 \iff 4x^2 - 4x + 1 \geq 3 \iff 4x^2 - 4x - 2 \geq 0.$$
Les racines du trinôme $4x^2 - 4x - 2$ étant $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, ce trinôme est ≥ 0 sur
$$\left]-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[.$$

Exercice 44 Résoudre les inéquations suivantes:

(1) $(x-1)^2 \leq 4$

(2) $(x+3)^2 > 2$

(3) $(2x-1)^2 \leq 1$

(4) $\frac{1}{(3x+2)^2} \geq 2$.

4.5 De la manière de se débarrasser des racines carrées

Soit $a(x)$ une expression dépendant de x et b un réel.

Proposition II.4.12 Si $b \geq 0$.

$$\text{Si } a(x) \geq 0, \text{ alors } \begin{cases} \sqrt{a(x)} \leq b \iff a(x) \leq b^2 \\ \sqrt{a(x)} \geq b \iff a(x) \geq b^2. \end{cases}$$

En effet, la fonction $t \mapsto t^2$ étant croissante sur $[0, +\infty[$, on a

$$\text{pour } t \geq 0 \text{ et } t' \geq 0, \quad t \leq t' \iff t^2 \leq t'^2.$$

Dans la pratique, on prendra bien soin de confronter les contraintes liées à la condition $a(x) \geq 0$ (indispensable pour assurer l'existence de $\sqrt{a(x)}$) à celles liées à $a(x) \leq b^2$ (ou suivant le cas, $a(x) \geq b^2$).

Proposition II.4.13 Si $b < 0$

$$\sqrt{a(x)} \leq b \text{ n'a jamais lieu, } \sqrt{a(x)} \geq b \text{ a toujours lieu.}$$

Remarque. On prendra toujours soin de considérer les signes des deux membres d'une inégalité avant d'élever au carré.

Premier exemple

Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{6 - x^2} \leq 2.$$

- Il est tout d'abord nécessaire que $6 - x^2 \geq 0$, c'est à dire $6 \geq x^2$ et donc

$$x \in \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right].$$

- Pour tout $x \in \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$,

$$\sqrt{6 - x^2} \leq 2 \iff 6 - x^2 \leq 4 \iff 2 \leq x^2 \iff x \geq \sqrt{2} \text{ ou } x \leq -\sqrt{2}.$$

- La solution de cette inéquation est donc constituée des réels x de l'intervalle $\left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$ tels que $x \geq \sqrt{2}$ ou $x \leq -\sqrt{2}$, c'est à dire

$$\left[-\sqrt{6}, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{6}\right].$$

Deuxième exemple

Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{2x^2 - 1} + x - 2 \geq 0.$$

- Il y a tout d'abord la contrainte $2x^2 - 1 \geq 0$ d'existence de la racine carrée:

$$2x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1}{2} \iff |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Pour $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\sqrt{2x^2 - 1} + x - 2 \geq 0 \iff \sqrt{2x^2 - 1} \geq 2 - x$$

  et alors:

  - si $2 - x < 0$, c'est à dire $x > 2$, l'inégalité est toujours satisfaite puisque le membre de gauche est ≥ 0 alors que le membre de droite est < 0; puisque $\frac{1}{\sqrt{2}} < 2$, les contraintes

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x > 2 \end{cases}$$

    sont équivalentes à la seule contrainte $x > 2$. Les solutions de cette inéquation dans ce cas sont donc les réels

$$x \in]2, +\infty[\,.$$

  - si $2 - x \geq 0$, c'est à dire $x \leq 2$, les deux membres sont positifs, et alors par élévation au carré:

$$\sqrt{2x^2 - 1} \geq 2 - x \iff 2x^2 - 1 \geq (2 - x)^2 \iff x^2 + 4x - 5 \geq 0.$$

    Le trinôme $x^2 + 4x - 5$ possède les racines -5 et 1 et est donc ≥ 0 sur $]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$. Les solutions de cette inéquation dans ce cas sont donc les réels x tels que

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \leq 2 \\ x \in]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[\end{cases}$$

    c'est à dire, du fait que $-5 < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1 < 2$, tous les réels

$$x \in]-\infty, -5] \cup [1, 2]$$

- Les solutions de cette inéquation sont donc les réels

$$x \in]-\infty, -5] \cup [1, 2] \cup]2, +\infty[$$

  c'est à dire les réels

$$x \in]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[\,.$$

Proposition II.4.14 Pour une inégalité du type

$$\sqrt{a(x)} \leq \sqrt{b(x)},$$

on aura deux contraintes initiales: $a(x) \geq 0$ et $b(x) \geq 0$ et pour les valeurs de x satisfaisant ces deux contraintes, on a

$$\sqrt{a(x)} \leq \sqrt{b(x)} \iff a(x) \leq b(x),$$

dont les solutions seront à confronter aux deux contraintes initiales.

Exemple

Résoudre l'inégalité

$$\sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

- Avant l'élévation au carré, on est en présence de deux contraintes:

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad 4 - x^2 \geq 0$$

  et donc

$$x^2 \geq 1 \quad \text{et} \quad 4 \geq x^2,$$

  c'est à dire

$$|x| \geq 1 \quad \text{et} \quad 2 \geq |x|$$

  ce qui équivaut à

$$1 \leq |x| \leq 2.$$

- Lorsque $1 \leq |x| \leq 2$, on a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{4 - x^2} &\iff x^2 - 1 \leq 4 - x^2 \\ &\iff 2x^2 \leq 3 \\ &\iff x^2 \leq \frac{3}{2} \\ &\iff |x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

- Ainsi, les solutions de cette inégalité sont les réels x tels que

$$1 \leq |x| \leq 2 \quad \text{et} \quad |x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

et dans la mesure où $\sqrt{\frac{3}{2}} \leq 2$,

$$\begin{aligned}(1 \leq |x| \leq 2 \quad \text{et} \quad |x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}) &\iff 1\,|x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \\ &= x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right].\end{aligned}$$

Exercice 45 Résoudre les inéquations suivantes:

(1) $\sqrt{4x^2-1} \leq 1$

(2) $\sqrt{x^2-2} \geq 1$

(3) $\sqrt{x^2-4} \leq 2x-4$

(4) $\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{2x-1}$

(5) $\sqrt{3x^2-4} \leq \sqrt{x^2-1}$.

(6) $\sqrt{3x^2-1} \leq \sqrt{-x-1}$.

Autre principe de base: jouer sur la croissance des fonctions et leurs aspect bijectif.

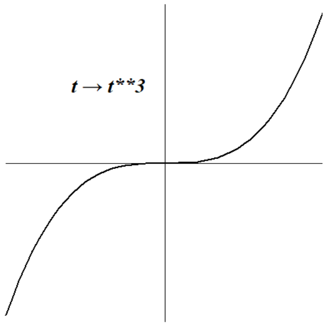
- On rappelle qu'une fonction f est dite croissante sur un intervalle I dès lors que

$$\text{pour tout } t \in I \text{ et tout } t' \in I, \quad t \leq t' \iff f(t) \leq f(t').$$

- Une fonction f définie, continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ (c'est le théorème de la bijection) et alors f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante):
- une application bijective et son application réciproque ont le même sens de variation.

Exemple typique

la fonction $t \mapsto t^3$ étant croissante sur $\mathbb{R}$



elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image qui est $\mathbb{R}$. Son application réciproque est l'application $t \mapsto \sqrt[3]{t}$. Ainsi, pour tout réel x, on a

$$x^3 \leq 8 \iff x \leq 2,$$

dans la mesure où $\sqrt[3]{8} = 2$ i.e. $8 = 2^3$ ou encore

$$x^3 \geq 1 \iff x \geq 1$$

puisque $\sqrt[3]{1} = 1$.

Autre exemple

Résoudre l'inéquation $\ln(x-3) \geq -2$.

- Il est tout d'abord nécessaire que $x-3>0$ pour que l'inégalité ait un sens.
- L'application $t \mapsto \ln t$ établit une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dont l'application réciproque est l'application $x \mapsto e^x$.
- Puisque $x-3>0 \iff x>3$, on a donc

$$\forall x > 3,\ \ln(x-3) \geq -2 \iff x-3 \geq e^{-2} \iff x \geq 3+e^{-2}.$$

- L'ensemble des solutions est donc $[3+e^{-2}, +\infty[$.

Exercice 46 Résoudre les inéquations suivantes:

(1) $\ln x < \ln 3$

(2) $\ln(-2x-3) > \ln 5$

(3) $\ln(3x-2) \leq -\dfrac{1}{2}$

(4) $e^x < e^{-3}$

(5) $e^{2-3x} \leq 2$

(6) $(2x+1)^3 \leq 8$

(7) $(-2x+1)^3 \leq 2$

(8) $(3-2x)^3 \geq 0$.

Exercice 47 ***Exercice de synthèse important.***

(1) On pose $f_1(x) = \dfrac{3\sin x - 2}{(2+x)^2}$. Majorer $|f_1(x)|$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

(2) On pose $f_2(x) = \dfrac{2x\cos x}{3+x^2}$.

  (a) Majorer $|f_2(x)|$ sur l'intervalle $[2, 10]$.

  (b) Majorer $|f_2(x)|$ sur l'intervalle $[2, b]$ où b est un réel donné avec $b > 2$.

(3) On pose $f_3(x) = \dfrac{-e^{-2x}}{1+x}$.

  (a) Majorer $|f_3(x)|$ sur l'intervalle $[1,+\infty]$.

  (b) Majorer $|f_3(x)|$ sur l'intervalle $[a,+\infty]$ où a est un réel donné avec $a > 0$.

(4) On pose $f_4(x) = \dfrac{xe^{-3x}\sin 2x}{1+x^2}$. Majorer $|f_4(x)|$ sur l'intervalle $[a, b]$. où a et b sont deux réels donnés avec $0 < a < b$.

4.6 Recherche de domaines de définition

Rappelons que

fonction	domaine de définition
$t \mapsto \sqrt{t}$	$[0, +\infty[$
$t \mapsto t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$]0, +\infty[$
$t \mapsto \ln t$	$]0, +\infty[$
$t \mapsto \arcsin t$	$[-1, 1]$
$t \mapsto \arccos t$	$[-1, 1]$
$t \mapsto \arctan t$	$\mathbb{R}$

Par exemple, le domaine de définition d'une fonction du type $x \mapsto \ln(a(x))$ est donc constitué des réels x tels que $a(x) > 0$. On est alors conduit à résoudre une inéquation.

Exercice 48 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

(1) $f_1(x) = \ln(3x + 2)$

(2) $f_2(x) = \ln(1 - x)$

(3) $f_3(x) = \ln(1 - x^2)$

(4) $f_4(x) = \arcsin(1 - x)$

(5) $f_5(x) = \arcsin(x^2)$

(6) $f_6(x) = \dfrac{1}{\ln(2 - x^2)}$.

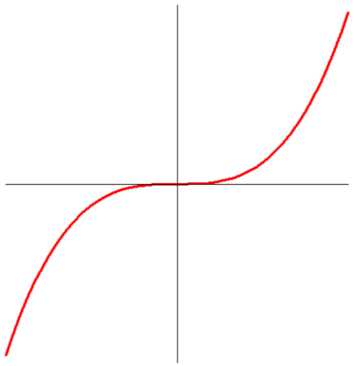
4.7 Inéquations et puissances

Il y a une différence de traitement entre puissances paires et impaires.

- Si N est un entier impair, typiquement $N = 3$, la fonction

$$x \mapsto x^N$$

  est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$



  et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car les limites sont $\pm\infty$ en $\pm\infty$) dont la bijection réciproque est l'application

$$y \mapsto \sqrt[N]{y}$$

  qui est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (résultats garantis par le théorème de la bijection). Elle est impaire comme l'est la fonction $x \mapsto x^N$. Par conséquent,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad x^N < a \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < \sqrt[N]{a}$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad b < x^N < a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt[N]{b} < x < \sqrt[N]{a}$$

  et en particulier,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad -a < x^N < a \quad \Longleftrightarrow \quad -\sqrt[N]{a} < x < \sqrt[N]{a}.$$

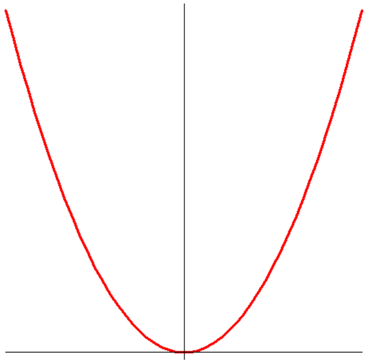
Exemples

$$-8 < x^3 < 8 \quad \Longleftrightarrow \quad -\sqrt[3]{8} < x < \sqrt[3]{8}$$
$$-1 < x^3 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -\sqrt[3]{1} < x < \sqrt[3]{1} \Longleftrightarrow -1 < x < 1.$$

- Si N est un entier pair, typiquement $N = 2$ ou $N = 4$, la fonction

$$x \mapsto x^N$$

  n'est plus strictement croissante sur $\mathbb{R}$



  Mais elle l'est sur $[0, +\infty[$ et réalise alors une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ dont la bijection réciproque est l'application

$$y \mapsto y^{\frac{1}{N}}.$$

  – ***Remarque.*** Dans le cas $N = 2$, et seulement dans ce cas, la fonction

$$y \mapsto y^{\frac{1}{2}}$$

  est notée

$$y \mapsto \sqrt{y}.$$

  On peut donc seulement écrire dans un premier temps:

$$\forall a \geq 0, \ \forall x \geq 0, \quad x^N < a \quad \Longleftrightarrow \quad x < a^{\frac{1}{N}}.$$

  Mais de façon évidente (et seulement lorsque N est pair!)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^N = |x|^N$$

(rien à signaler si $x \geq 0$ alors que si $x < 0$, $|x| = -x$ et la puissance paire "tue" le signe $-$). On a ainsi, du fait $|x| \geq 0$ que pour tout réel x:

$$\begin{aligned} \forall a \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^N < a \quad &\Longleftrightarrow \quad |x|^N < a \\ &\Longleftrightarrow \quad |x| < a^{\frac{1}{N}} \\ &\Longleftrightarrow \quad -a^{\frac{1}{N}} < x < a^{\frac{1}{N}}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{\textit{Exemples}}}$

$$\begin{array}{lll} x^4 < 3 & \Longleftrightarrow & -3^{\frac{1}{4}} < x < 3^{\frac{1}{4}} \\ x^4 < 1 & \Longleftrightarrow & -1^{\frac{1}{4}} < x < 1^{\frac{1}{4}} \Longleftrightarrow -1 < x < 1 \\ x^2 < 3 & \Longleftrightarrow & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ x^2 < 1 & \Longleftrightarrow & -\sqrt{1} < x < \sqrt{1} \Longleftrightarrow -1 < x < 1. \end{array}$$

Remarque. Certains raisonnements conduiront à résoudre un encadrement comme

$$-a < x^2 < a$$

avec $a > 0$, encadrement que l'on peut comprendre comme la réalisation des deux contraintes $-a < x^2$ et $x^2 < a$. De façon évidente, la première est réalisée pour tout réel x, si bien que

$$-a < x^2 < a \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 < a \quad \Longleftrightarrow \quad -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}.$$

Exemples:

$$\begin{array}{lll} -2 < x^2 < 2 & \Longleftrightarrow & -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ -1 < x^2 < 1 & \Longleftrightarrow & -1 < x < 1 \\ -3 < x^4 < 3 & \Longleftrightarrow & 3^{\frac{1}{4}} < x < 3^{\frac{1}{4}}. \end{array}$$

Exercice 49 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(1) $x^2 \leq 4$

(2) $x^2 > 3$

(3) $x^3 \geq 1$

(4) $x^3 \leq -1$

(5) $x^4 \leq 8$

(6) $x^4 \geq 1$.

Chapitre III

Les grands théorèmes d'analyse (première année; aspects théoriques)

1 Autour de la continuité

1.1 Majorants, minorants, borne supérieure et inférieure d'un ensemble

Définition III.1.1 Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que
$$\forall x \in A, \quad x \leq M.$$
Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que
$$\forall x \in A, \quad x \geq m.$$

Exemple

L'ensemble
$$A = \left\{ \frac{x^2}{x-1}, \; x \in [4,5] \right\}$$
est majoré car
$$\begin{array}{ccccccc} & & x \in A & \Longrightarrow & 0 \leq x \leq 5 & \Longrightarrow & x^2 \leq 25 \\ x \in A & \Longrightarrow & x \geq 4 & \Longrightarrow & x-1 \geq 3 & \Longrightarrow & \dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{1}{3} \\ & & & & & \Longrightarrow & \dfrac{x^2}{x-1} \leq \dfrac{25}{3}. \end{array}$$
Ainsi, A est majoré et $\frac{25}{3}$ est un majorant de A.

Définition III.1.2 Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite bornée si elle est minorée et majorée donc s'il existe deux réels M et m tels que
$$\forall x \in A, \quad m \leq x \leq M,$$
ce qui se produit si et seulement s'il existe un réel C tel que
$$\forall x \in A, \quad |x| \leq C.$$

Remarques.

- Une étude aisée de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$ démontrerait que cette fonction est croissante sur $[4,5]$ si bien que
$$\forall x \in [4,5] \quad f(x) \leq f(5) = \frac{25}{4} = 6,25$$
et en conséquence A est majoré par $6,25$; ce renseignement est plus précis que le renseignement "A est majoré par $\frac{25}{3} \approx 8,33$".
- Par exemple, le renseignement "cette voiture coûte moins de $20\,000$ euros" est plus précis que le renseignement "cette voiture coûte moins de $50\,000$ euros": plus le majorant est petit, plus fine et intéressante est alors la majoration.

Le théorème suivant est fondamental:

Théorème III.1.1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A est non vide et majorée, alors A possède une borne supérieure b, qui est par définition le plus petit majorant de A:
- pour tout $x \in A$, on a $x \leq b$,
- pour tout $b' < b$, il existe $x \in A$ tel que $x > b'$.

Si A est non vide et minorée, alors A possède une borne inférieure a, qui est par définition le plus grand minorant de A:
- pour tout $x \in a$, on a $a \leq x$,
- pour tout $a' > a$ il existe $x \in A$ tel que $x < a'$.

Remarque. Les propriétés
- pour tout $x \in A$, on a $x \leq b$,
- pour tout $b' < b$, il existe $x \in A$ tel que $x > b'$,

caractérisent effectivement le plus petit majorant de A:
- "pour tout $x \in A$, on a $x \leq b$" stipule que b est un majorant de A
- "pour tout $b' < b$, il existe $x \in A$ tel que $x > b'$" stipule que tout nombre b' inférieur à b n'est pas un majorant puisque pour un tel nombre, on peut trouver un élément de A qui n'est *pas* majoré par b'.

Même commentaire concernant la notion de borne inférieure.

Exemple

Il semble évident que 5 soit la borne supérieure et -2 la borne inférieure de l'ensemble $A = [-2,5[$. En voici la preuve formelle:

- -2 est un minorant de A et si $a' > -2$, il existe $x \in A$ tel que $x < a'$, par exemple $x = -2$!
- 5 est un majorant de A et si $a < 5$, il existe $x \in A$ tel que $x > a$ (les choses les plus évidentes sont parfois délicates à prouver rogoureusement!)
  - si $a < 4$, alors $x = 4$ fait le job.

– Si $a \geq 4$, alors $x = \frac{a+5}{2}$ fait le job, puisque

$$a < 5 \implies x < \frac{5+5}{2} = 5$$

et

$$5 > a \implies x > \frac{a+a}{2} = a \geq 4$$

ce qui démontre que $x > a$ et puisque $4 < x < 5$, $x \in A$.

Observons que la borne inférieure -2 appartient à A mais que la borne supérieure 5 n'appartient pas à A.

Autre exemple

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Démontrer que A est un ensemble borné et en déterminer les bornes inférieure et supérieure.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} n \geq 1 \quad &\implies \quad \frac{1}{n} \leq 1 \implies \frac{3}{n} \leq 3 \\ &\implies \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \leq \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

  Ainsi, A est majoré par $\frac{7}{2}$.
- De plus, $\frac{7}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{1}$ est un élément de A: c'est donc sa borne supérieure.
- On a ensuite, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{n} \geq \frac{1}{2}$$

  donc A est minoré et $\frac{1}{2}$ est un minorant de A.
- Démontrons que $\frac{1}{2}$ est la borne inférieure de A i.e. que c'est le plus grand minorant de A. Dans le cas contraire, il existerait un réel c strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ et qui serait un minorant de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on aurait donc

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{n} \geq c \implies \frac{3}{n} \geq c - \frac{1}{2}$$

  et comme $c - \frac{1}{2} > 0$, en prenant l'inverse on aurait

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \leq \frac{3}{c - \frac{1}{2}}.$$

  Ceci est absurde: il n'existe aucun réel majorant tous les entiers $n \geq 1$. Il y a donc contradiction et c'est pourquoi $\inf A = \frac{1}{2}$.

Exercice 50 On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{2} + \frac{3}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Démontrer que A est un ensemble borné et en déterminer les bornes inférieure et supérieure.

Exercice 51 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Comparer $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ et $\sup B$.

Exercice 52 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a,b) \in A \times B \quad a \leq b.$$

Justifier l'existence d'une borne supérieure pour A et d'une borne inférieure pour B et démontrer que $\sup A \leq \inf B$.

1.2 Majorants, minorants, borne supérieure et inférieure, max et min d'une fonction

Les notions précédentes s'appliquent à une fonction, plus précisément à l'ensemble des valeurs prises par une fonction (qu'on appelle alors image de cette fonction). Soit f une fonction définie sur un domaine D et à valeurs réelles.

Définition III.1.3

- On dit que f est majorée sur D s'il existe un réel M, appelé alors majorant, tel que

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq M.$$

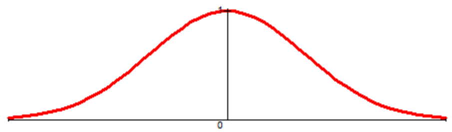
  La borne supérieure de f sur D est alors définie comme étant le plus petit majorant de f sur D et notée $\sup\limits_D f$.
- On dit que f possède un maximum sur D s'il existe un point $x_0 \in D$ tel que

$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

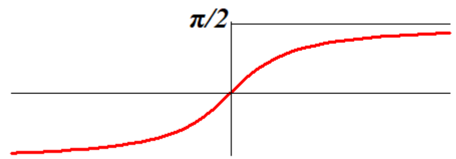
Exemples

- La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ possède un maximum sur $\mathbb{R}$ en 0:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; e^{-x^2} \leq e^0 = 1.$$



- La fonction $f : x \mapsto \arctan x$ a beau être majorée par $\frac{\pi}{2}$, elle ne possède pas de maximum sur $\mathbb{R}$ (c'est d'ailleurs impossible pour toute fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$).



Définition III.1.4

- On dit que f est minorée sur D s'il existe un réel m tel que

$$\forall x \in D, \quad f(x) \geq m.$$

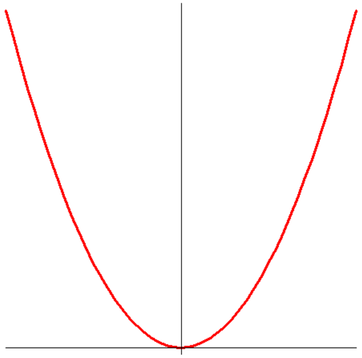
  La borne inférieure de f sur D est définie comme étant le plus grand minorant de f sur D et notée $\inf\limits_D f$.
- On dit que f possède un minimum sur D s'il existe un point $x_0 \in D$ tel que

$$\forall x \in D, \quad f(x) \geq f(x_0).$$

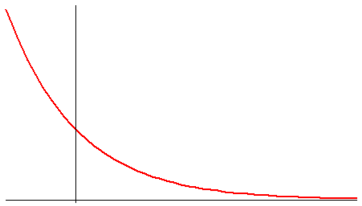
Exemples

- La fonction $f : x \mapsto x^2$ possède un minimum sur $\mathbb{R}$ en 0:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0^2 = 0.$$



- La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ a beau être minorée par 0, elle ne possède pas de minimum sur $\mathbb{R}$ (c'est d'ailleurs impossible pour toute fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$).



Définition III.1.5 On dit que f bornée sur D si elle est minorée et majorée sur D donc s'il existe deux réels M et m tels que

$$\forall x \in D, \quad m \leq f(x) \leq M,$$

ce qui se produit si et seulement s'il existe un réel C tel que

$$\forall x \in D, \quad |f(x)| \leq C.$$

1.3 Définition de la continuité; prolongement par continuité

Définition de la continuité

Définition III.1.6 Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit a un point de I. On dit que f est continue au point a lorsque

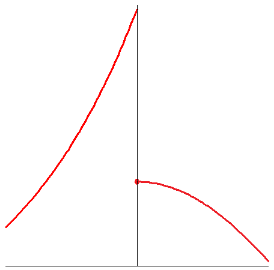
$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a).$$

- On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Continuité à droite, à gauche

Définition III.1.7 On dit que f est continue à droiteau point a lorsque

$$\lim_{x \to a^+} = f(a).$$



Remarque. Rappelons qu'un raccourci pour désigner "limite à droite" (resp. gauche) est

$$\lim_{x \to a^+},$$

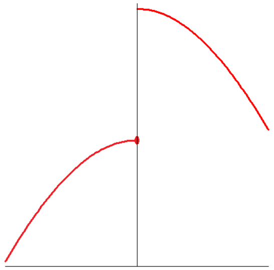
resp.

$$\lim_{x \to a^-}$$

et qu'à ce titre, a^+ ne désigne pas un réel "très très proche" de a mais seulement un raccourci d'écriture signifiant "tend vers a en étant supérieur à a".

Définition III.1.8 On dit que f est continue à gauche au point a lorsque

$$\lim_{x \to a^-} = f(a).$$



Proposition III.1.2 Une fonction est continue au point a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en ce point.

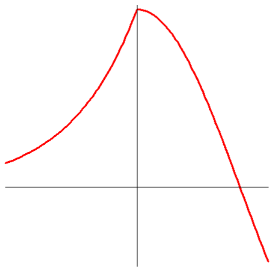
Remarques.

- Cette proposition n'a de sens que si le point a est intérieur au domaine; si ce point est l'extrémité inférieure (resp. supérieure) du domaine, la continuité est évidemment synonyme de continuité à droite (resp. gauche).
- Et ce point de vue n'a d'intérêt que pour les fonctions définies par morceaux:

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\geq 0\\ e^x & \text{si } x<0\end{cases}$$
est continue sur $\mathbb{R}$:

- elle est continue en 0 puisque
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\cos x\\ &= 1\\ &= f(0)\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} e^x\\ &= 1\\ &= f(0).\end{aligned}$$
- Elle est évidemment continue sur $]0,+\infty[$ car $x\mapsto \cos x$ continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ car $x\mapsto e^x$ continue sur $]-\infty,0[$.



Continuité et suites.

Théorème III.1.3 Si f est une fonction continue en un point a et si (u_n) est une suite qui converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Exemple

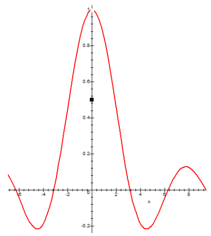
La fonction $x\mapsto e^x$ étant continue en 0 et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0, on a
$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{n}} &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0\\ &= 1.\end{aligned}$$

Prolongement par continuité

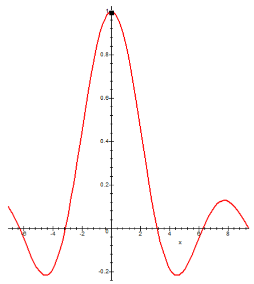
Définition III.1.9 Une fonction $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ est prolongeable par continuité au point a lorsque f possède une limite finie ℓ en a auquel cas le prolongement est obtenu en posant $f(a)=\ell$.

Exemples

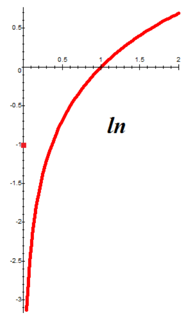
- Soit f définie sur $]0,1]$ par $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.
  - On peut prolonger f en 0 en lui attribuant la valeur $\frac{1}{2}$: ceci est inintéressant car la fonction ainsi prolongée est "mauvaise":



  - On sait que
$$\frac{\sin x}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
En posant $f(0)=1$, le prolongement obtenu, que l'on pourra noter $\bar{f}$ pour la distinguer de la fonction d'origine, est une fonction continue sur $[0,1]$.



- Toutes les fonctions ne sont pas prolongeables par continuité; ci-dessous, la fonction $\ln$: quelle que soit la valeur que l'on attribue à 0, on n'obtiendra pas de fonction continue en 0 puisque f tend vers $-\infty$ en 0^+.



1.4 Fonction continue sur un segment

Rappelons qu'un segment est un intervalle fermé borné comme $[0,1]$, mais pas $[0,1[$.

Théorème fondamental

Théorème III.1.4 Toute fonction définie et continue sur un segment I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée: il existe donc un réel C tel que
$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq C,$$
et possède un maximum et un minimum sur I: il existe donc deux réels x_1 et x_2 tels que
$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_1), \qquad f(x) \leq f(x_2).$$

Exercice 53 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Les hypothèses de ces questions sont indépendantes.

(1) Démontrer que si g est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est bornée.

(2) On suppose que f est bornée et g est continue. Démontrer que $g \circ f$ est bornée.

Exercice 54 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, de période T. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 55 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I telle que
$$\forall x \in I, \quad f(x) > 0.$$

(1) Démontrer que si I est un segment, alors il existe un réel $m > 0$ tel que
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq m.$$

(2) Démontrer à l'aide d'un exemple que si I n'est pas un segment, il peut n'existe *aucun* réel $m > 0$ tel que
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq m.$$

1.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Il prend plusieurs formes; soit f une fonction définition définie et continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

Théorème III.1.5

- *Version abstraite:* $f(I)$ est un intervalle.
- *Version concrète:* soit a et b deux points de I. Alors pour tout réel $d \in [f(a), f(b)]$ (que l'on ait $f(a) \leq f(b)$ ou $f(a) \geq f(b)$, il s'agit de l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$), il existe $c \in [a, b]$ tel que $d = f(c)$
- *En particulier,* si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Premier exemple

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. En considérant la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède au moins une solution $x \in [0, 1]$.

- L'application g est définie et continue sur $[0, 1]$.
- On a
$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0 \text{ car par hypothèse, } f(0) \geq 0$$
$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \text{ car par hypothèse, } f(1) \leq 1.$$
- Il en résulte que $0 \in [g(0), g(1)]$ et du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$. Ce réel x_0 vérifie $f(x_0) = x_0$.

Deuxième exemple

Soit f une définie et continue sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ et possédant une limite finie L en $+\infty$. On considère la fonction g définie par
$$g(t) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{t} - 1\right) & \text{si } t \in]0, 1] \\ L & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Vérifier que g est définie et continue sur $[0, 1]$ et en déduire que pour tout réel $d \in [f(0), L[$, il existe un réel $x \in I$ tel que $f(x) = d$.

- Posons $\varphi(t) = \frac{1}{t} - 1$. Il est clair que φ est définie et de classe C^1 sur $]0, 1]$ avec $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}$, d'où les variations:

t	0		1
$\varphi'(t)$	$\Vert$	$-$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0

Des variations de φ, on déduit que φ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi, $f(\varphi(t))$ existe pour tout $t \in]0, 1]$, ce qui prouve que g est déjà bien définie sur $]0, 1]$ et puisque $g = f \circ \varphi$, on en déduit que g est déjà continue sur $]0, 1]$ comme composée de fonctions continues

- Lorsque t tend vers 0^+, $\frac{1}{t} - 1$ tend vers ∞ si bien que par théorème de composition des limites,
$$f\left(\frac{1}{t} - 1\right) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} L.$$
Autrement dit,
$$g(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} g(0)$$
i.e. g est continue en 0.
- On en conclut que g est définie et continue sur $[0, 1]$.
- Remarquons que $g(0) = L$ et $g(1) = f(0)$. Soit alors $d \in [f(0), L[$, c'est à dire soit $d \in]g(0), g(1)[$; a fortiori, $d \in]g(0), g(1)]$ et du fait que g est continue sur $[0, 1]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel $t \in [0, 1]$ tel que $g(t) = d$. Puisque $d \neq L = g(0)$, on a $t \neq 0$ si bien que
$$\begin{aligned} d &= g(t) \\ &= f\left(\frac{1}{t} - 1\right). \end{aligned}$$
- Le réel $x = \frac{1}{t} - 1$ est donc tel que $f(x) = d$.

Exercice 56 Justifier l'existence d'au moins une solution aux équations suivantes sur l'intervalle considéré:

(1) $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ sur $I = [0, 1]$

(2) $e^x = 2 + x$ sur $[\ln 2, 2 \ln 2]$.

Exercice 57 Justifier l'existence d'au moins deux solutions à l'équation
$$x^3 - 3x^2 = -1$$
sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 58 Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ telle $f([0,1]) \subset [0,1]$ i.e. pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \in [0,1]$. En considérant la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, démontrer que f admet un point fixe, c'est à dire un point x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 59

(1) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles; on suppose que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Démontrer alors que f garde signe constant sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

(a) Démontrer par l'absurde que l'on ne peut pas avoir $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Démontrer par l'absurde que l'on ne peut pas avoir $g(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) En déduire que f possède au moins un point fixe.

(d) Démontrer que f possède un unique point fixe.

1.6 Théorème de la bijection

Théorème III.1.6 Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue, strictement monotone sur I.

- Alors $J = f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert).
- f réalise une bijection de I sur J et $f^{-1} : J \to I$ est continue et de même sens de monotonie que f.
- Si $I = [a,b]$ et f est croissante (resp. décroissante), alors $J = [f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).
- Si $I =]a,b]$, alors $J = \left] \lim_{x\to a} f(x), f(b) \right]$, ...
- Le graphe de f^{-1} s'obtient par symétrie du graphe de f par rapport à la première bissectrice $y = x$.

Exercice 60 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 61 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^x + x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 62 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 63 Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales

(1) $f : x \mapsto x^5 - x^3 + 1$

(2) $g : x \mapsto 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$.

2 Autour de la dérivabilité (aspects théoriques)

2.1 Définition formelle

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction et a un point intérieur à I.

Définition III.2.10 On dit que f est dérivable au point a si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite finie ℓ quand x tend vers a. Ce nombre ℓ est appelé nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La tangente au graphe de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point $(a, f(a))$ et de pente $f'(a)$; elle possède donc l'équation cartésienne

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Définition III.2.11 On dit que f est dérivable à droite, resp. à gauche au point a si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

possède une limite finie ℓ_d, resp. ℓ_g, quand x tend vers a par valeurs supérieures, resp. inférieures. Ce nombre ℓ_d, resp. ℓ_g est appelé nombre dérivé à droite, resp. à gauche de f en a et noté $f'_d(a)$, resp. $f'_g(a)$.

Remarque. Rappelons qu'un raccourci pour désigner "limite à droite" (resp. gauche) est

$$\lim_{x\to a^+},$$

resp.

$$\lim_{x\to a^-}$$

et qu'à ce titre, a^+ ne désigne pas un réel "très très proche" de a mais seulement un raccourci d'écriture signifiant "tend vers a en étant supérieur à a".

Définition III.2.12 Lorsque a est l'extrémité inférieure, resp. supérieure de I, on dit que f est dérivable en a si f est dérivable à droite, resp. gauche en a.

Proposition III.2.7

- De façon évidente, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite avec égalité entre $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.
- Si f est dérivable à gauche et à droite en a mais que $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, on dit que le graphe de f présente un point anguleux au point d'abscisse a.

Exercice 64 En se ramenant à la définition et strictement à la définition, étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes et en cas de dérivabilité, dire si la fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

(1) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(2) $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(3) $f : x \mapsto \begin{cases} \sin x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(4) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

2.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Les théorèmes ci-dessous sont présentés avec leurs hypothèses *minimales*: il *suffit* qu'il y ait continuité sur tout l'intervalle et dérivabilité à l'intérieur seulement; il va de soi que ces théorèmes sont valables pour une fonction qui vérifierait "mieux" que cela, comme une fonction de classe C^1 sur tout l'intervalle

Théorème III.2.8

- ***Théorème de Rolle:*** soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- ***Théorème des accroissements finis:*** soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
- ***Inégalité des accroissements finis.*** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction définie et continue sur l'intervalle I, dérivable sur l'intérieur de I et telle que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k.$$

Alors

$$\forall (x, y) \in I \times I, \quad |f(y) - f(x)| \leq k\,|y - x|\,.$$

Dans ce cas, f est dite k-lipschitzienne.

Exercice 65 Soit $f : x \mapsto 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$. Démontrer que f' s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

Exercice 66 Soit a, b, c trois réels. En appliquant le théorème des accroissements finis à une fonction bien choisie, démontrer qu'il existe un réel $x \in [0, 1]$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice 67 Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(1) Justifier l'existence d'un réel $m > 0$ tel que l'on ait $f'(x) \geq m$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(2) En déduire, en étudiant une fonction convenablement choisie, que l'on a $f(x) \geq mx$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 68 Soit un entier $n \geq 1$ et f une fonction définie et de classe C^n sur un intervalle I et s'annulant en $n+1$ points deux à deux distincts $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Démontrer par récurrence sur n que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

Exercice 69 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. En considérant la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(-x)$, démontrer que pour tout réel $x > 0$, il existe un réel $c > 0$ tel que

$$f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

Exercice 70 *Classique et très important.* À l'aide de l'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction $\sin$, démontrer:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|.$$

Exercice 71 À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer:

(1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

(2) $\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, \quad |\cos(x + h) - \cos h| \leq |h|$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^{2x} - e^x| \leq |x|e^{2|x|}$.

2.3 Dérivée et monotonie; extrémums

Théorème III.2.9 ***Monotonie et signe de la dérivée.*** Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, sauf en un nombre fini de valeurs de x (typiquement un ou deux points où f' s'annule), alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, sauf en un nombre fini de valeurs de x (typiquement un ou deux points où f' s'annule), alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème III.2.10 ***Condition d'existence d'un extrémum.*** Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I à valeurs réelles.

- Si f présente un extrémum local en un point x_0 *intérieur* à I, autrement dit, x_0 *n'est pas* une extrémité de l'intervalle I, on a alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.
- Réciproquement, si x_0 est un point intérieur à I tel que $f'(x_0) = 0$, on n'a pas nécessairement d'extrémum en x_0. Toutefois,
  - si de plus f' change de signe localement en x_0, alors f présente un extrémum en x_0, qui est un minimum si f' passe de négative à positive, un maximum si f' passe de positive à négative.

2.4 Théorème de la limite de la dérivée et de prolongement des fonctions de classe C^1

L'usage de ce théorème est typique pour une fonction définie par morceaux ou pour une fonction que l'on vient de prolonger par continuité.

Théorème III.2.11 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et à valeurs réelles et a un point I.

- On suppose que:
  - f est continue sur I, *et en particulier au point* a (ce qui peut exiger une preuve spécifique),
  - f est de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$
  - $f'(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a.

  Alors f est de classe C^1 sur I: ce résultat est aussi connu sous le nom de théorème de prolongement des fonctions de classe C^1.
- Si l'on suppose que:
  - f est continue sur I, *et en particulier au point* a,
  - f est de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$
  - $f'(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque x tend vers a,

  alors f n'est pas dérivable en a mais le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse a.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- Dans un premier temps, on sait que
$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
car par exemple
$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x\to 0}{=} x + o(x) \\ \Longrightarrow \frac{\sin x}{x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + o(1) \\ \Longrightarrow \frac{\sin x}{x} &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$
Autrement dit,
$$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0),$$
ce qui prouve que f est continue en 0.
- Il est clair que la fonction f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.
- On calcule
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2} = -\frac{1}{3}x \end{aligned}$$
ce qui démontre que
$$f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
- Il résulte alors du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que
$$f'(0) = 0.$$

Exercice 72 Démontrer à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 73 Démontrer à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 74 On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^x$.

(1) Démontrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

(2) Le prolongement obtenu est-il de classe C^1 sur $[0,+\infty[$? Si non, préciser l'allure du graphe de f au voisinage du point d'abscisse 0.

2.5 Théorème de dérivabilité des fonctions réciproques

Théorème III.2.12 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie et strictement monotone sur un intervalle I, réalisant donc une bijection de I sur son image $J = f(I)$ et g son application réciproque. On suppose que
- f est dérivable sur I
- et f' ne s'annule pas sur I.

Alors g est dérivable sur J et pour tout $y \in J$,
$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1.
2. Vérifier que f est définie sur $I = [0,+\infty[$.
3. Démontrer que f réalise une bijection de f sur un intervalle J, que l'on précisera.
4. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et calculer sa dérivée en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Réponse.

1.
2. Le trinôme x^2+2x+2 a un discriminant < 0 et donc > 0 sur $\mathbb{R}$, ce qui assure l'existence de $\sqrt{x^2+2x+2}$ et de $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ pour tout réel x et en particulier pour tout réel $x \in [0,+\infty[$.
3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est dérivable sur $K =]0,+\infty[$ de dérivée $t \mapsto \frac{1}{2t\sqrt{t}}$ et la fonction $x \mapsto x^2+2x+2$ est dérivable sur I et à valeurs dans K. Par théorème de composition des fonctions dérivables, f est dérivable sur I et
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = -\frac{2x+2}{2(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}} = -\frac{x+1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$$
et on voit que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, ce qui démontre que f est strictement décroissante sur I; étant continue sur I, on déduit du théorème de la bijection que f réalise une bijection de I sur
$$J = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right],$$
et puisque
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
f réalise une bijection de $I = [-1,+\infty[$ sur $J = \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
4. Comme mentionné ci-dessus, f est dérivable sur I et $f'(x) < 0$ pour tout I. On déduit alors du théorème de dérivabilité des fonctions réciproques que f^{-1} est dérivable sur J et qu'en notant $g = f^{-1}$,
$$\forall y \in J, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$
On déduit $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ que
$$0 = f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

i.e.
$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Ainsi,
$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 75 On considère la fonction $f : x \mapsto 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$.

(1) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(2) On note g l'application réciproque de f. Quel est le sens de variation de g?

(3) Quel est le domaine de dérivabilité de g?

(4) Représenter dans un même repère les courbes représentatives de f et de g, en indiquant les tangentes horizontales et verticales.

Exercice 76 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

(1) Étudier les variations de f.

(2) En déduire que f réalise une bijection de $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. On note alors g la bijection réciproque.

(3) En quels points g est-elle dérivable?

(4) Calculer $g'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$ et en déduire $g'(e)$ et $g'(2e^2)$.

(5) Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f et de g.

2.6 Théorème fondamental de l'analyse-intégration

Le théorème suivant est capital.

Théorème III.2.13 Soit I un intervalle, f une fonction définie et continue sur I et a un point quelconque de I. Alors la fonction
$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$
est définie et de classe C^1 sur I, et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a:
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

Exercice 77 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. On suppose que
$$\forall (\alpha, \beta) \in I \times I, \quad \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0.$$
En introduisant une fonction F bien choisie, démontrer que f est la fonction nulle.

Exercice 78 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On note alors
$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt.$$

(1) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \int_0^{2x} f(t)\,dt.$$

(a) Écrire, en termes de compositions, une relation entre H, F et v où v est la fonction $s \mapsto 2s$.

(b) En déduire que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = 2f(2x).$$

(c) Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$
est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.

(2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(x+t)\,dt.$$
En effectuant le changement de variable $u = x + t$ dans $g(x)$, démontrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

Exercice 79 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose qu'il existe un réel C tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} f(t)\,dt = C.$$
Démontrer que f est périodique de période T.

2.7 Formules de Leibniz et Taylor; la théorie des développements limités

Théorème III.2.14 ***Formule de Leibniz.*** Si f et g sont deux fonctions n-fois dérivables sur I, alors le produit fg est n-fois dérivable sur I et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

Exercice 80 Soit un entier $n \geq 3$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction
$$f : x \mapsto x^2 e^{3x}.$$

Exercice 81

(1) On considère la fonction h définie sur $I =]-1, +\infty[$ par
$$\forall x \in I, \quad h(x) = \ln(1+x).$$
Démontrer par récurrence sur n que pour tout $x \in I$,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

(2) On considère la fonction h définie sur $I =]-1,+\infty[$ par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x^{n-1}\ln(1+x).$$

Appliquer la formule de Leibniz puis démontrer: pour tout $x \in I$ tel que $x \neq 0$ et tout entier $n \geq 1$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}\left(1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right).$$

Formule de Taylor-Young

Théorème III.2.15 Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^n sur l'intervalle I et a un point de I.

- Alors lorsque $x \to a$:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$
- En particulier, soit f une fonction de classe C^n sur un voisinage de 0. Alors f admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0:
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$
avec $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout k.

Exercice 82 Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Appliquer la formule de Taylor-Young à f et à f' et en déduire:

$$\lim_{x t o 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} = \frac{1}{2} f''(0).$$

Exercice 83 Soit a un réel et f une fonction définie et de classe C^2 sur un intervalle centré en a. Appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $a-h$ et en $a+h$ et démontrer:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h) - 2f(h) + f(a+h)}{h^2} = f''(a).$$

Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème III.2.16 Soit $f : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^{n+1} sur l'intervalle I.

- Pour tout $x \in I$, on a:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$$
- En particulier, on a ***l'inégalité de Taylor-Lagrange:*** si la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est majorée par la constante M_{n+1} sur I, alors pour tout $x \in I$:
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 84

(1) Soit un réel $x > 0$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 entre 0 et x, démontrer:

$$\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right| \leq \frac{x^5}{120}.$$

(2) En déduire:

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 85

(1) Soit un réel $x > 0$. Démontrer:

$$\left| \ln(1+x) - x - \frac{1}{2}x^2 \right| \leq \frac{1}{3}x^3.$$

(2) En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Définition d'un développement limité

Définition III.2.13 Soit f une fonction définie au moins sur un voisinage de 0 (ce peut être un intervalle centré en 0, l'intervalle $[-1,+\infty[$, $\mathbb{R}$ tout entier $\ldots$) et n un entier ≥ 0, à valeurs réelles ou complexes.

- On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, s'il existe des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (réelles ou complexes, appelées *coefficients* du développement limité) telles que
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Existence d'un développement limité

Théorème III.2.17 Toute fonction de classe C^n au voisinage de 0 admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, donné par:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n).$$

(cf. formule de Taylor-Young). On remarque donc que pour une fonction de classe C^n, les coefficients du développement limité en 0 sont, aux factorielles près, les valeurs des dérivées successives de la fonction en 0.

Remarques.

- On peut évidemment définir la notion de développement limité au voisinage de tout réel x_0: on dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ telles que
$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$
Dans la pratique, quand il s'agit de déterminer un développement limité au voisinage d'un point x_0, on se ramène le plus souvent, au moyen d'une translation qui consiste à considérer la fonction
$$g : x \mapsto f(x - x_0),$$
à rechercher un développement limité au voisinage de 0.

- C'est la formule de Taylor qui est à l'origine de l'obtention de développements limités de la plupart des fonctions usuelles. Grosso-modo, la connaissance des valeurs des dérivées successives d'une fonction en 0 donnent, aux factorielles près, les coefficients d'un développement limité.
- Inversement, la connaissance du développement limité à l'ordre n d'une fonction f permet de retrouver la valeur des dérivées successives de cette fonction, comme dans l'exemple suivant.

Exemple typique

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{1+x}$$

et déduire de ce développement limité la valeur de $f^{(4)}(0)$.

- (Pour le rappel précis des techniques, cf. chapitre suivant). On a

$$\begin{aligned} \cos x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ \frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

et par règle régissant le développement limité d'un produit (cf. chapitre suivant: on effectue le produit des parties polynomiales des développements en ne conservant que les termes de degré ≤ 4 et en mettant les autres dans la "poubelle" qu'est $o(x^4)$):

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) \times \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4\right) + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

- La fonction f est clairement de classe C^4 (et même de classe C^∞ au voisinage de 0) donc *si on le voulait*, on pourrait appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 en 0; elle donnerait:

$$\frac{\cos x}{1+x} = f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x\frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4).$$

- On a donc simultanément

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4) \\ f(x) = \frac{\cos x}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Mais la théorie affirme que lorsqu'il existe, le développement limité (à un ordre donné) est unique i.e. si on dispose de deux développements limités d'une même fonction au même ordre en 0, c'est que les coefficients respectifs de ces développements coïncident. C'est pourquoi:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 : \text{ identification des coefficients de degré } 0 \text{ (trivial ici)} \\ f'(0) &= -1 : \text{ identification des coefficients de degré } 1 \\ \frac{f''(0)}{2!} &= \frac{1}{2} : \text{ identification des coefficients de degré } 2 \\ \frac{f^{(3)}(0)}{3!} &= -\frac{1}{2} : \text{ identification des coefficients de degré } 3 \\ \frac{f^{(4)}(0)}{4!} &= \frac{13}{24} : \text{ identification des coefficients de degré } 4. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f^{(4)}(0) &= 4! \times \frac{13}{24} \\ &= 24 \times \frac{13}{24} \\ &= 13. \end{aligned}$$

Exercice 86 On définit la fonction f par

$$f : x \mapsto (\sin x)\ln(1+x).$$

Calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$.

3 Autour des limites

3.1 Généralités

On considère acquise la notion de limite de fonction, de limite d'une suite, infinie ou non. On trouvera en annexe les définitions formelles.

Théorème de composition des limites. Une traduction naïve pourrait être:

l'ouverture d'une porte déclenche une alarme;

d'autre part, en actionnant un interrupteur, on ouvre cette porte.

On en déduit qu'en actionnant cet interrupteur, on déclenche l'alarme.

Théorème III.3.18 Si $f(x)$ tend vers L (réel, ou complexe, ou $\pm\infty$) lorsque x tend vers a (nombre réel ou $\pm\infty$)

- et si (u_n) est une suite qui tend vers a, alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L.$$

- En particulier, si f est une fonction continue en un point a et si (u_n) est une suite qui converge vers a, alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

- Si g est une fonction telle que $g(t)$ tend vers a lorsque t tend vers t_0, alors

$$f(g(t)) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} L.$$

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto e^x$ étant continue en 0 et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0, on a

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n}} &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

- La fonction $f : x \mapsto e^x$ possède la limite 0 en $-\infty$ et la fonction $g : t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ possède la limite $-\infty$ en 0. C'est pourquoi

$$e^{\frac{-1}{t^2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème III.3.19 ***Limite finie et bornitude.***

- Si f est une fonction possédant une limite finie en $+\infty$, alors f est bornée au voisinage de $+\infty$ i.e. il existe un rang A et un réel $M > 0$ tel que
$$\forall x \geq A,\ |f(x)| \leq M.$$
Résultat également valable, *mutatis mutandis*, en $-\infty$.
- Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (donc de limite finie) est bornée:
$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Proposition III.3.20 ***Opérations sur les limites.*** Soit f et g sont deux fonctions possédant des limites finies ℓ et ℓ' en a (nombre réel ou $\pm\infty$)

- si α, β sont des scalaires, alors $\alpha f + \beta g$ possède la limite finie $\alpha\ell + \beta\ell'$ en a;
- la fonction produit $x \mapsto f(x)g(x)$ possède la limite $\ell\ell'$ en a.
- Pour tout exposant fixe $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (f(x))^p$ possède la limite ℓ^p en a.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes possédant les limites respectives ℓ et ℓ'.

- si α, β sont des scalaires, alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et possède la limite finie $\alpha\ell + \beta\ell'$. De ce fait, l'ensemble E de toutes les suites convergentes est un espace vectoriel pour les opérations de somme entre suites et de multiplication par un scalaire.
- la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et possède la limite $\ell\ell'$.
- Pour tout exposant fixe $p \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et possède la limite ℓ^p.

Attention aux puissances à exposant variable! Toujours convertir en exponentielle de logarithme!

Exemple typique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{n}.$$
Il est clair que (u_n) converge vers 1 mais ce serait une erreur monumentale de croire que u_n^n tend vers 1 sous prétexte que "1 puissance n'importe quoi fait toujours 1".

- On écrit typiquement
$$\begin{aligned}\ln(u_n^n) &= n\ln(u_n)\\ &= n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$
- On sait (d'après le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$) que
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$
- On a donc
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
et en conséquence
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1,$$
ce qui montre que
$$\ln(u_n^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
- C'est pourquoi
$$e^{\ln(u_n^n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 = e$$
(par continuité de la fonction $t \mapsto e^t$ en 1) c'est à dire
$$u_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$
i.e.
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e.$$

3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème III.3.21 ***Théorème de la limite monotone pour les suites.*** Soit (u_n) une suite croissante de nombres réels.

- Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.
- Si (u_n) est non majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
- Donc pour une suite croissante, soit elle converge vers un réel, soit elle tend vers $+\infty$.

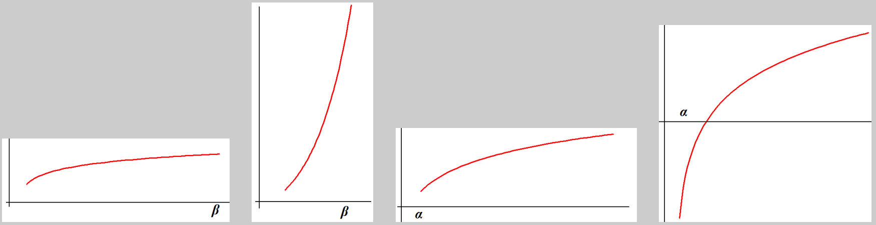
Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels.

- Si (u_n) est minorée, alors (u_n) converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.
- Si (u_n) est non minorée, alors (u_n) tend vers $-\infty$.
- Donc pour une suite décroissante, soit elle converge vers un réel, soit elle tend vers $-\infty$.

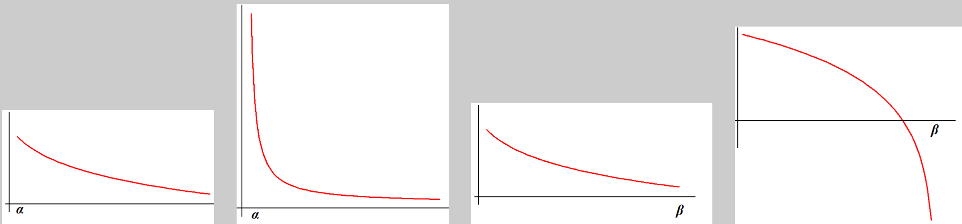
Remarque. À noter qu'une suite de nombres réels non convergente et non monotone peut ne pas tendre vers $\pm\infty$, comme la suite $((-1)^n)$ ou la suite $(\sin n)$.

Théorème III.3.22 ***Théorème de la limite monotone pour les fonctions.***

- Soit f une fonction définie, continue et croissante sur un intervalle $I =]a, b[$, les extrémités pouvant être infinies.
  - Si f est majorée, alors f possède une limite finie en b.
  - Si f est non majorée, alors f tend vers $+\infty$ en b.
  - Si f est minorée, alors f possède une limite finie en a.
  - Si f est non minorée, alors f tend vers $-\infty$ en a.



- Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur un intervalle $I =]a, b[$, les extrémités pouvant être infinies.
  - Si f est majorée, alors f possède une limite finie en a.
  - Si f est non majorée, alors f tend vers $+\infty$ en a.
  - Si f est minorée, alors f possède une limite finie en b.
  - Si f est non minorée, alors f tend vers $-\infty$ en b.



Exercice 87 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}.$$

(1) Démontrer:

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente; on notera ℓ sa limite.

(3) On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = (n+1)u_n^2.$$

Démontrer que la suite (v_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

(4) En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 88 On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

(1) Vérifier l'égalité

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

(2) En déduire:

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

(3) En déduire:

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Indication: on sera amené à reconnaître une somme télescopique.

(4) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = S_n - 2\sqrt{n}.$$

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente. On notera ℓ sa limite, que l'on ne cherchera pas à calculer.

(5) Déduire de cette étude:

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Exercice 89 On considère les fonctions F et G définies par $F(x) = \int_1^x e^{-t}dt, \quad G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt.$

(1) Justifier que F et G sont définies et de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et calculer $F(x)$.

(2) Montrer que G est croissante sur $[1, +\infty[$.

(3) Vérifier que $\forall x \geq 1, \; G(x) \leq F(x)$. En déduire que G possède une limite en $+\infty$.

3.3 Théorème d'encadrement

Théorème III.3.23 Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Si les suites (v_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers a, alors (u_n) converge vers a.
En particulier, soit $(u_n), (w_n)$ des suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq w_n.$$

Si (w_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.

Cas particulier très important.

Théorème III.3.24 Soit (u_n) une suite réelle ou complexe et (α_n) une suite réelle qui converge vers 0 telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \alpha_n.$$

Alors (u_n) converge vers 0.

En effet, $|u_n| \leq \alpha_n$ est strictement équivalent $-\alpha_n \leq u_n \leq \alpha_n$ et le théorème d'encadrement s'applique.

Et la version pour les fonctions:

Théorème III.3.25 Soit f une fonction à valeurs réelles (ou complexes) et g une fonction fonction à valeurs réelles ≥ 0 toutes deux définies sur un intervalle I, a une extrémité (finie ou non) de I telles que

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq g(x) \\ \\ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 90

(1) Par étude d'une fonction bien choisie, démontrer que $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \geq 0$.

(2) En déduire que la suite (I_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$ converge vers 0.

Exercice 91 On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

(1) Démontrer:

$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

(2) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente?

Exercice 92

(1) On pose $f(t) = \sin t - t + \frac{t^3}{6}$. En calculant $f'''(t)$, déterminer le signe de $t - \sin t$ sur $I = [0, +\infty[$ et en déduire:

$$\forall t \in I, \quad t - \sin t \leq \frac{t^3}{6}.$$

(2) Sur $J = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère la fonction g définie par $g(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) dt$.

(a) Justifier que g est définie sur J et utiliser **1** pour prouver:

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[, \quad 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{6\sin x} \int_x^{2x} t^2\,dt.$$

En déduire $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.

(b) Pour $x > 0$, calculer $\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$.

(c) En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{1}{\sin t}\,dt$.

Exercice 93 On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1, \quad 0 \leq v_n \leq 1$$

et on suppose en outre que

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Démontrer:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 94 On considère, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

(1) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

(2) Démontrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite $(un)_{n\geq 1}$.

(3) Justifier que $\frac{u_n^5}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

(4) Démontrer que

$$u_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^6}.$$

3.4 Conservation de certaines inégalités: "passage à la limite"

- Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. On suppose

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq u_n.$$

  Alors

  $$\ell' \leq \ell.$$

- En particulier, si (u_n) est suite convergente telle que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n,$$

  alors $\ell \geq 0$.

- ***Remarques:***
  - On dit que les inégalités larges se conservent par passage à la limite.
  - En revanche, les inégalités strictes peuvent ne pas se conserver: pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{n}$ et cependant la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge 0, qui n'est pas strictement positif!

3.5 Application à des suites d'intégrales

Ce thème est fondamental et sera repris dans un chapitre ultérieur.

Théorème III.3.26 ***Inégalité triangulaire.*** Soit a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Exemple fondamental

Démontrer que

$$\int_0^1 t^n \sin(t^2)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Réponse.

- D'une part,

  $$\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(t^2)| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|t^n \sin(t^2)\right| \leq |t^n| = t^n.$$

- D'autre part,
$$\int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
- En conséquence, l'inégalité triangulaire donne
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\int_0^1 t^n \sin(t^2)\,dt\right| \leq \int_0^1 \left|t^n \sin(t^2)\right|\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt \leq \frac{1}{n+1}$$
et on déduit du théorème d'encadrement que
$$\int_0^1 t^n \sin(t^2)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4 Résultats spécifiques aux suites

4.1 Suites adjacentes

Théorème III.4.27 Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que:
- (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante
- et $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Alors les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$
- Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$, alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune.

Exercice 95 On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par
$$\forall n \geq 1,\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},\qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$
Démontrer que ces suites possèdent une limite commune.

Exercice 96 Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n},\quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$
(1) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(2) En déduire:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

4.2 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I *et prenant ses valeurs dans* I, ce qui se traduit par $f(I) \subset I$ (on dit alors que I est un intervalle de stabilité). On se donne $u_0 \in I$; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n).$$
est alors parfaitement définie.

Proposition III.4.28 Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone, dont le sens est donné par la comparaison de u_1 à u_0.

- Car si $u_1 \geq u_0$, alors $u_2 = f(u_1) \geq f(u_0) = u_1, \ldots u_{n+1} = f(u_n) \geq f(u_{n-1}) = u_n$ donc (u_n) est croissante,
- si $u_1 \leq u_0$, alors $u_2 = f(u_1) \leq f(u_0) = u_1, \ldots u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n-1}) = u_n$ donc (u_n) est décroissante.
- Pour savoir si l'on est dans un cas ou un autre, il est donc pertinent d'étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$: si u_0 est sur un intervalle où g est positive, resp. négative, on est dans le premier cas, resp. second.

De plus:
- si (u_n) est croissante et que I est un intervalle borné supérieurement, alors (u_n) est croissante majorée donc convergente;
- si (u_n) est décroissante et que I est un intervalle borné inférieurement, alors (u_n) est décroissante minorée donc convergente.
- Dans ces deux cas, (u_n) converge vers un point fixe de f i.e. un réel ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.
- D'ailleurs, un point fixe ℓ de f est un réel qui vérifie $g(\ell) = 0$: on prouve (à défaut de trouver) donc l'existence de point fixe en prouvant l'existence d'une solution à l'équation $g(\ell) = 0$, le plus souvent à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 97 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \geq 0$ et par la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$$
avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

(1) Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(2) On suppose $u_0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Démontrer que $u_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Est-elle convergente et si oui, quelle est sa limite?

(3) On suppose $u_0 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente et si oui, quelle est sa limite?

(4) On suppose $u_0 > \frac{3}{4}$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Est-elle convergente et si oui, quelle est sa limite?

Exercice 98 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 \geq 0$ et par la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$$
avec $f(x) = \sqrt{1+x}$.

(1) Étudier les variations puis le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

(2) En déduire, suivant les valeurs de u_0, le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 99 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

(1) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(2) En déduire, par une application rigoureuse du théorème de la limite monotone, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4.3 Suites récurrentes linéaires

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle on se donne ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$
Dans le but d'expliciter u_n en fonction de n, on considère l'équation caractéristique
$$(E) \quad r^2 = ar + b.$$

Théorème III.4.29

- Si (E) possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors il existe des scalaires A et B tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$
On détermine A et B en résolvant le système
$$\begin{cases} u_0 &= A + B \\ u_1 &= Ar_1 + Br_2. \end{cases}$$
Remarquons que ceci est valable même si r_1 et r_2 sont des nombres complexes alors que (u_n) est une suite réelle.
- Si (E) possède une racine double r_1, alors il existe des scalaires A et B tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Bnr_1^n.$$
On détermine A et B en résolvant le système
$$\begin{cases} u_0 &= A \\ u_1 &= Ar_1 + Br_1. \end{cases}$$

Remarque. Pour une théorie plus vaste des suites récurrentes linéaires (d'ordre quelconque), consulter le chapitre "Réduction des matrices carrées".

Exercice 100 Déterminer pour chacune des suites récurrentes linéaires suivantes la valeur de u_n en fonction de n:

(1) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

(2) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = 6u_{n+1} - 9u_n.$$

(3) $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

5 Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques

Suites géométriques

Définition III.5.14 ***Suite géométrique.*** Étant un donné un nombre r (réel ou complexe), la suite géométrique de raison r et de premier terme u_0 est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme u_0 (réel ou complexe) et par la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = ru_n.$$
On a alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 r^n.$$

Théorème III.5.30 ***Limite d'une suite géométrique.*** Mis à part le cas trivial $r = 1$ (suite constante), une suite géométrique de raison r converge si et seulement si $|r| < 1$ (en valeur absolue ou en module dans le cas complexe) et converge alors vers 0:
$$\Big(r \in \mathbb{R} \text{ ou } r \in \mathbb{C}, \; |r| < 1\Big) \implies r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème III.5.31 ***Somme (finie) des termes d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$ (raison réelle ou complexe).***
Pour tout $r \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et tout entier n:
$$\begin{aligned} 1 + r + r^2 + \ldots + r^n &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \\ r^p + r^{p+1} + \ldots + r^{p+n} &= r^p \frac{1 - r^{n-p+1}}{1 - r} \end{aligned}$$
ou avec des Σ:
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} r^k &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \\ \sum_{k=p}^{n} r^k &= r^p \frac{1 - r^{n-p+1}}{1 - r}. \end{aligned}$$

Remarques.

- On peut retenir cette dernière formule ainsi:
$$\text{somme des termes} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$
- Pour une somme infinie de termes d'une série géométrique, se rendre au chapitre "Séries numériques" ou "Séries entières".

Exemple

L'écriture décimale d'un réel x est la donnée d'une suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les décimales) telle que
$$a_0 \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 1, \; 0 \leq a_n \leq 9$$
et telle que
$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x,$$

c'est à dire, avec les notations afférentes aux séries:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} = x$$

(cf. cours sur les séries). On écrit alors communément

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

et on dit que l'on a ainsi écrit le développement décimal de x. Par exemple, pour trouver le réel dont le développement décimal est

$$0,222\dots,$$

on calcule

$$\begin{aligned} 0, \underbrace{222\dots}_{n \text{ décimales}} &= \sum_{k=1}^{n} 2.10^{-k} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k \\ &= 2 \times \frac{1}{10} \times \frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{2}{9} = 0,222\dots .$$

Suites arithmétiques

Définition III.5.15 ***Suite arithmétique.*** Étant un donné un nombre a (réel ou complexe), la suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0 est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme u_0 (réel ou complexe) et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a.$$

Pour tout entier n, on a alors

$$u_n = u_0 + na.$$

Théorème III.5.32 ***Somme des termes d'une suite arithmétique.*** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0. Alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_0 + u_1 + \dots + u_n &= \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2} \\ \forall p \leq n,\ u_p + u_{p+1} + \dots + u_n &= \frac{(u_p+u_n)(n-p+1)}{2}, \end{aligned}$$

Formule que l'on retient ainsi: la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est la moyenne entre le premier et le dernier terme, multipliée par le nombre de termes.

En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Suites arithmético-géométriques

C'est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation de récurrence du type

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b,$$

où a et b sont deux nombres donnés avec $a \neq 1$. Pour exprimer u_n:

- on recherche α tel que $\alpha = a\alpha + b$ (le point fixe),
- la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est alors géométrique de raison a.
- On en déduit l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

Exercice 101 Calculer

(1) $\sum_{i=3}^{n} i$ $(n \geq 3)$

(2) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)$ $(n \geq 1)$

(3) $\sum_{i=4}^{n+1} (3i+7)$ $(n \geq 3)$

(4) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$ $(n \geq 1)$

Exercice 102 Déterminer le réel x dont le développement décimal est le suivant

(1) $0,111\dots$

(2) $0,999\dots$

(3) $0,12121212\dots$.

Exercice 103 Pour chacune des suites (u_n) suivantes, considérer la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ où a est un réel convenable et en déduire l'expression de u_n:

(1) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

(2) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$.

(3) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $6u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n + 18$.

Exercice 104 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + n^2 - 2.$$

Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = u_n + an^2 + bn + c$$

soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 105 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 3^n.$$

Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n}{3^n}$$

est une suite arithmético-géométrique. En déduire les valeurs de v_n puis de u_n.

6 Quelques mots des suites et fonctions à valeurs complexes

Définition III.6.16 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est dite convergente lorsque c'est le cas pour les suites $(\operatorname{Re} u_n)$ et $(\operatorname{Im} u_n)$ et par définition,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(u_n).$$

Proposition III.6.33 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle que

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Alors

$$z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- En effet, le résultat est trivial si $z=0$.
- Si $z\neq 0$, on a
  $$|z^n| = |z|^n = e^{n\ln|z|}$$
  et puisque $|z|<1$, on a $\ln|z|<1$ et alors
  $$n\ln|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \implies e^{n\ln|z|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
  c'est à dire
  $$|z^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Fonctions à valeurs complexes

Soit f fonction de la variable réelle et à valeurs complexes définie sur un intervalle I et a un point de$I$.

Définition III.6.17

- f est continue au point a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues au point a.
- f est dérivable en un point a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables au point a et alors
  $$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a).$$
- On dit que f est dérivable sur un I lorsque f est dérivable en tout point de I.
- On dit que la fonction F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que
  $$\forall t\in I,\ F'(t) = f(t).$$

Exemple fondamental

Théorème III.6.34 Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, la fonction $f: t\mapsto e^{\alpha t}$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t) = \alpha e^{\alpha t}.$$

Lorsque $\alpha\neq 0$, une primitive de f est la fonction

$$F: t\mapsto \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}.$$

Définition III.6.18 Soit a et b deux points de I. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im}(f(t))\,dt.$$

Exercice 106 Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Établir la convergence de la suite complexe $\left(\rho_n e^{i\theta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 107 Soit $r\in]0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} r^k\cos(k\theta).$$

(1) Exprimer u_n au moyen de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\theta}$.

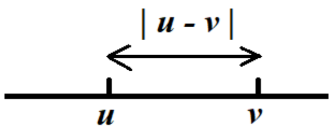
(2) En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique, exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\theta}$ en fonction de r,θ et n.

(3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

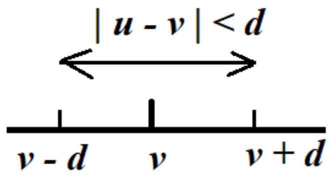
Exercice 108 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \operatorname{sh} x\,dx$.

7 Annexe: définitions formelles des limites

Rappel concernant les valeurs absolues et modules. Valeur absolue et module (ils se notent d'ailleurs de la même manière!) sont les instruments de mesure de la distance entre points (de l'axe réel, du plan complexe):



Ainsi,



$|u-v| \leq d \iff$ les points u et u se trouvent à moins de d l'un de l'autre.

Continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un domaine D et a un point de D. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est à dire lorsque:

- à chaque fois que l'on se donne un réel $\varepsilon > 0$ (modélisant un petit écart),
- il existe un intervalle centré en a sur lequel les valeurs prises par f ne s'écartent pas de $f(a)$ de plus de ε.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.19 La fonction f est continue au point a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in D \text{ et } |x-a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Exercice 109 Uniquement à l'aide de la définition, démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue en 0.

Continuité à gauche, à droite, d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un domaine D et a un point de D. On dit que f est continue à gauche, resp. à droite, en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, c'est à dire lorsque:

- à chaque fois que l'on se donne un réel $\varepsilon > 0$ (modélisant un petit écart),
- il existe un demi-intervalle centré en a sur lequel les valeurs prises par f ne s'écartent pas de $f(a)$ de plus de ε.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.20 La fonction f est continue à gauche au point a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in D \text{ et } a \leq x \leq a + \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f est continue à dorite au point a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in D \text{ et } a - \alpha \leq x \leq a \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Remarque. De manière évidente, une fonction f est continue en un point a intérieur à un domaine D si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en ce point.

Limite finie d'une fonction en un point

Soit I un intervalle, a un point de I, f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f tend vers le réel (ou complexe) ℓ lorsque x tend vers a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, c'est à dire lorsque:

- à chaque fois que l'on se donne un réel $\varepsilon > 0$ (modélisant un petit écart),
- il existe un intervalle centré en a sur lequel les valeurs prises par f ne s'écartent pas de ℓ de plus de ε.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.21 On dit que f tend vers le réel (ou complexe) ℓ lorsque x tend vers a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in I \text{ et } |x-a| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Limite finie à gauche, à droite, d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un domaine D et a un point de D. On dit que f tend vers le réel (ou complexe) ℓ lorsque x tend vers a à gauche, resp. à droite, lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$, resp. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, c'est à dire lorsque:

- à chaque fois que l'on se donne un réel $\varepsilon > 0$ (modélisant un petit écart),
- il existe un demi-intervalle centré en a sur lequel les valeurs prises par f ne s'écartent pas de ℓ de plus de ε.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.22 On dit que f tend vers le réel (ou complexe) ℓ quand x tend vers a à gauche lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in D \text{ et } a \leq x \leq a + \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que f tend vers le réel (ou complexe) ℓ quand x tend vers a à droite lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in D \text{ et } a - \alpha \leq x \leq a \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque. De manière évidente, une fonction f tend vers ℓ au point a intérieur à un domaine D si et seulement si elle tend vers ℓ à gauche et à droite en ce point.

Limite infinie d'une fonction en un point

Soit I un intervalle, a un point de I, f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a lorsque

- à chaque fois que l'on se donne un réel $A > 0$ (modélisant une haute barre à dépasser),
- il existe un intervalle centré en a sur lequel les valeurs prises par f dépassent ce réel.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.23 On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a lorsque

$$\forall A > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in I \text{ et } |x-a| \leq \alpha \implies f(x) \geq A.$$

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a lorsque

$$\forall A > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in I \text{ et } |x-a| \leq \alpha \implies f(x) \leq A.$$

Remarque. On définit de même la notion de limite infinie à gauche ou à droite d'un point.

Exercice 110 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Limite finie d'une fonction en l'infini

On dit que $f(x)$ tend vers le réel (ou complexe pour une fonction à valeurs complexes) ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque

- à chaque fois que l'on se donne un réel $\varepsilon > 0$ (modélisant un petit écart),
- il existe un rang au delà duquel les valeurs prises par f ne s'écartent pas de ℓ de plus de ε.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.24 On dit que $f(x)$ tend vers le réel ou complexe ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x_0 \geq a \,/\, x \geq x_0 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que $f(x)$ tend vers le réel ou complexe ℓ quand x tend vers $-\infty$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x_0 \leq a \,/\, x \geq x_0 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exercice 111 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Limite infinie d'une fonction en l'infini

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, +\infty[$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque

- à chaque fois que l'on se donne un réel $A > 0$ (modélisant une haute barre à dépasser),
- il existe un rang au delà duquel les valeurs prises par f dépassent ce réel.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.25 On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall A > 0,\ \exists\, x_0 \geq 0 \,/\, x \geq x_0 \implies f(x) \geq A.$$

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ lorsque

$$\forall A > 0,\ \exists\, x_0 \leq 0 \,/\, x \leq x_0 \implies f(x) \geq A.$$

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall A < 0,\ \exists\, x_0 \geq 0 \,/\, x \geq x_0 \implies f(x) \leq A.$$

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ lorsque

$$\forall A < 0,\ \exists\, x_0 \leq 0 \,/\, x \leq x_0 \implies f(x) \leq A.$$

Exercice 112 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Limite d'une suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels ou complexes. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ (nombre réel ou complexe) lorsque

- à chaque fois que l'on se donne un réel $\varepsilon > 0$ (modélisant un petit écart),
- il existe un rang à partir duquel les termes de la suite ne s'écartent pas de ℓ de plus de ε.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.26 La suite (u_n) converge vers ℓ (nombre réel ou complexe) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Limite infinie d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque

- à chaque fois que l'on se donne un réel $A > 0$ (modélisant une haute barre à dépasser),
- il existe un rang à partir duquel les termes de la suite dépassent ce réel.

Avec des quantificateurs:

Définition III.7.27 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \implies u_n \geq A.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque

$$\forall A < 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : /\, n \geq N \implies u_n \leq A.$$

Exercice 113 On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (réelle ou complexe), convergente et de limite ℓ. Démontrer que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 114 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

(1) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq 2\varepsilon.$$

(2) On se donne un réel $C > 0$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq C\varepsilon.$$

Exercice 115 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes, convergeant respectivement vers les nombres ℓ et ℓ'. Démontrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.

Exercice 116 On considère la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$

(1) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

(2) On se donne un réel $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

(a) En utilisant la relation de Chasles, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \varepsilon + \frac{\pi}{2}(\cos \varepsilon)^n.$$

(b) En déduire qu'il existe un entier N tel que

$$\forall n \geq N, \quad |I_n| \leq \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\varepsilon.$$

(3) Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Chapitre IV

Limites, équivalents, développements limités (première année; aspects pratiques)

1 Limites: situations de base

On utilisera entre autres les résultats suivants:

- La traduction de la continuité d'une fonction f en un point x_0:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0).$$

  Par exemple,

$$\cos x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1.$$

- Le théorème de *composition des limites*, dont la traduction naïve pourrait être:

  l'ouverture d'une porte déclenche une alarme; d'autre part, en actionnant un interrupteur, on ouvre cette porte. On en déduit qu'en actionnant cet interrupteur, on déclenche l'alarme.

Formellement:

Théorème IV.1.1

- si $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a
- et si (u_n) est une suite qui converge vers a ou si g est une fonction telle que $g(t)$ tend vers a lorsque t tend vers t_0,
- alors

$$f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L, \qquad f(g(t)) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} L.$$

Exemples

- On a

$$\cos \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

  car $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et parce que $\cos t$ tend vers 1 lorsque t tend vers 0 (par continuité de la fonction $\cos$ en 0).

- On a

$$e^{-n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  car $-n^2$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et parce que e^t tend vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$.

Exercice 117 Déterminer les limites suivantes:

(1) $e^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$

(2) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$

(3) $e^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers 0^+

(4) $e^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers 0^-

(5) $e^{\cos\frac{1}{n^2}}$ lorsque n tend vers $+\infty$

(6) $\sqrt{\ln\dfrac{1}{x}}$ lorsque x tend vers 0^+

(7) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Équivalents, prépondérance, domination

Introduction

On recherchera en général un équivalent d'une fonction en un point pour déterminer sa limite, mais aussi pour étudier la nature d'une intégrale (théorème de comparaison par équivalence), en nous ramenant à une fonction plus simple; même principe pour les suites: un équivalent permettra de déterminer plus facilement la limite mais aussi la nature d'une série.

2.1 Définitions fondamentales

Équivalence de fonctions et de suites

On se donne deux fonctions f et g, à valeurs réelles ou complexes ainsi que

- un réel a au voisinage duquel f et g sont définies, comme $a=0$ si f et g sont toutes deux définies en 0,
- ou une extrémité a commune à leur domaine de définition, finie ou infinie, comme $a=0$ si f et g sont définies sur $]0,1]$, ou $a=+\infty$ si f et g sont définies sur $[0,+\infty[$.

Rappelons qu'un voisinage de a est :

- un intervalle centré en a lorsque a est un nombre réel,
- un intervalle du type $[A,+\infty[$, resp. $]-\infty,A]$ lorsque $a=+\infty$, resp. $a=-\infty$

et qu'une phrase telle que 'tel phénomène a lieu au voisinage de a' signifie qu'il existe un voisinage de a sur lequel ce phénomène a lieu.

Définition IV.2.1 On dit que les fonctions f et g sont équivalentes en a, ce que l'on note

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x),$$

lorsque

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1.$$

On considère deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels ou complexes.

Définition IV.2.2 On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes lorsque n tend vers $+\infty$, ce que l'on note

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n,$$

lorsque

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Voici un des multiples intérêts de la notion d'équivalence pour les suites ou les fonctions:

Proposition IV.2.2 On se donne des fonctions f, g telles que

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$$

et on suppose que

$$g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$$

(nombre réel ou complexe, $+\infty$ ou $-\infty$). Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$$

On se donne des suites $(u_n), (v_n)$ telles que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$$

et on suppose que

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L$$

(nombre réel ou complexe, $+\infty$ ou $-\infty$). Alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L$$

Remarque. Mais la réciproque est totalement fausse: on a par exemple

$$x^3 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

mais il est clair que x^3 et x^2 ne sont pas équivalents lorsque x tend vers 0 puisque

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2} &= x \\ &\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Proposition IV.2.3 On se donne des fonctions f, g telles que

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

Alors

$$g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$$

On se donne des fonctions f, g, h telles que

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to a}{\sim} g(x) \\ g(x) &\underset{x \to a}{\sim} h(x). \end{aligned}$$

Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x).$$

Mutatis mutandis, on a le même résultat concernant les suites.

Remarque. Les exemples ci-dessous (qui proviennent de développements limités) concerneront essentiellement des équivalences de fonctions, notamment au voisinage de $+\infty$; on obtiendrait alors évidemment des exemples d'équivalences de suites en écrivant $n \to +\infty$ en lieu et place de $x \to +\infty$.

Équivalents fondamentaux

$\sin x$	$\underset{x \to 0}{\sim}$	x
$\ln(1+x)$	$\underset{x \to 0}{\sim}$	x
$e^x - 1$	$\underset{x \to 0}{\sim}$	x
$\mathrm{sh}\, x$	$\underset{x \to 0}{\sim}$	x
$\arctan x$	$\underset{x \to 0}{\sim}$	x

Conséquences immédiates

On peut obtenir d'autres équivalents par substitution; de façon simpliste, on pourrait écrire par exemple

$$\boxed{\ln(1 + \text{objet qui tend vers } 0) \sim \text{objet}}$$

et ce, quelle que soit la variable qui décrit cet objet: un objet qui tend vers 0 peut être fabriqué avec une variable

- qui tend vers 2: l'objet $t - 2$ tend vers 0 lorsque t tend vers 2,

- qui tend vers $+\infty$: l'objet $\frac{1}{t^2}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$,
- etc.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u &\implies \sin\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\\
\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u &\implies \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\\
\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u &\implies \ln x = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1.
\end{aligned}
$$

Prépondérance, négligeabilité

Définition IV.2.3 On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a ou que "f est un petit o de g" au voisinage de a, ce que l'on note

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$$

lorsque l'on peut écrire au voisinage de a:

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \textit{avec} \quad \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

ou ce qui revient au même, lorsque

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

On dit aussi que f est prépondérante devant g au voisinage de a.

Et pour ce qui concerne les suites:

Définition IV.2.4 On dit que u_n est négligeable devant v_n lorsque n tend vers $+\infty$, ce que l'on écrit

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

lorsque

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemples

- On a

$$x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x)$$

car

$$\frac{x^3}{x} = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

- On a

$$x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^3\right)$$

car

$$\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- On a

$$\sin x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$$

car

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui prouve que

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- On a

$$\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$$

car

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- On a

$$\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n!}\right)$$

car

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{(-1)^n/(n+1)!}{1/n!}\right| &= \frac{1/(n+1)!}{1/n!}\\
&= \frac{n!}{(n+1)!}\\
&= \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que

$$\frac{(-1)^n/(n+1)!}{1/n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque importante

Il résulte de la définition que l'on a

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$$

lorsque, au voisinage de a, on peut écrire $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a; il en résulte que si f est équivalente à la fonction nulle (i.e. $g(x) = 0$ dans ce cas), c'est que f est elle-même la fonction nulle! Ainsi,

Une fonction, autre que la fonction nulle, n'est JAMAIS équivalente à 0; une suite, autre que la suite nulle, n'est JAMAIS équivalente à 0.

Proposition IV.2.4 ***Cas particulier***. La relation de prépondérance

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$$

signifie tout simplement, en se ramenant à la définition,

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

De même,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

signifie

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Manipulation des $o(\ )$

Proposition IV.2.5 Lorsque $x \to 0$ ou $\pm\infty$,

$$x^\lambda o(x^\mu) = o\left(x^{\lambda+\mu}\right).$$

Exemple

Déterminer le développement limité de $x^2 \sin x$ à l'ordre 5 en 0:

- On a $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$
- donc $x^2 \sin x \underset{x\to 0}{=} x^3 - \dfrac{x^5}{6} + o(x^5)$.

2.2 Croissance comparée

On se donne des constantes α et β strictement positives (qui sont souvent des entiers); deux présentations des résultats: sous forme de limite et sous forme de relation de prépondérance:

$\dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $\dfrac{x^\beta}{(\ln x)^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$(\ln x)^\alpha = o\left(x^\beta\right)$ lorsque $x \to +\infty$
$x^\alpha e^{-\beta x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $\dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$x^\alpha = o\left(e^{\beta x}\right)$ lorsque $x \to +\infty$
$x^\beta \lvert\ln x\rvert^\alpha \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$	$\lvert\ln x\rvert^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ lorsque $x \to 0^+$

Remarque extrêmement importante, concernant une erreur très fréquemment commise.

On retient souvent les résultats de croissance comparée en disant "dans les formes indéterminées, l'exponentielle l'emporte sur les puissances, la puissance l'emporte sur le logarithme ...". Pourquoi pas. Mais dire "c'est lui qui l'emporte" ne veut absolument pas dire "c'est lui l'équivalent"!

- Par exemple, on sait que
$$x^2 e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
phénomène que l'on pourrait traduire par: "dans la forme indéterminée qui oppose x^2, qui tend vers $+\infty$ et e^{-x}, qui tend vers 0, c'est e^{-x} qui l'emporte".
- Mais

$$\cancel{x^2 e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}}$$

puisque (toujours penser à la définition!) le rapport $\frac{x^2 e^{-x}}{e^{-x}}$, c'est à dire x^2, ne tend pas vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$!!

Les exercices suivants se résoudront en appliquant les résultats de croissance comparée au prix de changements de variables.

Exercice 118 Déterminer les limites suivantes:

(1) $\dfrac{e^{2x}}{x^3}$ en $+\infty$

(2) $\dfrac{e^{x^2}}{x}$ en $+\infty$

(3) $x^2 e^x$ en $-\infty$

(4) $\dfrac{e^{x^2}}{x^5}$ en $-\infty$

(5) $x^4 e^{\frac{1}{x^2}}$ en 0

(6) $\dfrac{e^{-\frac{3}{x^2}}}{x^4}$ en 0

(7) $x^2 e^{\frac{1}{x}}$ en 0^+

(8) $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ en 0^-.

Exercice 119 Déterminer les limites suivantes:

(1) $x^3 \ln x$ en 0^+

(2) $\sqrt{x}\ln(2x)$ en 0^+

(3) $\dfrac{x^2}{(\ln x)^3}$ en $+\infty$

(4) $\dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$

(5) $\dfrac{\left(\ln(x^3)\right)^2}{x}$ en $+\infty$.

2.3 Équivalents: règles de base

Une nouvelle caractérisation de l'équivalence, souvent adoptée en présence d'expressions comportant des sommes.

Théorème IV.2.6 On a
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$
si et seulement si
$$f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x)).$$
De même,
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$
si et seulement si
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Exemples

- On a
$$x + \sin x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$
puisque $\sin x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ (la preuve formelle a été apportée plus haut).
- On a
$$e^{2x} + x^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{2x}$$
puisque l'on sait par relation de croissance comparée que $x^3 \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{2x}\right)$.
- On a
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
puisque
$$\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$$
(la preuve formelle a été apportée plus haut).

Ne pas confondre les situations de somme et de produit

De façon simpliste:

3 est négligeable devant $10\,000\,000\,000$ et naturellement,
$$10\,000\,000\,000 + 3 = 10\,000\,000\,003 \approx 10\,000\,000\,000$$
mais $10\,000\,000\,000 \times 3 = 30\,000\,000\,000$ n'est pas équivalent à $10\,000\,000\,000$!

Proposition IV.2.7 En $\pm\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré

Exemple

$$2x^3 - 4x^2 + 1 \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x^3.$$

Proposition IV.2.8 En 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré

Exemples

$$3x^4 - 2x^2 - 3x \underset{x\to0}{\sim} -3x \qquad 2x^3 - 4x^2 + 1 \underset{x\to0}{\sim} 1.$$

Remarque pratique importante

Ceci est très important dans un contexte de développement limité: si un développement limité a conduit par exemple à
$$f(x) \underset{x\to0}{=} -2x^2 + 4x^3 + o(x^3),$$
alors
$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} -2x^2.$$

Théorème IV.2.9 On se donne des fonctions f_1, g_1, f_2, g_2, telles que
$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x), \quad f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x).$$
Alors
$$f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x).$$
On se donne des suites $(a_n), (b_n), (\alpha_n), (\beta_n)$ telles que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n, \quad \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n.$$
Alors
$$a_n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n\beta_n.$$

Ainsi,

Proposition IV.2.10 Pour trouver un équivalent d'un produit, on recherchera un équivalent de chaque facteur et on multipliera les équivalents

Exemple

Trouver un équivalent de $\mathrm{sh}\,(2x) \times \ln(1-x^2)$ lorsque x tend vers 0.

- On a $\mathrm{sh}\,u \underset{u\to0}{\sim} u$ et puisque $u = 2x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on a
$$\mathrm{sh}\,2x \underset{x\to0}{\sim} 2x.$$
- On a $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$ et puisque $u = -x^2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on a
$$\ln(1-x^2) \underset{x\to0}{\sim} -x^2.$$
- On a alors
$$\mathrm{sh}\,(2x) \times \ln(1-x^2) \underset{x\to0}{\sim} 2x \times (-x^2) = -2x^3.$$

Cas particulier:

Proposition IV.2.11 On se donne des fonctions f, g, u telles que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

Alors

$$u(x)f(x) \underset{x\to a}{\sim} u(x)g(x).$$

On se donne des suites $(a_n), (b_n), (u_n)$ telles que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Alors

$$a_n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n u_n.$$

Exemple

On a

$$n^2+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$$

et en conséquence

$$(n^2+1)\sin n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \sin n.$$

Proposition IV.2.12 On se donne des fonctions f, g telles que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

Alors

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g(x)}.$$

On se donne des suites $(a_n), (b_n)$ telles que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Alors

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{b_n}.$$

Remarque. Il est sous-entendu que f et g ne s'annulent pas au voisiange de a et que u_n et v_n ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Exemples

- On a

$$x^2+x^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

(en 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré) et en conséquence,

$$\frac{1}{x^2+x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

- On a

$$n^2+n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$$

(en $+\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré) et en conséquence,

$$\frac{1}{n^2+n^3} \underset{n\to 0}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

Ainsi,

Proposition IV.2.13 Pour trouver un équivalent d'un quotient, on recherchera un équivalent du numérateur et du dénominateur et on effectuera le quotient des équivalents

Exemple

- On a

$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x\to 0}{\sim} x \\ 2x^2+x^3 &\underset{x\to 0}{\sim} 2x^2 \end{aligned}$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x^2+x^3} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2x^2} \\ &= \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

- On a

$$3x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(3x^2+1)} &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\times 3x^2} \\ &= \frac{1}{3x^3}. \end{aligned}$$

En particulier:

Proposition IV.2.14 En $+\infty$ comme en $-\infty$, une fraction rationnelle est équivalente au rapport du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur.

Exemple

On a

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-2x+4}{-2x^5+x} &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x^2}{-2x^5} \\ &= -\frac{3}{2x^3}. \end{aligned}$$

Proposition IV.2.15 On se donne un entier N et un réel α.
On considère des fonctions f, g telles que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} f(x)^N & \underset{x\to a}{\sim} & g(x)^N \\ |f(x)|^\alpha & \underset{x\to a}{\sim} & |g(x)|^\alpha . \end{array}$$

On considère des suites $(a_n), (b_n)$ telles que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$$

et un entier N. Alors

$$\begin{array}{rcl} u_n^N & \underset{n\to+\infty}{\sim} & b_n^N \\ |u_n|^\alpha & \underset{n\to+\infty}{\sim} & |v_n|^\alpha . \end{array}$$

Ainsi,

Proposition IV.2.16 Pour trouver un équivalent d'une puissance (entière on non, ce qui inclus par exemple la racine carrée) *mais pourvu que l'exposant soit fixe, indépendant de la variable*, on recherchera un équivalent de la fonction, que l'on élèvera ensuite à la puissance

Exemple

$$\begin{array}{rcl} \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x & \Longrightarrow & (\sin x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \\ n^2+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 & \Longrightarrow & \sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^2} = n. \end{array}$$

On ne peut pas prendre des puissances "variables" d'équivalents (typiquement $u(x)^{v(x)}$ ou u_n^n). Il faudra alors écrire

$$\begin{array}{rcl} u(x)^{v(x)} & = & e^{v(x)\ln u(x)} \\ u_n^n & = & e^{n \ln u_n} \end{array}$$

puis d'appliquer les règles concernant le produit et la composition de développements limités.

Exemple

Déterminer

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

puis un équivalent de

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} - \ell$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

- On écrit
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}.$$
- Le développement limité
$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$$
donne, du fait que $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$:
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
et en conséquence
$$\begin{array}{rcl} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{=} e^{n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} & = & e^{1+o(1)} \\ & = & e \times e^{o(1)}. \end{array}$$
- Par définition même,
$$o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
et puisque la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0, on a
$$e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
et donc par composition des limites:
$$e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
et en conséquence
$$e \times e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e \times 1 = e$$
et c'est donc finalement que
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e.$$

Remarque capitale

Ceci prouve que $(n+1)^n$ n'est *pas* équivalent à n^n puisque le rapport $\frac{(n+1)^n}{n^n}$ tend vers e et non vers 1.

- Pour l'équivalent, on effectue un développement à l'ordre 2:
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
et en conséquence
$$\begin{array}{rcl} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{=} e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} & = & e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})} \\ & = & e \times e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})} \end{array}$$
et le développement limité
$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$$
donne
$$e^{\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{=} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en conséquence:

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^n}{n^n} - e &\underset{n\to+\infty}{=} e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e\\ &= -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} - e \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Il n'y a pas de règle générale permettant d'obtenir un équivalent dans un contexte de somme ou de composition; en telle circonstance, on pourra envisager de rechercher un développement limité.

Surtout ne pas faire de somme ou de différence entre équivalents, pas même avec des constantes: un équivalent n'est pas une égalité dont on pourrait passer d'un côté ou de l'autre.

Par exemple,

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x,$$

mais $\sin x - x$ n'est pas équivalent à $x - x = 0$ (cf. remarque importante plus haut).

Pour obtenir un équivalent de $\sin x - x$, on écrira

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad\Longrightarrow\quad \sin x - x \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

(car un développement limité est avant tout une égalité entre certaines fonctions) et en conséquence

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.$$

De même,

$$e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1,$$

mais $e^x - 1$ n'est pas équivalent à $1 - 1 = 0$ (cf. remarque importante plus haut).

Pour obtenir un équivalent de $e^x - 1$, on écrira

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x) \quad\Longrightarrow\quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

et en conséquence

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Surtout ne pas composer d'équivalents

Par exemple,

$$x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x lorsque x tend vers $+\infty$ puisque

$$\frac{e^{x+1}}{e^x} = e^{x+1-x} = e^1 = e$$

alors que ce rapport devrait tendre vers 1 pour prétendre à l'équivalent!

Théorème IV.2.17 Lorsqu'une fonction possède une limite finie non nulle en un point, elle est équivalente à cette limite:

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} L.$$

De même, lorsqu'une suite possède une limite finie non nulle, elle est équivalente à cette limite:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L.$$

C'est la première question que l'on se posera: l'expression que je considère possède-t-elle une limite finie non nulle?

Exemples fondamentaux

e^x	$\underset{x\to 0}{\sim}$	1
$\cos x$	$\underset{x\to 0}{\sim}$	1
$\arctan x$	$\underset{x\to+\infty}{\sim}$	$\dfrac{\pi}{2}$

Équivalence et continuité

Notons que certains équivalents sont justifiés par un argument de *continuité* (une fonction continue en un point est une fonction qui tend vers la valeur qu'elle prend en ce point):

- la fonction $x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0, et c'est pourquoi

  $$\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \cos 0 = 1,$$

  justifiant ainsi le fait que

  $$\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1.$$

- De même, la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0, et c'est pourquoi

  $$e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

  et puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, le théorème de composition des limites donne

  $$e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

  ce qui permet d'affirmer que

  $$e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

En combinant les points ci-dessus et les équivalents fondamentaux précédents, on a donc par exemple:

$$\begin{aligned}
\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x,\quad \cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad&\Longrightarrow\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{1} = x\\
e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1,\quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad&\Longrightarrow\quad \frac{e^x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x},\\
\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x,\quad \sqrt{2+x} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2},\quad \sin(2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x \quad&\Longrightarrow\quad \frac{\sin^2 x}{\sqrt{2+x}\,\sin(2x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{2}\times 2x} = \frac{x}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

De l'échec de l'obtention d'un équivalent

☹ Dans la perspective "trouver un équivalent pour simplifier", certaines fonctions en certains points n'admettent pas d'équivalents "plus simples" qu'elles-mêmes; typiquement: $\ln x$ en 0 ou en $+\infty$, e^x en $\pm\infty$, e^{-x} en $\pm\infty$. C'est alors le cas par exemple pour

⋆ x^2e^{-x} en $+\infty$

⋆ $\dfrac{\ln x}{x}$ en 0 ou en $+\infty$

⋆ $\dfrac{e^x}{x^2}$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exercice 120 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes aux points indiqués:

(1) $\dfrac{\sin x}{x^2}$ en 0

(2) $x^3\sin\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$

(3) $\dfrac{e^{2x}\ln(1+x^2)}{\ln(1-x)}$ en 0

(4) $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$ en $+\infty$

(5) $\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ en 0

(6) $\dfrac{(\sin x)^3}{\sin(x^4)}$ en 0

(7) $\dfrac{\sqrt{1-x}(1-e^x)}{\sin^2(3x)}$ en 0

(8) $\dfrac{x^2\ln x}{(\sin x)^3}$ en 0

(9) $\dfrac{e^x}{\sqrt{x-1}}$ en $+\infty$

Exercice 121 Même question:

(1) $\arctan x\times\tan\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$

(2) $\cos\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x^2}$ en $-\infty$

(3) $xe^{\frac{1}{x^2}}$ en $+\infty$

(4) $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}-1}$ en 0

(5) $\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{\cos x-1}$ en 0

(6) $\dfrac{(2x^3-x)\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{1-x^2}$ en $+\infty$

(7) $\dfrac{(2x^3-x)\sqrt{2-x}}{1-x^2}$ en 0.

Exercice 122 Déterminer les limites des expressions suivantes aux points indiqués:

(1) $\dfrac{x^2}{\sin^2(2x)}$ en 0

(2) $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^3+1}}{x^2}$ en $+\infty$

(3) $\dfrac{\sin(3x^2)}{(e^x-1)^2}$ en 0

(4) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2(1-e^x)}$ en 0^+

(5) $\dfrac{x\sqrt{2+x}}{e^{2x}\operatorname{sh} x}$ en 0

(6) $\dfrac{x^6+1}{x^4-1}e^{-x}$ en $+\infty$

(7) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)(\ln x)^2$ en $+\infty$.

Exercice 123

(1) En écrivant $\ln(n+1)=\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$, démontrer que
$$\ln(n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n.$$

(2) En partant d'un développement limité à l'ordre 1 de $\sin$ en 0, démontrer en s'inspirant de ce qui précède que
$$\ln(\sin x)\underset{x\to0}{\sim}\ln x.$$

Exercice 124 *Quelques situations plus théoriques.* Ici, a désigne un réel ou $\pm\infty$.

(1) Compléter:

$u(x)\underset{x\to a}{=}o(v(x))$ lorsque ...

(2) Démontrer: si $v(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et si u est une fonction bornée, alors
$$u(x)\underset{x\to a}{=}o(v(x)).$$

(3) Compléter:

si $f(x)\underset{x\to a}{=}g(x)+o(g(x))$, alors $f(x)$ $\boxed{?}$ $g(x)$.

(4) Démontrer: $x+\sin x\underset{x\to+\infty}{\sim}x$.

(5)(a) Compléter:

toute fonction définie et continue sur un segment est ...

(b) Soit h une fonction définie et continue sur $[0,1]$. Démontrer:
$$h(x)+\frac{1}{x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x}.$$

Domination

On se donne deux fonctions f et g, à valeurs réelles ou complexes ainsi que

- un réel a au voisinage duquel f et g sont définies, comme $a=0$ si f et g sont toutes deux définies en 0,

- ou une extrémité a commune à leur domaine de définition, finie ou infinie, comme $a = 0$ si f et g sont définies sur $]0, 1]$, ou $a = +\infty$ si f et g sont définies sur $[0, +\infty[$.

Rappelons qu'un voisinage de a est :

- un intervalle centré en a lorsque a est un nombre réel,
- un intervalle du type $[A, +\infty[$, resp. $]-\infty, A]$ lorsque $a = +\infty$, resp. $a = -\infty$

et qu'une phrase telle que 'tel phénomène a lieu au voisinage de a' signifie qu'il existe un voisinage de a sur lequel ce phénomène a lieu.

Définition IV.2.5 On dit que la fonction g domine la fonction f au voisinage a, ce que l'on note

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x)),$$

lorsque le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de a, autrement dit s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

au voisinage de a.

Rappel. Une fonction φ est bornée au voisinage de a s'il exite un voisinage V de a et un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in V,\ |\varphi(x)| \leq M.$$

Exemple

On a

$$x \sin x \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x)$$

puisque

$$\left|\frac{x \sin x}{x}\right| = |\sin x| \leq 1.$$

Définition IV.2.6 On considère deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels ou complexes.
On dit que la suite (v_n) domine la suite (u_n), ce que l'on note

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n),$$

lorsque le rapport $\dfrac{u_n}{v_n}$ est borné au voisinage de $+\infty$, , autrement dit s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u_n| \leq C|v_n|$$

au voisinage de $+\infty$.

Exemple

On a

$$\frac{(-1)^n n}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

puisque

$$\begin{aligned}\left|\frac{\frac{(-1)^n n}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| &= \frac{\frac{n}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \frac{n \times n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{n}{n+1} \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Proposition IV.2.18 Si f est négligeable devant g au voisinage de a i.e.

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),$$

alors g domine f au voisinage de a, c'est à dire

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x)).$$

Si la suite (u_n) est négligeable devant la suite v_n i.e.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n),$$

alors la suite (v_n) domine la suite (u_n), c'est à dire

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n).$$

En effet, toute fonction (en l'occurrence le quotient $\frac{f}{g}$) possédant une limite finie (en l'occurrence 0) en un point est bornée au voisinage de ce point. Idem pour les suites.

3 Techniques d'obtention de développements limités

Principe fondamental. Un $o(\ldots)$ est une "poubelle": dans une expression, tout ce qui dépasse l'ordre du $o(\ldots)$ doit être mis dedans.

Exemples

- Si
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^4 + o(x^3),$$
alors
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3),$$
puisque le terme $-3x^4$ étant de degré supérieur à celui de x^3, il est mis à la poubelle.
- Si
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$
alors
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$
puisque le terme $\frac{3}{x^4}$ étant de degré supérieur à celui de $\frac{1}{x^3}$, il est mis à la poubelle.

3.1 Somme

Proposition IV.3.19 En sommant (ou en effectuent la différence) deux développements limités à un même ordre n, on obtient un développement limité à cet ordre n.

Exemple

On a

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4)$$
$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

et en conséquence

$$\frac{1}{1-x}-e^x \quad =_{x\to 0} \quad \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{23}{24}x^4+o(x^4).$$

Proposition IV.3.20 En effectuant la somme de deux développements limités à des ordres différents n_1 et n_2, on obtient un développement limité au min de ces ordres; si ce min est n_1 *il faut mettre à la poubelle tous les termes d'ordre $> n_1$ obtenus en effectuant la somme.* Par exemple:

$$\mathrm{DL}_2+\mathrm{DL}_3=\mathrm{DL}_2.$$

Exemple

On a

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$
$$2\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 2x-x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$
$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

et en conséquence

$$2\ln(1+x)+e^x \underset{x\to 0}{=} 1+3x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

le terme $\frac{2}{3}x^3$ ayant été "mis à la poubelle".

3.2 Produit

Proposition IV.3.21 En effectuant le produit de deux développements limités à un même ordre n, on obtient un développement limité à cet ordre n *à condition de mettre à la poubelle tous les termes d'ordre $> n$ obtenus en effectuant le produit.*

Ainsi,

$$\mathrm{DL}_2\times\mathrm{DL}_2=\mathrm{DL}_2.$$

Exemple

On a

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+o(x^2)$$
$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

et en conséquence

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)\\ &= (1+x+x^2)+(x+x^2+x^3)+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^4\right)+o(x^2)\\ &= 1+2x+\frac{5}{2}x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

les termes de degré 3 et 4 ayant été mis à la poubelle.

Proposition IV.3.22 En effectuant le produit de deux développements limités à des ordres différents n_1 et n_2, on obtient un développement limité au min de ces ordres; si ce min est n_1 *il faut mettre à la poubelle tous les termes d'ordre $> n_1$ obtenus en effectuant le produit.*

Ainsi:

$$\mathrm{DL}_2\times\mathrm{DL}_3=\mathrm{DL}_2.$$

Exemple

On a

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$
$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

et en conséquence

$$\begin{aligned}e^x\sin x &\underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\\ &= \left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+\left(x^2-\frac{1}{6}x^4\right)+\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{12}x^5\right)+o(x^2)\\ &= x+x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

les termes de degré 3, 4 et 5 ayant été mis à la poubelle.

3.3 Composition

Cette règle de la poubelle est également valable dans un contexte de composition:

Proposition IV.3.23 Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et g une fonction définie au voisinage d'un point a (réel ou infini) et telle que

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

et possédant chacun un développement limité à un ordre donné n au voisinage de 0 pour f et de a pour g.

Pour obtenir le développement limité de $f(g(x))$ lorsque x tend vers a à l'ordre donné n:

- on écrit le développement de $f(u)$ lorsque u tend vers 0 à l'ordre n,
- on écrit le développement de $g(x)$ lorsque x tend vers a à l'ordre n,
- dans le développement de f, on remplace ("substitue" est le terme officiel) la variable u par la "partie principale" du développement de g (c'est à dire sa partie polynomiale, sans le $o(\ldots)$),
- on développe et on met à la poubelle.

Exemple

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $h(x) = \ln(1+\sin x)$ lorsque x tend vers 0.

- On écrit
$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$$
- puis
$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
- et on effectue la substitution:
$$\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3 + o(x^3)$$
et on développe en mettant à la poubelle les termes d'ordre > 3:
$$\begin{aligned} \ln(1+\sin x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Remarque importante

Si l'on dispose d'un développement de $f(u)$ lorsque u tend vers 0, il va de soi que pour obtenir un développement de $f(g(x))$, la fonction g doit tendre vers 0: il n'y aurait par exemple aucun sens à vouloir développer $\ln(1+\cos x)$ lorsque x tend vers 0 à partir du développement de $\ln(1+u)$ lorsque u tend vers 0 puisque $\cos x$ tend vers 1 et non vers 0 lorsque x tend vers 0.

3.4 Quotient

Proposition IV.3.24 Le développement d'un quotient s'obtiendra en visant la forme $f \times \frac{1}{1-u}$ où u tend vers 0:

- on utilisera la technique de substitution (cf. ci-dessus) du développement limité de u dans le développement limité de
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 \ldots$$
en appliquant la règle de la poubelle,
- puis la technique d'obtention d'un produit.

Exemple

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\frac{\sin x}{\cos x}$ lorsque x tend vers 0.

- On écrit
$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}$$
- puis
$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$$
- si bien que
$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{1}{2}x^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$
- Ensuite,
$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$
- et enfin
$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) + o(x^3) \\ &= x \times 1 + x \times \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \times 1 + o(x^3) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Un $o(\ldots)$ ne passe pas du dénominateur au numérateur

Autrement dit,

$$\cancel{\frac{1}{u(x) + o(u(x))} \underset{x\to x_0}{=} \frac{1}{u(x)} + o(u(x))}$$

En effet, on a par exemple

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+x^2} &= \frac{1}{x(1+x)} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+x} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}(1 - x + x^2 + o(x^2)) \\ &= \frac{1}{x} - 1 + x + o(x) \end{aligned}$$

et il est absolument évident que $-1+x$ n'est pas négligeable devant x lorsque x tend vers 0. Ainsi,

$$\cancel{\frac{1}{x+x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + o(x)}$$

Cependant

$$x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$$

si bien que

$$\frac{1}{x+x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x+o(x)}$$

et on vient de voir que

$$\cancel{\frac{1}{x+x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + o(x)}$$

et donc

$$\cancel{\frac{1}{x+o(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + o(x)}$$

3.5 Dérivation et intégration terme à terme d'un développement limité

Proposition IV.3.25 Soit f une fonction définie et dérivable sur un voisinage de 0 et possédant un développement limité d'ordre n en ce point:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors f' possède un développement limité d'ordre $n-1$ en 0, qui s'obtient en dérivant terme à terme celui de f:

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Exemple

On a le développement limité au voisinage de 0:

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4).$$

La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$. Du théorème de dérivation des développements limités, on déduit:

$$\frac{1}{(1-x)^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3).$$

Proposition IV.3.26 Soit f une fonction définie et continue sur un voisinage de 0 et possédant un développement limité d'ordre n en ce point:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors la primitive F de f qui s'annule en 0 possède un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, qui s'obtient en intégrant terme à terme celui de f:

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple

On a le développement limité au voisinage de 0:

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Puisque $x \mapsto \arctan x$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0, le théorème d'intégration terme à terme des développements limités donne

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

3.6 Développements limités usuels

Ces développements limités doivent être connus sur le bout des doigts. Pour tout entier n:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \\
e^x &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\operatorname{sh} x &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\operatorname{ch} x &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

Développements limités d'autres fonctions. "L'Histoire" a retenu les développements limités énumérés ci-dessus car leur description et leur mémorisation est (relativement) aisée à tout ordre; mais d'autres fonctions usuelles ($\tan$, $\arcsin, \ldots$) possèdent également des développements à tout ordre (cf. formule de Taylor-Young) mais leur description à tout ordre est plus compliquée. Pour trouver des développements limités impliquant de telles fonctions dans la pratique, on appliquera les règles d'obtention des DL rappelées ci-dessus.

Exercice 125 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre indiqué des fonctions suivantes:

(1) $\cos x - x e^x$ à l'ordre 3

(2) $(e^x - 1)\sin x$ à l'ordre 3

(3) $(\sin x)\ln(1-x) + x^2 \cos x$ à l'ordre 4

(4) $\dfrac{\sin x}{1+x}$ à l'ordre 3

(5) $\ln(1+\sin x)$ à l'ordre 4

(6) $\tan x$ à l'ordre 3

(7) $\dfrac{e^x}{\cos x}$ à l'ordre 3

(8) $\sqrt{1+x}\,(1-x)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 2

(9) $\arctan x$ à l'ordre 3

(10) $\arcsin x$ à l'ordre 3

(11) $\ln \frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4

3.7 Limites, équivalents, développements limités: la synthèse

- Grosso-modo, le schéma est le suivant: pour déterminer la limite d'une fonction en un point ou la limite d'une suite, on cherchera un équivalent de la fonction ou de la suite pour se ramener à des expressions plus simples:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \end{array}\right. \implies f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L \qquad \left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \end{array}\right. \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L.$$

- Ensuite, l'obtention d'un équivalent s'obtient en suivant les principes généraux énoncés précédemment concernant le produit et le quotient, *mais attention aux contextes de somme ou de différence!*
- De nombreuses situations sont réglées rapidement en s'appuyant sur les équivalents classiques énumérés précédemment.
- En présence d'une somme ou différence de fonctions, on cherchera un développement limité à un ordre convenable des différents termes, en s'appuyant sur les principes fondamentaux suivants:

– Un développement limité est avant tout une égalité: une fonction est la somme de deux fonctions (un polynôme plus une autre possédant certaines propriétés); c'est pourquoi on peut sommer, effectuer des différences, composer, etc. à partir de développements limités

– Une fonction, ou une suite, est toujours équivalente au terme de plus bas degré du développement:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3}x^2 + x^3 + o(x^3) \implies f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{3}x^2.$$

! Si un développement limité ne donne qu'un $o(\ldots)$, on veillera à effectuer un développement à un ordre plus élevé.

Premier exemple

Soit à trouver un équivalent de $\frac{1}{2}\sin(x^2)+\cos(x)-1$ quand x tend vers 0.

- On a

$$\sin u \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$$

et donc

$$\sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2) \implies \frac{1}{2}\sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

- Ensuite,

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies \cos x - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et on a donc

$$\frac{1}{2}\sin(x^2) + \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} o(x^2).$$

Mais c'est un développement sans "partie prépondérante".

- On va alors effectuer des développements à un ordre plus élevé:

$$\sin u \underset{u\to 0}{=} u + o(u^2)$$

et donc

$$\sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^4) \implies \frac{1}{2}\sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$$

alors que

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \implies \cos x - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\sin(x^2) + \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

- En conséquence,

$$\frac{1}{2}\sin(x^2) + \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{24}.$$

Deuxième exemple

Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ lorsque x tend vers 0.

- On est en présence d'une différence: il est hors de question de rechercher un équivalent de $\frac{1}{\sin^2 x}$ et de $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ et d'en faire la différence. On va alors réduire au même dénominateur afin de produire une unique fraction dont on recherchera un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur. On écrit ainsi

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x}{(\sin^2 x)(\operatorname{sh}^2 x)}.$$

- Les points suivants sont essentiels:
  - le dénominateur est un produit: il suffit donc de déterminer un équivalent de chaque facteur le constituant et de multiplier ces équivalents;
  - le numérateur est une différence: on va passer par la recherche d'un développement limité de chaque terme.
- On sait que

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad \operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

On a donc

$$\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2, \qquad \operatorname{sh}^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

et en conséquence

$$(\sin^2 x)(\operatorname{sh}^2 x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4.$$

- On passe à présent au numérateur; on va chercher à en obtenir un équivalent par l'intermédiaire de développements limités de $\sin^2 x$ et de $\operatorname{sh}^2 x$. Mais à quel ordre?
  - Ni trop ni trop peu! Si on développe à un certain rang qui s'avère insuffisant car produisant un développement sans partie prépondérante, on cherchera un développement à un rang plus élevé.

  Ici, le dénominateur est équivalent à un terme de degré 4; il est raisonnable de vouloir développer le numérateur au même ordre.

- En jouant sur l'imparité des fonctions $\sin$ et sh, on a

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad\Longrightarrow\quad (\sin x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + o(x^4)$$

et on développe le carré en ne gardant que les termes de degré ≤ 4

$$\underset{x\to 0}{=} x^2 - 2\times\frac{1}{6}x^4 + o(x^4).$$

De même:

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad\Longrightarrow\quad (\operatorname{sh} x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{1}{6}x^3\right)^2 + o(x^4)$$

et on développe le carré en ne gardant que les termes de degré ≤ 4

$$\underset{x\to 0}{=} x^2 + 2\times\frac{1}{6}x^4 + o(x^4).$$

Ainsi,

$$(\operatorname{sh} x)^2 - (\sin x)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{4}{6}x^4 + o(x^4)$$

et c'est pourquoi

$$(\operatorname{sh} x)^2 - (\sin x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{6}x^4.$$

- En définitive,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{4}{6}x^4}{x^4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

et en conséquence,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}.$$

Exercice 126 En utilisant des développements limités à des ordres convenables, déterminer des équivalents des fonctions suivantes aux points indiqués:

(1) $\dfrac{\sin x - x}{x^2}$ en 0

(2) $\dfrac{e^x - x - 1}{(1-\cos x)^2}$ en 0

(3) $\cos x - \sqrt{1+x}$ en 0

(4) $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}} + 1$ en $+\infty$

(5) $\dfrac{1}{x^2} - \sin\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$

(6) $\operatorname{sh}(2x) - \sin(2x)$ en 0

(7) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ en 0.

Exercice 127 Calculer les limites suivantes:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^2}$.

Exercice 128 On rappelle que $a^b = e^{b\ln a}$ et que la forme exponentielle est recommandée en présence d'une puissance dont l'exposant est variable. Dans un tel contexte, la recherche de la limite se fera en recherchant la limite de $b\ln a$ puis en appliquant le principe de composition des limites.

(1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

(2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$.

(3) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$.

4 Une technique fondamentale: la loi du plus fort

En résumé, c'est la technique qui consiste à mettre en facteur de force le terme prépondérant.

Premier exemple

Déterminer un équivalent de $\ln(n^2+1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- On met "de force" n^2 en facteur:

$$\ln(n^2+1) = \ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

- Puisque pour $a>0$ et $b>0$ on a $\ln(ab) = \ln a + \ln b$,

$$\ln(n^2+1) = \ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] = \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

- Puisque

$$\ln(n^2) = 2\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et que

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et en conséquence on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln n)$$

et alors

$$\ln(n^2+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n$$

car de manière générale

$$u_n + o(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

Deuxième exemple

Démontrer que le graphe de la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+3x^2-2x-6}$$

possède une asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.

- On écrit

$$x^3+3x^2-2x-6 = x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right).$$

- On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)} = \sqrt[3]{x^3}\times\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}} \\ &= x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}}. \end{aligned}$$

- Ensuite,

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}} = \left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

- Afin de mettre en évidence une asymptote, on vise une écriture de la forme

$$f(x) = ax+b+\varepsilon(x) \tag{4.1}$$

avec

$$\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0,$$

ce qui prouvera que la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote au graphe de f.
- Puisque l'on peut obtenir un développement limité de $(1+u)^{\frac{1}{3}}$ à tout ordre lorsque u tend vers 0, on peut, du fait que

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

obtenir un développement de $\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ à tout ordre. Puisque ce développement sera multiplié par x, on voit qu'il suffit d'obtenir un développement de $\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 2 suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ pour parvenir à la forme désirée (4.1).
- On écrit alors

$$\begin{aligned} (1+u)^{\frac{1}{3}} &\underset{u\to0}{=} 1+\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\times\frac{1}{2}u^2+o(u^2) \\ &= 1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}u^2+o(u^2). \end{aligned}$$

La substitution de u par $\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}$ donne

$$\left(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et en suivant le principe de mise à la poubelle des termes $\frac{1}{x^k}$ avec $k>2$:

$$\begin{aligned} &= 1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{x}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{x^2}-\frac{1}{9}\times\frac{9}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1+\frac{1}{x}-\frac{5}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

- En conséquence:

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x+1-\frac{5}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

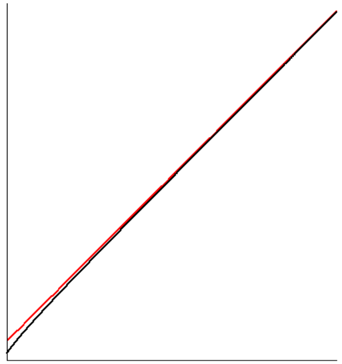
ce qui prouve que la droite d'équation cartésienne

$$y = x+1$$

est asymptote au graphe de f. De plus,

$$f(x)-(x+1) = -\frac{5}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{5}{3x}$$

et comme cette dernière quantité est négative, il en résulte que le graphe de f est en-dessous son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.



Exercice 129 Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

(1) $\sqrt{n^2+3n+2}-n$

(2) $\sqrt{e^n+1}+\sqrt{e^n+2}-2e^{\frac{n}{2}}$

(3) $n\left(\ln(n^2+3)-2\ln(n+1)\right)$.

Exercice 130 Démontrer que le graphe de la fonction

$$f : x\mapsto\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$$

possède deux asymptotes: une lorsque x tend vers $+\infty$ et l'autre lorsque x tend vers $-\infty$. Préciser la position du graphe par rapport à ces asymptotes.

Chapitre V

Dérivées et primitives (première année; aspects pratiques)

1 Dérivées

1.1 Régles de base et fonctions usuelles

- ***Linéarité de la dérivation.*** Si a, b sont de scalaires et f, g des fonctions dérivables,

$$(af)' = af', \quad (af+bg)' = af' + bg'.$$

Par exemple, soit $f_1 : x \mapsto 3\sin x$, $f_2 : x \mapsto \frac{4}{x}$. Alors

$$f_1'(x) = 3 \times \cos x, \quad f_2'(x) = 4 \times \frac{-1}{x^2}.$$

Il aurait été très maladroit et néfaste de dériver f_1 et f_2 comme produit et quotient.

- ***Dérivées des puissances***

fonction $x \mapsto$	dérivée $x \mapsto$	domaine
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$

  - En prenant $\alpha = n$, $\alpha = -n$ $(n \in \mathbb{N})$ puis $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$:

fonction $x \mapsto$	dérivée $x \mapsto$	domaine
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

fonction $x \mapsto$	dérivée $x \mapsto$	domaine
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$

  - La dérivation diminue donc la puissance d'une unité lorsqu'elle se trouve au numérateur et l'augmente lorsqu'elle se trouve au dénominateur.

- ***Autres fonctions***

fonction $x \mapsto$	dérivée $x \mapsto$	domaine
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$

fonction $x \mapsto$	dérivée $x \mapsto$	domaine
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

1.2 Produit, quotient, composée

fonction $x \mapsto$	dérivée $x \mapsto$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$g'(x)f'(g(x))$

- ***Remarque.*** Il faut bien comprendre le sens de $f'(g(x))$: il s'agit de la valeur en $g(x)$ de la fonction f'. Par exemple, soit à dériver

$$F : x \mapsto \arcsin(x^3).$$

  - On a $F = f \circ g$ avec

$$f : x \mapsto \arcsin(x), \qquad g : x \mapsto x^3.$$

  - On a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad g'(x) = 3x^2$$

  d'où

$$F'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = 3x^2 \times \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

- En prenant $g = f$, puis $f = 1$ et enfin $g : x \mapsto ax+b$:

fonction $x \mapsto$	dérivée $x \mapsto$
$f^2(x)$	$2f(x)f'(x)$
$\dfrac{1}{g(x)}$	$\dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

- ***Remarque.*** À nouveau, $f'(ax+b)$ est la valeur en $ax+b$ de la fonction f'. Par exemple, soit à dériver

$$F : x \mapsto \arcsin(2-3x).$$

  - En posant

$$f : x \mapsto \arcsin(x),$$

  on a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

  - D'où

$$F'(x) = -3 \times f'(2-3x) = -3 \times \frac{1}{\sqrt{1-(2-3x)^2}}.$$

- Autres déductions (composition par $X \mapsto X^\alpha$, $X \mapsto \ln X \dots$):

fonction $x \mapsto$	dérivée $x \mapsto$
$f^n(x)$	$nf'(x)f^{n-1}(x)$
$\dfrac{1}{g^n(x)}$	$\dfrac{-ng'(x)}{g^{n+1}(x)}$
$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\ln\lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

- ***Dérivation d'un quotient "compliqué".*** Il est alors recommandé de considérer ce quotient comme un produit:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \times \frac{1}{v(x)}.$$

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{(5x-3)^2}{(2+4x)^3}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= (5x-3)^2 \times \frac{1}{(2+4x)^3} \\
f'(x) &= 2 \times 5 \times (5x-3) \times \frac{1}{(2+4x)^3} + (5x-3)^2 \times \frac{-3\times 4}{(2+4x)^4} \\
&= \frac{10(5x-3)}{(2+4x)^3} - \frac{12(5x-3)^2}{(2+4x)^4} \\
&= \frac{10(5x-3)(2+4x) - 12(5x-3)^2}{(2+4x)^4} \\
&= \frac{(5x-3)(10(2+4x)-12(5x-3))}{(2+4x)^4} \\
&= \frac{(5x-3)(-20x+56)}{(2+4x)^4}.
\end{aligned}$$

Exercice 131 Calculer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \dots$ suivantes:

(1) $\sin^2(x)$

(2) $\cos^2(3x)$

(3) $\dfrac{1}{\sin x}$

(4) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$

(5) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

(6) $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Exercice 132 Idem:

(1) $\text{sh}\,(2x)$

(2) $\text{sh}\,x.\text{ch}\,x$

(3) $\dfrac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}$

(4) $\dfrac{(\text{sh}\,x)^2}{(\text{ch}\,x)^3}$.

Exercice 133 Idem:

(1) $\dfrac{1}{3x^4}$

(2) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$

(3) $\dfrac{1}{(3x-2)^3}$

(4) $\dfrac{-3}{4x^4}$

(5) $\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$

(6) $\dfrac{2}{(2-4x^2)^2}$.

Exercice 134 Dresser le tableau de variations des fonctions $f : x \mapsto \dots$ suivantes:

(1) $\dfrac{1}{(2x-1)(4x+3)}$

(2) $\dfrac{1}{(2x-1)^2(4x+3)}$

(3) $\dfrac{1}{(2x-1)^3(4x+3)^2}$

(4) $\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

(5) $\dfrac{(1+x^2)^2}{(2x-1)^3}$.

Exercice 135 Calculer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \dots$ suivantes:

(1) $\dfrac{1}{x^4}$

(2) $\dfrac{1}{(2+x)^3}$

(3) $\dfrac{1}{(1-x)^4}$

(4) $\dfrac{1}{(3x-2)^2}\sqrt{2x+3}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$

(6) $\dfrac{1}{1-x^4}$.

Exercice 136 Idem:

(1) x^x

(2) x^{-x}

(3) $x^{\ln x}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

(5) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Exercice 137 Idem

(1) $\ln\left|1-\sqrt{1-x^2}\right|$

(2) $\arctan(3x)$

(3) $\arctan(1+x^2)$

(4) $\arctan(\arctan x)$

(5) $\arcsin(2x)$

(6) $\arcsin(x^2)$.

Exercice 138 Idem

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$

(2) $\arctan(2x+3)$

(3) $\arcsin(1-2x)$

(4) $\ln(\sin x)$

(5) $\dfrac{1}{\ln x}$

(6) $e^{\tan x}$

(7) $\left(\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\right)^2$.

2 Primitives et calcul intégral

Ces deux notions ne doivent pas être confondues et n'ont a priori aucun rapport:

- l'intégrale d'une fonction sur un intervalle (et le mot intégrale est obligatoirement associé à un intervalle) est un nombre, une *mesure* de cette fonction sur cet intervalle, que l'on peut associer à la notion d'aire sous la courbe;
- une primitive d'une fonction est une autre fonction (ce n'est donc pas une intégrale puisqu'une intégrale est un nombre) dont la dérivée est la fonction de départ.
- Le lien entre ces deux notions a été établi grâce au *théorème fondamental de l'analyse*; il a été mis en évidence au XVII-ème siècle seulement, alors qu'intégrales et primitives étaient des notions connues dès le Moyen-Âge.

2.1 Primitives usuelles

Primitive

Définition V.2.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe une constante C telle que

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + C.$$

Remarques.

- ***Conseil général.*** Dans un calcul de primitive, on prendra soin, dans un but de vérification, de dériver la fonction obtenue: cela doit donner la fonction dont on recherche une primitive.
- ***Convention.*** De façon générale, après calcul de l'une des primitives F d'une certaine fonction f, l'ensemble des primitives de f sera présenté sous la forme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

  - Mais il faut bien comprendre que $\int f(x)\,dx$ n'est qu'un raccourci désignant *l'ensemble des primitives* de f.
  - On ne définit pas une fonction en écrivant $F(x) = \int f(x)dx$, écriture qui n'a tout simplement pas de sens: que voudrait dire $F(2) = \int f(2)\,d2$??

Exemples

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C.$$

Primitives usuelles

fonction	primitives $+C$
$x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan x$
$x \mapsto e^{\alpha x}$ $(\alpha \in \mathbb{C}^*)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$

En prenant $\alpha = n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\alpha = -n$ $(n \neq 1)$ puis $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$:

fonction	primitives $+C$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$

fonction	primitives $+C$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$

Remarques concernant la primitivation de certaines fractions rationnelles

- Soit α un réel différent de 1. Alors
$$\int t^\alpha\, dt = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1} + C.$$
L'exposant initial α a donc donné naissance à l'exposant $\alpha+1$:
$$\alpha \quad \hookrightarrow \quad \alpha+1.$$
En effet, la dérivée de $f(t) = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}$ est bien
$$f'(t) = \frac{1}{\alpha+1} \times (\alpha+1)t^\alpha = t^\alpha.$$
- Cela fonctionne pour tous les exposants, même négatifs; il suffit de retenir qu'on obtient une primitive en ajoutant un degré à l'exposant initial:
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^3}\, dt &= \int t^{-3}\, dt : \quad \alpha = -3 \quad \hookrightarrow \quad -3+1 \\ &= \frac{1}{-3+1}t^{-3+1} + C \\ &= -\frac{1}{2}t^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{2t^2} + C. \end{aligned}$$
- Ce principe fonctionne également pour les fonctions de la forme
$$t \mapsto (at+b)^\alpha$$
(tant que $\alpha \neq -1$):
$$\int (at+b)^\alpha\, dt = \frac{1}{a(\alpha+1)}(at+b)^{\alpha+1} + C.$$
En effet, la dérivée de $f(t) = \frac{1}{a(\alpha+1)}(at+b)^{\alpha+1}$ est bien
$$f'(t) = \frac{1}{a(\alpha+1)} \times a \times (\alpha+1)(at+b)^\alpha = (at+b)^\alpha.$$
- Par exemple,
$$\int (2t+3)^4\, dt = \frac{1}{2\times 5}(2t+3)^5 + C$$
mais aussi avec des exposants négatifs:
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2t+3)^3}\, dt &= \int (2t+3)^{-3}\, dt : \quad \alpha = -3 \quad \hookrightarrow \quad -3+1 \\ &= \frac{1}{2\times(-3+1)}(2t+3)^{-3+1} + C \\ &= -\frac{1}{4}(2t+3)^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{4(2t+3)^2} + C. \end{aligned}$$

Remarque. on pourra toujours gérer l'exposant en premier, sans ce soucier du facteur multiplicatif final A, que l'on ajustera après:

- $\displaystyle\int \frac{1}{(2t+3)^3}\, dt = \int (2t+3)^{-3}\, dt : \quad \alpha = -3 \quad \hookrightarrow \quad -3+1$
- une primitive sera de la forme
$$A(2t+3)^{-3+1} = A(2t+3)^{-2} = A \times \frac{1}{(2t+3)^2}.$$
- Quelle valeur attribuer à A? En posant
$$f(t) = A \times \frac{1}{(2t+3)^2},$$
qui est de la forme $A \times \frac{1}{u^2}$ dont la dérivée est $A \times \frac{-2u'}{u^3}$, on a
$$f'(t) = A \times \frac{-2\times 2}{(2t+3)^3} = \frac{-4A}{(2t+3)^2}$$
donc $A \times \frac{1}{(2t+3)^2}$ est une primitive de $\frac{1}{(2t+3)^3}$ si et seulement si $f'(t) = \frac{1}{(2t+3)^3}$, donc si et seulement si $-4A = 1$, c'est à dire $A = -\frac{1}{4}$.
- Ainsi,
$$\int \frac{1}{(2t+3)^3}\, dt = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(2t+3)^2} + C.$$

- Le cas $\alpha = -1$ est particulier:
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t}\, dt &= \ln\lvert t\rvert + C \\ \int \frac{1}{at+b}\, dt &= \frac{1}{a}\ln\lvert at+b\rvert + C. \end{aligned}$$

Remarque concernant les primitives de $x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Cette primitive est intéressante dans le contexte de produit d'une exponentielle par une fonction trigonométrique.

Exemple

Déterminer une primitive de la fonction

$$f : t \mapsto e^{-3t} \sin t.$$

- On a $\sin t = \text{Im}\,(e^{it})$ et donc

$$e^{-3t} \sin t = \text{Im}\,\left(e^{-3t} e^{it}\right) = \text{Im}\,\left(e^{(i-3)t}\right).$$

- On a donc

$$\int e^{-3t} \sin t\, dt = \text{Im}\left(\int e^{(i-3)t}\, dt\right)$$

et puisque pour tout nombre complexe $\alpha \neq 0$, une primitive de $t \mapsto e^{\alpha t}$ est $t \mapsto \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$, on a

$$\begin{aligned}
\int e^{-3t} \sin t\, dt &= \text{Im}\left(\int e^{(i-3)t}\, dt\right) \\
&= \text{Im}\left(\frac{1}{i-3} e^{(i-3)t}\right) + C \\
&= \text{Im}\left(\frac{-i-3}{1+3^2} e^{(i-3)t}\right) + C \text{ (mult. par la quantité conjuguée)} \\
&= \frac{1}{10} \text{Im}\,\left((-i-3) e^{it} e^{-3t}\right) + C \\
&= \frac{e^{-3t}}{10} \text{Im}\,\left((-i-3) e^{it}\right) + C \\
&= \frac{e^{-3t}}{10} \text{Im}\,\big((-i-3)(\cos t + i \sin t)\big) + C \\
&= \frac{-e^{-3t}(3 \sin t + \cos t)}{10} + C.
\end{aligned}$$

Autre exemple

Déterminer une primitive de

$$f : t \mapsto e^t \cos 2t.$$

- On a $\cos 2t = \text{Re}(e^{2it})$ et donc

$$e^t \cos 2t = \text{Re}\,\left(e^t e^{2it}\right) = \text{Re}\,\left(e^{(2i+1)t}\right).$$

- On a donc

$$\int e^t \cos 2t\, dt = \text{Re}\left(\int e^{(2i+1)t}\, dt\right)$$

et puisque pour tout nombre complexe $\alpha \neq 0$, une primitive de $t \mapsto e^{\alpha t}$ est $t \mapsto \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$, on a

$$\begin{aligned}
\int e^t \cos 2t\, dt &= \text{Re}\left(\int e^{(2i+1)t}\, dt\right) \\
&= \text{Re}\left(\frac{1}{2i+1} e^{(2i+1)t}\right) + C \\
&= \text{Re}\left(\frac{1-2i}{1+2^2} e^{(2i+1)t}\right) + C \text{ (mult. par la quantité conjuguée)} \\
&= \frac{1}{5} \text{Re}\,\left((1-2i) e^{2it} e^t\right) + C \\
&= \frac{e^t}{5} \text{Re}\,\left((1-2i) e^{2it}\right) + C \\
&= \frac{e^t}{5} \text{Re}\big((1-2i)(\cos 2t + i \sin 2t)\big) + C \\
&= \frac{e^t(\cos 2t + 2 \sin 2t)}{5} + C.
\end{aligned}$$

Exercice 139 Calculer des primitives des fonctions suivantes:

(1) $f_1(t) = \dfrac{1}{t^4}$

(2) $f_2(t) = \dfrac{1}{t^5}$

(3) $f_3(t) = \dfrac{1}{(3t+1)^4}$

(4) $f_4(t) = \dfrac{1}{(3t+1)^2}$

(5) $f_5(t) = \dfrac{1}{(2-3t)^4}$

(6) $f_6(t) = \dfrac{1}{(1-t)^3}$

(7) $f_7(t) = \left(\dfrac{1}{2}t + 3\right)^4$

(8) $f_8(t) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}t + 3\right)^4}$

(9) $f_9(t) = \dfrac{1}{3t-2}$

(10) $f_{10}(t) = \dfrac{1}{-\frac{1}{4}t + 2}$

(11) $f_{11}(t) = \dfrac{3}{t^3}$

(12) $f_{12}(t) = \dfrac{-2}{(4t+1)^3}$

Exercice 140 Calculer des primitives des fonctions $x \mapsto \ldots$ suivantes :

(1) $\sqrt{x}$

(2) $3\sqrt{2x}$

(3) $x\sqrt{x}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(5) $\sqrt{3x+1}$

(6) $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$

(7) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$.

Autres règles

fonction	primitives $+C$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln\|u(x)\|$
$x \mapsto u'(x)u(x)^n$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1} \times u(x)^{n+1}$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)^n}\ (n \neq 1)$	$x \mapsto \dfrac{-1}{n-1} \times \dfrac{1}{u(x)^{n-1}}$
$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)}$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$x \mapsto \arctan(u(x))$

- Les cinq formes ci-dessus sont fondamentales; on les rencontre très fréquemment mais aussi à des facteurs près.
- On prendra soin de repérer la bonne forme, de dériver la fonction obtenue et d'ajuster par un facteur convenable:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \rightsquigarrow \int \frac{u'}{u} \rightsquigarrow \ln|x^2+1| \overset{\text{dérivation}}{\rightsquigarrow} \frac{2x}{x^2+1} \rightsquigarrow 2 \text{ à éliminer} \rightsquigarrow \text{mult. par } \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

fonction	primitives
$x \mapsto (ax+b)^n$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{1}{a} \times (ax+b)^{n+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{(ax+b)^n}\ (n \neq 1)$	$x \mapsto \dfrac{-1}{n-1} \times \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{(ax+b)^{n-1}}$

Exercice 141 Calculer des primitives des fonctions $x \mapsto$ suivantes :

(1) $\sin(2x)$

(2) $\cos(3-2x)$

(3) e^{2x}

(4) $e^{-\frac{1}{3}x}$

(5) e^{3x-1}.

Exercice 142 Reconnaître à un facteur près l'une des formes $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$, $\frac{u'}{u^n}$ $(n \geq 1)$, etc. afin de déterminer les primitives des fonctions $f : x \mapsto \ldots$ suivantes:

(1) $2x\cos(x^2)$

(2) $x\sin(x^2)$

(3) $\dfrac{x}{x^2+1}$

(4) $\dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

(5) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$

(6) $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

(7) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

(8) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

(9) $\tan x$

(10) $\tan(2x)$.

Exercice 143 Idem

(1) $\dfrac{\ln x}{x}$

(2) $\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

(3) $\dfrac{1}{x\ln x}$

(4) $\dfrac{e^{2x}}{3e^{2x}-1}$

2.2 Intégrale sur un segment

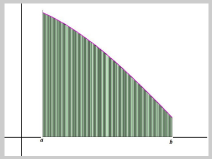
Existence d'une intégrale sur un segment

Théorème V.2.1

- Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$) un segment.
- Toute fonction continue f sur I et à valeurs réelles possède une intégrale sur ce segment, notée

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

qui s'interpète en termes d'aire sous la courbe: le réel $\int_a^b f(x)\, dx$ est une mesure de la portion du plan comprise entre les droites verticale d'équation $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et le graphe de f

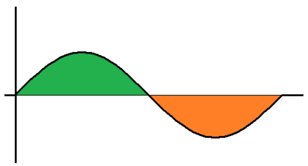


Propriété dite de "définie-positivité" de l'intégrale.

Théorème V.2.2 Si f est une fonction *à valeurs* ≥ 0, continue sur $[a, b]$ et d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors f

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0 \\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0 \end{cases} \implies \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0.$$

! *L'hypothèse "$\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$" est indispensable.* Par exemple, la fonction $\sin$ a une intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$: $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$



mais $\sin$ n'est pas la fonction nulle sur $[0, 2\pi]$!

Calcul concret (lien entre primitive et intégrale)

Théorème V.2.3 Si F est une primitive de f sur I, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

2.3 Intégration par parties

Théorème V.2.4 Si u et v sont de classe C^1 sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Remarque importante. Une intégration par parties est classique en présence de $P(x) \times \ln x$, $P(x) \times e^{\alpha x}$, $P(x)\sin(\alpha x)$ (ou $\cos$), en posant $u(x) = P(x)$ et en intégrant par parties autant de fois que nécessaire pour aboutir à la "mort" du polynôme.

Exercice 144 Calculer les intégrales suivantes:

(1) $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$

(2) $\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx$

(3) $\int_0^1 x^2 e^{-3x}\, dx.$

2.4 Changement de variable dans une intégrale

L'énoncé formel de la formule de changement de variable est relativement lourd:

Proposition V.2.5 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle J, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, φ une fonction définie et de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans J. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Changement de variable dans la pratique

Pour réaliser le changement de variable $x = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ dans la pratique, il suffira

- de poser $x = \varphi(t)$,
- de dériver "à la physicienne": $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ et d'écrire $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$
- que l'on multiplie par $f(x) = f(\varphi(t))$: $f(x)\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$
- et enfin de changer les bornes d'intégration en déterminant α et β tels que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$.

Exemple

Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$ en posant $x = \sin t$:

- on a $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t$ et donc $\mathrm{d}x = \cos t\, \mathrm{d}t$

- et alors $\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t$
- on a $x=0$ lorsque $t=0$ et $x=1$ lorsque $t=\frac{\pi}{2}$ si bien que t variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ où $\cos t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos^2 t}\cos t &= |\cos t| \times \cos t\\ &= \cos t \times \cos t\end{aligned}$$

 et en conséquence

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

- On procède ensuite par linéarisation:

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2},$$

 d'où

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Autre façon de procéder à un changement de variable

Il est également possible de poser $t=\psi(x)$ dans le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Le protocole est le même:

Exemple

Calculer

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$

en effectuant le changement de variable $t=\sqrt{1+x}$.

- On écrit

$$t=\sqrt{1+x} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

 et en conséquence

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= 2\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}t\\ &= 2t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- puis

$$x\sqrt{1+x}\ \mathrm{d}x = (t^2-1)\times t\times 2t\,\mathrm{d}t.$$

- Enfin, on a $x=0$ lorsque $t=1$ et $x=1$ lorsque $t=\sqrt{2}$, d'où

$$\begin{aligned} I &= 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^2)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{2}}\\ &= \frac{4}{15}(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Exercice 145 Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variable indiqués:

(1) $I_1 = \displaystyle\int_1^2 (x+3)\sqrt{x-1}\,dx$ en posant $t=\sqrt{x-1}$

(2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ en posant $u=x^2$

(3) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$ en posant $t=\sin u$.

2.5 Théorème fondamental de l'analyse

Le théorème suivant est capital et permet notamment de déterminer des primitives:

Théorème V.2.6 Soit I un intervalle, f une fonction définie et continue sur I et a un point quelconque de I. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est définie et de classe C^1 sur I et c'est une primitive de f sur I:

$$\forall x\in I,\quad F'(x)=f(x)$$

et c'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
Les autres primitives de f s'obtiennent en rajoutant une constante quelconque à celle-ci.

Exemple

Déterminer une primitive de la fonction

$$f : x\mapsto \ln x$$

sur $I =]0,+\infty[$ puis toutes les primitives de f sur I.

- Une primitive de f sur I est la fonction définie sur I par

$$F : x\mapsto \int_2^x \ln t\,dt.$$

- On effectue une intégration par parties en posant

$$u(t)=\ln t,\qquad v'(t)=1.$$

 Alors

$$u'(t)=\frac{1}{t}$$

 et on prendra

$$v(t)=t,$$

 d'où

$$\begin{aligned} F(x) &= [t\ln t]_2^x - \int_2^x \frac{1}{t}\times t\,dt = [t\ln t]_2^x - \int_2^x 1\,dt\\ &= [t\ln t]_2^x - [t]_2^x\\ &= x\ln x - 2\ln 2 - x + 2.\end{aligned}$$

- Donc $x\mapsto x\ln x - x + 2 - 2\ln 2$ est une primitive de $\ln$ sur I.
- En lui rajoutant la constante $-2+2\ln 2$, on obtient que $x\mapsto x\ln x - x$ en est une autre.
- Les primitives de $\ln$ sur $]0,+\infty[$ sont donc toutes de la forme $x\mapsto x\ln x - x + C$.

Remarque importante

- Reprenons ce dernier calcul; en définitive, la valeur 2 de la borne inférieure (ou toute autre valeur a) n'a pas eu d'importance dans la description finale de l'ensemble des primitives: tout s'est passé comme si l'on avait écrit, sans borne inférieure:
$$\begin{aligned} F(x) &= [t\ln t]^x - [t]^x + C \\ &= x\ln x - x + C. \end{aligned}$$
- Dans le même ordre d'idée, les "crochets" $[\;]$ ne servent plus à rien et la variable t, destinée dans le crochet à prendre la valeur x, peut disparaître aussi pour prendre dès le début le nom de x.
- Tout se passe donc comme si l'on avait effectué les calculs sur l'intégrale
$$\int \ln x\, dx,$$
que l'on dit parfois "indéfinie": reprenons le calcul ci-dessus de recherche des primitives de $\ln$ sur $I =]0, +\infty[$ avec ce raccourci d'écriture.
  - On effectue une intégration par parties dans $\int \ln x\, dx$ en posant
  $$u(x) = \ln x, \qquad v'(x) = 1.$$
  - Alors
  $$u'(x) = \frac{1}{x}$$
  et on prendra
  $$v(x) = x.$$
  - D'où
  $$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + C.$$

Convention. De façon générale, après calcul de l'une des primitives F d'une certaine fonction f, l'ensemble des primitives de f sera présenté sous la forme
$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

- Mais il faut bien comprendre que $\int f(x)\, dx$ n'est qu'un raccourci désignant *l'ensemble des primitives* de f.
- On ne définit pas une fonction en écrivant $F(x) = \int f(x)\, dx$, écriture qui n'a tout simplement pas de sens: que voudrait dire $F(2) = \int f(2)\, d2$??

Exemples

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \quad \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C.$$

Changement de variable dans un calcul de primitive

Il faut penser à "revenir à la variable de départ".

Exemple

Déterminer les primitives de la fonction
$$f : x \mapsto x\sqrt{1+x}$$
sur $I = [-1, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$.

- On écrit
$$t = \sqrt{1+x} \quad \Longrightarrow \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\, dx$$
et donc
$$dx = 2\sqrt{1+x}\, dt = 2t\, dt.$$
- On a ensuite
$$x\sqrt{1+x}\;\, dx = (t^2-1)\times t\times 2t\, dt,$$
d'où
$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x}\, dx &= 2\int (t^2-1)t^2\, dt \\ &= 2\int \left(t^4 - t^2\right)\, dt \\ &= 2\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right) + C \end{aligned}$$
- puis on revient à la variable x:
$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x}\, dx &= 2\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right) + C \\ &= 2\left(\frac{1}{5}\left(\sqrt{1+x}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3\right) + C \\ &= \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Exercice 146 En effectuant des intégrations par parties, déterminer les primitives des fonctions $f : x \mapsto \ldots$ suivantes:

(1) $\ln x$
(2) $\ln(2x+3)$
(3) $x\ln x$
(4) $x\cos x$
(5) xe^x
(6) x^3e^{2x}
(7) $(x-1)^2e^{2x}$.

Exercice 147 Effectuer les changements de variables indiqués pour déterminer les primitives des fonctions suivantes:

(1) $x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2} \quad (t = 2x)$
(2) $x \mapsto \dfrac{1}{1+3x^2} \quad (t = \sqrt{3}x)$

(3) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ $(x = 2t)$

(4) $\theta \mapsto (2\cos\theta + 3)^2 \cos\theta \sin\theta$ $(t = \cos\theta)$

(5) $x \mapsto \dfrac{1}{x + \sqrt{x}}$ $(t = \sqrt{x})$.

2.6 Sommes de Riemann

Théorème V.2.7 Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Interprétation.

- Pour tout entier $n \geq 2$, les points

$$a + k\frac{b-a}{n},\ k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$$

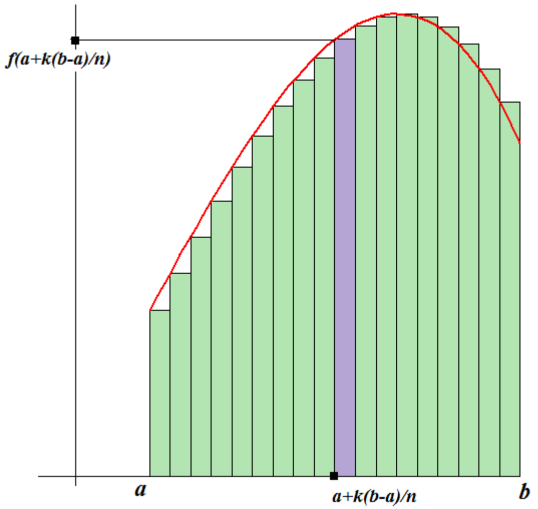
  sont les points d'une subdivision régulière du segment $[a, b]$, le ***pas*** de la subdivision est $\frac{b-a}{n}$: c'est la distance entre deux points consécutifs de la subdivision.

- Pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, le réel

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

  est l'aire du rectangle dont la base a pour longueur le pas de la subdivision et pour hauteur la valeur de la fonction au $k+1$-ième point de la subdivision.

- La somme des aires de ces rectangles converge donc vers l'intégrale de f sur $[a, b]$.



Premier exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Alors f est définie et continue sur $[0, 1]$. En prenant $a = 0$, $b = 1$, on voit que S_n est la somme de Riemann de f sur $[0, 1]$ correspondant à la subdivision régulière de $[0, 1]$ en n points. De ce fait,

$$\begin{aligned} S_n & \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} & \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ & = & \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ & = & [\ln(1+x)]_0^1 \\ & = & \ln 2. \end{aligned}$$

Deuxième exemple

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

En considérant la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur $[0, 1]$, déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Réponse. On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{\frac{1}{1+1^2}}_{k=n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction f sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} & \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} & \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt \\ & = & [\arctan t]_0^1 \\ & = & \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{4}.$$

Chapitre VI

Équations différentielles linéaires

1 Équations du premier ordre (première année)

1.1 Résolution pratique d'une équation homogène du premier ordre

Théorème VI.1.1 On se donne deux fonctions a et b, définies et continues sur un intervalle I *et on suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I.*
Les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0): \ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)},$$

où A est *une* primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{b(x)}{a(x)}$$

sur I et C est une constante quelconque.
L'ensemble des solutions de (E_0) constitue donc un espace vectoriel de dimension 1 dont la fonction

$$y_0 : x \longmapsto e^{-A(x)}$$

est une base i.e. l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est $\mathrm{Vect}(y_0)$.

Remarques.

- L'hypothèse de non annulation de a sur I est très importante tant en théorie qu'en pratique.
- Cette formule n'est valable que si l'on est amené à résoudre une équation différentielle *sur un intervalle.* Pour résoudre une équation différentielle sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle, il faudrait la résoudre sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et étudier le *raccordement* des solutions. Cette thématique sera reprise ultérieurement en exemple.
- On peut mémoriser l'écriture des solutions sous la forme

$$y(x) = Ce^{-\displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}$$

Mais cette notation n'est qu'un raccourci mnémotechnique, car l'écriture $x \mapsto \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx$ n'a pas de sens.

- En supposant pour fixer les idées que l'on travaille sur un intervalle contenant 0, une écriture plus rigoureuse serait du genre

$$y(x) = Ce^{-\displaystyle\int_0^x \frac{b(u)}{a(u)}\,du}.$$

- Il est bien dit que A est *une* primitive de la fonction $\frac{b}{a}$: il est inutile de rajouter une constante d'intégration dans cette formule, celle-ci pouvant être "absorbée" par C; par exemple

$$y'(x) - xy(x) = 0 \iff y(x) = Ce^{\int x\,dx} = Ce^{\frac{1}{2}x^2},\ C \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

et si l'on avait écrit

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + K,$$

on aurait abouti à

$$y'(x) - xy(x) = 0 \iff y(x) = Ce^{\int x\,dx} = Ce^{\frac{1}{2}x^2+K} = Ce^K e^{\frac{1}{2}x^2},\ (C, K) \in \mathbb{R}^2.$$

Mais en posant $C' = Ce^K$, on aurait obtenu les solutions

$$y(x) = C'e^{\frac{1}{2}x^2},\ C' \in \mathbb{R}$$

c'est à dire les mêmes solutions qu'en (1.1).

Premier exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E): \quad (1+x^2)y'(x) - y(x) = 0.$$

Une primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

étant

$$x \longmapsto \arctan x,$$

les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto Ce^{\arctan x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Autre présentation. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$\begin{aligned} y : x &\mapsto Ce^{\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x} \\ &= Ce^{\arctan x},\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deuxième exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E): \quad y'(x) - e^{x^2} y(x) = 0.$$

La recherche d'une primitive de la fonction

$$x \longmapsto e^{x^2}$$

échoue (un théorème de démonstration très difficile affirme d'ailleurs que les primitives de cette fonction ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles). En revanche,

$$F : x \longmapsto \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est, d'après le théorème fondamental de l'analyse, une primitive de la fonction $x \longmapsto e^{x^2}$. De ce fait, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto Ce^{\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}, \; C \in \mathbb{R}.$$

1.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène: la théorie

Théorème VI.1.2 On se donne trois fonctions a, b et f définies et continues sur un intervalle I *et on suppose que la fonction* a *ne s'annule pas sur* I et on considère l'équation différentielle

$$(E): \; a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x).$$

L'équation différentielle homogène

$$(E_0): \; a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

est appelée *équation différentielle homogène associée à* (E). Si l'on dispose d'une solution y_1 de (E), dite solution particulière, alors l'ensemble des solutions de (E) est constitué des fonctions

$$x \mapsto y(x) + y_1(x),$$

où y est une solution quelconque de l'équation homogène associée $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$.

Il est toujours extrêmement facile de vérifier si l'on peut trouver une fonction constante solution d'une équation différentielle:

- Pour l'équation différentielle

$$(E): \quad (1-x^3)y'(x) + 4xy(x) = -x,$$

  la fonction constante $y : x \mapsto C$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x^3)\times 0 + 4Cx = -x \iff \forall x \in \mathbb{R},\ 4Cx = -x$$

  donc si et seulement si $C = -\frac{1}{4}$. La fonction constante $x \mapsto -\frac{1}{4}$ est donc solution de (E).

- pour l'équation différentielle

$$(E): \quad (1-x^3)y'(x) + 4xy(x) = 1,$$

  la fonction constante $y : x \mapsto C$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x^3)\times 0 + 4Cx = -1 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ 4Cx = -1.$$

  Il est clair qu'il n'existe aucun tel réel. Aucune fonction constante n'est solution de (E).

- Plus généralement, pour l'équation différentielle

$$a(x)y'(x) + k_1 y(x) = k_2,$$

  où k_1 et k_2 sont des constantes, la fonction constante $x \mapsto \frac{k_2}{k_1}$ en est une solution.

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E): \quad (1+x^2)y'(x) - y(x) = 1.$$

- Les solutions de l'équation homogène associée $(1+x^2)y'(x) - y(x) = 0$ sont les fonctions

$$y(x) = Ce^{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx} = Ce^{\arctan x}.$$

- La fonction constante $x \mapsto -1$ est manifestement une solution de (E) puisque:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)\times 0 - (-1) = 1.$$

- Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$y(x) = Ce^{\arctan x} - 1,$$

  où C est une constante quelconque.

1.3 Méthode de variation de la constante

Théorème VI.1.3 On se donne trois fonctions a, b et f définies et continues sur un intervalle I, on suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I, on considère l'équation différentielle

$$(E): \; a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

et on note

$$y_0 : x \longmapsto e^{-A(x)}$$

où A est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{b(x)}{a(x)}$ sur I, une base de l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

Alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est constitué des fonctions

$$y : x \longmapsto C(x)y_0(x),$$

où C décrit l'ensemble des primitives de la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x)}{a(x)y_0(x)}.$$

Remarques.

- Le nom de cette méthode est tiré du fait que les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions

$$x \longmapsto Cy_0(x).$$

  Pour résoudre l'équation avec second membre, on recherche les solutions sous la forme

$$x \longmapsto C(x)y_0(x),$$

  comme si "on faisait varier la constante C". C'est évidemmment une blague, mais mnémotechniquement efficace.

- Notons que y_0 est une exponentielle et ne s'annule donc pas sur I. La considération de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{a(x)y_0(x)}$ ne pose donc aucun problème.

Méthode `''fayo''` C'est un procédé mnémotechnique. L'équation (E) étant écrite

$$(E): \quad ay' + by = f,$$

la méthode de variation de la constante conduit à la condition

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)y_0(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Exemple

Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E): \quad xy'(x) - 3y(x) = -x$$

en appliquant cette méthode.

- Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{\int \frac{3}{x}\,dx} \\ &= Ce^{3\ln|x|} \\ &= Ce^{3\ln x} \\ &= Cx^3. \end{aligned}$$

- On recherche les solutions de (E) sous la forme $y(x) = x^3C(x)$. Alors

$$\begin{aligned} y'(x) &= 3x^2C(x) + x^3C'(x) \\ xy'(x) - 3y(x) = -x &\iff 3x^3C(x) + x^4C'(x) - 3x^3C(x) = -x \\ &\iff x^4C'(x) = -x \\ &\iff C'(x) = -\frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

  i.e. si et seulement si C est une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^3}$.

- Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^3}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{2x^2} + K,$$

  donc $y(x) = x^3C(x)$ est solution de (E) sur I si et seulement si $C(x)$ est de cette forme, donc si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} y(x) &= x^3\left(\frac{1}{2x^2} + K\right) \\ &= \frac{1}{2}x + Kx^3. \end{aligned}$$

1.4 Principe de superposition des seconds membres

Proposition VI.1.4 On considère l'équation différentielle de la forme

$$(E): \ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

On peut rechercher séparément des solutions particulières y_1 et y_2 respectivement aux équations

$$ay' + by = f_1, \qquad ay' + by = f_2.$$

La somme $y_1 + y_2$ est alors une solution de l'équation $ay' + by = f_1 + f_2$.

Remarque. Ce principe s'étend bien entendu lorsque le second membre est la somme d'un nombre quelconque de fonctions.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) + y(x) = \sin x + \sin 2x.$$

- L'équation homogène admet pour solutions les fonctions $y : x \mapsto Ce^{-x}$.
- On recherche une solution particulière y_1 à l'équation différentielle

$$(E_1) \quad y'(x) + y(x) = \sin x.$$

  Plutôt qu'appliquer la méthode de variation de la constante, il est naturel de rechercher une telle solution sous la forme

$$y_1(x) = a\sin x + b\cos x.$$

  On a alors

$$y_1'(x) = a\cos x - b\sin x \Longrightarrow y_1'(x) + y_1(x) = (a-b)\sin x + (a+b)\cos x.$$

  Cherchons deux réels a et b tels que

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 0. \end{cases}$$

  On trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ si bien que

$$y_1(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

  est solution de (E_1).

- On recherche une solution particulière y_2 à l'équation différentielle

$$(E_2) \quad y'(x) + y(x) = \sin 2x.$$

  Plutôt qu'appliquer la méthode de variation de la constante, il est naturel de rechercher une telle solution sous la forme

$$y_2(x) = a\sin 2x + b\cos 2x.$$

  On a alors

$$y_2'(x) = 2a\cos 2x - 2b\sin 2x \Longrightarrow y_2'(x) + y_2(x) = (a-2b)\sin 2x + (2a+b)\cos 2x.$$

  Cherchons deux réels a et b tels que

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a + b = 0. \end{cases}$$

  On trouve $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$ si bien que

$$y_2(x) = \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x$$

  est solution de (E_2).

- Du principe de superposition des deux membres, on déduit que
$$y = y_1 + y_2$$
est une solution de (E).
- L'ensemble des solutions de (E) est alors constitué des fonctions
$$y : x \mapsto \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.5 Notion de problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est un problème qui consiste à trouver une solution d'une équation différentielle et prenant en un réel donné une valeur donnée (cette contrainte est souvent appelée "condition initiale" en référence à la donnée de la position initiale d'un mobile dans un problème de cinématique). On résout un problème de Cauchy en ajustant la constante utilisée dans la description de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

Premier exemple

Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} \sqrt{x}y'(x) - 2y(x) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
sur $I =]0, +\infty[$.

- Notons (E) l'équation différentielle
$$(E) \quad \sqrt{x}y'(x) - 2y(x) = 1.$$
- Les solutions de l'équation différentielle homogène associée
$$(H) \quad \sqrt{x}y'(x) - 2y(x) = 0$$
sur I sont, du fait que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur I, les fonctions
$$y : x \mapsto Ce^{-A(x)}$$
où A est une primitive de
$$x \mapsto -\frac{2}{\sqrt{x}}$$
sur I, comme la fonction
$$x \mapsto -4\sqrt{x}.$$
Dans la mesure où la fonction constante $x \mapsto -\frac{1}{2}$ est une solution de (E), les solutions de (E) sur I sont les fonctions
$$y : x \longmapsto Ce^{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2}.$$
Pour une telle solution, on a
$$y(1) = 2 \iff Ce^4 - \frac{1}{2} = 2 \iff C = \frac{5}{2}e^{-4}.$$
Ce problème possède donc une unique solution, à savoir la fonction
$$\begin{aligned} y : x \quad &\mapsto \quad \frac{5}{2}e^{-4}e^{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \\ &= \quad \frac{5}{2}e^{4(\sqrt{x}-1)} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deuxième exemple

On considère le problème de Cauchy
$$\mathcal{P} \quad \begin{cases} y'(x) + 2y(x) = x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$
sur $\mathbb{R}$ et on note (E) l'équation différentielle
$$(E) \quad y'(x) + 2y(x) = x^2.$$
1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
2. On suppose que y est une solution polynomiale de (E) sur $\mathbb{R}$. Démontrer que y est de degré 2.
3. En déduire une solution polynomiale de (E) puis résoudre $\mathcal{P}$.

Solution.
1. L'équation homogène associée admet pour solutions les fonctions
$$y : x \mapsto Ce^{-2x}.$$
2. Soit $x \mapsto y(x)$ une solution polynomiale de (E) et soit $n = \deg(y)$. Alors y' est de degré $n-1$ et $y' + 2y$ est alors un polynôme de degré n. Devant être égal au polynôme $x \mapsto x^2$ qui est de degré 2, c'est donc que $n = 2$.
3. On recherche donc une solution polynomiale particulière de degré 2 i.e. on recherche trois réels a, b, c tels que
$$y(x) = ax^2 + bx + c$$
soit solution de (E). En procédant par identification, on trouve aisément
$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$
L'ensemble des solutions de (E) est alors constitué des fonctions
$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}.$$
Parmi toutes ces solutions, laquelle vérifie-t-elle $y(1) = 0$? Pour une telle solution, on a
$$y(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + Ce^{-2}$$
si bien que
$$y(1) = 0 \iff C = -\frac{1}{4}e^2.$$
L'unique solution de ce problème de Cauchy est donc la fonction
$$y : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^2e^{-2x}.$$

Pour terminer, la théorie:

Théorème VI.1.5 On se donne trois fonctionss a, b et f définies et continues sur un intervalle I, on suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I et on considère l'équation différentielle
$$(E) : \ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x).$$
Alors pour tout x_0 donné dans I et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une solution et une seule, définie sur tout I, au problème de Cauchy:
$$\begin{cases} a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Remarque. La démonstration, proposée ci-dessous est simple: il suffit d'ajuster une constante qui intervient dans la description de l'ensemble des solutions de (E).

1.6 Exemples de problèmes de raccordement

Des problèmes surviennent lorsque la fonction a s'annule dans l'équation $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=f(x)$. Rappelons qu'il est supposé que la fonction a ne s'annule pas sur I pour pouvoir ne serait-ce que résoudre l'équation homogène $a(x)y'(x)+b(x)=0$; en effet, les solutions sont les fonctions

$$y(x)=Ce^{A(x)}$$

où A est une primitive de $x\mapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$ sur I; dès lors, on voit clairement l'existence d'un problème si a s'annule en un point de I: il est impossible de parler de la fonction $x\mapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$ sur I et encore moins d'une primitive.

On se laissera guider par l'énoncé, comme dans l'exemple suivant.

Exemple modèle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad xy'(x)+2y(x)=x.$$

1. Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$.
2. Résoudre (E) sur $]-\infty,0[$.
3. On considère une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$.
   - Justifier l'existence de deux réels C_1 et C_2 tels que

     $$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad y(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{C_1}{x^2} & \text{sur }]-\infty,0[\\ \\ \frac{x}{3}+\frac{C_2}{x^2} & \text{sur }]0,+\infty[.\end{cases}$$

     En déduire que

     $$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=\frac{x}{3}.$$
   - En considérant $y(0)$, démontrer que $C_1=C_2=0$.
4. En déduire que $y: x\mapsto \frac{x}{3}$ est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

   $$y(x) = Ce^{-\int \frac{2}{x}\,dx}=Ce^{-2\ln|x|}=Ce^{-2\ln x}$$

   et la méthode de variation de la constante conduit à rechercher les solutions sous la forme $y(x)=C(x)y_0(x)$ et les calculs habituels conduisent à

   $$\begin{aligned}C'(x)=x^2 \quad\Longrightarrow\quad C(x) &= \frac{1}{3}x^3+K\\ \Longrightarrow y(x) &= \left(\frac{x^3}{3}+K\right)\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{x}{3}+\frac{K}{x^2}\end{aligned}$$

   où K est un réel quelconque.
2. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

   $$\begin{aligned}y(x) &= Ce^{-\int \frac{2}{x}\,dx}=Ce^{-2\ln|x|}=Ce^{-2\ln(-x)}\\ &= \frac{C}{(-x)^2}=\frac{C}{x^2}\end{aligned}$$

   et la méthode de variation de la constante donne les solutions sous la forme

   $$\frac{x}{3}+\frac{L}{x^2}$$

   où L est un réel quelconque.
3. - Puisque y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on a

     $$\forall x\in\mathbb{R},\quad xy'(x)+2y(x)=x.$$

     On a donc en particulier:

     $$\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\quad xy'(x)+2y(x)=x$$

     i.e. y est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$; de 1. on déduit alors qu'il existe un réel K (que l'on peut appeler C_1!) tel que

     $$\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\quad \frac{x}{3}+\frac{K}{x^2}.$$

     De même, on a:

     $$\forall x\in\,]-\infty,0[\,,\quad xy'(x)+2y(x)=x$$

     i.e. y est une solution de (E) sur $]-\infty,0[$; de 1. on déduit alors qu'il existe un réel L (que l'on peut appeler C_2!) tel que

     $$\forall x\in\,]-\infty,0[\,,\quad \frac{x}{3}+\frac{L}{x^2}.$$
   - La fonction y est censée être une solution de (E) sur $\mathbb{R}$; c'est donc avant tout une fonction définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et en conséquence une fonction définie et continue sur tout $\mathbb{R}$ et en particulier en 0. Or la continuité d'une fonction en 0 entraîne l'existence (et égalité avec $y(0)$) des limites à gauche et à droite de cette fonction en 0. Or la seule possibilité pour que

     $$x\mapsto \frac{x}{3}+\frac{K}{x^2}$$

     possède une limite à droite en 0 et $K=0$, sous peine de limite infinie. De même, $L=0$. On a donc

     $$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad y(x)=\begin{cases}\frac{x}{3} & \text{sur }]-\infty,0[\\ \\ \frac{x}{3} & \text{sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

     et donc

     $$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad y(x)=\frac{x}{3}. \tag{1.2}$$

     Mais aussi pour $x=0$, puisque

     $$y(0)=\lim_{x\to 0^+}y(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{3}=0$$

     et c'est pourquoi 1.2 est valable également pour $x=0$.
4. L'analyse conduite à la question 3. a démontré que *si* y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, *alors* on a nécessairement

   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=\frac{x}{3}.$$

   Réciproquement, la fonction $y: x\mapsto\frac{x}{3}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$?
   - On peut le vérifier directement: tout d'abord, c'est bien une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

     $$\forall x\in\mathbb{R},\quad y'(x)=\frac{1}{3}\quad\Longrightarrow\quad xy'(x)+2y(x)=x\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=x,$$

     ce qui prouve que $y: x\mapsto\frac{x}{3}$ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

- On peut aussi arguer du fait que $x \mapsto \frac{x}{3}$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$, resp. $]-\infty,0[$, d'après les résultats obtenus en 1. et 2., cette fonction correspondant au choix $K=0$, resp. $L=0$. Enfin,
$$0 \times y'(0) + 2y(0) = 0 + 0 = 0,$$
ce qui prouve que l'égalité
$$xy'(x) + 2y(x) = x$$
est satisfait pour $x=0$ i.e. l'équation différentielle est également satisfaite en 0. Finalement, on a bien
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy'(x) + 2y(x) = x.$$

Finalement, par analyse-synthèse, $y : x \mapsto \frac{x}{3}$ est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2 Équations linéaires du deuxième ordre

2.1 Résolution pratique d'une équation à coefficients constants (première année)

Ce paragraphe ne concerne que les équations différentielles linéaires du deuxième à coefficients constants.

Soit l'équation différentielle
$$(H): \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0,$$
où a, b, c sont des constantes réelles. On considère l'équation caractéristique
$$(E_c): \quad ar^2 + br + c = 0$$
et son discriminant Δ.

discriminant Δ	racines de (E_c)	solutions de (H)
$\Delta > 0$	racines réelles r_1, r_2	$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	racine double r	$(\lambda x + \mu)e^{rx}$
$\Delta < 0$	racines complexes $\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$	$(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)e^{\alpha x}$

Signalons ces cas particuliers:

cas particulier	solutions de (H)
$y'' - \omega^2 y = 0$	$\lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$
$y'' + ky = 0$	$k<0: \ \lambda e^{\sqrt{-k}x} + \mu e^{-\sqrt{-k}x}$
$y'' + ky = 0$	$k>0: \ \lambda \cos(\sqrt{k}x) + \mu \sin(\sqrt{k}x)$

Pour la résolution d'une équation non homogène à coefficients constants, on recherchera une solution particulière polynomiale lorsque le second membre l'est, une solution exponentielle lorsque le second membre l'est, etc. :

second membre $f(x)$	solution particulière y_1
k (constante)	A
$P(x)$ (polynôme)	$\begin{cases} Q(x) & \text{si } c \neq 0 \\ xQ(x) & \text{si } c = 0,\ b \neq 0 \\ x^2Q(x) & \text{si } b = c = 0 \end{cases}$
αe^{kx}	$\begin{cases} Ae^{kx} & \text{si } k \text{ non racine de } E_c \\ Axe^{kx} & \text{si } k \text{ racine simple de } E_c \\ Ax^2e^{kx} & \text{si } k \text{ racine double de } E_c \end{cases}$
$\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$	$\begin{cases} A \cos \omega x + B \sin \omega x & \text{si } i\omega \text{ non racine de } E_c \\ Ax \cos \omega x + Bx \sin \omega x & \text{si } i\omega \text{ racine de } E_c \end{cases}$

A, B	constantes à déterminer
Q	polynôme à déterminer avec $\deg Q = \deg P$

2.2 Équations à coefficients non constants: principes généraux.

Théorème VI.2.6 Soit l'équation différentielle
$$(E): \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$$
où a, b, c, f sont des fonctions définies et continues sur un intervalle donné I.

- L'équation homogène associée est l'équation différentielle
$$(H): \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0.$$
Si l'on dispose d'une solution y_0 de (E), dite solution particulière, alors les solutions de (E) sont toutes de la forme
$$x \mapsto y(x) + y_0(x),$$
où y est une solution quelconque de l'équation homogène associée (H).
- *Principe de superposition des seconds membres.* Lorsque le second membre de (E) est de la forme $f_1 + f_2$ (ou de plus de termes), on peut rechercher séparément des solutions particulières y_1 et y_2 respectivement aux équations $ay'' + by' + cy = f_1$ et $ay'' + by' + cy = f_2$; la somme $y_1 + y_2$ est alors une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = f_1 + f_2$.

Il n'y a pas d'équation caractéristique lorsque $a(x), b(x), c(x)$ ne sont pas des constantes:
$$(E) \quad y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = 0 \qquad \cancel{r^2 + ar - 2 = 0}$$

2.3 La théorie: structure de l'espace des solutions, problèmes de Cauchy

Théorème VI.2.7 On se donne quatre fonctions a, b, c et f, définies et continues sur un intervalle I et on considère l'équation différentielle

$$(E): \ a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$$

ainsi que son équation différentielle homogène associée

$$(E_0): \ a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0.$$

On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I.

- L'ensemble des solutions de (E_0) constitue un espace vectoriel de dimension 2:
  - il existe deux solutions y_1 et y_2 de (E_0) telles que toute solution de (E_0) sur I soit de la forme
  $$y: x \mapsto C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$
  où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.
  - En conséquence, l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$.
  - *Il n'existe pas de formule permettant de trouver une solution d'une équation du deuxième ordre.*
  - *Il n'y a pas d'équation caractéristique pour une équation différentielle qui n'est pas à coefficients constants.*
- Si l'on dispose d'une solution y_0 de (E), dite solution particulière, alors l'ensemble des solutions de (E) est constitué des fonctions
$$x \mapsto y(x) + y_0(x),$$
où y est une solution quelconque de l'équation homogène associée.
- Pour tout x_0 donné dans I et tous réels y_0, y_1, il existe une solution et une seule, définie sur tout I, au problème de Cauchy:
$$\begin{cases} a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

! *Il n'existe pas de formule générale permettant de trouver des solutions d'une équation homogène.* On se laissera toujours guider par l'énoncé pour la résolution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients non constants.

2.4 De la manière d'obtenir des solutions

Il est toujours facile de vérifier si l'on peut trouver une fonction constante solution d'une équation différentielle:

- Pour l'équation différentielle
$$(E): \quad y''(x) - 3xy'(x) + 4xy(x) = -x,$$
la fonction constante $y: x \mapsto C$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 - 3x \times 0 + 4Cx = -x \iff \forall x \in \mathbb{R}, \ 4Cx = -x$$
donc si et seulement si $C = -\frac{1}{4}$. La fonction constante $x \mapsto -\frac{1}{4}$ est donc solution de (E).
- pour l'équation différentielle
$$(E): \quad y''(x) - 3xy'(x) + 4xy(x) = 1,$$
la fonction constante $y: x \mapsto C$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 - 3x \times 0 + 4Cx = -1 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \ 4Cx = -1.$$
Il est clair qu'il n'existe aucun tel réel. Aucune fonction constante n'est solution de (E).

Exemple de recherche de solution polynomiale

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad (x^2 - 1)y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = 0$$

sur $I =]1, +\infty[$. Démontrer que (E) possède une solution polynomiale de degré 2.

- On part d'un polynôme $P: x \mapsto ax^2 + bx + c$.
- Alors
$$P'(x) = 2ax + b, \quad P''(x) = 2a$$
puis
$$\begin{aligned} (x^2-1)P''(x) - 4xP'(x) + 6P(x) &= 2a(x^2-1) - 4x(2ax+b) + 6(ax^2+bx+c) \\ &= (6a - 8a + 2a)x^2 + (6b - 4b)x + 6c - 2a \\ &= 2bx + 6c - 2a, \end{aligned}$$
et on voit donc, par théorème d'identification des polynômes, que P est solution de (E) si et seulement si
$$\begin{cases} 2b = 0 \\ 6c - 2a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 3c. \end{cases}$$
- Ainsi, en prenant par exemple $c = 1$, on obtient la solution polynomiale
$$P(x) = 3x^2 + 1.$$

Deuxième exemple de recherche de solution

Déterminer les réels α tels que $y: x \mapsto x^\alpha$ soit solution de l'équation différentielle

$$(E): \ x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0$$

sur $I =]0, +\infty[$.

- On pose donc $y(x) = x^\alpha$. Alors
$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$
et en conséquence
$$\begin{aligned} x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) &= \alpha(\alpha-1)x^\alpha + 4\alpha x^\alpha + 2x^\alpha \\ &= \big(\alpha(\alpha-1) + 4\alpha + 2\big)x^\alpha. \end{aligned}$$
- Il en résulte
$$\forall x \in I, \ x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0 \iff \forall x \in I, \ \big(\alpha(\alpha-1) + 4\alpha + 2\big)x^\alpha = 0.$$
Cette égalité doit avoir lieu pour tout réel $x > 0$, ce qui se produit évidemment si et seulement si
$$\alpha(\alpha-1) + 4\alpha + 2 \iff \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0,$$
trinôme dont les racines sont -1 et -2.
- Ainsi,
$$x \mapsto \frac{1}{x}, \qquad x \mapsto \frac{1}{x^2}$$
sont des solutions de (E) sur I.

Troisième exemple de recherche de solution

Déterminer les réels α tels que $y : x \mapsto e^{\alpha x}$ soit solution de l'équation différentielle

$$(E) : \ (2x+1)y''(x) + (4x-2)y'(x) - 8y(x) = 0$$

sur $\mathbb{R}$.

- On pose donc $y(x) = e^{\alpha x}$. Alors

$$\begin{aligned} & y'(x) = \alpha e^{\alpha x}, \quad y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} \\ \Longrightarrow (2x+1)y''(x) + (4x-2)y'(x) - 8y(x) &= \big((2x+1)\alpha^2 + (4x-2)\alpha - 8\big)e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

- On a donc

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ (2x+1)y''(x) + (4x-2)y'(x) - 8y(x) = \big((2x+1)\alpha^2 + (4x-2)\alpha - 8\big)e^{\alpha x} = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (2x+1)\alpha^2 + (4x-2)\alpha - 8 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (2\alpha^2 + 4\alpha)x + +\alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (2\alpha^2 + 4\alpha)x + \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \end{aligned}$$

  et par théorème d'identification d'un polynôme, ceci se produit si et seulement si

$$\begin{cases} 2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \{0, -2\} \\ \alpha \in \{4, -2\} \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = -2.$$

  Ainsi,

$$x \mapsto e^{-2x}$$

  est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exemple de résolution par changement de fonction inconnue

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) = 0$$

sur $I =]0, +\infty[$ en posant $z = xy(x)$.

- On a alors

$$z'(x) = y(x) + xy'(x), \quad z''(x) = 2y'(x) + xy''(x).$$

- On voit donc que pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) &= xy''(x) + 2xy'(x) + 2xy'(x) + 2y(x) + xy(x) \\ &= z''(x) + 2z'(x) + z(x), \end{aligned}$$

  si bien que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle

$$(F) : \quad z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 0.$$

- L'équation (F) est à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1$ dont -1 racine double. Les solutions de (F) sont donc les fonctions

$$z(x) = ae^{-x} + bxe^{-x}$$

  où a, b sont deux réels quelconques.
- Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x}z(x) \\ &= a\frac{e^{-x}}{x} + be^{-x}, \end{aligned}$$

  où a, b sont deux réels quelconques.

- ***Remarque importante.*** Le fait de travailler sur $I =]0, +\infty[$ garantit la parfaite correspondance entre la donnée de z et la donnée de y:
  - si y est une fonction définie sur $]0, +\infty[$, la fonction $z : x \mapsto xy(x)$ est elle aussi définie sur $]0, +\infty[$
  - et si z est une fonction définie sur $]0, +\infty[$, alors la fonction $y : x \mapsto \frac{z(x)}{x}$ est elle aussi définie sur $]0, +\infty[$: cela n'aurait pas été le cas si l'on avait travaillé sur $\mathbb{R}$, en raison du problème en $x = 0$.

  C'est pourquoi il y a complète équivalence entre la résolution de (E) et la résolution de (F) et donc toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$, "ni plus, ni moins" (traduction de l'équivalence), sont les fonctions

$$y : x \mapsto a\frac{e^{-x}}{x} + be^{-x}.$$

Exemple de résolution par changement de variable

Sur $I =]0, +\infty[$, on considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad x^2y''(x) + y(x) = 0.$$

- Étant donnée une fonction y définie et deux fois dérivable sur I, on considère la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y\left(e^t\right).$$

  Pour tout $x \in I$, exprimer $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$ au moyen des fonctions $\ln$, z, z' et z''.
- Démontrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution d'une certaine équation différentielle (F) sur $\mathbb{R}$, que l'on résoudra.
- En déduire toutes les solutions de (E) sur I.

Réponse.

- Soit $x \in I$; alors

$$x = e^t \Longleftrightarrow t = \ln x,$$

  si bien que

$$z(\ln x) = y\left(e^{\ln x}\right) = y(x).$$

  De $y(x) = z(\ln x)$, on déduit alors par dérivation d'une fonction composée:

$$y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x)$$

  puis par dérivée d'un produit et d'une fonction composée:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}z''(\ln x) \\ &= -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x). \end{aligned}$$

- Pour tout $x \in I$, on a alors

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + y(x) &= x^2\left(-\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)\right) + z(\ln x) \\ &= -z'(\ln x) + z''(\ln x) + z(\ln x). \end{aligned}$$

  Ainsi, y est solution de (E) sur I si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad -z'(\ln x) + z''(\ln x) + z(\ln x) = 0.$$

  Mais lorsque x parcourt $I =]0, +\infty[$, $\ln x$ parcourt $\mathbb{R}$ (car $\ln$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$). C'est pourquoi,

$$\forall x \in I, \quad -z'(\ln x) + z''(\ln x) + z(\ln x) = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad -z'(t) + z''(t) + z(t) = 0.$$

Donc y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution de l'équation différentielle

$$(F): \quad -z'(t)+z''(t)+z(t)=0$$

sur $\mathbb{R}$. C'est une équation différentielle à coefficients constants dont l'équation caractéristique $r^2-r+1=0$ admet les racines complexes

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Les solutions (réelles) de (F) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions

$$z(t)=ae^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+be^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

où a,b sont deux réels quelconques.

- De $y(x)=z(\ln x)$, on déduit que les solutions de (E) sur I sont les fonctions

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln x) \\ &= ae^{\frac{\ln x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+be^{\frac{\ln x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) \end{aligned}$$

et puisque

$$e^{\frac{\ln x}{2}}=e^{\ln x^{\frac{1}{2}}}=e^{\ln\sqrt{x}}=\sqrt{x},$$

les solutions de (E) sur I sont finalement les fonctions

$$y(x)=a\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+b\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

où a,b sont deux réels quelconques.

2.5 Méthode de "rabaissement de l'ordre"

C'est une technique qui permet de se ramener à une équation différentielle du premier ordre en changeant de fonction inconnue (on suivra bien entendu les indication de l'énoncé), mais qui nécessite de disposer déjà d'une solution de l'équation homogène associée.

Exemple

Sur $I=]0,+\infty[$, on considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x^3y''(x)+xy'(x)-y(x)=1.$$

(1) Déterminer une solution y_1 de l'équation (E).

(2) Déterminer une solution polynomiale y_0 du premier degré de l'équation homogène associée (H).

(3) Soit z une fonction définie et deux fois dérivable sur I; on pose $y(x)=y_0(x)z(x)$. Démontrer que y est solution de (H) sur I si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (F) sur I.

(4) Résoudre l'équation différentielle (F) sur I en posant $u=z'$.

(5) En déduire toutes les solutions de (E) sur I.

Réponse.

(1) Il est clair que la fonction constante $y_1 : x\mapsto -1$ est une solution de (E) sur I.

(2) On pose $y_0(x)=ax+b$. Alors

$$y_0'(x)=a \quad y_0(x)=0 \quad \Longrightarrow \quad x^3y_0''(x)+xy_0'(x)-y_0(x)=ax-(ax+b)=-b$$

si bien que y_0 est solution de (H) sur I si et seulement si $b=0$ avec aucune contrainte sur a; on prendra par exemple $a=1$, si bien que $y_0 : x\mapsto x$ est une solution polynomiale du premier degré de (H) sur I.

(3) On a donc $y(x)=xz(x)$ et on calcule

$$\begin{aligned} y'(x) &= z(x)+xz'(x) \\ y''(x) &= z'(x)+z'(x)+xz''(x)=2z'(x)+xz''(x) \end{aligned}$$

si bien que y est solution de (H) sur I si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall x\in I, \quad \left(2x^3z'(x)+x^4z''(x)\right)+\left(xz(x)+x^2z'(x)\right)-xz(x) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \ x^4z''(x)+\left(2x^3+x^2\right)z'(x)+xz(x)-xz(x) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \ x^4z''(x)+\left(2x^3+x^2\right)z'(x) &= 0 \end{aligned}$$

et on a bien obtenu une équation différentielle (F) en z. À noter la particularité de cette équation différentielle: elle ne comporte pas de terme en $z(x)$.

(4) En posant $u=z'$, on a

$$x^4z''(x)+\left(2x^3+x^2\right)z'(x)=x^4u'(x)+\left(2x^3+x^2\right)u(x),$$

si bien que z est solution de (F) sur I si et seulement si u est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$(G) \quad x^4u'(x)+\left(2x^3+x^2\right)u(x)=0.$$

C'est le point culminant de cette technique: la résolution de l'équation différentielle initiale (E), du deuxième ordre, se ramène à la résolution de l'équation différentielle (G), qui est du premier ordre, d'où le nom de cette méthode.

- On résout l'équation (G): ses solutions sont les fonctions

$$u(x)=Ce^{-\int\frac{2x^3+x^2}{x^4}\,dx}. \tag{2.3}$$

- On a

$$\begin{aligned} \int\frac{2x^3+x^2}{x^4}\,dx &= \int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= 2\ln|x|-\frac{1}{x}+K=2\ln x-\frac{1}{x}+K \end{aligned}$$

(on travaille sur $]0,+\infty[$); en prenant $K=0$ (n'oublions pas que dans l'application de la formule (2.3), on a besoin d'une primitive et non de l'expression de toutes les primitives), les solutions de (G) sur I sont les fonctions

$$\begin{aligned} u(x) &= Ce^{-\ln x+\frac{1}{x}}=Ce^{-2\ln x}\times e\frac{1}{x} \\ &= C\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{2\ln x}}=C\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\ln(x^2)}} \\ &= C\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}. \end{aligned}$$

- On revient à (F): la fonction z est solution de (F) sur I si et seulement si $u=z'$ est solution de (G) sur I donc si et seulement s'il existe un réel C tel que $u(x)=C\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ donc si et seulement s'il existe un réel C tel que

$$z'(x)=C\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

On est donc amené à rechercher les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. En reconnaissant la forme

$$\int e^{v(x)} \times v'(x)\, dx = e^{v(x)} + K,$$

on a

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx &= -\int e^{\frac{1}{x}} \times \frac{-1}{x^2}\, dx \\ &= -e^{\frac{1}{x}} + K. \end{aligned}$$

Ainsi, z est solution de (F) sur I si et seulement s'il existe deux réels C et K tels que

$$\begin{aligned} z(x) &= C\left(-e^{\frac{1}{x}} + K\right) \\ &= -Ce^{\frac{1}{x}} + D \end{aligned}$$

(on a posé $D = CK$).

(5) On revient à (H): y est une solution de (H) sur I si et seulement si , en posant $y = y_0 z$, la fonction z est solution de (F) sur I, donc si et seulement s'il existe deux réels C et D tels que $z(x) = -Ce^{\frac{1}{x}} + D$ donc si et seulement s'il existe deux réels C et D tels que

$$\begin{aligned} y(x) &= x \times \big(- Ce^{\frac{1}{x}} + D\big) \\ &= -Cxe^{\frac{1}{x}} + Dx \end{aligned}$$

si bien que les solutions de (E), en rajoutant à ces solutions de l'équation homogène associée la solution particulière y_1, sont les fonctions

$$x \mapsto -1 - Cxe^{\frac{1}{x}} + Dx,$$

où C et D sont deux réels quelconques.

Chapitre VII

Intégrales généralisées (deuxième année)

1 Définitions fondamentales, intégrales de référence

Toutes les fonctions rencontrées seront à valeurs réelles ou complexes.

Définition VII.1.1

• Soit f une fonction définie et continue sur $I = [a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. On dit que f possède une intégrale généralisée sur I lorsque la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

possède une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$. Lorsque c'est le cas, on dit aussi que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$$

est convergente, ou que l'intégrale existe; la valeur de L est notée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt.$$

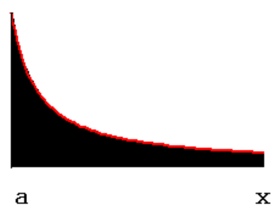
Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente, ou qu'elle n'existe pas.

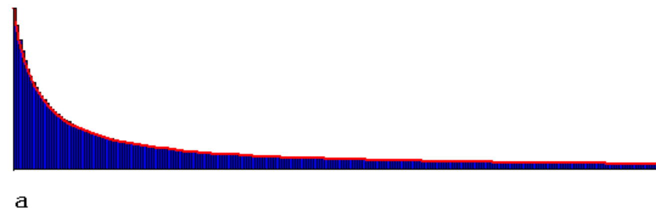
• Soit f une fonction définie et continue sur $I =]a, b]$, où a et b sont deux réels avec $a < b$. On dit que f possède une intégrale généralisée sur I lorsque la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_x^b f(t)\, dt$$

possède une limite finie L lorsque x tend vers a, valeur qui est alors notée $\int_a^b f(t)\, dt$.

- Le vocabulaire (existence ou non, convergence, divergence) la première partie de la définition s'étend à la deuxième partie.
- On définit de même la notion d'intégrale impropre pour une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b[$ ou sur $]-\infty, a]$.
- Il pourra être pertinent d'avoir présent à l'esprit l'interprétation en termes d'aire de l'existence d'une intégrale généralisée: par exemple, une fonction f possède une intégrale généralisée sur $[0, +\infty[$ dès lors que la partie du plan délimitée par sa courbe et l'axe Ox possède une aire finie (bien qu'il s'agisse d'une surface illimitée); il est donc possible de peindre la surface sous la courbe avec un nombre fini de pots de peinture:





Si l'unité de mesure est le m^2 et L est la valeur de l'intégrale généralisée, la surface sous la courbe a une aire de Lm^2.

Exemple typique

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t-1}\, dt$.

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ est définie et continue sur $[0, 1[$: l'intégrale est impropre à la borne 1.
- Soit $x < 1$. On calcule

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t-1}\, dt = \big[\ln|t-1|\big]_0^x = \ln|x-1|$$

- et on clairement $F(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui démontre que l'intégrale diverge.

Autre exemple

Démontrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\, dt$ converge et donner sa valeur.

- La fonction $t \mapsto 2te^{-t^2}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$: l'intégrale est impropre à la borne $+\infty$.
- Soit $x > 0$. On calcule, en reconnaissant la forme $\displaystyle\int u'e^u = e^u$:

$$F(x) = \int_0^x 2te^{-t^2}\, dt = \big[-e^{-t^2}\big]_0^x = 1 - e^{-x^2}$$

- et on a clairement $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui démontre que I converge et que $I = 1$.

Exemples de référence

La connaissance des intégrales suivantes est vitale.

Théorème VII.1.1

– Soit $a \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge si et seulement si $a > 0$.

– *Exemples de Riemann.* Soit α un paramètre réel:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

– $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente.

Démonstration. Soit, pour $x > 0$, $H(x) = \int_x^1 \ln t\,dt$. Alors

$$H(x) = [t\ln t - t]_x^1 = -1 - x\ln x + x.$$

Donc $H(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$ car on sait que $x \ln x \to 0$ et donc $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente.

Soit $G(x) = \int_0^x e^{-at}\,dt$.

- Si $a = 0$, on a

$$G(x) = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et en conséquence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ diverge.

- Pour $a \neq 0$, on a

$$G(x) = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^x = \frac{1}{a} - \frac{e^{-ax}}{a}$$

et comme

$$e^{-ax} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{lorsque } a > 0 \\ +\infty & \text{lorsque } a < 0, \end{cases}$$

on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge si et seulement si $a > 0$.

Posons ensuite $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt$. Alors

$$F(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

- Puisque $\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ diverge lorsque $\alpha = 1$.
- Si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$ et alors

$$\frac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

si bien que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}$$

et en conséquence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge.

- Si $\alpha < 1$, alors $\alpha - 1 < 0$ et alors

$$\frac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

si bien que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et en conséquence, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ diverge.

d'où le troisième.
On étudie l'existence de $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ en exprimant de même $G(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$:

$$G(x) = \begin{cases} -\ln x, & \text{si } \alpha = 1 \\ -\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

- Puisque $\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ diverge lorsque $\alpha = 1$.

- Si $\alpha < 1$, alors $\alpha - 1 < 0$ et alors

$$\frac{1}{x^{\alpha-1}} = x^{1-\alpha} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

si bien que

$$G(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{\alpha-1}$$

et en conséquence, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge.

- Si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$ et alors

$$\frac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

si bien que

$$G(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

et en conséquence, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ diverge.

Intégrale impropre aux deux bornes

Définition VII.1.2

- Soit f une fonction définie et continue sur $]-\infty,+\infty[$. On dit que l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$
est convergente si chacune des intégrales
$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ et } \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$$
est convergente. Si tel est le cas, sa valeur est par définition celle de la somme
$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$$
- Soit $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $]a,+\infty[$. On dit que l'intégrale
$$\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$$
est convergente si, en se fixant un réel $c>a$, chacune des intégrales
$$\int_{a}^{c} f(t)\,dt \text{ et } \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt$$
est convergente. Si tel est le cas, sa valeur est par définition celle de la somme
$$\int_{a}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt$$
- On définit de même une intégrale convergente pour une fonction f définie et continue sur $]-\infty,a[$.
- Soit a et b deux réels avec $-\infty\leq a<b\leq+\infty$ et f une fonction définie et continue sur $]a,b[$. On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si, en se fixant un réel $c\in]a,b[$, chacune des intégrales
$$\int_{a}^{c} f(t)\,dt \text{ et } \int_{c}^{b} f(t)\,dt$$
est convergente. Si tel est le cas, sa valeur est par définition celle de la somme
$$\int_{a}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b} f(t)\,dt$$

Exemple

Démontrer que l'intégrale $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt$ est convergente et la calculer.

- La fonction $t\mapsto\frac{e^t}{(e^t+1)^2}$ est définie et continue sur $]-\infty,+\infty[$ (le dénominateur ne s'annule pas). L'intégrale est donc impropre aux deux bornes.
- *Étude de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt$. Soit un réel $T>0$. En reconnaissant la forme $\int\frac{u'}{u}$, on a
$$\begin{aligned}\int_0^T\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt &= \left[-\frac{1}{e^t+1}\right]_0^T\\ &= -\frac{1}{e^T+1}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$
et puisque $e^T\to+\infty$ lorsque $T\to+\infty$,
$$-\frac{1}{e^T+1}+\frac{1}{2}\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt$ converge et
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt=\frac{1}{2}.$$
- *Étude de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt$. Soit un réel $T<0$. En reconnaissant la forme $\int\frac{u'}{u}$, on a
$$\begin{aligned}\int_T^0\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt &= \left[-\frac{1}{e^t+1}\right]_T^0\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{e^T+1}\end{aligned}$$
et puisque $e^T\to0$ lorsque $T\to-\infty$,
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{e^T+1} &\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}+1\\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$
Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt$ converge et
$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt=\frac{1}{2}.$$
- En définitive, I converge et
$$\begin{aligned}I &= \int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt+\int_{-\infty}^{0}\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Notations. Soit I un intervalle d'extrémités quelconque a,b avec
$$-\infty\leq a<b\leq+\infty$$
et f une fonction définie et continue sur I, à valeurs réelles ou complexes telle que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. La valeur de cette intégrale est également notée
$$\int_I f$$
ou
$$\int_I f(t)\,dt.$$

Le résultat suivant est très naturel:

Proposition VII.1.2 Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, et α, β deux scalaires. On suppose que les intégrales

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$

convergent. Alors

$$\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t$$

converge et

$$\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En conséquence, l'ensemble E des fonctions définies et continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) dont l'intégrale converge sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Démonstration. Cela résulte des définitions. Pour fixer les idées, supposons $I = [a, +\infty[$ (et donc les intégrales en jeu ne sont impropres qu'à la borne $+\infty$) et soit $T \geq a$. Alors

$$\begin{aligned}\int_a^T (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t &= \alpha \int_a^T f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^T g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad \text{(propriété classique de linéarité de l'intégrale)} \\ &\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad \text{(par hypothèse concernant les intégrales de } f \text{ et de } g \text{ et par définition).}\end{aligned}$$

Cela prouve donc la convergence de l'intégrale $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t$ et précise sa valeur.

Remarque. Ce théorème implique notamment que la multiplication d'une fonction par un scalaire non nul n'altère pas la nature de son intégrale sur I:

$$\forall \alpha \neq 0, \quad \int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

En effet, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi d'après le théorème et si $\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b \frac{1}{\alpha} \times \alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi d'après le même théorème.

Exemple. L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} -\frac{3(x+1)}{2(x^3+1)}\,\mathrm{d}x$$

est donc de même nature que

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

(qui est convergente comme on le verra plus loin).

Proposition VII.1.3 ***Relation de Chasles.*** Soit I un intervalle, $a = \inf I$, $b = \sup I$ et $c \in I$; soit f est une fonction définie et continue sur I à valeurs réelles ou complexes telle que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

(et en particulier chacune des deux intégrales de membre de droite converge).

Démonstration 2

2 Théorèmes de comparaison des fonctions ≥ 0; cas du prolongement par continuité

Le résultat suivant est surtout utile pour la démonstration des théorèmes de comparaison qui vont suivre et sera énoncé, pour fixer les idées, pour une intégrale impropre sur $[0, +\infty[$:

Proposition VII.2.4 Soit f une fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$ et à valeurs ≥ 0.

- Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si la fonction

$$F : T \mapsto \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

  est majorée sur $[0, +\infty[$.
- En cas de divergence de l'intégrale, on a $F(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Il est immédiat que la fonction F est croissante puisque d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ F'(x) = f(x) \geq 0.$$

D'après le théorème de la limite monotone, F possède une limite finie en $+\infty$, autrement dit, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, si et seulement si F est majorée sur $[0, +\infty[$. Et d'après ce même théorème, si F ne possède pas de limite finie en $+\infty$, elle tend vers $+\infty$.

La connaissance des théorèmes suivants est vitale pour l'étude d'une intégrale impropre: l'écrasante majorité de la nature d'une intégrale sera obtenue par l'un de ces théorèmes.

Théorème de comparaison par majoration

Théorème VII.2.5 Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $I = [a, b[$ (pour fixer les idées; ce théorème s'adapte à toute sorte d'intégrale impropre) à valeurs réelles *positives* et vérifiant

$$\forall t \in I, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors:

- si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente, alors il en est de même pour $\int_a^b f(t)\,dt$,
- si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente, alors il en est de même pour $\int_a^b g(t)\,dt$.

Démonstration. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Il est clair que l'on a $F(x) \leq G(x)$ pour tout $x \in I$.

- Si g possède une intégrale sur $[a, b[$, alors G est majorée d'après la proposition ci-dessus, donc F aussi. Donc f possède une intégrale sur $[a, b[$ toujours d'après cette proposition.
- Même raisonnement pour une intégrale impropre sur $]a, b]$.
- Le deuxième point du théorème est la contrapposée du premier.

Premier exemple

Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin^2 t}{t}\, dt$ est divergente.

- Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $1 + \sin^2 t \geq 1$ et donc $\frac{1+\sin^2 t}{t} \geq \frac{1}{t}$,
- les fonctions sont positives,
- l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est une intégrale divergente (c'est une référence)
- l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin^2 t}{t}\, dt$ est donc divergente d'après le théorème de comparaison par majoration des fonctions positives.

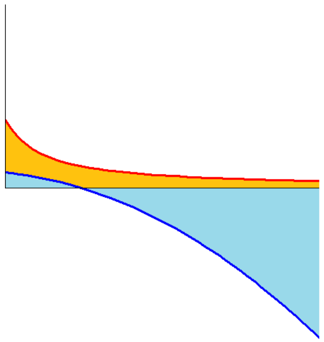
Deuxième exemple

Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{1+t} dt$ est convergente.

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $\frac{e^{-2t}}{1+t} \leq e^{-2t}$,
- les fonctions sont positives,
- l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt$ est une intégrale convergente (c'est une référence)
- l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{1+t} dt$ est donc convergente d'après le théorème de comparaison par majoration des fonctions positives.

Remarque capitale. La positivité des fonctions en jeu est indispensable dans le théorème de comparaison par majoration: *il ne s'applique pas si ces fonctins ne sont pas à valeurs* ≥ 0.

- Dans la situation ci-dessous:



- La fonction g en rouge est à valeurs ≥ 0; disons qu'elle possède une intégrale sur $[0, +\infty[$.
- La fonction f en bleu n'est pas à valeurs ≥ 0
- On a $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
- Mais f ne possède pas d'intégrale sur $[0, +\infty[$.

Théorème de comparaison par équivalence

Théorème VII.2.6 Soit f et g deux fonctions définies, continues à valeurs réelles *positives* sur un intervalle $I = [a, b[$ (pour fixer les idées; ce théorème s'adapte à toute sorte d'intégrale impropre) et vérifiant

$$f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t).$$

Alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ et } \int_a^b g(t)\, dt$$

sont de même nature: si l'une des deux converge alors l'autre aussi, si l'une des deux diverge alors l'autre aussi.

Démonstration 3

Exemple

Démontrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+1}\, dx$ est convergente.

- $\frac{x+1}{x^3+1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$,
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge (référence),
- les fonctions sont positives
- donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+1}\, dx$ converge par théorème de comparaison par équivalence.
- Il en résulte que I converge, puisque l'intégrale existe sur $[0, 1]$ en tant qu'intégrale d'une fonction parfaitement définie et continue sur un segment.

Situation de prolongement par continuité

Proposition VII.2.7 Soit $I =]a, b]$ où a est une *borne finie* et soit f une fonction continue sur $]a, b]$ et possédant une limite finie ℓ en a; autrement dit, f est prolongeable par continuité en a. Alors l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

est convergente.

En effet, la situation est ramenée à celle de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Exemple classique

L'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

est convergente. En effet, on sait que

$$\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

si bien que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

vérifie
$$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
et est prolongeable par continuité en 0. C'est pourquoi I converge, en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.

Autre exemple

L'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx$$
est convergente. En effet,

- $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est définie et continue sur $]0,1[$ donc I est impropre aux bornes 0 et 1.
- Puisque $x-1$ tend vers -1, qui est une limite non nulle, lorsque x tend vers 0, on a
$$\frac{\ln x}{x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln x}{-1} = -\ln x.$$
L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx$ étant convergente (intégrale de référence), il résulte du théorème de comparaison par équivalence que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x-1}\,dx$ converge également.
- Puisque
$$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t,$$
on a, du fait que $x-1$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1,
$$\begin{aligned} \ln x &= \ln(1+x-1) \\ &\underset{x\to 1}{\sim} x-1, \end{aligned}$$
si bien que
$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{x-1} = 1$$
et de ce fait, f est prolongeable par continuité en 1. C'est pourquoi $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx$ converge.

En définitive, I est convergente.

3 Intégrabilité et convergence absolue

Définition VII.3.3 Une fonction définie et continue f sur un intervalle I (quelconque, ce qui permet d'inclure les intégrales propres et impropres), à valeurs réelles ou complexes est dite intégrable sur I si l'intégrale
$$\int_a^b |f(t)|\,dt$$
est convergente, où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

Bien noter que l'intégrabilité concerne la valeur absolue (ou module) de la fonction en jeu.

Exemple

Démontrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t\sqrt{t}}\,dt$ étant impropre aux deux bornes, l'étude doit se faire en deux temps:
- du fait de la majoration $|\sin t| \leq |t|$ pour tout réel t, on a
$$\frac{|\sin t|}{t\sqrt{t}} \leq \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ étant convergente, on déduit du théorème de comparaison par majoration que $\int_0^1 \frac{|\sin t|}{t\sqrt{t}}\,dt$ converge.
- On a la majoration
$$\frac{|\sin t|}{t\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t\sqrt{t}}$$
et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison par majoration que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t\sqrt{t}}\,dt$ converge.
- En définitive, $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t\sqrt{t}}\,dt$ est convergente et f est bien intégrable sur $]0,+\infty[$.

Remarques:

- ne pas oublier les valeurs absolues ou les modules s'il s'agit d'une fonction à valeurs complexes,
- si la fonction f est à valeurs réelles positives sur I, les valeurs absolues ne servent à rien: l'intégrabilité sur I est synonyme de convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$,
- si I est un ***segment*** et f est ***définie et continue sur*** I, alors f est intégrable sur I puisque la fonction $t \mapsto |f(t)|$ est elle aussi définie et continue sur le segment I et possède alors évidemment une intégrale sur I.

Théorème de convergence absolue (théorème d'intégrabilité)

Le résultat ci-dessous est extrêmement important; il concerne une fonction f définie et continue sur un intervalle d'extrémités a, b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et recouvre donc tous les cas d'intégrale impropre.

Théorème VII.3.8 On suppose que $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente; ainsi,
$$\int_a^b |f(t)|\,dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \text{ converge.}$$
De plus, on a *l'inégalité triangulaire (ou de la moyenne)*:
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration 4

- On dit que "la convergence absolue de l'intégrale entraîne la convergence de l'intégrale".

• Ou encore, ce qui revient strictement au même, "l'intégrabilité sur un intervalle entraîne la convergence de l'intégrale sur cet intervalle".

Exemple typique

Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$.

- Pour tout $t \geq 1$, on a $|\sin t| \leq 1$ d'où $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$.
  Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente (c'est une intégrale de Riemann).
- Il résulte alors du théorème de comparaison par majoration que
$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\,dt$$
  est convergente.
- Ainsi, par convergence absolue, il s'ensuit que
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$
  est convergente.
- Ou encore, de la majoration $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ et du théorème de comparaison par majoration, on déduit que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Du théorème d'intégrabilité, on déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ est convergente.

Théorème de comparaison des fonctions intégrables

Les théorèmes suivants concernent deux fonctions f et g définies et continues, pour fixer les idées, sur un intervalle du type $I = [a, b[$ mais fonctionne pour tout type d'intervalle.

Théorème VII.3.9

- Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $I = [a, b[$ et à valeurs réelles ou complexes.
- On suppose que g est intégrable sur I, c'est à dire que $\displaystyle\int_a^b |g(t)|\,dt$ converge.

Cette hypothèse est en particulier satisfaite lorsque g est à valeurs réelles ≥ 0 et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge.

- On suppose enfin que
$$f(t) \underset{t \to b}{=} \mathcal{O}(g(t)).$$
- Alors f est intégrable sur I et en particulier, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Rappel: $f(t) \underset{t \to b}{=} \mathcal{O}(g(t))$ signifie que le rapport $\frac{f(t)}{g(t)}$ est borné au voisinage de t. Par exemple,
$$t \sin t \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}(t)$$
puisque
$$\left|\frac{t \sin t}{t}\right| = |\sin t| \leq 1.$$

Démonstration 5

Dans la pratique, on utilisera surtout le théorème suivant:

Théorème VII.3.10

- Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $I = [a, b[$ et à valeurs réelles ou complexes.
- On suppose que g est intégrable sur I, c'est à dire que $\displaystyle\int_a^b |g(t)|\,dt$ converge.

Cette hypothèse est en particulier satisfaite lorsque g est à valeurs réelles ≥ 0 et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge.

- On suppose enfin que
$$f(t) \underset{t \to b}{=} o(g(t)).$$
- Alors f est intégrable sur I et en particulier, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Démonstration 6 ***Remarque.*** On notera que ce résultat est en particulier vrai lorsque g est à valeurs réelles

Exemple typique

On considère l'intégrale impropre $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$. Démontrer que $\dfrac{\ln t}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ et en déduire que J converge.

- On a
$$\frac{\ln t}{1+t^2} \times t^{\frac{3}{2}} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2} \times t^{\frac{3}{2}} = \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par croissance comparée.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de référence).
- Il résulte alors du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables que J converge.

Deuxième exemple typique

On considère l'intégrale impropre $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,dt$. Démontrer que $t^3 e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et en déduire que J converge.

- On a
$$\frac{t^3 e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^5 e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par croissance comparée.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de référence).
- Il résulte alors du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^3 e^{-t}\,dt$ converge.

- Et enfin J converge car l'intégrale existe sur $[0,1]$ en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.

Troisième exemple typique

On considère l'intégrale impropre $J = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$. Démontrer que $\frac{\ln t}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)$ et en déduire que J converge.

- On a
$$\frac{\frac{\ln t}{\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}} = t^{\frac{3}{4}}\frac{\ln t}{\sqrt{t}} = t^{\frac{1}{4}}\ln t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$
par croissance comparée.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de référence).
- Il résulte alors du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables que $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ converge.

Le résultat suivant est immédiat, c'est la synthèse des théorèmes de comparaison pour les fonctions à valeurs ≥ 0 et le théorème de convergence absolue:

Théorème VII.3.11 ***Théorèmes de comparaison par majoration et par équivalence des fonctions intégrables.***

- Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $I = [a, b[$ et à valeurs réelles ou complexes.
- On suppose que g est intégrable sur I, c'est à dire que $\int_a^b |g(t)|\,dt$ converge.
  - *Comparaison par majoration.* On suppose que
  $$\forall t \in I,\ |f(t)| \leq |g(t)|.$$
  Alors f est intégrable sur I et en particulier, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
  - *Comparaison par équivalence.* On suppose que
  $$|f(t)| \underset{t\to b}{\sim} |g(t)|.$$
  Alors f est intégrable sur I et en particulier, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Théorème VII.3.12 ***Espace vectoriel des fonctions intégrables.*** Soit I un intervalle et $L_1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les fonctions définies, continues et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Alors, muni des opérations usuelles sur les fonctions, $L_1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration 7

Proposition VII.3.13 Soit f est une fonction définie et continue et intégrable sur I à valeurs réelles positives ou nulles telle que $\int_I f(t)\,dt = 0$. Alors f est identiquement nulle sur I.

Démonstration 8

4 Techniques de calcul

L'objectif de cette section est de passer en revue les différentes techniques de calcul effectif de la valeur d'une intégrale généralisée.

4.1 Par primitivation directe

Dans les situations où l'on reconnaît une forme classique (dite de "primitivation à vue"), on se ramènera soigneusement à la définition (cf. "Définitions fondamentales"): pour calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$:

- on calcule $\int_0^X f(t)\,dt$,
- on calcule la limite du résultat obtenu lorsque X tend vers $+\infty$,
- $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est la valeur de cette limite.

Premier exemple, typique

Prouver la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^3}\,dt$ et la calculer.

- I n'est impropre qu'à la borne $+\infty$ et
$$\frac{1}{(t+1)^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}.$$
Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge, il résulte du théorème de comparaison que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^3} dt$ converge
- et puisque $\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^3}\,dt$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment, I existe.
- Soit $X \geq 0$; une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(t+1)^3}$ étant $t \mapsto -\frac{1}{2(t+1)^2}$, on a
$$\int_0^X \frac{1}{(t+1)^3}\,dt = \left[-\frac{1}{2(t+1)^2}\right]_0^X = \frac{1}{2} - \frac{1}{(X+1)^2}$$
et de façon évidente,
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{(X+1)^2} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
- En conclusion, $I = \frac{1}{2}$.

Deuxième exemple

On considère l'intégrale impropre
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt.$$
Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $F(x)$ converge et calculer $F(x)$ en passant par les nombres complexes.

- On a $\sin t = \mathrm{Im}\,(e^{it})$ et donc
$$e^{-xt}\sin t = \mathrm{Im}\,\left(e^{-xt}e^{it}\right) = \mathrm{Im}\,\left(e^{(i-x)t}\right).$$
- Pour $T > 0$, posons
$$I(T) = \int_0^T e^{-xt}\sin t\, dt.$$
Alors
$$I(T) = \mathrm{Im}\,\left(\int_0^T e^{(i-x)t}\, dt\right)$$
et puisque pour tout nombre complexe $\alpha \neq 0$, une primitive de $t \mapsto e^{\alpha t}$ est $t \mapsto \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$, on a
$$\begin{aligned}
I(T) &= \mathrm{Im}\,\left(\int_0^T e^{(i-x)t}\, dt\right)\\
&= \mathrm{Im}\,\left(\left[\frac{1}{i-x}e^{(i-x)t}\right]_0^T\right)\\
&= \mathrm{Im}\,\left(\frac{e^{(i-x)T}-1}{i-x}\right)\\
&= \mathrm{Im}\,\left(\frac{-i-x}{1+x^2}(e^{(i-x)T}-1)\right) \quad \text{(mult. par la quantité conjuguée)}\\
&= \mathrm{Im}\,\left(\frac{-i-x}{1+x^2}e^{(i-x)T} + \frac{i+x}{1+x^2}\right)\\
&= \mathrm{Im}\,\left(\frac{-i-x}{1+x^2}e^{(i-x)T}\right) + \mathrm{Im}\,\left(\frac{i+x}{1+x^2}\right)\\
&= \mathrm{Im}\,\left(\frac{-i-x}{1+x^2}e^{-xT}e^{iT}\right) + \frac{1}{1+x^2}\\
&= e^{-xT}\mathrm{Im}\,\left(\frac{-i-x}{1+x^2}e^{iT}\right) + \frac{1}{1+x^2}\\
&= e^{-xT}\mathrm{Im}\,\left(\frac{-i-x}{1+x^2}(\cos T + i\sin T)\right) + \frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{-e^{-xT}(x\sin T + \cos T)}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$
- On prépare le passage à la limite:
$$\forall T > 0, \quad \left|e^{-xT}\cos T\right| \leq e^{-xT}$$
et puisque $x > 0$,
$$e^{-xT} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
si bien que
$$\left|e^{-xT}\cos T\right| \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
et en conséquence,
$$e^{-xT}\cos T \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ensuite,
$$\forall T > 0, \quad \left|xe^{-xT}\sin T\right| \leq xe^{-xT}$$
et puisque $x > 0$, on sait par croissance comparée que
$$xe^{-xT} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
si bien que
$$\left|xe^{-xT}\sin T\right| \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
et en conséquence,
$$xe^{-xT}\sin T \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Il en résulte
$$I(t) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x^2}.$$
- En conclusion,
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\, dt$$
est par définition convergente et
$$\begin{aligned}
F(x) &= \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-xt}\sin t\, dt\\
&= \lim_{T\to+\infty} I(T)\\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

4.2 Formule d'intégration par parties

Formule d'intégration par parties pour les intégrales impropres

Le résultat ci-dessous concerne deux fonctions u, v définies et de classe C^1 sur un intervalle d'extrémités a, b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et recouvre donc tous les cas d'intégrale impropre.

Théorème VII.4.14 On suppose que

- $u(t)v(t)$ possède une limite finie ℓ lorsque t tend vers b,
- $u(t)v(t)$ possède une limite finie ℓ' lorsque t tend vers a.
- Ainsi, le "crochet" $[u(t)v(t)]_a^b$ existe et vaut alors $\ell - \ell'$.
- L'intégrale $I = \int_a^b u(t)v'(t)\, dt$ est alors de même nature que $J = \int_a^b u'(t)v(t)\, dt$
- et en cas de convergence,
$$\int_a^b u(t)v'(t)\, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\, dt.$$

Démonstration. Fixons $c \in\,]a, b[$; s'agissant d'étudier l'existence de $I = \int_a^b u(t)v'(t)$, il est question, par définition, d'étudier l'existence des intégrales $I_1 = \int_c^b u(t)v'(t)$ et $I_2 = \int_a^c u(t)v'(t)$ et donc d'étudier l'existence d'une limite finie lorsque X tend vers b à la fonction
$$F : X \mapsto \int_c^X u(t)v'(t)\, dt$$
et d'une limite finie lorsque Y tend vers a à la fonction
$$G : Y \mapsto \int_Y^c u(t)v'(t)\, dt$$

Le réel $X > c$ étant donné, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} F(X) &= [u(t)v(t)]_c^X - \int_c^X u'(t)v(t)\,dt \\ &= u(X)v(X) - u(c)v(c) - \int_c^X u'(t)v(t)\,dt. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Par hypothèse,

$$u(X)v(X) - u(c)v(c) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - u(c)v(c)$$

si bien que $F(X)$ possède une limite lorsque X tend vers b, c'est à dire I_1 est convergente, si et seulement si $\int_c^X u'(t)v(t)\,dt$ possède une limite lorsque X tend vers b c'est à dire si et seulement si , par définition, l'intégrale $I_3 = \int_c^b u'(t)v(t)\,dt$ est convergente; de plus, lorsque ces intégrales convergent, le passage à la limite lorsque X tend vers b dans (4.1) donne

$$\int_c^b u(t)v'(t)\,dt = \ell - u(c)v(c) - \int_c^b u'(t)v(t)\,dt.$$

De la même manière, I_2 est convergente si et seulement si l'intégrale $I_4 = \int_a^c u'(t)v(t)\,dt$ est convergente et lorsque ces intégrales convergent,

$$\int_a^c u(t)v'(t)\,dt = u(c)v(c) - \ell' - \int_a^c u'(t)v(t)\,dt.$$

En résumé, I converge si et seulement si I_1 et I_2 convergent, puis I_1 et I_2 convergent si et seulement si $I_3 = \int_c^b u'(t)v(t)\,dt$ et $I_4 = \int_a^c u'(t)v(t)\,dt$ convergent, donc si et seulement si J converge et en cas de convergence, on a

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \ell - u(c)v(c) - \int_c^b u'(t)v(t)\,dt + u(c)v(c) - \ell' - \int_a^c u'(t)v(t)\,dt \\ &= \ell - \ell' - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarques.

- *Pour appliquer ce théorème, on veillera bien à justifier l'existence du crochet, i.e. l'existence de limites finies en b et en a.*
- dans le cas d'une intégrale impropre seulement à une borne, par exemple b, il faudra évidemment juste supposer l'existence d'une limite finie en b à $u(t)v(t)$.

Premier exemple typique

Prouver que $I = \int_0^{+\infty} te^{-2t}\,dt$ existe et la calculer.

- On pose $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-2t}$

$$\Longrightarrow u'(t) = 1, \quad v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}.$$

- Par croissance comparée:

$$\begin{aligned} u(t)v(t) &= -\frac{1}{2}te^{-2t} \\ &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

Donc $[uv]_0^{+\infty}$ existe (et vaut 0) et alors $\int_0^{+\infty} te^{-2t}\,dt$ et $-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt$ sont de même nature.

- Or $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt$ converge (référence), donc I converge et

$$\begin{aligned} I &= [uv]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt. \end{aligned}$$

- On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^X e^{-2t}\,dt &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^X \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2X}\right) \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc par définition

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}$$

et en conclusion:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Deuxième exemple typique

On considère l'intégrale impropre

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin t\,dt.$$

Démontrer que pour tout réel $\alpha > 0$, I_α converge et calculer I_α à l'aide de deux intégrations par parties.

- Soit $\alpha > 0$. On a

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \left|e^{-\alpha t}\sin t\right| \le e^{-\alpha t}.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge (intégrale de référence), il résulte du théorème de comparaison par majoration et du théorème de convergence absolue (ou théorème d'intégrabilité) que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin t\,dt$ est convergente.

- Posons $f(t) = \sin t$ et $g'(t) = e^{-\alpha t}$; alors

$$f'(t) = \cos t, \quad g(t) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)g(t) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin t = 0$$

(produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle) si bien que

$$[fg]_0^{+\infty} = -f(0)g(0) = 0$$

i.e. le crochet $[fg]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.

- La formule d'intégration par parties $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$ donne alors

$$I_\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos t\,dt.$$

- On effectue une autre intégration par parties: on pose $f(t) = \cos t$ et $g'(t) = e^{-\alpha t}$; alors

$$f'(t) = -\sin t, \quad g(t) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)g(t) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos t = 0$$

(produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle) si bien que

$$[fg]_0^{+\infty} = -f(0)g(0) = \frac{1}{\alpha}$$

i.e. le crochet $[fg]_0^{+\infty}$ existe et vaut 0.

- La formule d'intégration par parties $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$ donne alors

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin t\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}I_\alpha\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}I_\alpha \\ \left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)I_\alpha &= \frac{1}{\alpha^2} \\ I_\alpha &= \frac{1}{1+\alpha^2}. \end{aligned}$$

Troisième exemple typique

Démontrons à l'aide de la formule d'intégration par parties pour les intégrales impropres que l'intégrale

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

est convergente. Remarquons que J n'est impropre qu'à la borne $+\infty$: l'existence d'une limite au crochet ne concernera donc que cette borne.

- On pose $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$.
- Alors $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $v(t) = -\cos t$.
- Puisque $\cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{1}{t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$,

$$u(t)v(t) = -\frac{\cos t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Ainsi, le crochet $[uv]_1^{+\infty}$ existe et vaut $0 - u(1)v(1)$, c'est à dire $\cos 1$.
- De la formule d'intégration par parties pour les intégrales impropres, on déduit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \quad \text{et} \quad -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

sont de même nature.

- Or,

$$\forall t \in [1, +\infty[\,, \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$$

et puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (Riemann), il résulte

  - du théorème de comparaison des fonctions positives que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ converge
  - et du théorème de convergence absolue que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ converge.

- Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ converge et c'est pourquoi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

Intégration par parties à l'ancienne

On se ramène à la définition de la valeur d'une intégrale impropre.

Premier exemple

On reprend le calcul de $I = \int_0^{+\infty} te^{-2t}\,dt$.

- Se ramener à la définition, c'est considérer

$$F : x \mapsto \int_0^x te^{-2t}\,dt$$

et démontrer que $F(x)$ possède une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$.

- On pose $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-2t}$

$$\Longrightarrow u'(t) = 1, \quad v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}\left[e^{-2t}\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- On a

$$e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et par croissance comparée:

$$\frac{1}{2}xe^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en conclut

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

ce qui signifie, par définition, que I existe et vaut $\frac{1}{4}$.

Deuxième exemple

On considère à nouveau l'intégrale impropre

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin t\,dt.$$

Démontrer que pour tout réel $\alpha > 0$, I_α converge et calculer I_α à l'aide de deux intégrations par parties .

- On se ramène à la définition d'une intégrale convergente en posant

$$F(x) = \int_0^{x} e^{-\alpha t}\sin t\,dt$$

et on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \sin t$ et $v'(t) = e^{-\alpha t}$. Alors

$$u'(t) = \cos t, \quad v(t) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$$

puis

$$F(x) = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin t\right]_0^x + \frac{1}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}\cos t\,dt.$$

- On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = \cos t$ et $v'(t) = e^{-\alpha t}$. Alors

$$u'(t) = -\sin t, \quad v(t) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$$

puis

$$\begin{aligned}
F(x) &= \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin t\right]_0^x + \frac{1}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}\cos t\,dt \\
&= \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin t\right]_0^x + \frac{1}{\alpha}\left(\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\cos t\right]_0^x - \frac{1}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}\alpha int\,dt\right) \\
&= -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\left(\sin x + \frac{1}{\alpha}\cos x\right) + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}F(x).
\end{aligned}$$

- On a donc

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)F(x) &= -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\left(\sin x + \frac{1}{\alpha}\cos x\right) + \frac{1}{\alpha^2} \\
\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}G(x) &= -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\left(\sin x + \frac{1}{\alpha}\cos x\right) + \frac{1}{\alpha^2} \\
F(x) &= \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\left(\sin x + \frac{1}{\alpha}\cos x\right) + \frac{1}{\alpha^2}\right) \\
&= \frac{-e^{-\alpha x}(\alpha\sin x + \cos x) + 1}{1+\alpha^2}
\end{aligned}$$

- On prépare le passage à la limite:

$$\forall x > 0, \quad \left|e^{-\alpha x}\cos x\right| \le e^{-\alpha x}$$

et puisque $\alpha > 0$,

$$e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

si bien que

$$\left|e^{-\alpha x}\sin x\right| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle) et en conséquence,

$$e^{-\alpha x}\sin x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ensuite,

$$\forall x > 0, \quad \left|\alpha e^{-\alpha x}\sin x\right| \le \alpha e^{-\alpha x}$$

et puisque $\alpha > 0$, on sait par croissance comparée que

$$\alpha e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

si bien que

$$\left|\alpha e^{-\alpha x}\cos x\right| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et en conséquence,

$$\alpha e^{-\alpha x}\cos x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle). Il en résulte

$$\frac{-e^{-\alpha x}(\alpha\sin x + \cos x) + 1}{1+\alpha^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Par définition d'une intégrale convergente et de la valeur d'une telle intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin t\,dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin t\,dt = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

4.3 Formule de changement de variable

La formule officielle concerne dans un premier temps un changement de variable strictement croissant; étant un peu abstraite, on lira attentivement les remarques ci-dessous ainsi que les exemples.

Théorème VII.4.15

- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle J d'extrémités quelconques a et b, avec $-\infty \le a < b \le +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$,
- soit φ une application définie et de classe C^1 sur un intervalle J' d'extrémités quelconques α et β, avec $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, strictement *croissante* et réalisant une bijection de J' sur J.
- Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques.

- Le programme officiel stipule sans ambiguïté que l'on appliquera ce résultat sans vérifier les hypothèses dans les cas de changements de variable usuels; on reste alors très proche de la formule de changement de variable pour les intégrales non impropres.
- Ainsi, comme dans l'exemple ci-dessous, on pourra utiliser cette formule en rédigeant ainsi: "le changement de variable $u = \varphi(t)$ donne $du = \ldots$ et transforme l'intégrale I en l'intégrale $J \ldots$" et en gérant convenablement les bornes.

Premier exemple

Établir la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}\,dt$$

puis calculer I en effectuant le changement de variable $u = e^t$.

- Le changement de variable $u = e^t$ donne
$$du = e^t\,dt$$
d'où
$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{e^t}du \\ &= \frac{1}{u}\,du. \end{aligned}$$
Lorsque $t = 0$, on a
$$\begin{aligned} u &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} u &= e^t \\ &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$
si bien que ce changement transforme I en
$$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\,du$$
et en cas de convergence, ces intégrales sont égales.
- Or
$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{1}{(u+1)^2}\,du &= \left[-\frac{1}{u+1}\right]_1^X \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{X+1} \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$
si bien que, par définition, J converge et vaut $\frac{1}{2}$.
- Ainsi, I converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Deuxième exemple

Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente. En déduire que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-au^2}\,du$ est convergente et exprimer $J(a)$ en fonction de I et a.

- Pour la convergence I, on peut procéder ainsi:
  - Pour tout $t \geq 1$, on a
  $$t^2 \geq t$$
  et en conséquence
  $$-t^2 \leq -t$$
  puis
  $$0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}.$$
  - Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente (référence). Il résulte alors du théorème de comparaison par majoration que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est également convergente.
  - Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ existe puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.
  - On en déduit que I existe.
- Pour le lien entre $J(a)$ et I,
  - on observe que
  $$au^2 = \left(\sqrt{a}\,u\right)^2,$$
  ce qui incite à effectuer le changement de variable
  $$t = \sqrt{a}\,u,$$
  qui donne
  $$dt = \sqrt{a}\,du$$
  d'où
  $$\begin{aligned} e^{-au^2}\,du &= e^{-(\sqrt{a}\,u)^2}\,du \\ &= e^{-t^2}\,\frac{1}{\sqrt{a}}\,dt. \end{aligned}$$
  - Lorsque $u = 0$, on a
  $$\begin{aligned} t &= \sqrt{a} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
  et
  $$\begin{aligned} t &= \sqrt{a}u \\ &\underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$
  si bien que ce changement transforme $J(a)$ en
  $$\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$
  c'est à dire en $\dfrac{1}{\sqrt{a}}I$ et en cas de convergence, ces intégrales sont égales.
  - Puisque I existe, on en déduit que $J(a)$ existe et que
  $$J(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}I.$$

Troisième exemple

Cet exemple utilise un changement de variable décroissant; rien de spécial à signaler, si ce n'est qu'on procédera naturellement à un renversement de bornes.

Établir la convergence et déterminer la valeur de
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$
à l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{t}$.

- On calcule
$$dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\,\frac{1}{t^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\,dt\\ &= -\frac{1}{\sqrt{t^2\left(\frac{1}{t^2}-1\right)}}\,dt\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.\end{aligned}$$

- Lorsque $x=1$, on a

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{x}\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

- Ce changement de variable transforme donc I en

$$J=\int_1^0 -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

c'est à dire en

$$J=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

et en cas de convergence, ces intégrales sont égales.

- En se ramenant à la définition de l'étude d'une intégrale impropre, pour $a\in\,]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t &= [\arcsin t]_0^a\\ &= \arcsin a\\ &\underset{a\to 1}{\longrightarrow} \arcsin 1\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ce qui prouve que J existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

- Pour toutes ces raisons, I est convergente et $I=\frac{\pi}{2}$.

À réserver à une seconde lecture: exemple d'application formelle de ce théorème

Établir la convergence et déterminer la valeur de

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

à l'aide du changement de variable $x=\sqrt{t^2+1}$.

- On considère donc

$$\varphi: t\mapsto \sqrt{t^2+1}.$$

- L'application φ est de classe C^1 sur $J'=\,]0,+\infty[$ avec

$$\varphi'(t)=\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}>0$$

et établit alors une bijection strictement croissante de $J'=\,]0,+\infty[$ sur

$$\begin{aligned}\left]\lim_{t\to 0}\varphi(t),\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)\right[&=]1,+\infty[\\ &= J.\end{aligned}$$

- Notons

$$f: x\mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} f(\varphi(t))\varphi'(t) &= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}\times t}\times\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\\ &= \frac{1}{t^2+1},\end{aligned}$$

le théorème de changement de variable pour les intégrales impropres dans le cas d'un changement de variable croissant affirme que les intégrales $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ et $I'=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

- Or il est archi-classique que I' est convergente, puisqu'en se ramenant à la définition,

$$\begin{aligned}\int_0^T\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= [\arctan t]_0^T\\ &= \arctan T\\ &\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et donc $I'=\frac{\pi}{2}$.

- Pour toutes ces raisons, I est convergente et $I=\frac{\pi}{2}$.

5 Pour résumer: stratégie d'attaque de l'étude d'une intégrale impropre

Dans les questions comme "déterminer la nature de telle intégrale", il est attendu le développement d'arguments (et alors une rédaction précise s'impose, citant les exemples de référence, les théorèmes de comparaison...) permettant d'affirmer que l'intégrale en jeu est convergente ou divergente. Le plan d'attaque est généralement le suivant:

- Commencer par repérer si l'intégrale est impropre seulement à une borne ou aux deux bornes; dans ce derniers cas, bien séparer les études.

- Ne jamais perdre de vue qu'une fonction définie et continue sur un segment possède toujours une intégrale sur ce segment; la question de la convergence est alors triviale: il suffit de dire *"l'intégrale existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment*.

Si les fonctions en jeu sont positives (ou négatives, mais en tout cas de signe constant au voisinage de la borne étudiée) toujours essayer de produire un équivalent (que l'on obtiendra le plus souvent à l'aide d'un développement limité), ce qui fournira typiquement un équivalent à une puissance de la variable:

- le théorème de comparaison par équivalence avec une intégrale de Riemann fournira rapidement la nature de l'intégrale;
- un équivalent peut aussi révéler un phénomène de prolongement par continuité.

- Toujours en présence de fonctions positives, tenter une majoration (dans le but de prouver une convergence) ou une minoration (dans le but de prouver une divergence) lorsque l'on ne peut pas fournir d'équivalent.
- Dans l'impossibilité de fournir un équivalent ou lorsqu'aucun majoration ou minoration n'est apparente, tenter une comparaison en $o(\ldots)$ (théorème de comparaison pour les fonctions intégrables); c'est une situation classique en présence de $\ln t$ aussi bien en 0 qu'en $+\infty$ et en présence de e^{-t} en $+\infty$. Cette méthode est souvent suggérée par l'énoncé.
- En présence d'une fonction changeant constamment de signe, typiquement $\sin t$ et $\cos t$ au voisinage de $+\infty$, penser à majorer *en valeur absolue*, ce qui prépare alors le terrain à une application du théorème "l'intégrabilité entraîne la convergence de l'intégrale". Cette méthode s'applique bien entendu à une fonction à valeurs complexes, typiquement en présence de e^{it}.

Chapitre VIII

Algèbre linéaire (première année)

1 Familles de vecteurs, sous-espaces, bases de sous-espaces, égalité de sous-espaces

Espaces vectoriels classiques.

Pour simplifier, on parle de structure d'espace vectoriel sur un ensemble dès lors que l'on peut effectuer des combinaisons avec ses éléments: somme et multiplication par un scalaire, comme entre fonctions, entre polynômes, entre suites, entre couples (de $\mathbb{R}^2$), triplets (de $\mathbb{R}^3$), n-uplets (de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$). Les espaces vectoriels classiques sont:

- l'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ de toutes les fonctions définies et continues sur un intervalle I; le vecteur nul est la fonction nulle,
- l'ensemble $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ de toutes les fonctions définies et de classe C^1 sur I,
- l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ de toutes les fonctions définies et de classe C^∞ sur I (utilisé lorsque l'on veut parler de dérivées successives),
- l'ensemble de tous les polynômes sans restriction sur les degrés: $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$; le vecteur nul est le polynôme nul,
- l'ensemble de tous les polynômes ne dépassant pas un certain degré: $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{C}_n[X]$ où n est un entier donné:
$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg(P) \leq n\}$$
(définition analogue pour $C_n[X]$)
- l'ensemble de toutes les suites réelles (ou l'ensemble de toutes les suites complexes); le vecteur nul est la suite constante nulle,
- l'ensemble de toutes les fonctions de deux variables définies sur un domaine donné et à valeurs réelles ,
- et bien entendu les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.

Familles de vecteurs

On considère un espace vectoriel E.

Définition VIII.1.1 ***Famille libre.*** Une famille $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m)$ de vecteurs de E est libre lorsque l'égalité $\alpha_1\vec{x}_1+\ldots+\alpha_m\vec{x}_m=\vec{0}$, où $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ sont des scalaires, entraîne: $\alpha_1=0,\ldots,\alpha_m=0$.

Remarques. La définition ci-dessous est la définition formelle. Dans la pratique:

- Une autre approche pour prouver la liberté, facile à mettre en œuvre dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$, consiste à démontrer que cette famille est de rang m (en appliquant par exemple la méthode du pivot, cf. paragraphe suivant).
- Ou par le calcul d'un déterminant (cf. chapitre suivant).

Théorème VIII.1.1 ***Liberté d'une famille échelonnée de polynômes.*** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$), toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre i.e. une famille de polynômes $(P_1,\ldots,P_N)$ telle que
$$0 \leq \deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_N)$$
est libre.

Démonstration 9

Définition VIII.1.2 ***Famille génératrice.*** Une famille $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m)$ de vecteurs de E est dite génératrice si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m)$.

Définition VIII.1.3 ***Base.*** Une famille $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ de vecteurs de E est une base de E si cette famille est à la fois libre et génératrice.

Dans la pratique, on met souvent en œuvre un des critères ci-dessous (théorie de la dimension), pour démontrer qu'une famille donnée est une base ou par application de la théorie des déterminants (cf. chapitre ultérieur).

Théorème VIII.1.2 ***Composantes dans une base.*** Supposons que $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ soit une base de E.

- Tout vecteur $\vec{x}$ de E peut alors s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$:
$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n.$$
- Les scalaires $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de cette combinaison sont appelés composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque. "Unique" signifie que si $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ sont des scalaires tels que $\vec{x}=\mu_1\vec{e}_1+\ldots+\mu_n\vec{e}_n$, alors $\mu_1=\lambda_1$,. . . ,$\mu_n=\lambda_n$.

Définition VIII.1.4 ***La base canonique*** de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) est constituée des vecteurs
$$(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1).$$
La base canonique de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) est souvent notée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (resp. $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$).

Théorème VIII.1.3 ***Théorie de la dimension.*** L'espace E est de dimension finie lorsqu'il possède (au moins) une base (constituée d'un nombre fini de vecteurs de E). Toute base de E possède alors le même nombre d'éléments. Ce nombre commun est appelé dimension de E.

Théorème VIII.1.4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E (donc comportant n éléments). Pour démontrer que cette famille est une base, on pourra, suivant les circonstances, utiliser l'un des critères fondamentaux suivants:

- la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si elle est libre;
- la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si son déterminant (calculé dans une base quelconque) est non nul;
- la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si son rang vaut n (le rang peut être calculé avec la méthode du pivot de Gauß);
- la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si elle est génératrice.

Exemples fondamentaux

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 puisque la base canonique $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ comporte 3 vecteurs.
- Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n puisque la base canonique $((1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ comporte n vecteurs.
- Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est de dimension n puisque la base canonique $((1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ comporte n vecteurs.
- En particulier l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est de dimension 1.
- Pour tout entier $n \geq 0$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ (resp. $\mathbb{C}_n[X]$) est de dimension $n+1$ puisque la base $(1, X, \dots, X^n)$ comporte $n+1$ vecteurs.
- Quel que soit l'espace vectoriel E, on adopte la convention suivante: le sous-espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est de dimension 0.

Sous-espaces; bases de sous-espaces

Définition d'un sous-espace vectoriel.

Définition VIII.1.5 Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel lorsque les deux critères suivants (qu'il faudra donc vérifier dans la pratique) sont vérifiés:

- le vecteur nul appartient à F,
- F est stable par combinaison linéaire, c'est à dire: pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs de F et tout couple (a,b) de scalaires, $a\vec{u} + b\vec{v} \in F$.

Souvent, l'appartenance d'un vecteur à F se traduit par un "test", typiquement la nullité d'une quantité liée à ce vecteur; il faudra alors démontrer dans la pratique que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ "passent ce test avec succès", alors $a\vec{u} + b\vec{v}$ aussi.

Premier exemple

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Démontrer que

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 2x - 3y = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- Il est clair que $\vec{0} = (0,0) \in F$.
- Soit $\vec{u} = (x,y) \in F$ et $\vec{v} = (x', y') \in F$ et (a,b) des scalaires. On a

  $$a\vec{u} + b\vec{v} = (ax + bx', ay + by')$$

  et alors

  $$\begin{aligned} 2(ax+bx') - 3(ay+by') &= a(2x-3y) + b(2x'-3y') \\ &= a \times \underbrace{0}_{\vec{u} \in F} + b \times \underbrace{0}_{\vec{v} \in F} = 0, \end{aligned}$$

  ce qui démontre que $a\vec{u} + b\vec{v} \in F$.
- Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Deuxième exemple

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels. Démontrer que

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; P'(1) + 2P(0) = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- Il est clair que le polynôme nul appartient à F.
- Soit $P_1 \in F$ et $P_2 \in F$ et (a,b) des scalaires. Alors

  $$\begin{aligned} (aP_1 + bP_2)'(1) + 2(aP_1 + bP_2)(0) &= a({P_1}'(1) + 2P_1(0)) + b({P_2}'(1) + 2{P_2}'(0)) \\ &= a \times \underbrace{0}_{P_1 \in F} + b \times \underbrace{0}_{P_2 \in F} = 0, \end{aligned}$$

  ce qui démontre que $aP_1 + bP_2 \in F$.
- Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Définition VIII.1.6 ***Droite vectorielle.*** Dans un espace vectoriel E de dimension n, c'est un sous-espace vectoriel D de dimension 1.
Un vecteur $\vec{v}$ non nul de E étant donné, la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{v}$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{v})$.

Définition VIII.1.7 ***Hyperplan.*** Dans un espace vectoriel E de dimension n, c'est un sous-espace vectoriel H de dimension $n-1$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, démontrer que

$$H = \{\vec{u} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x + y - 2z + 2t = 0\}$$

est un hyperplan.

On cherche donc à prouver que H est de dimension 3 et donc à exhiber une base de H constituée de 3 vecteurs.

Soit $\vec{u} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$; alors

$$\begin{aligned} \vec{u} \in H &\iff x+y-2z+2t=0 \iff x=-y+2z-2t \\ &\iff \vec{u} = (-y+2z-2t, y, z, t) \\ &\iff \vec{u} = y(-1,1,0,0)+z(2,0,1,0)+t(-2,0,0,1) \\ &\iff \vec{u} \in \operatorname{Vect}\big((-1,1,0,0),(2,0,1,0),(-2,0,0,1)\big). \end{aligned}$$

Ainsi, $\big((-1,1,0,0),(2,0,1,0),(-2,0,0,1)\big)$ est une famille génératrice de H et puisque

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est échelonnée à 3 pivots, cette famille est libre et c'est donc une base de H.

En conclusion, $\mathcal{B} = \big((-1,1,0,0),(2,0,1,0),(-2,0,0,1)\big)$ est une base de H, qui est alors de dimension 3 et donc un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

Inclusion de sous-espaces

Proposition VIII.1.5 Soit F et G deux sous-espaces d'un espace E et $(e_1,\ldots,e_r)$ une base de F. Pour démontrer que $F \subset G$, il suffit de démontrer que $e_1 \in G, \ldots, e_r \in G$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous espaces

$$F = \operatorname{Vect}\big((1,1,-3,1),(1,0,0,-1)\big), \quad G = \big\{\vec{u}=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+y+z+t=0\big\}.$$

Démontrer que $F \subset G$.

- Une base de F est $\big((1,1,-3,1),(1,0,0,-1)\big)$ puisque c'est une famille génératrice de F et manifestement libre.
- Il est clair que
$$(1,1,-3,1) \in G, \quad (1,0,0,-1) \in G.$$
- Chacun des vecteurs d'une base de F appartenant à G, on en conclut que $F \subset G$.

Égalité de sous-espaces

Théorème VIII.1.6 Pour démontrer que deux sous-espaces F et G sont égaux en dimension finie, il suffit de démontrer que $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous espaces

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Vect}\big((1,0,0,-1),(0,1,2,-3)\big) \\ G &= \big\{\vec{u}=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+y+z+t=0,\ x-y+2z+t=0\big\}. \end{aligned}$$

Démontrer que $F = G$.

- Une base de F est $\big((1,0,0,-1),(0,1,2,-3)\big)$ puisque c'est une famille génératrice de F et manifestement libre. On en déduit $\dim F = 2$.
- Il est immédiat que
$$(1,0,0,1) \in G, \quad (0,1,2,-3) \in G.$$
- Chacun des vecteurs d'une base de F appartenant à G, on en déduit que $F \subset G$.
- Déterminons la dimension de G en déterminant une base de G:
$$\vec{u}=(x,y,z,t) \in G \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+2z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=-z-t \\ x-y=-2z-t \end{cases}$$
et en effectuant L_1+L_2 et L_1-L_2, on obtient
$$\begin{cases} x=-\frac{3}{2}z-t \\ y=\frac{1}{2}z \end{cases}$$
si bien que
$$\begin{aligned} \vec{u} \in G &\iff \vec{u} = \left(-\frac{3}{2}z-t, \frac{1}{2}z, z, t\right) = z\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + t\,(-1,0,0,1) \\ &\iff \vec{u} \in \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right), (-1,0,0,1)\right). \end{aligned}$$
Ainsi, $\big((-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1,0),(-1,0,0,1)\big)$ est une famille génératrice de G et puisqu'il est clair que cette famille est libre, c'est une base de G, qui est donc de dimension 2.
- En conclusion,
$$\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases}$$
et c'est pourquoi $F = G$.

2 Obtention d'une base d'un sous-espace défini par des contraintes

Le principe général est le suivant: traduire les contraintes d'appartenance en exprimant certaines composantes d'un vecteur en fonction des autres.

Premier exemple

Déterminer une base du sous-espace F de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs $\vec{v}=(x,y,z)$ tels que $x+2y-3z=0$.

- On a
$$\vec{v}=(x,y,z) \in F \iff x+2y-3z=0 \iff x=-2y+3z$$
donc $\vec{v} \in F$ si et seulement si $\vec{v}=(-2y+3z,y,z)$, donc si et seulement si
$$\begin{aligned} \vec{v} &= y(-2,1,0)+z(3,0,1) \\ \iff \vec{v} &\in \operatorname{Vect}\big((-2,1,0),(3,0,1)\big). \end{aligned}$$
- Donc F est le plan engendré par les vecteurs linéairement indépendants
$$\vec{v}_1=(-2,1,0), \quad \vec{v}_2=(3,0,1)$$
et constituent alors une base de F.

Deuxième exemple

Déterminer une base du sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ constitué des vecteurs $\vec{v}=(x,y,z,t)$ tels que $x+y-z+t=0$ et $x+2y+z+2t=0$.

- On a
$$\vec{v}=(x,y,z,t)\in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z+t &=& 0\\ x+2y+z+2t &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& z-t\\ x+2y &=& -z-2t.\end{array}\right.$$
L_2-L_1 donne $y=-2z-t$ et L_1 redonne $x=-y+z-t=3z$. Ainsi, $\vec{v}\in F \iff \vec{v}=(3z,-2z-t,z,t)$ i.e.
$$\begin{array}{rcl} \vec{v} &=& z(3,-2,1,0)+t(0,-1,0,1)\\ \iff \vec{v} &\in& \mathrm{Vect}\big((3,-2,1,0),(0,-1,0,1)\big)\end{array}$$
- Donc F est le plan engendré par les vecteurs linéairement indépendants
$$\vec{v}_1=(3,-2,1,0),\quad \vec{v}_2=(0,-1,0,1)$$
et constituent alors une base de F.

Troisième exemple

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer une base du sous-espace vectoriel
$$F=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\,/\,P(1)=0\}.$$
- Soit $P\in\mathbb{R}_2[X]$. Alors il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $P=aX^2+bX+c$.
- On a alors
$$\begin{array}{rcl} P\in F &\iff& P(1)=0\\ &\iff& a+b+c=0\\ &\iff& a=-b-c\\ &\iff& P=(-b-c)X^2+bX+c\\ &\iff& P=b(-X^2+X)+c(-X^2+1)\\ &\iff& P\in\mathrm{Vect}\big(-X^2+X,-X^2-1\big).\end{array}$$
- Ainsi, F est le plan engendré par les vecteurs linéairement indépendants
$$P_1=-X^2+X,\quad P_2=-X^2-1$$
et constituent alors une base de F.

Quatrième exemple

On considère la matrice
$$T=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$
ainsi que l'ensemble
$$C_T=\{U\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ TU=UT\}.$$
On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel et on admet que C_T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (cf. chapitre VIII pour les détails). Déterminer une base de C_T.

- Soit $U=\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- On calcule
$$TU=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&d&h\\b&f&i\end{pmatrix}\qquad UT=\begin{pmatrix}d&g&0\\e&h&0\\f&i&0\end{pmatrix}$$
et on a donc
$$TU=UT \iff \left\{\begin{array}{l} d=0\\ e=a\\ f=b\\ g=0\\ h=d\\ i=e\\ g=0\\ h=0.\end{array}\right.$$
- Une matrice $U\in C_T$ s'écrit donc
$$U=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$
- Ceci démontre que
$$C(T)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right).$$
Ces trois matrices constituent une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puisque
$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=0\\c=0.\end{array}\right.$$
C'est pourquoi $\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)$ est une base de C_T, qui est alors de dimension 3.

3 Exemple de résolution d'un système; application à la recherche de bases

Résolution d'un système

Soit à résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y+4z+5t &=& 4\\ x+5y+6z+12t &=& 6\\ x+2z+5t &=& 2.\end{array}\right.$$
- On écrit la matrice augmentée du système:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2&5&4&5&4\\ 1&5&6&12&6\\ 1&0&2&5&2\end{array}\right)$$
- On réduit la matrice du système par des opérations élémentaires sur les ***lignes*** (cela ne change pas l'ordre des inconnues; on peut effectuer des opérations sur les colonnes mais on prendra alors

soin de noter les répercussions sur les noms des inconnues en jeu) en effectuant la même suite d'opérations sur la matrice augmentée:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 12 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 12 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \mathbf{5} & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & -12 & -4 \end{array}\right)$$

et on obtient donc le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathbf{1}x & & +2z + & 5t & = 2 \\ & \mathbf{5}y & +4z + & 7t & = 4 \\ & & \mathbf{-4}z - & 12t & = -4. \end{array}\right.$$

- En gras figurent les pivots affectant les ***inconnues principales*** qui sont ici x, y, z; il y a trois inconnues principales, autant que le rang de la matrice du système (nombre de pivots). Ce rang est appelé aussi ***rang du système***. Les autres inconnues, ici t, sont appelées ***inconnues secondaires*** ou ***paramètres***. Les inconnues secondaires sont passées dans le second membre et l'on obtient un système ***triangulaire***

$$\left\{\begin{array}{llll} x & & +2z & = 2 - 5t \\ & 5y & +4z & = 4 - 7t \\ & & -4z & = -4 + 12t. \end{array}\right.$$

que l'on résout naturellement de bas en haut:

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & 1 - 3t \\ y & = & \frac{1}{5}(-4z - 7t + 4) \\ x & = & -2z - 5t + 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 1 - 3t \\ y & = & t \\ x & = & t \end{array}\right.$$

et l'ensemble des solutions est formé des quadruplets

$$\{(t, t, 1 - 3t, t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}.$$

- Le nombre de paramètres est égal à la différence entre le nombre d'inconnues et le rang du système.
- Un système est dit incompatible lorsqu'après opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, on obtient une ligne de la forme

$$0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \mid b$$

avec $b \neq 0$ (ce qui correspond bien entendu à une équation du type $0 = b$).

Recherche de base

La méthode ci-dessous est pertinente en dimension élevée (au moins 4; elle est un peu lourde en dimension ≤ 3). Elle consiste à utiliser les outils de résolution d'un système d'équations.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z, t) \,/\, x + y + z + t = 0,\ 2x + 2y - z + t = 0\};$$

Pour déterminer une base de F, on voit qu'appartenir à F est être solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ 2x + 2y - z + t = 0 \end{array}\right.$$

et on va en conséquence en décrire l'ensemble des solutions en appliquant la méthode du pivot:

- on écrit la matrice M du système:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(inutile d'écrire la matrice augmentée: les seconds membres seront toujours nul).
- En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, M est équivalente par opérations sur les lignes à une matrice échelonnée à deux pivots en gras:

$$M \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-3} & -1 \end{pmatrix}.$$

- Les inconnues x et z affectées par les pivots seront prises comme inconnues principales et les autres y et t comme paramètres, que l'on fait passer dans le second membre.
- Ainsi,

$$(x, y, z, t) \in F \iff \left\{\begin{array}{l} x + z = -y - t \\ -3z = t. \end{array}\right.$$

- On résout ce système d'inconnues (x, z) comme on le ferait pour tout autre système:L_2 donne

$$z = -\frac{1}{3}t,$$

et alors L_1 donne

$$\begin{array}{rcl} x & = & -y - t - z \\ & = & -y - t + \dfrac{1}{3}t \\ & = & -y - \dfrac{2}{3}t. \end{array}$$

- Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} (x, y, z, t) \in F & \iff & \left\{\begin{array}{l} x = -y - \frac{2}{3}t \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{1}{3}t \\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right. \\ & \iff & (x, y, z, t) = \left(-y - \dfrac{2}{3}t, y, -\dfrac{1}{3}t, t\right),\ (y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & \iff & (x, y, z, t) = y\,(-1, 1, 0, 0) + t\left(-\dfrac{2}{3}, 0, -\dfrac{1}{3}, 1\right), \end{array}$$

ce qui met en évidence que

$$\left[(-1, 1, 0, 0), \left(-\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 1\right)\right]$$

est une base de F.

4 Rang d'une matrice. Matrices échelonnées et pivot

Soit M une matrice à n lignes et p colonnes. Chaque colonne de M comporte n coefficients; chaque colonne de M est alors identifiée à un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On parle alors de *vecteurs colonnes* de M.

- Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, ses vecteurs colonnes sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et identifiés respectivement aux vecteurs

$$(1, 2) \quad (-1, 1) \quad (2, 3)$$

de $\mathbb{R}^2$.

Définition VIII.4.8 Le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, noté $\mathrm{rg}(M)$, est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par ses vecteurs colonnes.

- Par exemple, pour
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
on a $\mathrm{rg}(M) = 2$ car
$$\mathrm{Vect}\big((1,2,-1),(1,-1,1),(-2,-4,2)\big)$$
est de dimension 2, puisque les premier et troisième vecteurs sont liés et les deux premiers sont linéairement indépendants.

Matrices échelonnées

Définition VIII.4.9 ***Matrice échelonnée par ligne.*** C'est une matrice telle que:

- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi;
- à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul (à partir de la gauche), appelé ***pivot***, est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Par exemple:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition VIII.4.10 ***Matrice échelonnée par colonne.*** C'est une matrice telle que:

- si une colonne est nulle, toutes les colonnes suivantes le sont aussi;
- à partir de la deuxième colonne, dans chaque colonne non nulle, le premier coefficient non nul (à partir du haut), appelé ***pivot***, est situé plus bas que le premier coefficient non nul de la colonne précédente.

Par exemple:
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème VIII.4.7 Le rang d'une matrice échelonnée (par lignes ou par colonnes) est le nombre de ses pivots.

Matrices équivalentes, pivot de Gauß et rang

Définition VIII.4.11 ***Opérations élémentaires sur les lignes L_i ou colonnes C_i d'une matrice.*** Ce sont les opérations suivantes:

- échange des lignes L_i et L_j, symbolisé par $L_i \longleftrightarrow L_j$,
- échange des colonnes C_i et C_j, symbolisé par $C_i \longleftrightarrow C_j$,
- ajout de λL_j à L_i, symbolisé par $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$,
- ajout de λC_j à C_i, symbolisé par $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$,
- multiplication de L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$, symbolisé par $L_i \longleftarrow \lambda L_i$,
- multiplication de C_i par un scalaire $\lambda \neq 0$, symbolisé par $C_i \longleftarrow \lambda C_i$.

Définition VIII.4.12 ***Matrices équivalentes.*** Deux matrices A et A' sont dites équivalentes lorsque A' s'obtient à partir de A par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et/ou sur les colonnes.

Ce résultat est fondamental:

Théorème VIII.4.8 Deux matrices équivalentes ont le même rang.

Donc effectuer une opération élémentaire, ou une succession d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, produit une matrice de même rang.

Ce principe motive le résultat suivant:

Théorème VIII.4.9 ***Obtention du rang par la méthode du pivot.*** Par une suite d'opérations élémentaires *(méthode du pivot de Gauß-Jordan)*, toute matrice M est équivalente par lignes (resp. colonnes) à une matrice échelonnée.

Le rang de la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est alors le nombre de pivots obtenus après application de cette méthode.

Exemple

Soit
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 12 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

- On a
$$\begin{aligned} M \quad & \underset{\substack{a_{11}\text{ pivot} \\ \ell_2-2\ell_1 \\ \ell_3+\ell_1 \\ \ell_4-\ell_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \underset{\substack{a_{23}\text{ pivot} \\ \ell_3-3\ell_2 \\ \ell_4-\ell_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Ayant obtenu une matrice échelonnée à 2 pivots, on en déduit que M est de rang 2.

Autre exemple

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 15 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} M & \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & -1 & 15 \end{pmatrix} \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice M est équivalente à une matrice échelonnée de rang 3, donc M est de rang 3. On a aussi

$$\begin{aligned} M & \underset{L_3 \leftarrow \frac{-1}{5} L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui met en évidence que M est équivalente à une matrice échelonnée de rang 3, donc M est de rang 3. Il est à noter que M est semblable à une matrice échelonnée dont tous les pivots sont égaux à 1 (une telle matrice est dite "réduite").

5 Rang et sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs; base d'un tel sous-espace

Soit E un espace vectoriel et $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ une famille de vecteurs de E.

Théorème VIII.5.10

- Le sous-espace vectoriel F engendré par la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$, noté $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires que l'on peut former avec ces vecteurs.
- Les éléments de F sont donc de la forme $\lambda_1 \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_m \vec{x}_m$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$.
- La famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est alors une famille génératrice de F.
- Le rang de la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est par définition la dimension de F.
- Si E est de dimension finie n et si $\mathcal{B}$ une base de E, soit M la matrice de la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire la matrice dont la première colonne est consitutée des composantes de $\vec{x}_1$ dans $\mathcal{B}$, etc.
  - Alors le rang de la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est le rang de la matrice M.
  - En particulier, si $m = n$, alors $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ est une base de E si et seulement si M est *inversible*, donc si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

Obtention d'une base connaissant une famille génératrice

Commençons par cette situation fréquente:

Théorème VIII.5.11 Soit une famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ de vecteurs de E et

$$F = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m).$$

Alors $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est une base de F si et seulement si la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est de rang m.

Démonstration. C'est une conséquence de la définition du rang et de la théorie de la dimension appliquée à l'espace vectoriel F:

- si $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est une base de F, alors F est de dimension m et donc par définition, la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est de rang m.
- Réciproquement, si la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est de rang m, c'est que par définition, F est de dimension m; en conséquence (théorie de la dimension) toute famille génératrice comportant m vecteurs est une base de cet espace est cette famille est alors libre. C'est donc le cas de la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$.

Exemple

Déterminer une base du sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x + y - 2z + 3t = 0\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{v} = (x, y, z, t) \in F & \iff x + y - 2z + 3t = 0 \\ & \iff x = -y + 2z - 3t \\ & \iff \vec{v} = (-y + 2z - 3t, y, z, t) \\ & \iff \vec{v} = y(-1, 1, 0, 0) + z(2, 0, 1, 0) + t(-3, 0, 0, 1) \\ & \iff \vec{v} \in \mathrm{Vect}\big((-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 1)\big) \end{aligned}$$

donc F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, 1, 0)$ et $\vec{v}_3 = (-3, 0, 0, 1)$:

$$F = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3).$$

Calculons leur rang: on écrit la matrice M de cette famille dans la base canonique:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice échelonnée à trois pivots, donc cette famille de trois vecteurs est de rang 3 et constitue alors une base de F.

Dans le cas général, une base de $F = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ s'obtient à partir de $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ en supprimant tous les vecteurs qui sont des combinaisons d'autres vecteurs.

- Par exemple,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_1) = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \\ &\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ &\mathrm{Vect}\big((1,2,-2),(1,-1,3),(-2,-4,4)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,2,-2),(1,-1,3)\big) \end{aligned}$$

  car $(-2,-4,4) = -2 \times (1,2,-2)$.
- Mais il n'est pas toujours évident de voir qui est combinaison linéaire de quoi. Une méthode infaillible s'appuie sur la méthode du pivot de Gauß, en se basant sur le principe fondamental suivant:

Méthode à retenir

Proposition VIII.5.12 Pour déterminer une base du sous-espace vectoriel F engendré par une famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ d'un espace vectoriel E (typiquement $\mathbb{R}^n$),

- on écrira la matrice M de cette famille dans une base de E (typiquement la base canonique de $\mathbb{R}^n$),
- on appliquera la méthode de Gauß en ***opérant sur les lignes*** de M afin de parvenir à une matrice échelonnée par lignes M' équivalente à M,
- on notera les numéros de colonnes de M' qui portent les pivots,
- les colonnes de M qui possèdent ces numéros portent alors les vecteurs de la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ fournissant une base de F.

Premier exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1,2,-1,1), \quad \vec{v}_2 = (2,4,-2,2), \ \vec{v}_3 = (-3,-7,0,-4), \ \vec{v}_4 = (5,12,1,7), \ \vec{v}_5 = (-1,3,9,10).$$

Déterminer une base du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$.

- On écrit la matrice M de cette famille de vecteurs dans la base canonique:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -7 & 12 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

- On applique la méthode de Gauß en ***opérant sur les lignes*** de M.

$$M \sim \begin{matrix} a_{11} \text{ pivot} \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \\ \ell_4 - \ell_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} a_{23} \text{ pivot} \\ \ell_3 - 3\ell_2 \\ \ell_4 - \ell_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} a_{34} \text{ pivot} \\ 7\ell_4 + 6\ell_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ayant obtenu une matrice échelonnée à 3 pivots, on en déduit que M est de rang 3: c'est le principe selon lequel les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas son rang. Ainsi, $\dim(F) = 3$ et donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est une famille de rang 3.
- Les pivots sont portés par les colonnes 1, 3 et 5 et c'est pourquoi les vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5)$ forment une base de F: c'est le principe selon lequel les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas les relations de dépendance linéaire entre les colonnes. Ainsi,

$$\big((1,2,-1,1),(-3,-7,0,-4),(-1,3,9,10)\big)$$

  est une base de F.

Deuxième exemple

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $P_1 = (X+1)^2$, $P_2 = (X+2)^2$, $P_3 = (X+3)^2$, $P_4 = (X+4)^2$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

- On écrit la matrice M de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) dans la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Puisque

$$P_1 = 1 + 2X + X^2, \ P_2 = 4 + 4X + X^2, \ P_3 = 9 + 6X + X^2, \ P_4 = 16 + 8X + X^2,$$

  on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on a

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & -4 & -12 & -24 \\ 0 & -3 & -8 & -15 \end{pmatrix}$$

  et effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_2$, on a

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & -4 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Cette matrice est échelonnée à deux pivots portés par les colonnes 1 et 2. La matrice M est donc de rang 2; donc $\dim(F) = 2$ et une base de F est (P_1, P_2): c'est le principe selon lequel les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas les relations de dépendance linéaire entre les colonnes.
- ***Remarque.*** On a aussi $F = \mathrm{Vect}(P_4, P_2, P_3, P_1)$ (ou dans tout autre ordre). La matrice M' de (P_4, P_2, P_3, P_1) dans la base $(1, X, X^2)$ est

$$M' = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 9 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  En appliquant la méthode du pivot à cette matrice:

  – $L_3 \leftrightarrow L_1$ donne

$$M' \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 6 & 2 \\ 16 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

  – $L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 16L_1$ donne

$$M' \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & -12 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

– et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne

$$M' \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée, à deux pivots portés par les colonnes 1 et 2. On en déduit que M' est de rang 2; donc $\dim(F) = 2$ et une base de F est (P_4, P_2) (principe selon lequel les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifient pas les relations de dépendance linéaire entre les colonnes).

6 Somme de sous-espaces, supplémentaires

6.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels A et B

Définition VIII.6.13 Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. $A + B$ est l'ensemble constitué de tous les vecteurs z de la forme $x + y$ avec $x \in A$ et $y \in B$:

$$A + B = \{x + y,\ (x, y) \in A \times B\}.$$

C'est toujours un sous-espace vectoriel de E.

- On a toujours $A \subset A + B$ car si $x \in A$, on écrit $x = x + \vec{0}$ et comme $\vec{0}$ appartient à B, ce qui fait apparaître x comme un vecteur de $A + B$. De même, $B \subset A + B$.
- *À ne pas confondre avec* $A \cup B$.
- $A + B$ est souvent un sous-espace difficile à concrétiser!

Théorème VIII.6.13 Lorsque E est de dimension finie, on a la formule de Grassmann:

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $A = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,-1),(2,0,0,1)\big)$ et $B = \mathrm{Vect}(1,-1,0,0)$. Le vecteur $\vec{v} = (6,-2,2,-1)$ appartient-il à $A + B$?

- C'est le cas si et seulement si on peut écrire $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$, $\vec{v}_2 \in B$.
- Par définition, les vecteurs de A sont les vecteurs de la forme

  $$a(1,0,1,-1) + b(2,0,0,1), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

  et ceux de B sont de la forme

  $$c(1,-1,0,0), \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Ainsi, $\vec{v} \in A + B$ si et seulement si on peut trouver trois scalaires a, b, c tels que

  $$\vec{v} = a(1,0,1,-1) + b(2,0,0,1) + c(1,-1,0,0).$$

  Cette égalité a lieu, en l'examinant composante par composante, si et seulement si

  $$\begin{cases} 6 &= a + 2b + c \\ -2 &= -c \\ 2 &= a \\ -1 &= -a + b \end{cases} \iff \begin{cases} 6 = 6 \\ a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2. \end{cases}$$

- Ainsi,

  $$\vec{v} = \underbrace{2 \times (1,0,1,-1) + 1 \times (2,0,0,1)}_{\in A} + \underbrace{2 \times (1,-1,0,0)}_{\in B} \in A + B,$$

  et donc $\vec{v} \in A + B$.

Le vecteur $\vec{w} = (7,-2,2,-1)$ appartient-il à $A + B$?

- C'est le cas si et seulement si on peut écrire $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ avec $\vec{w}_1 \in A$, $\vec{w}_2 \in B$, donc (comme ci-dessus) si et seulement si on peut trouver trois scalaires a, b, c tels que

  $$\vec{w} = a(1,0,1,-1) + b(2,0,0,1) + c(1,-1,0,0).$$

- Cette égalité a lieu, en l'examinant composante par composante, si et seulement si

  $$\begin{cases} 7 &= a + 2b + c \\ -2 &= -c \\ 2 &= a \\ -1 &= -a + b \end{cases} \iff \begin{cases} 7 = 6 \\ a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2. \end{cases}$$

- Ce système est incompatible; on ne peut pas trouver de triplet (a, b, c). C'est donc la preuve que $\vec{w}$ n'appartient pas à $A + B$.

6.2 Supplémentaires en général

Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition VIII.6.14

Le sous-espace B est un supplémentaire de A dans E lorsque $A + B = E$ et $A \cap B = \{\vec{0}\}$.

Ceci a lieu si et seulement si tout vecteur $\vec{v}$ de E s'écrit de façon unique $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$.

Ce phénomène est alors noté $E = A \oplus B$.

Premier exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ démontrer que les sous-espaces

$$A = \left\{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + y - 2z = 0\right\}, \quad B = \mathrm{Vect}(2,1,1)$$

sont supplémentaires.

- On se donne un vecteur quelconque $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; il s'agit donc de démontrer que l'on peut écrire de manière unique

  $$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

  avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$.

- Par définition, les vecteurs de A sont les vecteurs de la forme

  $$(x_1, y_1, z_1) \;/\; x_1 + y_1 - 2z_1 = 0$$

  et ceux de B sont de la forme

  $$c(2,1,1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Ainsi, on peut écrire $\vec{v}\vec{u}_1+\vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$ si et seulement si on peut trouver x_1, y_1, z_1, c tels que
$$\begin{cases} \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + c(2,1,1) \\ x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}$$
c'est à dire
$$\begin{cases} (x,y,z) = (x_1, y_1, z_1) + c(2,1,1) \\ x_1 + y_1 - 2z_1 = 0. \end{cases}$$
- Ainsi, on a $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$ si et seulement si il existe des réels x_1, y_1, z_1, c tels que
$$\begin{cases} x &= x_1 + 2c \\ y &= y_1 + c \\ z &= z_1 + c \\ x_1 + y_1 - 2z_1 &= 0 \end{cases}$$
problème qui est donc ramené à prouver que le système (S) ci-dessus, d'inconnues x_1, y_1, z_1, c et dont les données sont x, y, z, possède une solution et une seule (l'unicité de la solution étant alors garante de l'écriture de manière unique $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$).
- En effectuant $L_4 \leftarrow L_4 - (L_1 + L_2)$, on a
$$\begin{cases} x_1 + 2c &= x \\ y_1 + c &= y \\ z_1 + c &= z \\ x_1 + y_1 - 2z_1 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2c &= x \\ y_1 + c &= y \\ z_1 + c &= z \\ -2z_1 - 3c &= -x - y \end{cases}$$
et en effectuant $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$
$$(S) \iff \begin{cases} x_1 + 2c &= x \\ y_1 + c &= y \\ z_1 + c &= z \\ c &= x + y - 2z \end{cases}$$
et on trouve finalement
$$(S) \iff \begin{cases} x_1 &= x - 2c \\ y_1 &= y - c \\ z_1 &= z - c \\ c &= x + y - 2z \end{cases} \begin{cases} x_1 &= -x - 2y + 4z \\ y_1 &= -x + 2z \\ z_1 &= -x - y + 3z \\ c &= x + y - 2z. \end{cases}$$
- On a donc
$$\vec{v} = (x,y,z) = \underbrace{(-x - 2y + 4z, -x + 2z, -x - y + 3z)}_{\in A} + \underbrace{(x + y - 2z) \times (2,1,1)}_{\in B}$$
et cette écriture de $\vec{v}$ est unique puisque (S) possède une unique solution.
- On a donc prouvé que tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique
$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$ ce qui est la preuve de $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$ i.e. A et B sont supplémentaires.

Deuxième exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les sous-espaces
$$A = \left\{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - z = 0\right\}, \quad B = \left\{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + z = 0\right\}$$
sont ils-supplémentaires?

- On se donne un vecteur quelconque $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; il s'agit donc de voir si l'on peut écrire de manière unique
$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$.
- Par définition, les vecteurs de A sont les vecteurs de la forme
$$(x_1, y_1, z_1) \ / \ x_1 - z_1 = 0$$
et ceux de B sont de la forme
$$(x_2, y_2, z_2) \ / \ x_2 + z_2 = 0.$$
- Ainsi, on peut écrire $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$ si et seulement si on peut trouver $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ tels que
$$\begin{cases} \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \\ x_1 - z_1 = 0 \\ x_2 + z_2 = 0 \end{cases}$$
c'est à dire
$$\begin{cases} (x,y,z) = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \\ x_1 - z_1 = 0 \\ x_2 + z_2 = 0. \end{cases}$$
- Ainsi, on a $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$ si et seulement si il existe des réels $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ tels que
$$\begin{cases} x &= x_1 + x_2 \\ y &= y_1 + y_2 \\ z &= z_1 + z_2 \\ x_1 - z_1 &= 0 \\ x_2 + z_2 &= 0 \end{cases}$$
problème qui est donc ramené à étudier l'existence et l'unicité d'une solution au système (S) ci-dessus, d'inconnues $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ et dont les données sont x, y, z.
- C'est un système de 5 équations à 6 inconnues :
$$\begin{cases} x &= x_1 + x_2 \\ y &= y_1 + y_2 \\ z &= z_1 + z_2 \\ x_1 - z_1 &= 0 \\ x_2 + z_2 &= 0. \end{cases}$$
Considérons toutes les équations sauf la seconde :
$$\begin{cases} x &= x_1 + x_2 \\ z &= z_1 + z_2 \\ x_1 - z_1 &= 0 \\ x_2 + z_2 &= 0. \end{cases}$$
Alors L_3 donne $x_1 = z_1$, L_4 donne $x_2 = -z_2$ et ces deux équations reportées dans L_1 donnent alors pour (L_1, L_2):
$$\begin{cases} z_1 - z_2 &= x \\ z_1 + z_2 &= z \end{cases}$$
qui donne immédiatement
$$\begin{cases} z_1 &= \frac{1}{2}(x + z) \\ z_2 &= \frac{1}{2}(z - x) \end{cases}$$
et finalement
$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(x + z) \\ z_1 &= \frac{1}{2}(x + z) \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(z - x) \\ z_2 &= \frac{1}{2}(z - x). \end{cases}$$
En tenant compte de la ligne L_2 du système initial, qui autorise de prendre par exemple y_2 comme paramètre, ce système admet les solutions
$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}(x + z) \\ y_1 &= y - y_2 \\ z_1 &= \frac{1}{2}(x + z) \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(z - x) \\ z_2 &= \frac{1}{2}(z - x) \end{cases} \qquad y_2 \in \mathbb{R},$$

ce que l'on peut comprendre de la manière suivante : "donnez-moi un couple un réel y_2; je vous fabrique les réels

$$x_1 = \frac{1}{2}(x+z),\ y_1 = y - y_2,\ z_1 = \frac{1}{2}(x+z),\ x_2 = -\frac{1}{2}(z-x),\ z_2 = \frac{1}{2}(z-x)$$

et les vecteurs

$$\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

Alors ces deux vecteurs satisfont

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \in A \\ \vec{u}_2 \in B \\ \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}. \end{cases}$$

Ainsi, le système (S) admet une infinité de solutions : tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ peut effectivement s'écrire

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$ mais pas de manière unique. Les sous-espaces A et B ne sont pas supplémentaires.

Lorsque $E = A \oplus B$ on n'a pas $E = A \cup B$: un vecteur donné n'est pas soit dans A, soit dans B!

6.3 Critères de supplémentarité en dimension finie

Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E.

Théorème VIII.6.14 ***Premier critère.*** Si E est de dimension finie, alors $E = A \oplus B$ a lieu si et seulement si

$$\begin{cases} A \cap B = \{\vec{0}\} \\ \dim A + \dim B = \dim E. \end{cases}$$

Exemple

On reprend une situation précédente: dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, démontrer que les sous-espaces

$$A = \left\{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0\right\}, \quad B = \mathrm{Vect}(2, 1, 1)$$

sont supplémentaires.

- Une base de B est $(2, 1, 1)$, qui est alors de dimension 1.
- On obtient une base de A de manière classique:

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} & = & (x, y, z) \in A \iff x = 2z - y \iff \vec{u} = (2z - y, y, z) \\ \iff \vec{u} & = & z(2, 0, 1) + y(-1, 1, 0),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \\ \iff \vec{u} & \in & \mathrm{Vect}\big((2, 0, 1), (-1, 1, 0)\big). \end{array}$$

  Ainsi, $\big((2, 0, 1), (-1, 1, 0)\big)$ est une famille génératrice de A et puisque cette famille est manifestement libre, c'est une base de A, qui est alors de dimension 2.
- On a donc déjà $\dim A + \dim B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
- Recherchons $A \cap B$. Soit $\vec{u} \in A \cap B$.
  - Puisque $\vec{u} \in A$, c'est qu'il existe deux scalaires a, b tels que

    $$\vec{u} = a(2, 0, 1) + b(-1, 1, 0) = (2a - b, b, a)$$

    et puisque $\vec{u} \in B$, c'est qu'il existe un scalaire c tels que

    $$\vec{u} = c(2, 1, 1) = (2c, c, c).$$

  - On a donc

    $$\vec{u} = (2a - b, b, a) = (2c, c, c)$$

    et en conséquence

    $$\begin{cases} 2a - b = 2c \\ b = c \\ a = c \end{cases} \iff \begin{cases} 2c - c = 2c \\ b = c \\ a = c \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0, \end{cases}$$

    ce qui conduit à $\vec{u} = \vec{0}$.
  - Ainsi, $A \cap B = \{\vec{0}\}$.
- En définitive, $\dim A + \dim B = \dim \mathbb{R}^3$ et $A \cap B = \{\vec{0}\}$, ce qui démontre que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Théorème VIII.6.15 ***Deuxième critère.***

Dans un espace E de dimension finie n, les sous-espaces A et B sont supplémentaires si et seulement si la réunion d'une base de A et d'une base de B est une base de E.

Cette base de E est alors appelée ***adaptée*** à la somme directe $E = A \oplus B$.

Exemple

On reprend une situation précédente: dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ démontrer que les sous-espaces

$$A = \left\{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0\right\}, \quad B = \mathrm{Vect}(2, 1, 1)$$

sont supplémentaires.

- Une base de B est $(2, 1, 1)$.
- Une base de A est $\big((2, 0, 1), (-1, 1, 0)\big)$ (cf. ci-dessus).
- On a

  $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  qui est une matrice échelonnée à 3 pivots; la famille

  $$\big((2, 0, 1), (-1, 1, 0), (2, 1, 1)\big)$$

  est de rang 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
- On a donc $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

6.4 Critère de supplémentarité en général

Théorème VIII.6.16 Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. On a $E = A \oplus B$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- $A \cap B = \{\vec{0}\}$
- Tout vecteur $\vec{v}$ de E peut s'écrire $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in A$ et $\vec{u}_2 \in B$.

Premier exemple

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, espace vectoriel constitué de l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On note F, resp. G, le sous-espace vectoriel de E constitué de l'ensemble des fonctions paires, resp. impaires. Alors $E = F \oplus G$.

- Démontrons que $F \cap G = \{O\}$ (où O désigne la fonction nulle sur $\mathbb{R}$). Soit $f \in F \cap G$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(-x) \text{ car } f \in F \text{ i.e. } f \text{ est paire} \\ f(x) & = & -f(-x) \text{ car } f \in G \text{ i.e. } f \text{ est impaire.} \end{array}$$

  Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x)$ i.e. $f(x) = 0$ et c'est pourquoi $f = O$. On a donc bien prouvé que $F \cap G = \{O\}$.
- Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

  En notant

$$f_1 : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

  on a donc

$$f = f_1 + f_2.$$

  Il est clair que f_1 et f_2 sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et d'autre part, pour tout réel x:

$$\begin{array}{rcl} f_1(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} & = & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ & = & f_1(x) \\ f_2(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} & = & -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \\ & = & -f_2(x), \end{array}$$

  ce qui prouve que f_1 est paire et f_2 est impaire. Autrement dit, $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$.

Le critère de supplémentarité est satisfait: on a bien $E = F \oplus G$.

Deuxième exemple, basé sur le principe d'analyse-synthèse

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles; on considère

$$F = \{f \in E \;/\; f(0) = f'(0) = 0\}$$

ainsi que l'ensemble G de toutes les fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

   (a) Soit $f \in E$. On suppose que f s'écrit

$$f = f_1 + f_2$$

   avec $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$. Démontrer que

$$f_2 : x \mapsto xf'(0) + f(0).$$

   (b) En déduire que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Réponse.

1. Il est clair que F est un sous-espace de E: F contient la fonction nulle, une combinaison de fonctions qui s'annulent en 0 s'annule en 0, idem pour la dérivée.
2. Pour G:
   - a fonction nulle est bien de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $a = b = 0$.
   - $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto cx + d$ sont deux èléments de G et λ, μ des scalaires, alors

$$\begin{array}{rcl} \lambda f + \mu g : x & \mapsto & \lambda(ax + b) + \mu(cx + d) \\ & = & (\lambda a + \mu c)x + (\lambda b + \mu d), \end{array}$$

     ce qui prouve que $\lambda f + \mu g$ appartient à G.

   Donc G est un sous-espace de E.
3. (a) Il existe donc $f_1 \in F$ et deux réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = f_1(x) + ax + b.$$

   En prenant la valeur en 0 des deux membres sur $[-1, 1]$ et de leur dérivée, il vient:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & f_1(0) + b \\ & = & 0 + b \\ & = & b. \end{array}$$

   D'autre part, par dérivation:

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in [-1, 1],\ f(x) & = & f_1(x) + ax + b \\ \Longrightarrow f'(x) & = & f_1'(x) + a \\ \Longrightarrow f'(0) & = & f_1'(0) + a \\ & = & 0 + a \\ & = & a. \end{array}$$

   Ainsi,

$$b = f(0), \quad a = f'(0).$$

   Donc si la décomposition $f = f_1 + f_2$ a effectivement lieu, on a

$$\begin{array}{rcl} f_2 : x & \mapsto & xf'(0) + f(0) \\ & = & xf'(0) + f(0). \end{array}$$

   (b) Soit $f \in E$.
   - *Première approche.* Il s'agit de démontrer que f s'écrit *de manière unique*

$$f = f_1 + f_2, \quad f_2 \in F,\ f_2 \in G.$$

     D'après (a), *si ce phénomène a lieu* (c'est en fait une "analyse"), on a nécessairement

$$f_2 : x \mapsto xf'(0) + f(0).$$

     Synthèse. Posons

$$f_2 : x \mapsto xf'(0) + f(0),$$

     si bien que $f_2 \in G$. Posons ensuite

$$f = f_1 - f_2.$$

Pourquoi ce choix de f_1? Parce que l'on a n'a pas le choix! Si $f = f_1 + f_2$ a lieu, on a nécessairement $f_1 = f - f_2$! Ce qui est clair, c'est qu'alors

$$f_1 = f - f_2.$$

Il reste à prouver que $f_1 \in F$. On a

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-1,1],\ f(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\
\Longrightarrow f_1(x) &= f(x) - f_2(x) \\
&= f(x) - xf'(0) + f(0) \\
f_1(0) &= f(0) - 0 + f(0) \\
&= 0 \\
f_1'(x) &= f'(x) - f'(0) \\
f_1'(0) &= f'(0) - f'(0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc $f_1 \in F$.

Conclusion. On a donc prouvé que tout $f \in E$ pouvait s'écrire $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$; et on a vu que l'on a oligatoirement

$$f_2 : x \mapsto xf'(0) + f(0)$$

et donc

$$f_1 = f - f_2.$$

Il n'y a pas d'autre couple $(f_1, f_2) \in F \times G$ que celui-là. La décomposition $f = f_1 + f_2$ avec $f_2 \in G$ et $f_1 = f - f_2$ est donc unique, ce qui prouve que $E = F \oplus G$.

- *Deuxième approche.* On commence par prouver que $F \cap G = \{\vec{0}\}$ (fonction nulle):
  - si $f \in F \cap G$, alors en tant qu'élément de G, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que
  $$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = ax + b.$$
  - En tant qu'élément de F, on a $f(0) = 0$, i.e.
  $$0 = b$$
  et $f'(0) = 0$. Or
  $$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = ax + b \Longrightarrow f'(x) = a$$
  et $f'(0) = 0$ donne $a = 0$.
  - Ainsi, $a = b = 0$ et f est la fonction nulle.

  C'est la preuve que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

  Ensuite, étant donné $f \in E$, on procède comme ci-dessus: on pose
  $$f_2 : x \mapsto xf'(0) + f(0)$$
  et
  $$f_1 = f - f_2.$$
  Alors
  $$f_1 \in F, \quad f_2 \in G, \quad f = f_1 + f_2.$$
  Le critère de supplémentarité est donc satisfait.

La seule différence entre la première et la deuxième approche réside dans le fait que *l'unicité* de la décomposition est remplacée par $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

6.5 Théorème de la base incomplète

Théorème VIII.6.17

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r)$ une famille libre avec $r < n$.

Alors il existe des vecteurs $(\vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n)$ tels que $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, \vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n)$ soit une base de E.

De plus, on peut toujours trouver les vecteurs $\vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n$ parmi les vecteurs d'une base $\mathcal{B}$ donnée (typiquement dans la base canonique lorsque l'on travaille dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ ...).

Premier exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, compléter la famille $((2,3,3),(-1,1,1))$ afin de produire une base de $\mathbb{R}^3$.

- Cette famille est manifestement libre. On peut donc effectivement la compléter afin de produire une base de $\mathbb{R}^3$.
- On cherche à compléter avec le premier vecteur $(1,0,0)$ de la base canonique. Dans la mesure où
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
n'est clairement pas de rang 3 puisqu'elle a deux lignes égales, (ou encore par calcul du déterminant, qui est nul par développement suivant la 3-ème colonne), ce premier essai est un échec.
- Cherchons alors à compléter avec le deuxième vecteur $(0,1,0)$ de la base canonique. Dans la mesure où en échangeant C_1 et C_2 puis C_2 et C_3
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
puis en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
on voit que l'on a obtenu une matrice de rang 3 (le calcul du déterminant, égal à -5 par développement suivant la 3-ème colonne, était possible aussi), la famille
$$((2,3,3),(-1,1,1),(0,1,0))$$
est de rang 3 et est donc une base de $\mathbb{R}^3$ $\boxed{\checkmark}$

Deuxième exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F suivant:

$$F = \{\vec{u} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}.$$

Déterminer une base de F puis déterminer un supplémentaire de F.

- On a

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}=(x,y,z,t)\in F & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0\\ 2x+y+z-t=0\end{array}\right.\\ & \underset{L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0\\ x-t=0\end{array}\right.\\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} y=-x-z\\ t=x\end{array}\right.\\ & \Longleftrightarrow & u=(x,-x-z,z,-x)\\ & \Longleftrightarrow & u=x(1,-1,0,-1)+z(0,-1,1,0).\end{array}$$

  On en déduit qu'une base de F est $\big((1,-1,0,1),(0,-1,1,0)\big)$ et $\dim F=2$.

- Posons $\vec{u}_1=(1,-1,0,1)$, $\vec{u}_2=(0,-1,1,0)$, vecteurs de la base de F. Trouver un supplémetaire H de F, nécessairement de dimension 2, c'est trouver 2 vecteurs $\vec{u}_3,\vec{u}_4$ tels que $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4)$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.
- C'est donc un problème de base incomplète et on sait que l'on peut "puiser" dans la base canonique.
- Testons déjà $\vec{u}_3=(1,0,0,0)$. On a

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\underset{C_1\leftrightarrow C_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

  qui est échelonnée à 3 pivots. La famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ est donc de rang 3. On va maintenant chercher, en puisant dans la base canonique, un vecteur $\vec{u}_4$ tel que $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4)$ soit de rang 4.
- Testons avec $\vec{u}_4=(0,1,0,0)$. En effectuant $C_1\leftrightarrow C_3$ et $C_2\leftrightarrow C_4$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&-1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

  et en effectuant $L_3\leftarrow L_3+L_2$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\underset{L_4\leftarrow L_4+L_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

  qui est une matrice de rang 3. Ainsi, la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4)$ est de rang 3 et le vecteur $\vec{u}_4=(0,1,0,0)$ ne convient donc pas.
- Testons avec $\vec{u}_4=(0,0,1,0)$. En effectuant $C_1\leftrightarrow C_3$ puis $C_3\leftrightarrow C_4$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&-1&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

  et en effectuant $L_3\leftarrow L_3+L_2$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&-1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

  qui est une matrice de rang 4. Ainsi, la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4)$ est de rang 4 et donc le vecteur $\vec{u}_4=(0,0,1,0)$ convient.

- En conclusion,

$$\begin{array}{rcl} H & = & \mathrm{Vect}(\vec{u}_3,\vec{u}_4)\\ & = & \mathrm{Vect}\big((1,0,0,0),(0,0,1,0)\big)\end{array}$$

  est un supplémentaire de F.

Troisième exemple, plus abstrait

On trouvera une démonstration du théorème du rang à l'aide du théorème de la base incomplète dans la section consacrée aux applications linéaires.

7 Applications linéaires: formes linéaires, endo-, auto-, isomorphismes, noyau, image, rang

7.1 Applications linéaires; formes linéaires

Définition VIII.7.15 Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Une application $u:E\longrightarrow F$ est dite linéaire lorsque

$$u(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha u(\vec{v})+\beta u(\vec{w})$$

pour tout $(\vec{v},\vec{w})\in E^2$ et tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.

- On dit aussi qu'une application est linéaire dès lors que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison des images.
- Une application linéaire de E dans E (c'est donc le cas $F=E$) est appelée un endomorphisme de E.

Premier exemple

Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ définie de la manière suivante:

$$\forall\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ u(\vec{v})=(x+2y-z,y-x+z).$$

Alors u est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$:

- c'est bien une application définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (puisqu'elle retourne un couple de réels pour tout $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$.
- Soit $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{w}=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et α,β deux scalaires. Alors

$$\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}=\big(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z'\big),$$

  si bien que

$$\begin{array}{rcl} u(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}) & = & \big((\alpha x+\beta x')+2(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z'),(\alpha y+\beta y')-(\alpha x+\beta x')+(\alpha z+\beta z')\big)\\ & = & \big(\alpha(x+2y-z)+\beta(x'+2y'-z'),\alpha(y-x+z)+\beta(y'-x'+z')\big)\\ & = & \big(\alpha(x+2y-z),\alpha(y-x+z)\big)+\big(\beta(x'+2y'-z'),\beta(y'-x'+z')\big)\\ & = & \alpha\big(x+2y-z,y-x+z\big)+\beta\big(x'+2y'-z',y'-x'+z'\big)\\ & = & \alpha u(\vec{v})+\beta u(\vec{w}),\end{array}$$

  ce qui prouve que u est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Deuxième exemple

Soit un entier $n \geq 1$ et u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré est $\leq n$) définie de la manière suivante:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = X^2 P'' - 3P.$$

Alors u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$:

- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $X^2P'' - 3P$ est bien un polynôme et de surcroît, on sait que la dérivation fait perdre un degré. C'est pourquoi

  $$\deg(P) \leq n \implies \deg(P') \leq n-1 \implies \deg(P'') \leq n-2$$

  et puisque

  $$\begin{aligned} \deg(X^2P'') &= \deg(X^2) + \deg(P'') \\ &= 2 + \deg(P''), \end{aligned}$$

  on en déduit que

  $$\deg(X^2P'') \leq n$$

  et puisque $3P$ est lui aussi de degré $\leq n$, on en déduit

  $$\deg(X^2P'' - 3P) \leq n.$$

  En d'autres termes,

  $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

- Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors

  $$\begin{aligned} u(\alpha P + \beta Q) &= X^2(\alpha P + \beta Q)'' - 3(\alpha P + \beta Q) \\ &= X^2(\alpha P'' + \beta Q'') - 3\alpha P - 3\beta Q \\ &= \alpha X^2 P'' + \beta X^2 Q'' - 3\alpha P - 3\beta Q \\ &= \alpha(X^2P'' - 3P) + \beta(X^2Q'' - 3Q) \\ &= \alpha u(P) + \beta u(Q), \end{aligned}$$

  ce qui prouve que u est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ i.e. un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemples: identité, homothéties

Définition VIII.7.16

L'application Id_E définie sur E par

$$\forall \vec{v} \in E, \mathrm{Id}_E(\vec{v}) = \vec{v}$$

est un endomorphisme de E, appelé "identité" ou "l'application identique de E" (elle renvoie tout vecteur à l'identique).

Plus généralement, on se fixe un scalaire $k \in \mathbb{K}$. L'application h_k qui à tout vecteur $\vec{v}$ de E associe le vecteur $k\vec{v}$:

$$h_k : \vec{v} \mapsto k\vec{v}$$

est un endomorphisme de E, appelé, lorsque $k \neq 0$, homothétie de rapport k.

L'application nulle de E dans F est l'application qui à tout vecteur de E associe le vecteur nul de F. C'est une application linéaire de E dans F.

Premières propriétés fondamentales.

Théorème VIII.7.18 Quelle que soit l'application linéaire $u : E \longrightarrow F$:

- $u(\vec{0}) = \vec{0}$
- Pour tout sous-espace vectoriel A de E, $u(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Formes linéaires

Définition VIII.7.17 Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (c'est donc le cas $F = \mathbb{K}$) est appelée une *forme linéaire* sur E.

Premier exemple

C'est le cas de l'application

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{v} = (x,y,z) & \longmapsto & 2x + 3y - z \end{array}$$

car la linéarité est immédiate à vérifier: si $\vec{v} = (x,y,z)$, $\vec{v}' = (x',y',z')$ et α, β sont des scalaires,

$$\begin{aligned} u(\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}') &= u(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= 2(\alpha x + \beta x) + 3(\alpha y + \beta y') - (\alpha z + \beta z') \\ &= \alpha(2x + 3y - z) + \beta(2x' + 3y' - z') \\ &= \alpha u(\vec{v}) + \beta u(\vec{v}') \end{aligned}$$

et u est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Deuxième exemple

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel). L'application φ définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = P'(1)$$

est une forme linéaire sur E. En effet:

- pour tout $P \in E$ on a bien $\varphi(P) \in \mathbb{C}$,
- pour tout $(P,Q) \in E \times E$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$,

  $$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta)'(1) \\ &= \alpha P'(1) + \beta Q'(1) \\ &= \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q), \end{aligned}$$

  ce qui prouve la linéarité de φ et achève la preuve.

Troisième exemple

Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles (c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel). L'application φ définie sur E par

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

est une forme linéaire sur E. En effet:

- pour tout $f \in E$ on a bien $\varphi(f) \in \mathbb{R}$,
- pour tout $(f,g) \in E \times E$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha f + \beta g) &= \int_0^1 (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx \\ &= \alpha \int_0^1 f(x)\, dx + \beta \int_0^1 g(x)\, dx \\ &= \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g),\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de φ et achève la preuve.

Quatrième exemple

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit alors de manière unique

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. L'application φ_1 définie par

$$\varphi_1(\vec{x}) = x_1$$

i.e. sa composante suivant le vecteur $\vec{e}_1$, est une forme linéaire sur E. En effet,

- pour tout $\vec{x} \in E$ on a bien $\varphi_1(\vec{x}) \in \mathbb{K}$.
- Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Écrivons

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n \\ \vec{y} &= y_1\vec{e}_1 + \ldots + y_n\vec{e}_n\end{aligned}$$

avec $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1)\vec{e}_1 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n)\vec{e}_n$$

ce qui démontre que la composante du vecteur $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ suivant le vecteur $\vec{e}_1$ est $\alpha x_1 + \beta y_1$.
- Par définition, on a donc

$$\begin{aligned}\varphi_1(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ &= \alpha\varphi_1(\vec{x}) + \beta\varphi_1(\vec{y})\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de φ_1 et achève la preuve.

7.2 Du rôle primordial joué par les bases

On a tous lu des recettes de cocktail comme celle-ci:

mélanger 1 volume d'eau gazeuse avec 4 volumes d'A et 6 volumes de P.

De cette manière, on pose le principe de proportionnalité (linéarité!) entre les ingrédients. Attribuons alors la valeur 1 à eau, 4 à A et 6 à P. Si on veut réaliser un apéritif à base de 3cl d'eau, ce que l'on notera $V(1) = 3$, on peut symboliser le calcul des volumes des autres ingrédients de la manière suivante:

$$\begin{aligned}V(4) &= 4 \times V(1) \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12 \\ V(6) &= 6 \times V(1) \\ &= 6 \times 3 \\ &= 18.\end{aligned}$$

On pourra dire que l'eau joue le rôle de "base". On exprime alors les "vecteurs" Apérol et Prosecco en fonction de cette base et on peut calculer la valeur de la fonction volume en ces "vecteurs" en fonction seulement de la valeur prise par cette fonction en la "base".

De même, on peut calculer l'image d'un vecteur quelconque par une application linéaire dès lors que l'on connaît ses valeurs prises sur les vecteurs d'une base. Par exemple, sachant que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que

$$f(1,0) = (2,-1), \qquad f(0,1) = (3,-2)$$

on peut calculer l'image par f de tout vecteur, en procédant de la façon suivante:

- prenons par exemple $\vec{v} = (4,1)$. On le décompose sur la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{v} = 4(1,0) + (0,1)$$

et par linéarité de f on a alors

$$\begin{aligned}f(\vec{v}) &= f(4(1,0) + (0,1)) \\ &= 4f(1,0) + f(0,1) \\ &= 4(1,2) + (2,-2) \\ &= (6,6).\end{aligned}$$

L'image de $f(\vec{v})$ est parfaitement déterminée.
- On peut reproduire ce schéma avec n'importe quel vecteur. Soit $\vec{v} = (x,y)$. On le décompose sur la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{v} = x(1,0) + y(0,1)$$

et par linéarité de f on a alors

$$\begin{aligned}f(\vec{v}) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= x(1,2) + y(2,-2) \\ &= (x+2y, 2x-2y).\end{aligned}$$

L'image de $f(\vec{v})$ est parfaitement déterminée.

Ce principe est à la base de la théorie de la repréntation matricielle.

Théorème VIII.7.19 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et F un espace vectoriel.
Alors une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée dès lors que l'on connaît les valeurs

$$\vec{f}_1 = f(\vec{e}_1), \ldots, \vec{f}_n = f(\vec{e}_n),$$

ce qui signifie que l'on est en mesure de calculer l'image de tout vecteur de E.
Pour calculer l'image d'un vecteur $\vec{x}$ de E, il suffit de le décomposer sur la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

et de jouer sur la linéarité:

$$\begin{aligned}f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n) \\ &= x_1\vec{f}_1 + \ldots + x_n\vec{f}_n.\end{aligned}$$

Pour résumer, on retiendra les trois points équivalents suivants; soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un espace vectoriel (absolument quelconque: ce peut être E lui-même, un autre espace de dimension finie, un espace de dimension infinie).

Proposition VIII.7.20

- Une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée dès lors que l'on se donne les images des vecteurs d'une base de E.
- Étant donnés une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E et des vecteurs $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ de F, il existe une application linéaire f de E dans F et une seule telle que
$$f(\vec{e}_1) = \vec{f}_1, \ldots, f(\vec{e}_n) = \vec{f}_n.$$
- Deux applications linéaires f et g de E dans F sont égales (c'est à dire $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ pour tout vecteur $\vec{x}$ de E) si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs sur une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E i.e.
$$f(\vec{e}_1) = g(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n) = g(\vec{e}_n).$$

7.3 Remarques concernant le terme "endo"

Il faut parfois une réelle preuve qu'une application est un endomorphisme i.e. une application d'un espace dans lui-même, surtout lorsque l'espace en jeu est un espace de fonctions possédant des qualités spécifiques (des polynômes, des fonctions de classe C^1, des fonctions s'annulant en tel point ...). Il faudra alors prouver soigneusement que toute image a les qualités requises pour appartenir à cet espace.

Premier exemple

Soit F l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles qui s'annulent en 1.

- F est bien un espace vectoriel car F est un sous-espace vectoriel de l'espace E des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles:
  - F contient le vecteur nul i.e. la fonction nulle sur $[0,1]$ (qui est bien définie et continue sur $[0,1]$ et qui s'annule en 1),
  - soit $(f,g) \in F \times F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est définie et continue sur $[0,1]$ et
  $$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(1) &= \alpha f(1) + \beta g(1) \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$
  ce qui met en évidence que $\alpha f + \beta g \in F$ et donc F est bien un sous-espace vectoriel de E et dès lors, un espace vectoriel.
- Pour tout $f \in F$, on considère la fonction $\phi(f)$ définie sur $[0,1]$ de la manière suivante:
$$\forall x \in [0,1],\ \phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$
À tout élément f de F, on a associé $\phi(f)$; on a ainsi créé une fonction ϕ définie sur F.
  - Il est clair que pour tout $f \in F$, $\phi(f)$ est une fonction définie et continue sur $[0,1]$ (et même de classe C^1 sur $[0,1]$ en vertu du théorème fondamental de l'analyse). Ainsi, ϕ est une application définie sur F et à valeurs dans l'espace vectoriel E des fonctions définies et continues sur $[0,1]$.
  - Soit $(f,g) \in F \times F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in [0,1]$:
  $$\begin{aligned} \phi(\alpha f + \beta g)(x) &= \int_0^x (\alpha f + \beta g)(t)\, dt \\ &= \int_0^x (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt \\ &= \alpha \int_0^x f(t)\, dt + \beta \int_0^x g(t)\, dt \\ &= \alpha \phi(f)(x) + \beta \phi(g)(x). \end{aligned}$$
  La relation
  $$\forall x \in [0,1],\ \phi(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \phi(f)(x) + \beta \phi(g)(x)$$
  prouve
  $$\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha \phi(f) + \beta \phi(g)$$
  par définition même de la notion d'égalité de deux fonctions. Cela met en évidence le fait que l'application
  $$\phi : f \mapsto \phi(f)$$
  est une application linéaire.
  - *Mais ϕ n'est pas un endomorphisme de F.* En effet, on n'a pas nécessairement $\phi(f) \in F$ car la contrainte d'annulation en 1 peut tomber en défaut. C'est le cas par exemple pour
  $$f : t \mapsto \sin(\pi t).$$
  Il est clair que f est définie et continue sur $[0,1]$ et que $f(1) = 0$ et donc $f \in F$. Mais
  $$\begin{aligned} \phi(f)(1) &= \int_0^1 \sin(\pi t)\, dt \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi t) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{\pi}(-1-1) \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$
  Ceci prouve que $\phi(f) \notin F$. Ainsi, ϕ *n'est pas* un endomorphisme de F.

Deuxième exemple

Cette fois, F est l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles qui s'annulent en 0.

- F est bien un espace vectoriel (même démonstration que ci-dessus).
- Pour tout $f \in F$, on considère la fonction $\phi(f)$ définie sur $[0,1]$ de la manière suivante:
$$\forall x \in [0,1],\ \phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$
Comme ci-dessus, on a ainsi créé une fonction ϕ définie sur F, à valeurs dans E, linéaire.
- Mais dans la mesure où , pour tout $f \in F$,
$$\begin{aligned} \phi(f)(0) &= \int_0^0 f(t)\, dt \\ &= 0, \end{aligned}$$
on peut affirmer que $\phi(f) \in F$ et ce, pour tout $f \in F$, ce qui démontre que ϕ est un *endomorphisme* de F.

7.4 Noyau

Définition VIII.7.18 Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.
Le noyau de l'application linéaire $f : E \to F$, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de E tels que $f(\vec{v}) = \vec{0}$.
C'est un sous-espace vectoriel de E.

Premier exemple

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+3y+5z, 2x+4y+6z, 3x+7y+11z).$$

Déterminons son noyau.

- Un vecteur $\vec{v} = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f(\vec{v}) = \vec{0}$ donc si et seulement si
$$(x+3y+5z, 2x+4y+6z, 3x+7y+11z) = (0,0,0)$$
donc si et seulement si
$$\begin{cases} x+3y+5z = 0 \\ 2x+4y+6z = 0 \\ 3x+7y+11z = 0. \end{cases}$$
- On voit que $L_3 = L_1 + L_2$ donc
$$\begin{cases} x+3y+5z = 0 \\ 2x+4y+6z = 0 \\ 3x+7y+11z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y+5z = 0 \\ 2x+4y+6z = 0. \end{cases}$$
- En effectuant $L_2 - 2L_1$, on obtient
$$y = -2z$$
ce qui dans L_1 donne
$$x = z.$$
- Ainsi,
$$\begin{aligned} \vec{v} = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f &\iff \vec{v} = (z, -2z, z) \\ &\iff \vec{v} = z(1,-2,1), \end{aligned}$$
ce qui démontre que
$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1,-2,1).$$

Deuxième exemple

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (-x+2y+5z, x+2y+3z, -2x+8y+10z).$$

Déterminons son noyau.

- Un vecteur $\vec{v} = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f(\vec{v}) = \vec{0}$ donc si et seulement si
$$(-x+2y+5z, x+2y+3z, -2x+8y+10z) = (0,0,0)$$
donc si et seulement si
$$\begin{cases} -x+2y+5z = 0 \\ x+2y+3z = 0 \\ -2x+8y+10z = 0. \end{cases}$$
- En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient
$$\begin{cases} -x+2y+5z = 0 \\ x+2y+3z = 0 \\ -2x+8y+10z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y+5z = 0 \\ 4y+8z = 0 \\ 4y = 0., \end{cases}$$
d'où $y = 0$, puis $z = 0$ par L_2 puis $x = 0$ par L_1.
- Ainsi,
$$\vec{v} = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff \vec{v} = (0,0,0)$$
i.e.
$$\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}.$$

Troisième exemple

Sur l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'application f définie par

$$\forall \varphi \in E, \quad f(\varphi) = 2\varphi - \varphi'.$$

Vérifions qu'il s'agit d'un endomorphisme et déterminons son noyau.

- Pour tout $\varphi \in E$, il est clair que $2\varphi - \varphi'$ est une application définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles (car évidemment, φ étant de classe C^∞, φ' l'est aussi). Ainsi, f est déjà une application de E dans E.
- Soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in E \times E$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. De la linéarité de la dérivation, on déduit
$$\begin{aligned} f(a\varphi_1 + b\varphi_2) &= 2(a\varphi_1 + b\varphi_2) - (a\varphi_1 + b\varphi_2)' \\ &= 2a\varphi_1 + 2b\varphi_2 - a\varphi_1' + b\varphi_2' \\ &= a(2\varphi_1 - \varphi_1)' + b(2\varphi_2 - \varphi_2') \\ &= af(\varphi_1) + bf(\varphi_2). \end{aligned}$$
Ainsi, f est une application linéaire de E dans E et donc un endomorphisme de E.
- Soit $\varphi \in E$. Alors
$$\begin{aligned} \varphi \in \operatorname{Ker} f &\iff f(\varphi) = 0 \text{ (application nulle)} \\ &\iff 2\varphi - \varphi' = 0 \end{aligned}$$
donc si et seulement si φ est un élément de E qui satisfait l'équation différentielle[1]
$$y' - 2y = 0.$$
Or les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
$$t \mapsto \lambda e^{2t},\ \lambda \in \mathbb{R}$$
et elles sont toutes clairement définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ i.e. ce sont toutes des éléments de E.
- En conclusion, $\operatorname{Ker} f$ est constitué des fonctions
$$t \mapsto \lambda e^{2t},\ \lambda \in \mathbb{R}$$
ou, ce qui revient au même,
$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(\varphi_0),$$
où φ_0 est l'application définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_0(t) = e^{2t}.$$

[1] Pour bien comprendre "un élément de E", se reporter à l'exemple suivant!

Quatrième exemple

Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, on considère l'application f définie par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = 2P - P'.$$

Vérifions qu'il s'agit d'un endomorphisme et déterminons son noyau.

- Pour tout $P \in E$, il est clair que $2P - P'$ est un polynôme i.e. un élément de E. Ainsi, f est déjà une application de E dans E.
- Soit $(P_1, P_2) \in E \times E$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. De la linéarité de la dérivation, on déduit

$$\begin{aligned} f(aP_1 + bP_2) &= 2(aP_1 + bP_2) - (aP_1 + bP_2)' \\ &= 2aP_1 + 2bP_2 - aP_1' + bP_2' \\ &= a(2P_1 - P_1)' + b(2P_2 - P_2') \\ &= af(P_1) + bf(P_2). \end{aligned}$$

  Ainsi, f est une application linéaire de E dans E et donc un endomorphisme de E.
- Soit $P \in E$. Alors

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f &\iff f(P) = 0 \text{ (application nulle)} \\ &\iff 2P - P' = 0. \end{aligned}$$

  La fonction polynomiale associée à P satisfait donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2P(x) - P'(x) = 0.$$

  C'est donc une solution de l'équation différentielle

$$y' - 2y = 0.$$

  Or les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

  mais lorsque $\lambda \neq 0$, aucune d'entre elles n'est polynomiale (mais l'est évidemment lorsque $\lambda = 0$).
- Ainsi, $P \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si sa fonction polynomiale associée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, donc si et seulement si P est lui même le polynôme nul.
- En conclusion,

$$\operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

Cinquième exemple

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la forme linéaire définie par

$$\forall \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(\vec{v}) = 2x - y + z.$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

- Remarquons que f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et la linéarité est immédiate à vérifier: on a bien affaire à une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
- Soit $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} \vec{v} \in \operatorname{Ker} f &\iff f(\vec{v}) = 0 \\ &\iff 2x - y + z = 0 \\ &\iff z = y - 2x \\ &\iff \vec{v} = (x, y, y - 2x) \\ &\iff \vec{v} = x(1, 0, -2) + y(0, 1, 1) \\ &\iff \vec{v} \in \operatorname{Vect}\big((1, 0, -2), (0, 1, 1)\big). \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1, 0, -2), (0, 1, 1)\big)$$

  et puisqu'il est clair que la famille $\big((1, 0, -2), (0, 1, 1)\big)$ est libre, c'est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Noyau et injectivité

Rappel sur l'injectivité:

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
L'application f est dite ***injective*** dès lors que deux éléments quelconques différents de E ont des images différentes:

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

On démontre souvent l'injectivité par sa contraposée, en démontrant donc que si deux éléments ont la même image, c'est qu'ils sont égaux:

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Exemples

- $f : x \mapsto x^2$ n'est pas injective puisque deux réels non nuls opposés ont la même image.
- L'application f de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P + P'$$

  est injective, car:
  - si P et Q sont tels que $f(P) = f(Q)$ i.e.

$$P + P' = Q + Q',$$

    alors

$$P - Q = Q' - P'.$$

  - Notons $R = P - Q$; ce polynôme vérifie

$$R = -R'.$$

    Si R n'est pas le polynôme nul, alors $\deg R' < \deg R$ et l'égalité $R = -R'$ est alors impossible.
  - C'est donc que R est le polynôme nul; ainsi, $P = Q$ et f est injective.

Ce résultat est capital:

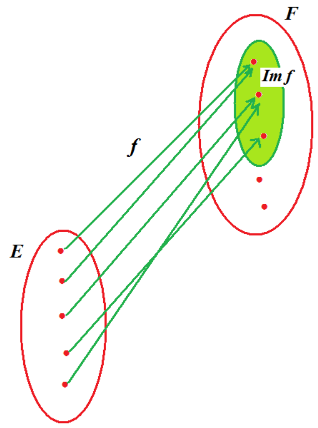
Théorème VIII.7.21 Soit E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. Alors u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$.

7.5 Image d'une application linéaire et obtention d'une base de l'image; rang

Définition VIII.7.19 Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.
L'image de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble des vecteurs $f(\vec{v})$, $\vec{v}$ parcourant E:

$$\operatorname{Im} f = \{f(\vec{v});\ \vec{v} \in E\}.$$

C'est un sous-espace de l'espace d'arrivée F, dont on recherchera souvent une base.



Théorème VIII.7.22 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel et $f : E \to F$ une application linéaire.

- Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F.
- Le ***rang*** de f est la dimension de l'image de f:

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f).$$

Rappel sur la notion de surjectivité.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. L'application f est dite surjective dès lors que tout élément de l'ensemble d'arrivée F possède au moins un antécédent:

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ /\ f(x) = y.$$

Lien entre image et surjectivité.

Théorème VIII.7.23 Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.

En effet, dire que $\mathrm{Im}\, f = F$, c'est dire que tout $\vec{y}$ de F appartient à $\mathrm{Im}\, f$ i.e. que tout vecteur $\vec{y}$ *est* une image; or être une image, c'est évidemment posséder un antécédent.

Exemple fondamental

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y + 2z, x - y, y + z).$$

Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$.

- Par linéarité, on a

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+y+2z, x-y, y+z) \\ &= x(1,1,0)+y(1,-1,1)+z(2,0,1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(f) &= \{f(\vec{v});\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{f(x,y,z);\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,1,0) + y(1,-1,1) + z(2,0,1);\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

- On voit donc que par définition même,

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0), (1,-1,1), (2,0,1)\big).$$

- Or on constate que $(2,0,1) = (1,1,0) + (1,-1,1)$ si bien que

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0), (1,-1,1)\big)$$

et comme $\big((1,1,0),(1,-1,1)\big)$ est visiblement une famille libre, une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ est donc

$$\big((1,1,0), (1,-1,1)\big).$$

- Remarquons le fait capital suivant: en notant $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ s'écrit

$$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

et par linéarité de f,

$$f(\vec{v}) = xf(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath}) + zf(\vec{k}).$$

Or on a justement

$$\begin{aligned} f(\vec{\imath}) &= f(1,0,0) = (1,1,0) \\ f(\vec{\jmath}) &= f(0,1,0) = (1,-1,1) \\ f(\vec{k}) &= f(0,0,1) = (2,1,0) \end{aligned}$$

si bien que l'on peut écrire

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\big(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}), f(\vec{k})\big)}$$

Plus généralement:

En dimension finie, principe d'obtention d'une base de l'image

Considérons une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et son image

$$(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$$

par f.

- L'image de f est l'ensemble des vecteurs $\{f(\vec{v}), \vec{v} \in E\}$.
- Tout vecteur $\vec{v}$ de E est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n.$$

- Par linéarité de f:

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n) \\ &= \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n). \end{aligned}$$

Tout vecteur $f(\vec{v})$, avec $\vec{v} \in E$, est donc combinaison linéaire des vecteurs $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$: c'est la définition même du fait que $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une partie génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.

Ainsi:

Théorème VIII.7.24 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\big(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)\big).$$

Remarques.

- On pourra appliquer la méthode du pivot de Gauß pour obtenir une base à partir de cette famille.
- Dans des situations assez fréquentes, on pourra obtenir une base en supprimant de la famille $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ des vecteurs "qui ne servent à rien", comme dans ces situations:

- $\mathrm{Vect}\big((1,1,-1),(2,0,3),(1,1,-1)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1),(2,0,3)\big)$
- $\mathrm{Vect}\big((1,1,-1),(2,0,3),(4,4,-4)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1),(2,0,3)\big)$
- $\mathrm{Vect}\big((1,1,-1),(2,0,3),(0,0,0)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1),(2,0,3)\big)$, etc.

Exemple fondamental

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y-2z, -x+y-z).$$

Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$.

- On a

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (2,1,-1) \\ f(0,1,0) & = & (1,2,1) \\ f(0,0,1) & = & (-1,-2,-1). \end{array}$$

- En conséquence,

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big((2,1,-1),(1,2,1),(-1,-2,-1)\big).$$

- Inutile d'appliquer la méthode du pivot ici: puisque le troisième est l'opposé du deuxième,

$$\mathrm{Vect}\big((2,1,-1),(1,2,1),(-1,-2,-1)\big) = \mathrm{Vect}\big((2,1,-1),(1,2,1)\big)$$

  et comme

$$\big((2,1,-1),(1,2,1)\big)$$

  est manifestement une famille libre, on en conclut que

$$\big((2,1,-1),(1,2,1)\big)$$

  est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

Autre exemple

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ f(x,y,z,t) = (5x-y-4z-3t, 3x-y-2z-t, x-z-t, 4x-y-3z-2t).$$

Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$.

- On calcule

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0,0) & = & (5,3,1,4) \\ f(0,1,0,0) & = & (-1,-1,0,-1) \\ f(0,0,1,0) & = & (-4,-2,-1,-3) \\ f(0,0,0,1) & = & (-3,-1,-1,-2). \end{array}$$

- En conséquence,

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big((5,3,1,4),(-1,-1,0,-1),(-4,-2,-1,-3),(-3,-1,-1,-2)\big).$$

- On applique alors la méthode du pivot pour déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$ en échelonnant la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

  de cette famille de vecteurs par des opérations sur les lignes: les numéros de colonnes portant les pivots seront les numéros de vecteurs de cette famille constituant une base. En effectuant $L_3 \leftrightarrow L_1$ (il est plus facile de travailler avec le pivot 1 qu'avec le pivot 5!):

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -4 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

  En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$,

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$,

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ce qui met en évidence le fait que M est de rang 2, les pivots étant portés par les colonnes 1 et 2.

- C'est pourquoi on peut affirmer que

$$\big((5,3,1,4),(-1,-1,0,-1)\big)$$

  est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

7.6 Théorème du rang

Ce résultat est absolument fondamental:

Théorème VIII.7.25 Soit $f : E \to F$ une application linéaire, l'espace E étant de dimension finie. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(E).$$

Démonstration 10

Vérification sur un exemple

On reprend l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ f(x,y,z,t) = (5x-y-4z-3t, 3x-y-2z-t, x-z-t, 4x-y-3z-2t)$$

où il a été vu que

$$\big((5,3,1,4),(-1,-1,0,-1)\big)$$

est une base de $\mathrm{Im}\, f$ et donc $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$. Déterminons une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

- Soit $\vec{v} = (x,y,z,t)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \vec{v} \in \mathrm{Ker}\, f & \iff & f(\vec{v}) = \vec{0} \\ & \iff & (5x-y-4z-3t, 3x-y-2z-t, x-z-t, 4x-y-3z-2t) = (0,0,0,0) \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{l} 5x-y-4z-3t = 0 \\ 3x-y-2z-t = 0 \\ x-z-t = 0 \\ 4x-y-3z-2t = 0. \end{array} \right. \end{array}$$

- On écrit la matrice augmentée du système:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

- En effectuant les mêmes opérations sur les lignes que celles qui ont conduit à l'échelonnement de M, la matrice augmentée du système est équivalente à

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- Les pivots 1 et -1 affectent les *inconnues principales*, qui sont donc x et y. Les autres inconnues z et t sont les *inconnues secondaires* ou *paramètres* et sont passés dans le second membre. On obtient alors le *système triangulaire*

$$\left\{\begin{array}{l} x = z + t \\ -y = -z - 2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = z + t \\ y = z + 2t. \end{array}\right.$$

- Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \vec{v} = (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f & \iff & \left\{\begin{array}{l} x = z + t \\ y = z + 2t \end{array}\right. \\ & \iff & \vec{v} = (z + t, z + 2t, z, t) \\ & \iff & \vec{v} = z(1, 1, 1, 0) + t(1, 2, 0, 1) \\ & \iff & \vec{v} \in \operatorname{Vect}\big((1, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\big). \end{array}$$

  Il est manifeste que la famille $\big((1, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\big)$ est libre; c'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$, qui est alors de dimension 2.
- On a donc

$$\begin{array}{rcl} \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) & = & 2 + 2 \\ & = & 4 \\ & = & \dim(\mathbb{R}^4) \end{array}$$

  comme le prévoit la théorie.

Autre exemple

Soit un entier $n \geq 2$. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on considère la forme linéaire f définie par

$$\forall \vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{v}) = x_1 + \dots + x_n.$$

Quel est son rang? Déterminer ensuite une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$ puis en déduire une base.

- *Rang*. L'image de f est, par définition, un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée, qui est ici $\mathbb{R}$. Or l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est de dimension[2] 1.
  - Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ est donc de dimension 0 ou 1.
  - Si c'est 0, ce sous-espace vectoriel est le sous-espace $\{0\}$.
  - Si c'est 1, qui est la dimension de l'espace vectoriel "ambiant" $\mathbb{R}$, ce sous-espace est $\mathbb{R}$ lui-même.

  Ainsi, $\operatorname{Im} f = \{0\}$ ou $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

  - Mais $\operatorname{Im} f = \{0\}$, c'est à dire: "l'ensemble de toutes les images par l'application f est constitué du singleton $\{0\}$"
  $$\{f(\vec{v}), \vec{v} \in \mathbb{R}^n\} = \{0\}$$
  signifie tout simplement
  $$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \ f(\vec{v}) = 0.$$
  Ce n'est manifestement pas le cas ici, puisque par exemple $f(1, 0, \dots, 0) = 1$.
  - C'est donc que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.
- Ainsi, $\operatorname{rg} f = 1$.
- *Famille génératrice de* $\operatorname{Ker} f$. Soit $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \vec{v} \in \operatorname{Ker} f & \iff & f(\vec{v}) = 0 \\ & \iff & x_1 + \dots + x_n = 0 \\ & \iff & x_n = -x_1 - \dots - x_{n-1} \\ & \iff & \vec{v} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_1 - \dots - x_{n-1}) \\ & \iff & \vec{v} = x_1(1, 0, \dots, 0, -1) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0, -1) + \dots + x_{n-1}(0, \dots, 0, 1, -1) \\ & \iff & \vec{v} \in \operatorname{Vect}\big((1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1)\big). \end{array}$$

  Ainsi,
  $$\big((1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1)\big)$$
  est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$.
- *Base de* $\operatorname{Ker} f$. On sait que $\operatorname{rg} f = 1$. Du théorème du rang, on déduit
  $$\dim(\operatorname{Ker} f) = n - 1.$$
  Or
  $$\big((1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1)\big)$$
  est une famille génératrice comportant $n - 1$ vecteurs du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$ que l'on sait être de dimension $n - 1$. Il résulte de la théorie de la dimension que c'est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Méthodes d'obtention du rang

- On peut appliquer le "principe d'obtention d'une base de l'image" développé ci-dessus: disposant d'une base de l'image, on en déduit son rang,
- ou appliquer la méthode du pivot (cf. Repésentation matricielle),
- ou appliquer le théorème du rang si l'on connait déjà $\operatorname{Ker} f$.

Exemple

On se fixe un entier $n \geq 1$. sur l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère l'application f définie par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = (2X - 1)P'.$$

Vérifier que f est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et en déduire son rang.

[2] N'importe quel "vecteur" non nul (donc n'importe quel réel non nul) comme 3 ou $\frac{\pi}{4}$, est une base de $\mathbb{R}$ puisque pour tout "vecteur" x de $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$x = \left(\frac{x}{3}\right) \times 3.$$

Ainsi, 3 est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ qui est donc de dimension 1!

- Soit $P \in E$. Il est clair que $f(P)$ est un polynôme et puisque $\deg(P) \leq n$, on a $\deg(P') \leq n-1$ et en conséquence,
$$\deg((2X-1)P') = \deg(2X-1) + \deg(P') \leq 1 + n - 1 = n.$$
Ceci prouve que $f(P) \in E$ et donc que f est une application de E dans E.
- Soit $(P,Q) \in E \times E$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$\begin{aligned} f(aP+bQ) &= (2X-1)(aP+bQ)' \\ &= (2X-1)(aP'+bQ') \\ &= a(2X-1)P' + b(2X-1)Q' \\ &= af(P) + bf(Q). \end{aligned}$$
Ainsi, f est une application linéaire de E dans E i.e. un endomorphisme de E.
- Déterminons $\operatorname{Ker} f$. On a
$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f &\iff f(P) = 0 \\ &\iff (2X-1)P' = 0 \\ &\iff P' = 0, \end{aligned}$$
ce qui démontre que $\operatorname{Ker} f$ est constitué des polynômes constants, ou autre manière de le dire:
$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1).$$
- Ceci prouve que
$$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1.$$
Puisque $\dim E = n+1$, on déduit du théorème du rang que
$$\dim(\operatorname{Im} f) = n,$$
c'est à dire $\operatorname{rg}(f) = n$.

Détermination de l'image dans d'autres situations

Proposition VIII.7.26

- L'image de f, application de E dans F, est constituée des vecteurs $\{f(\vec{v}),\ \vec{v} \in E\}$.
- Donc appartenir à l'image d'une application, c'est posséder un antécédent par cette application: un vecteur $\vec{w}$ de F est dans l'image de f si et seulement s'il existe un vecteur $\vec{v}$ de E tel que $\vec{w} = f(\vec{v})$.

7.7 Image d'un sous-espace vectoriel

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Théorème VIII.7.27 Soit $f : E \to F$ une application linéaire et A un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie.

- Alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ est une base de A, alors
$$(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_r))$$
est une partie génératrice de $f(A)$.

Exemple

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par
$$\forall \vec{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ f(\vec{v}) = (2y - z + t, x - y + z + t, -y + z - t, y + 2z - 2t)$$
ainsi que les vecteurs
$$\vec{e}_1 = (1,1,1,1),\ \vec{e}_2 = (0,1,1,1), \vec{e}_3 = (-1,1,2,2).$$
Déterminer une base de $f(A)$, où
$$A = \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

- On commence par rechercher une base de A et on étudie donc le rang de la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on a
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
et par les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, on a
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Cette dernière matrice étant échelonnée à 3 pivots, on en déduit que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est de rang 3 et que c'est donc une base de A.
- On calcule
$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= (2,2,-1,1) \\ f(\vec{e}_2) &= (2,1,-1,1) \\ f(\vec{e}_3) &= (2,2,-1,1) \end{aligned}$$
et la théorie prévoit que $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3))$ est une famille génératrice de $f(A)$. Pour déterminer une base de $f(A)$, nous nous devons donc de trouver le rang de cette famille.
- On voit immédiatement (inutile de passer par la méthode du pivot) que $f(\vec{e}_3) = f(\vec{e}_1)$ et que la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2))$ est libre.
- C'est pourquoi $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2))$ est une base de $f(A)$.

8 Automorphismes; isomorphismes

Définition VIII.8.20

- Un automorphisme est un endomorphisme f d'un espace vectoriel E qui établit une bijection de E dans E.
- Dans ce cas, l'application réciproque f^{-1} est-elle aussi linéaire (et est donc également un automorphisme de E).

Exemple

Démontrer que l'application
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} = (x,y,z) &\longmapsto (x+y+z, x-y+2z, x+2y-2z), \end{aligned}$$
est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et préciser l'application f^{-1}.

- Le fait que f soit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est immédiat.
- Démontrons que f établit une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ en se ramenant à la définition, c'est à dire en démontrant que tout élément de $\mathbb{R}^3$ (espace d'arrivée) possède un unique antécédent par f.
  - Soit donc $\vec{w}=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Alors $\vec{u}=(x,y,z)$ est un antécédent de $\vec{w}$ par f si et seulement si $f(\vec{u})=\vec{w}$, c'est à dire si et seulement si
$$(S)\ \begin{cases} x+y+z=a \\ x-y+2z=b \\ x+2y-2z=c. \end{cases}$$
$L_2 \leftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-L_1$ donne
$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z=a \\ -2y+z=b-a \\ y-3z=c-a. \end{cases}$$
$L_2 \leftarrow L_2+2L_3$ conduit à
$$z=\frac{3a-b-2c}{5}$$
qui, reporté dans L_2, donne
$$y=\frac{4a-3b-c}{5}$$
et finalement L_1 donne
$$x=\frac{-2a+4b-3c}{5}.$$
  - Ainsi, $\vec{w}$ possède un antécédent et un seul par f, à savoir
$$\vec{u}=\left(\frac{-2a+4b-3c}{5},\frac{4a-3b-c}{5},\frac{3a-b-2c}{5}\right).$$
  - Donc f est bien une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et de ce fait un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Son application réciproque f^{-1} est l'application qui à tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ (espace d'arrivée) associe son unique antécédent par f; elle est donc définie par
$$\begin{array}{rcl} f^{-1}:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{w}=(a,b,c) & \longmapsto & \left(\frac{-2a+4b-3c}{5},\frac{4a-3b-c}{5},\frac{3a-b-2c}{5}\right). \end{array}$$

Propriétés des automorphismes

Théorème VIII.8.28 Soit f un automorphisme d'un espace E de dimension finie.
- L'image d'une base de E est une base de E i.e. si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de E.
- Plus généralement, si F est un sous-espace de E et $(e_1,\dots,e_r)$ est une base de F, alors $(f(e_1),\dots,f(e_r))$ est une base de F.
- En particulier, un automorphisme conserve la dimension i.e. si F est un sous-espace vectoriel de dimension r, alors $f(F)$ est lui aussi de dimension r (par exemple l'image d'une droite est une droite, l'image d'un plan est un plan).

Caractérisation des automorphismes en dimension finie: capital

Théorème VIII.8.29 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Alors
- f est un automorphisme de E si et seulement si l'image d'une base de E (de notre choix) est une base de E (et c'est alors vrai pour toute base de E).
- f est un automorphisme de E si et seulement si $\operatorname{Ker} f=\{\vec{0}\}$ (dans le jargon, on dit "$\operatorname{Ker} f$ est réduit au vecteur nul").
- f est un automorphisme de E si et seulement si $\operatorname{Im} f=E$.

Ce résultats, et surtout les deux derniers, sont d'une efficacité incroyable, comparés à la méthode centrée sur la recherche d'un unique antécédentà tout vecteur de E.

Suivant le contexte, on sera amené à utiliser l'une ou l'autre de ces deux caractérisations.

Premier exemple

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(-x+2y+5z,x+2y+3z,-2x+8y+10z).$$
Déterminer son noyau et en déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- *Remarque.* Il est clair que f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et il est immédiat de vérifier que f est une application linéaire; ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Un vecteur $\vec{v}=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f(\vec{v})=\vec{0}$ donc si et seulement si
$$(-x+2y+5z,x+2y+3z,-2x+8y+10z)=(0,0,0)$$
donc si et seulement si
$$\begin{cases} -x+2y+5z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2x+8y+10z=0. \end{cases}$$
- En effectuant $L_2 \leftarrow L_2+L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$, on obtient
$$\begin{cases} -x+2y+5z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2x+8y+10z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y+5z=0 \\ 4y+8z=0 \\ 4y=0., \end{cases}$$
d'où $y=0$, puis $z=0$ par L_2 puis $x=0$ par L_1.
- Ainsi,
$$\vec{v}=(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f \iff \vec{v}=(0,0,0)$$
i.e.
$$\operatorname{Ker} f=\{\vec{0}\}$$
et il en résulte que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Deuxième exemple

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(-x+4y+5z,x+2y+3z,-2x+8y+10z).$$
Déterminer son noyau et en déduire que f est n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- *Remarque.* Il est clair que f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et il est immédiat de vérifier que f est une application linéaire; ainsi, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

- Un vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f(\vec{v}) = \vec{0}$ donc si et seulement si
$$(-x + 4y + 5z, x + 2y + 3z, -2x + 8y + 10z) = (0, 0, 0)$$
donc si et seulement si
$$\begin{cases} -x + 4y + 5z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 8y + 10z = 0. \end{cases}$$
- En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ qui produit $0 = 0$, on obtient
$$\begin{cases} -x + 4y + 5z = 0 \\ 6y + 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 4y + 5z = 0 \\ y + = -\frac{4}{3}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z \\ y + = -\frac{4}{3}z \end{cases}$$
avec aucune contrainte sur z.
- Ainsi,
$$\begin{aligned} \vec{v} = (x, y, z) \in \operatorname{Ker} f &\iff \vec{v} = \left(-\frac{1}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right), \ z \in \mathbb{R} \\ &\iff \vec{v} = z\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right), \ z \in \mathbb{R} \\ &\iff \vec{v} \in \operatorname{Vect}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right). \end{aligned}$$
- Il en résulte que $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit au seul vecteur nul et que f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Troisième exemple

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application f définie par
$$\forall P \in E, \quad f(P) = 3P - (X + 4)P' - 2P''.$$
Vérifier que f est un endomorphisme de E. Justifier que f est de rang 3 en calculant $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. En déduire que f est un automorphisme de E.

- Tout d'abord, $f(P)$ est bien un polynôme (somme, produit de polynômes) pour tout polynôme P et si $\deg P \leq 2$, alors $\deg(P') \leq 1$, donc $\deg((X + 4)P') \leq 2$ et enfin puisque $\deg(P'') \leq 0$, il en résulte que $\deg(f(P)) \leq 2$ pour tout $P \in E$. Ainsi, f est bien une application définie sur E et à valeurs dans E.
- Prouvons sa linéarité; soit $(P, Q) \in E \times E$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= 3(\alpha P + \beta Q) - (X + 4)(\alpha P + \beta Q)' - 2(\alpha P + \beta Q)'' \\ &= \alpha(3P - (X + 4)P' - 2P'') + \beta(3Q - (X + 4)Q' - 2Q'') \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q), \end{aligned}$$
ce qui prouve que f est une application linéaire et en conséquence, un endomorphisme de E.
- On calcule
$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(X) &= 2X - 4 \\ f(X^2) &= X^2 - 8X - 4. \end{aligned}$$
Puisque $(1, X, X^2)$ est une base de E, $(f(1), f(X), f(X^2))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ (cf. propriété exposée dans la section ***Image***). D'après ces calculs, on voit que la famille de polynômes $(f(1), f(X), f(X^2))$ est échelonnée en degrés et est donc libre (cf. début de chapitre). C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$. On a donc $\operatorname{rg}(f) = 3$, c'est à dire $\operatorname{rg}(f) = \dim E$ et c'est pourquoi f est un automorphisme de E.

Isomorphisme

Soit E et F deux espaces vectoriels.

Définition VIII.8.21 Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective f de E dans F. L'application $f^{-1} : F \to E$ est alors linéaire et un isomorphisme de F dans E.

Comment prouver qu'une application est un isomorphisme?

Proposition VIII.8.30 Soit E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Suivant le contexte, on pourra utiliser l'une des caractérisations suivantes:
- f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ et $\operatorname{Im} f = F$ (donc si et seulement si f est injective et surjective i.e. si et seulement si f est bijective.
- f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.
- Si l'on sait déjà que E et F *ont la même dimension*, alors f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si f est injective donc si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.
- Si l'on sait déjà que E et F *ont la même dimension*, alors f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si f est surjective donc si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Exemple

On considère l'application
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto \big(P(1), P'(1), P''(1)\big). \end{aligned}$$
Démontrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ puis démontrer de trois manières que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$:

1. en considérant l'image de la base $(1, X, X^2)$,
2. en jouant sur les dimensions de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$,
3. en utilisant seulement la définition.

Il est clair que f est une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$. Prouvons sa linéarité; pour tout $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a par linéarité de la dérivation
$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + \mu P_2) &= \big((\lambda P_1 + \mu P_2)(1), (\lambda P_1 + \mu P_2)'(1), (\lambda P_1 + \mu P_2)''(1)\big) \\ &= \big(\lambda P_1(1) + \mu P_2(1), \lambda P_1'(1) + \mu P_2'(1), \lambda P_1''(1) + \mu P_2''(1)\big) \\ &= \lambda\big(P_1(1), P_1'(1), P_1''(1)\big) + \mu\big(P_2(1), P_2'(1), P_2''(1)\big) \\ &= \lambda f(P_1) + \mu f(P_2), \end{aligned}$$
ce qui prouve que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. On a
$$\begin{aligned} f(1) &= (1, 0, 0) \\ f(X) &= (1, 1, 0) \\ f(X^2) &= (1, 2, 2). \end{aligned}$$

La famille
$$((1,0,0),(1,1,0),(1,2,2))$$
constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Cette famille compte 3 vecteurs et puisque par l'opération $L_3 \leftarrow L3 - 2L_2$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
qui est une matrice échelonnée à 3 pivots, cette famille est de rang 3 et donc une base de $\mathbb{R}^3$. Dans la mesure où l'image de la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ par f est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.

2. Du fait que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ (car $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$) et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, et donc $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ ont la même dimension, il suffit de démontrer que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ pour établir que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$. Soit donc $P \in \operatorname{Ker} f$.

   - On a alors
   $$f(P) = (0,0,0),$$
   c'est à dire
   $$P(1) = 0,\ P'(1) = 0,\ P''(1) = 0.$$
   - Rappelons la formule de Taylor pour les polynômes:
   $$\forall a \in \mathbb{K},\ \forall P \in \mathbb{K}[X],\ \deg P \leq n \implies P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$
   Appliquée ici avec $a = 1$, elle donne:
   $$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2$$
   et conduit alors à
   $$P = 0.$$

   C'est donc la preuve que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.

3. Prouvons que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$ en se ramenant à la définition, c'est à dire en démontrant que f établit une bijection de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ et donc en démontrant que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

   - On prouve que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ de la même manière que précédemment.
   - Prouvons que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, c'est à dire démontrons que tout élément de $\mathbb{R}^3$ possède un antécédent par f. Soit donc $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
     – Posons
     $$P = a + b(X-1) + \frac{c}{2}(X-1)^2$$
     (ce choix est motivé par une identification avec la formule de Taylor).
     – Alors
     $$P(1) = 1$$
     puis
     $$P' = b + c(X-1) \implies P'(1) = b$$
     et enfin
     $$P'' = c \implies P''(1) = c.$$
     – On a donc
     $$f(P) = (a,b,c).$$

   C'est la preuve que $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f$ et donc que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ et finalement f est une bijection de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.

9 Calcul matriciel

Multiplication matricielle

Définition VIII.9.22

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ une matrice à n lignes et p colonnes, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$ une matrice à p lignes et q colonnes.

Le produit $A.B$ est la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}}$ à n lignes et q colonnes définie par
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$
Le produit matriciel n'est défini que lorsque le nombre de colonnes de la première égale le nombre de lignes de la seconde: $(n,p) \times (p,q) \rightsquigarrow (n,q)$. En particulier:

- le produit $C = A.B$ de deux matrices carrées $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ d'ordre n est toujours défini:
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$
- Le produit $Y = AX$ d'une matrice carrée A d'ordre n par une matrice colonne X de taille $(n,1)$ est défini et donne une matrice colonne $(n,1)$,
- le produit ${}^tX.Y$ est défini pour toutes matrices colonnes X et Y de taille $(n,1)$ et donne une matrice $(1,1)$, c'est à dire un scalaire.

Formule du binôme

Proposition VIII.9.31 Soit A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$ qui commutent:
$$AB = BA.$$
et N un entier. Alors
$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k},$$
avec la convention habituelle $A^0 = I_n$.

Exemple d'utilisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. En posant $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et en écrivant $A = J + 2I_3$, calculer A^N pour tout entier N.

- Les matrices J et $2I_3$ commutent puisque, plus généralement, λI_3 commute avec toute matrice.
- On a donc d'après la formule du binôme de Newton:
$$A^N = (J + 2I_3)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} J^k (2I_3)^{N-k}.$$

- Bien entendu,
$$(2I_3)^{N-k} = 2^{N-k} I_3^{N-k} = 2^{N-k} I_3$$
et on a donc dans un premier temps
$$\begin{aligned} A^N &= (J+2I_3)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} J^k 2^{N-k} I_3 = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} J^k I_3 \\ &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} J^k. \end{aligned}$$
- Par un calcul immédiat:
$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$
et en conséquence
$$J^3 = J^2 \times J = 3J \times J = 3J^2 = 3 \times 3J = 9J$$
et par une récurrence immédiate:
$$\forall k \geq 1, \quad J^k = 3^{k-1} J.$$
- La formule ci-dessus n'étant valable que pour $k \geq 1$, on va isoler $k = 0$ dans la somme:
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} J^k &= \binom{N}{0} 2^{N-0} J^0 + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} J^k \\ &= 2^N I_3 + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^{k-1} J. \end{aligned}$$
Or dans cette somme, tous les scalaires $\binom{N}{k} 2^{N-k} 3^{k-1}$ affectent la même matrice J; on a donc par une mise en facteur:
$$\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^{k-1} J = \left(\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^{k-1} \right) J.$$
- On reconnaît presque le développement de
$$(2+3)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^k,$$
c'est à dire de 5^N, sauf que 3 n'est pas à la bonne puissance et la somme démarre à 0. En écrivant
$$3^{k-1} = \frac{1}{3} 3^k,$$
on obtient
$$\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^k$$
et en rajoutant/retranchant le terme correspondant à $k = 0$ qui vaut
$$\binom{N}{0} 2^{N-0} 3^0 = 2^N,$$
on a
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^k &= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^k \ - 2^N \\ &= (2+3)^N - 2^N = 5^N - 2^N. \end{aligned}$$
- On en conclut:
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^{k-1} &= \frac{1}{3} \left(5^N - 2^N\right) \\ \left(\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} 3^{k-1} \right) J &= \frac{1}{3} \left(5^N - 2^N\right) J \\ \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} J^k &= 2^N I_3 + \frac{1}{3} \left(5^N - 2^N\right) J \\ A^N &= 2^N I_3 + \frac{1}{3} \left(5^N - 2^N\right) J, \end{aligned}$$
ce qui donne tous calculs faits
$$A^N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 2^N + 5^N & 5^N - 2^N & 5^N - 2^N & \\ 5^N - 2^N & 2 \times 2^N + 5^N & 5^N - 2^N & 5^N - 2^N \\ 5^N - 2^N & 5^N - 2^N & 2 \times 2^N + 5^N & \end{pmatrix}.$$

9.1 Transposée, matrices symétriques, antisymétriques

Définition VIII.9.23
- La transposée de $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ à n lignes et p colonnes est la matrice à p lignes et n colonnes notée M^T et dont les coefficients $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont définis par
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{ij} = a_{ji}.$$
Les lignes (resp. colonnes) de M^T sont les colonnes (resp. lignes) de M.
- Pour toutes matrices A et B dont la taille est compatible avec le produit AB et tous scalaires α, β,
$$(A^T)^T = A, \qquad (AB)^T = B^T \times A^T, \qquad (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T.$$
- Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est symétrique lorsque
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!], \quad a_{ji} = a_{ij}$$
donc lorsque $A^T = A$.
- Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est antisymétrique lorsque
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!], \quad a_{ji} = -a_{ij}$$
donc lorsque $A^T = -A$.

9.2 Matrices inversibles; calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauß

Définition VIII.9.24 Une matrice carrée M d'ordre n est dite inversible lorsqu'il existe une matrice carrée N d'ordre n telle que
$$MN = NM = I_n.$$
La matrice N est alors notée M^{-1} et s'appelle l'inverse de M.

Remarques, propriétés et caractérisations.

Théorème VIII.9.32

- Pour que M soit inversible, il suffit qu'il existe une matrice N telle que $MN = I_n$ (resp. $NM = I_n$); on a alors automatiquement l'autre égalité $NM = I_n$ (resp. $MN = I_n$). On dit aussi que pour que M soit inversible, il suffit qu'elle soit inversible d'un seul côté, elle sera alors automatiquement inversible de l'autre côté.
- Une matrice carrée M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.
- Une matrice carrée M d'ordre n est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(M) = n$.
- Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n inversibles, alors le produit AB est inversible et
$$(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$
- Si A est une matrice carrée inversible, alors A^T est inversible et
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauß

On effectue une suite d'opérations élémentaires sur les *lignes* de la matrice à inverser jusqu'à obtention de I_n et on effectue les mêmes opérations sur la matrice unité; la matrice obtenue est l'inverse recherché.

Exemple

Calculer l'inverse de
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse. On effectue les opérations suivantes:

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\
L_3 \longleftarrow -2L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
L_2 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi,
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

10 Représentation matricielle

10.1 L'idée motrice: le "codage" dans une base

- D'ordinaire, une application (quelle qu'elle soit) est définie par une formule applicable à tout élément de l'ensemble de départ et qui permet de calculer son image, comme l'application f : $x \mapsto x^2 e^{\sin x}$ ou l'application $f : (x, y) \mapsto x^3 \cos(y)$.
- En revanche, lorsque l'on a affaire à une application *linéaire* définie sur un espace vectoriel de dimension finie, nul besoin de formule: comme on va le voir sur les exemples qui vont suivre, il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base; la linéarité fait le reste.

Premier exemple

On va travailler dans la base $\mathcal{B} = \big((1, 1), (-1, 1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ (il est immédiat de vérifier que c'en est bien une). Sachant que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que
$$\begin{aligned} f(1, 1) &= 2 \times (1, 1) - 1 \times (-1, 1) \\ f(-1, 1) &= 3 \times (1, 1) - 2 \times (-1, 1), \end{aligned}$$
il est possible de calculer l'image de tout vecteur, en procédant de la façon suivante:

- prenons par exemple $\vec{v}=(4,1)$. On le décompose sur la base $\mathcal{B}$:
$$\begin{array}{ll} & \vec{v}=a(1,1)+b(-1,1)\\ \Longleftrightarrow & (4,1)=a(1,1)+b(-1,1)\\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}4=a-b\\1=a+b\end{array}\right.\\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}a=\frac{5}{2}\\b=-\frac{3}{2}\end{array}\right.\\ \Longleftrightarrow & \vec{v}=\dfrac{5}{2}(1,1)-\dfrac{3}{2}(-1,1)\end{array}$$
et par linéarité de f on a alors
$$\begin{array}{rcl} f(\vec{v}) &=& f\left(\dfrac{5}{2}(1,1)-\dfrac{3}{2}(-1,1)\right)\\ &=& \dfrac{5}{2}f(1,1)-\dfrac{3}{2}f(-1,1)\\ &=& \dfrac{5}{2}\left(2\times(1,1)-(-1,1)\right)-\dfrac{3}{2}\left(3\times(1,1)-2\times(-1,1)\right)\\ &=& \left(5-\dfrac{9}{2}\right)\times(1,1)+\left(-\dfrac{5}{2}+3\right)\times(-1,1)\\ &=& \dfrac{1}{2}(1,1)+\dfrac{1}{2}(-1,1).\end{array}$$
L'image de $f(\vec{v})$ est parfaitement déterminée.
- On peut reproduire ce schéma avec n'importe quel vecteur. Soit $\vec{v}=(x,y)$. On le décompose sur la base $\mathcal{B}$:
$$\begin{array}{ll} & \vec{v}=a(1,1)+b(-1,1)\\ \Longleftrightarrow & (x,y)=a(1,1)+b(-1,1)\\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}x=a-b\\y=a+b\end{array}\right.\\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{2}(x+y)\\ \\b=\frac{1}{2}(y-x)\end{array}\right.\\ \Longleftrightarrow & \vec{v}=\dfrac{1}{2}(x+y)\times(1,1)+\dfrac{1}{2}(y-x)\times(-1,1)\end{array}$$
et par linéarité de f on a alors
$$\begin{array}{rcl} f(\vec{v}) &=& f\left(\dfrac{1}{2}(x+y)\times(1,1)+\dfrac{1}{2}(y-x)\times(-1,1)\right)\\ &=& \dfrac{1}{2}(x+y)f(1,1)+\dfrac{1}{2}(y-x)f(-1,1)\\ &=& \dfrac{1}{2}(x+y)\left(2\times(1,1)-(-1,1)\right)+\dfrac{1}{2}(y-x)\left(3\times(1,1)-2\times(-1,1)\right)\\ &=& \dfrac{5y-x}{2}\times(1,1)+\dfrac{x-3y}{2}\times(-1,1).\end{array}$$
L'image de $f(\vec{v})$ est parfaitement déterminée.

Remarquons les faits importants suivants:
- Les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}=\big((1,1),(-1,1)\big)$ ont été initialement exprimées *dans la base* $\mathcal{B}$:
$$\begin{array}{rcl} f(1,1) &=& 2\times(1,1)-1\times(-1,1)\\ f(-1,1) &=& 3\times(1,1)-2\times(-1,1)\end{array}$$
- Les vecteurs $(4,1)$ puis (x,y) ont été "codés" dans la base $\mathcal{B}$ i.e. on a exprimé ces vecteurs comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base et leurs images ont été produites "codées" dans cette même base.
- Dans ce processus de production des images, les scalaires 2 et -1 (les composantes de $f(1,1)$ dans la base B) puis 3 et -2 (les composantes de $f(-1,1)$ dans la base $\mathcal{B}$) ont joué un rôle clé.
- C'est la raison pour laquelle l'application f sera définie par son "nom de code
$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$
dans la base $\mathcal{B}$" (c'est par convention que ces composantes sont écrites verticalement). Évidemment, le vocabulaire sera un peu différent par la suite!

$\boxed{\textbf{\textit{Deuxième exemple}}}$

On travaille cette fois dans la base canonique $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Sachant que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que
$$\begin{array}{rcl} f(1,0) &=& (1,2)\\ f(0,1) &=& (2,-2),\end{array}$$
il est possible de calculer l'image de tout vecteur, en procédant de la façon suivante:
- prenons par exemple $\vec{v}=(4,1)$. On le décompose sur la base $\mathcal{B}$:
$$\vec{v}=4(1,0)+(0,1)$$
et par linéarité de f on a alors
$$\begin{array}{rcl} f(\vec{v}) &=& f\left(4(1,0)+(0,1)\right)\\ &=& 4f(1,0)+f(0,1)\\ &=& 4(1,2)+(2,-2)\\ &=& (6,6).\end{array}$$
L'image de $f(\vec{v})$ est parfaitement déterminée.
- On peut reproduire ce schéma avec n'importe quel vecteur. Soit $\vec{v}=(x,y)$. On le décompose sur la base $\mathcal{B}$:
$$\vec{v}=x(1,0)+y(0,1)$$
et par linéarité de f on a alors
$$\begin{array}{rcl} f(\vec{v}) &=& f\left(x(1,0)+y(0,1)\right)\\ &=& xf(1,0)+yf(0,1)\\ &=& x(1,2)+y(2,-2)\\ &=& (x+2y,2x-2y).\end{array}$$
L'image de $f(\vec{v})$ est parfaitement déterminée.
- L'application f recevra donc "le nom de code
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$
dans la base canonique".
- ***Remarque capitale.*** Considérons la base $\mathcal{B}_0=\big((1,-2),(2,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ (il est immédiat de vérifier que c'en est bien une). Avec la formule établie ci-dessus, on calcule
$$\begin{array}{rcl} f(1,-2) &=& (-3,6)\\ f(2,1) &=& (4,2).\end{array}$$

Observons que

$$\begin{array}{rcl} f(1,-2) & = & (-3,6) \\ & = & -3\times(1,-2) \\ & = & -3\times(1,-2)+0\times(2,1) \\ f(2,1) & = & (4,2) \\ & = & 2\times(2,1) \\ & = & 0\times(1,-2)+2\times(2,1). \end{array}$$

Pour ces raisons, L'application f recevra donc "le nom de code

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}_0$".

En bref, une application linéaire peut être codée (par une matrice dans une certaine base), à condition de bien préciser le code (la base) et à condition que tout le monde parle le même code (les vecteurs doivent être exprimés dans cette base).

10.2 Matrice colonne d'un vecteur dans une base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Définition VIII.10.25 Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une base de E et $\vec{x}$ un vecteur de E; ce vecteur se décompose sur la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\ldots+x_n\vec{e}_n.$$

La matrice colonne de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$ est la matrice colonne $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, qui est donc constituée des scalaires nécessaires à l'écriture de $\vec{x}$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$.

- Dans $\mathbb{R}^3$ par exemple, un vecteur $\vec{v}$ est un triplet de réels écrits horizontalement: $\vec{v}=(x,y,z)$. Puisque
$$\vec{v}=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1),$$
sa matrice colonne V dans la base canonique est le même triplet, mais écrit verticalement: $V=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- Il est aisé de vérifier que $\mathcal{B}'=\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $\vec{v}=(4,2,1)$ a pour matrice colonne $X=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Mais puisque
$$\begin{array}{rcl} (4,2,1) & = & (2,0,0)+(1,1,0)+(1,1,1) \\ & = & 2\times(1,0,0)+1\times(1,1,0)+1\times(1,1,1), \end{array}$$
sa matrice colonne dans la base $\mathcal{B}'$ est $X'=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- La notion de matrice colonne est fondamentale pour calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire dont la matrice est donnée dans une base (cf. plus bas).
- C'est également important dans le calcul "abstrait" d'un produit scalaire (cf. chapitre ultérieur).

10.3 Endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée

Soit un entier $n\geq 1$.

Théorème VIII.10.33 Soit $M=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n1} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M est l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ défini de la façon suivante:

- pour tout vecteur $\vec{v}=(x_1,\ldots,x_n)$, on a $f(\vec{v})=(y_1,\ldots,y_n)$ avec
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=M\times\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
- On a donc
$$u(x_1,\ldots,x_n)=\big(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\ldots,a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n\big).$$

Remarque. On a donc
$$u(1,0,\ldots,0)=(a_{11},\ldots,a_{n1})$$
si bien que la première colonne "code" effectivement dans la base canonique le vecteur $u(\vec{e}_1)$ où $\vec{e}_1=(1,0,\ldots,0)$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et ainsi de suite pour les autres colonnes.

Convention. On dit aussi que M et u sont associés dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit $\vec{v}=(0,1,1)$. Alors
$$M\times\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
On a donc $f(\vec{v})=(4,3,3)$.
- ***Question fondamentale.*** Comment trouver $\operatorname{Ker} f$?
  - Un vecteur $\vec{v}=(x,y,z)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f(\vec{v})=(0,0,0)$, donc si et seulement si
  $$M\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  c'est à dire si et seulement si
  $$\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \\ -x+2y+z=0. \end{cases}$$
  L_2+L_3 donne $y=-z$, que l'on reporte dans L_1, ce qui donne $x=-z$.
  - Ainsi,
  $$\vec{v}=(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f\iff\vec{v}=(-z,-z,z)\iff\vec{v}=z(-1,-1,1),$$
  ce qui met en évidence:
  $$\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(-1,-1,1).$$
  - La recherche de l'image fera l'objet d'un paragraphe particulier.

10.4 Représentation matricielle d'un endomorphisme dans le cas général

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Définition VIII.10.26 Soit u un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice carrée $n \times n$ obtenue en écrivant:

- dans sa première colonne les composantes de $u(\vec{e}_1)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$u(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n \rightsquigarrow \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}}^{\text{1ère colonne}}$$

- et ainsi de suite: dans sa $n^{\text{ième}}$ colonne les composantes de $u(\vec{e}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{u(\vec{e}_1) \text{ "codé" dans } (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)} & \boxed{u(\vec{e}_2) \text{ "codé" dans } (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)} & \ldots & \boxed{u(\vec{e}_n) \text{ "codé" dans } (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)} \end{pmatrix}.$$

- On écrit donc dans la première colonne les scalaires nécessaires à l'écriture de $u(\vec{e}_1)$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ (le "codage") et ainsi de suite.
- C'est la définition à appliquer pour trouver la matrice d'une application linéaire (par exemple une certaine projection) dans la base canonique,
- mais aussi pour exprimer la matrice d'une application linéaire dans une base particulière (cf. théorie de la diagonalisation).

Application importante.

Théorème VIII.10.34 Soit $\vec{x} \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$. La matrice colonne de $\vec{y} = u(\vec{x})$ dans $\mathcal{B}'$ est alors $Y = MX$.

À retenir absolument En dimension 3 par exemple, on considère:

- un espace vectoriel E,
- $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ une base de E,
- u un endomorphisme de E,
- $T = \begin{pmatrix} a & \ldots & \ldots \\ b & \ldots & \ldots \\ c & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Alors:

- $u(\vec{v}_1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$ (le "codage" de l'image du premier vecteur)
- de même avec $u(\vec{v}_2)$ et $u(\vec{v}_3)$ pour les deuxième et troisième colonnes.

10.5 Construction pratique de la matrice d'un endomorphisme dans une base: absolument fondamental

En dimension 3 par exemple. On considère:

- un espace vectoriel E,
- $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ une base de E,
- u un endomorphisme de E,

et il est question de déterminer la matrice T de u dans une certaine base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

- On calcule $u(\vec{v}_1)$, selon le cas:
  - au moyen d'une formule, soit qui est donnée (typiquement si E est un espace de polynômes: c'est le premier exemple), soit qu'il faut créer soi-même (typiquement dans un contexte de projection, cf. chapitre suivant)
  - ou, par exemple lorsque $E = \mathbb{R}^3$ (c'est le deuxième exemple), grâce à la matrice de u qui est donnée dans la base canonique.
- On cherche des scalaires a, b, c tels que

$$u(\vec{v}_1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$$

  (ce que l'on appelle le "codage" du vecteur $u(\vec{v}_1)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$).
- $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est alors la 1ère colonne de la matrice T de u dans $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$
- On fait de même avec $u(\vec{v}_2)$ et $u(\vec{v}_3)$ pour les deux autres colonnes.

Premier exemple

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, soit $u : P \mapsto 3P - 2P'$. Quelle est la matrice T de u dans la base $\mathcal{B} = (X^2, X, 1)$?

- On calcule

$$u(X^2) = 3X^2 - 4X = 3 \times X^2 - 4 \times X + 0 \times 1 \hookrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- On calcule

$$u(X) = 3X - 2 = 0 \times X^2 + 3 \times X - 2 \times 1 \hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- On calcule

$$u(1) = 3 = 0 \times X^2 + 0 \times X + 3 \times 1 \hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- D'où $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Deuxième exemple

Soit u l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

et soit la base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ avec

$$\vec{v}_1 = (1, -1, -1), \quad \vec{v}_2 = (-1, 0, 1), \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 1).$$

On détermine la matrice T de u dans la base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ en suivant scrupuleusement le protocole: on calcule $u(\vec{v}_1)$, on le "code" dans $\mathcal{B}$, ce qui fournira la première colonne, et ainsi de suite.

- Comment calculer $u(\vec{v}_1)$? Qui est u? Que sait-on sur u? Il nous est dit que u est associé à M dans la base canonique, ce qui signifie que pour calculer l'image d'un vecteur dont on connaît les coordonnées dans la base canonique, les coordonnées de son image s'obtiennent en effectuant le produit de M par les coordonnées de $\vec{v}_1$ écrites verticalement (ce qui fournit ce qu'on appelle la matrice colonne de $\vec{v}_1$ dans la base canonique). Puisque $\vec{v}_1 = (1, -1, -1)$, sa matrice colonne dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u(\vec{v}_1)$ a alors pour coordonnées $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (écrites verticalement).
  Le calcul donnant $M \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $u(\vec{v}_1) = (-1, 1, 1)$. Quelles sont les coordonnées de $(-1, 1, 1)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$? La réponse est triviale: le vecteur $(-1, 1, 1)$, c'est l'opposé du vecteur $\vec{v}_1$ et quelles sont les coordonnées de $-\vec{v}_1$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$? Évidemment,
  $$-\vec{v}_1 = -1 \times \vec{v}_1 + 0 \times \vec{v}_2 + 0 \times \vec{v}_3$$
  i.e. les coordonnées de $-\vec{v}_1$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ sont $(-1, 0, 0)$ et c'est pourquoi la première colonne de T est $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:
  $$T = \begin{pmatrix} -1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$
- On calcule ensuite $M \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $u(\vec{v}_2) = (-1, 0, 1)$. Quelles sont les coordonnées de $(-1, 0, 1)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$? La réponse est triviale: le vecteur $(-1, 0, 1)$ *est* le vecteur $\vec{v}_2$ et quelles sont les coordonnées de $\vec{v}_2$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$? Évidemment $(0, 1, 0)$:
  $$\vec{v}_2 = 0 \times \vec{v}_1 + 1 \times \vec{v}_2 + 0 \times \vec{v}_3$$
  et c'est pourquoi la deuxième colonne de T est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:
  $$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$
- On calcule enfin $M \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $u(\vec{v}_3) = (-1, 1, 2)$. Quelles sont les coordonnées de $(-1, 1, 2)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$? La réponse n'est *pas* triviale; on se ramène alors à la définition en cherchant à exprimer ce vecteur en fonction des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ i.e. en cherchant des scalaires a, b, c tels que
  $$(-1, 1, 1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3.$$
  Le triplet de réels (a, b, c) que l'on aura trouvés formeront les coordonnées de $(-1, 1, 2)$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Or
  $$(-1, 1, 1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 \iff \begin{cases} -1 = a - b \\ 1 = -a + c \\ 2 = -a + b + c \end{cases}$$
  ce qui donne facilement
  $$a = 0, \quad b = c = 1.$$
  D'où
  $$u(\vec{v}_3) = 0 \times \vec{v}_1 + 1 \times \vec{v}_2 + 1 \times \vec{v}_3$$
  et c'est pourquoi la troisième colonne de T est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finalement,
  $$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.6 Représentation d'une application linéaire dans un couple de bases

Cette section généralise sans difficulté les principes de "codage" d'une application énoncés dans les sections antérieures.

Premier exemple

Considérons l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie sur la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(\vec{\imath}) = (1, 2, -1), \quad f(\vec{\jmath}) = (2, 3, 1).$$

On rappelle que pour définir une application linéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie, il suffit de définir les images des vecteurs d'une base de E; en effet, on peut calculer l'image par f de tout vecteur, en procédant de la façon suivante:

- prenons par exemple $\vec{v} = (4, 1)$. On le décompose sur la base $\mathcal{B}$:
  $$\vec{v} = 4(1, 0) + (0, 1)$$
  et par linéarité de f on a alors
  $$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(4(1,0) + (0,1)) \\ &= 4f(1,0) + f(0,1) \\ &= 4(1,2,-1) + (2,3,1) \\ &= (6, 11, -3). \end{aligned}$$
- L'image de $f(\vec{v})$ est ainsi parfaitement déterminée.

Notons

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} f(\vec{\imath}) &= 1 \times \vec{e}_1 + 2 \times \vec{e}_2 - 1 \times \vec{e}_3 \\ f(\vec{\jmath}) &= 2 \times \vec{e}_1 + 3 \times \vec{e}_2 + 1 \times \vec{e}_3. \end{aligned}$$

On dira alors que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Cette matrice permet de calculer l'image de tout vecteur:

- on lui donne en entrée un vecteur $\vec{v}$ "codé" dans $\mathcal{B}$ i.e. la matrice colonne X du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$
- en sortie on obtient le vecteur $f(\vec{v})$ "codé" dans $\mathcal{B}'$ i.e. la matrice colonne $Y = MX$ du vecteur $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Par exemple, le matrice colonne du vecteur $\vec{v} = (4,1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On calcule

$$\begin{aligned} Y &= MX \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est donc la matrice colonne de $f(\vec{v})$ dans la base canonique $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire

$$f(\vec{v}) = (6, 11, -3).$$

Deuxième exemple

Considérons l'application f de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = (P(1), P''(1)).$$

Par exemple, si $P = 2 - X + 3X^2 - 2X^3$: on a

$$P(1) = 2, \quad P'' = 6 - 12X$$

et donc

$$f(P) = (2, -6).$$

- Il est facile de vérifier que f est une application linéaire: pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X]$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= \big((\alpha P + \beta Q)(1), (\alpha P + \beta Q)''(1)\big) \\ &= \big(\alpha P(1) + \beta Q(1), \alpha P''(1) + \beta Q''(1)\big) \\ &= \alpha(P(1), P''(1)) + \beta(Q(1), Q''(1)) \\ &= \alpha f(P) + \beta f(Q), \end{aligned}$$

  ce qui prouve la linéarité de f.
- Calculons à présent les images des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ par f:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1,0) \\ f(X) &= (1,0) \\ f(X^2) &= (1,2) \\ f(X^3) &= (1,6) \end{aligned}$$

  et décomposons ces images dans la base canonique $\mathcal{B}' = \big((1,0),(0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1,0) \\ &= 1 \times (1,0) + 0 \times (0,1) \\ f(X) &= (1,0) \\ &= 1 \times (1,0) + 0 \times (0,1) \\ f(X^2) &= (1,2) \\ &= 1 \times (1,0) + 2 \times (0,1) \\ f(X^3) &= (1,6) \\ &= 1 \times (1,0) + 6 \times (0,1). \end{aligned}$$

- On dira alors que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

  est la matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Cette matrice permet de calculer l'image de tout vecteur (polynôme):

  - on lui donne en entrée un polynôme P "codé" dans $\mathcal{B}$ i.e. la matrice colonne $\mathcal{P}$ du polynôme P dans la base $\mathcal{B}$
  - en sortie on obtient le vecteur $f(P)$ "codé" dans $\mathcal{B}'$ i.e. la matrice colonne $Y = M\mathcal{P}$ du vecteur $f(P)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

  Par exemple, la matrice colonne du polynôme $P = 2 - X + 3X^2 - 2X^3$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. On calcule

$$\begin{aligned} Y &= M\mathcal{P} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  qui est donc la matrice colonne de $f(P)$ dans la base canonique $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire

$$f(P) = (2, -6).$$

Plus généralement:

Définition VIII.10.27 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p, f une application linéaire de E dans F, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p)$ une base de F.

- L'image de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$ se décompose sur la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{f}_1 + \ldots + a_{p1}\vec{f}_p \\ f(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{f}_1 + \ldots + a_{p2}\vec{f}_p \\ \ldots & \quad \ldots \\ f(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{f}_1 + \ldots + a_{pn}\vec{f}_p. \end{aligned}$$

- On dira alors que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{12} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

  est la matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Cette matrice permet de calculer l'image de tout vecteur:

  - on lui donne en entrée un vecteur $\vec{v}$ "codé" dans $\mathcal{B}$ i.e. la matrice colonne X du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$
  - en sortie on obtient le vecteur $f(\vec{v})$ "codé" dans $\mathcal{B}'$ i.e. la matrice colonne $Y = MX$ du vecteur $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}'$.

11 Propriétés des matrices comparées aux propriétés des endomorphismes; autre façon de calculer l'inverse d'une matrice

Dans la pratique, un endomorphisme sera souvent défini à travers une représentation matricielle; dans $\mathbb{R}^3$ par exemple, un énoncé typique est "soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à telle matrice dans la base canonique". Il est donc important de connaître les incidences des qualités que possèdent une matrice sur l'endomorphisme qu'elle représente.

Théorème VIII.11.35 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n,

- f et g deux endomorphismes de E,
- $\mathcal{B}$ une base de E,
- M la matrice de f dans $\mathcal{B}$ (typiquement, $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$), M' la matrice de g dans $\mathcal{B}$.

Alors:

- $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(f)$.
- M est inversible si et seulement si f est un automorphisme de E et en particulier,
- f est un automorphisme de E si et seulement si $\mathrm{rg}(M) = n$.
- Lorsque M est inversible, et donc f est un automorphisme, la matrice M^{-1} représente l'automorphisme réciproque f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
- La matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $M'M$.
- M^2 représente l'endomorphisme $f \circ f$ (le plus souvent noté f^2) dans la base $\mathcal{B}$
- et plus généralement pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, M^n représente l'endomorphisme composé n fois $f \circ \ldots \circ f$ (le plus souvent noté f^n) dans la base $\mathcal{B}$.

Premier exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

- C'est le cas si et seulement si $\mathrm{rg}(M_a) = 3$. On va donc calculer son rang par la méthode du pivot.
- En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$,

$$M_a \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$,

$$M_a \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 \\ 0 & 0 & -4+3a \end{pmatrix}.$$

  On a ainsi obtenu une matrice échelonnée par lignes. On voit que cette dernière possède 3 pivots si et seulement si $-4 + 3a \neq 0$ c'est à dire si et seulement si $a \neq \frac{4}{3}$.
- Il en résulte que $\mathrm{rg}(M_a) = 3$ si et seulement si $a \neq \frac{4}{3}$ et donc f_a est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq \frac{4}{3}$.

Deuxième exemple

On donne un entier $n \geq 1$. Montrer que l'application

$$\phi : P \mapsto (1 + nX)P + X(1 - X)P'$$

est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa matrice M dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ et en déduire que f est un automorphisme de E.

- Il est tout d'abord clair que $\phi(P)$ est un polynôme pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $r = \deg(P)$.
  - Si $r \leq n - 1$, alors du fait que

    $$\deg(1 + nX)P = 1 + r, \quad \deg(X(1 - X)P') = 2 + r - 1 = 1 + r,$$

    on voit que

    $$\deg(f(P)) \leq 1 + r \leq n,$$

    ce qui démontre que $f(P) \in E$.
  - Si $\deg(P) = n$, écrivons

    $$P = a_nX^n + \ldots.$$

    Alors

    $$\begin{aligned} \phi(P) &= (1 + nX)(a_nX^n + \ldots) + X(1 - X)(na_nX^{n-1} + \ldots) \\ &= na_nX^{n+1} + (a_n + na_{n-1})X^n + \ldots - na_nX^{n+1} + \ldots \end{aligned}$$

    et on voit donc que $\deg(\phi(P)) \leq n$ car les termes de degré $n + 1$ s'éliminent.

  Ainsi, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Étudions la linéarité: soit $(P, Q) \in E \times E$ et α, β des scalaires. Alors

  $$\begin{aligned} \phi(\alpha P + \beta Q) &= (1 + nX)(\alpha P + \beta Q) + X(1 - X)(\alpha P + \beta Q)' \\ &= \alpha(1 + nX)P + \beta(1 + nX)Q + X(1 - X)(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha(1 + nX)P + \beta(1 + nX)Q + \alpha X(1 - X)P' + \beta X(1 - X)Q' \\ &= \alpha\phi(P) + \beta\phi(Q). \end{aligned}$$

  Ainsi, ϕ est une application linéaire de E dans E et c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminons la matrice M de ϕ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$. Pour cela, on suit le protocole: pour déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée,
  - on calcule les images des vecteurs de cette base
  - on exprime ces images dans cette base c'est à dire: on écrit l'image du premier vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base, idem avec le deuxième vecteur et ainsi de suite,
  - les coefficients de ces combinaisons linéaires constitueront respectivement la première, la deuxième colonne etc. de la matrice recherchée.

  Puisqu'il s'agit ici de la base $(1, X, \ldots, X^n)$, les coefficients de la combinaison linéaire nécessaire à l'écriture d'un polynôme en fonction de $1, X, \ldots, X^n$ sont bien entendu les coefficients de ce polynôme. On calcule donc

  $$\begin{aligned} \phi(1) &= (1 + nX)1 + X(1 - X) \times 0 = 1 + nX \\ &= 1 + n \times X + 0 \times X^2 + \ldots + 0 \times X^n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}\phi(X) & = & (1+nX)X + X(1-X)\times 1 \\ & = & 2X+(n-1)X^2 \\ & = & 0\times 1 + 2\times X + (n-1)\times X^2 + 0\times X^3 + \ldots + 0\times X^n \\ \vdots & = & \vdots \\ \phi(X^k) & = & (1+nX)X^k + X(1-X)kX^{k-1} \\ & = & =(k+1)X^k + (n-k)X^{k+1} \\ & = & 0\times 1 + \ldots + 0\times X^{k-1} + (a+k)\times X^k + (n-k)\times X^{k+1} + 0\times X^{k+2} + \times + 0\times X^n \\ \phi(X^n) & = & (1+nX)X^n + X(1-X)nX^{n-1} \\ & = & =(n+1)X^n \\ & = & 0\times 1 + \ldots + 0\times X^{n-1} + (n+1)\times X^n\end{array}$$

d'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ n & 2 & \ddots & & & & \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & \ddots & k+1 & \ddots & & \\ & & 0 & n-k & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 & n+1 \end{pmatrix}.$$

- Cette matrice est échelonnée par colonnes et comporte $n+1$ pivots. Ainsi,

$$\mathrm{rg}(M) = n+1$$

et puisque $\dim(E) = n+1$, on en déduit que ϕ est un automorphisme de E.

Calcul de l'inverse par considération d'un automorphisme: exemple

Rappelons le principe:

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. Alors

- M est inversible si et seulement si f est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$
- et lorsque M est inversible, et donc f est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$, la matrice M^{-1} représente l'automorphisme réciproque f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Réponse. La matrice M est associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall \vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(\vec{v}) = (x+y+2z, x-y-z, y+z).$$

Démontrons que f est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

- On doit donc démontrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ possède un unique antécédent par f.
- Le vecteur $\vec{w} = (x', y', z')$ étant donné, le vecteur $\vec{v} = (x,y,z)$ est un antécédent de $\vec{w}$ par f si et seulement si

$$f(\vec{v}) = \vec{w}$$

c'est à dire si et seulement si

$$\begin{cases} x+y+2z & = & x' \\ x-y-z & = & y' \\ y+z & = & z'. \end{cases}$$

$L_2 + L_3$ donne

$$x = y' + z'$$

et $L_1 + L_2$ donne

$$2x + z = x' + y',$$

c'est à dire

$$\begin{array}{rcl} z & = & x' + y' - 2x \\ & = & x' - y' - 2z'. \end{array}$$

Puis L_3 donne

$$\begin{array}{rcl} y & = & z' - z \\ & = & -x' + y' + 3z'. \end{array}$$

- On a donc prouvé que tout vecteur $\vec{w} = (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3$ possédait un unique antécédent par f, à savoir

$$(y'+z', -x'+y'+3z', x'-y'-2z').$$

Ainsi, f est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même et f^{-1}, machine qui fabrique l'antécédent, est l'application

$$\vec{w} = (x', y', z') \mapsto (y'+z', -x'+y'+3z', x'-y'-2z').$$

- On en déduit que M est inversible et M^{-1} est la matrice canoniquement associée à f^{-1}, d'où

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

12 Exemples d'obtention d'une base du noyau et de l'image à partir d'une matrice

Premier exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et de $\mathrm{Im}\, u$.

- Un vecteur $\vec{w} = (x,y,z)$ appartient à $\mathrm{Ker}\, u$ si et seulement si $u(\vec{w}) = \vec{0}$ donc si et seulement si sa matrice colonne $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifie $MW = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i.e si et seulement si

$$\begin{cases} x+y-z & = & 0 \\ -x+2y+z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0. \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne $3y = 0$, d'où $y = 0$ puis les trois équations donnent $x = z$. Ainsi, $\vec{w} \in \mathrm{Ker}\, u \iff \vec{w} = (x, 0, x)$ i.e. si et seulement si $\vec{w} = x(1,0,1)$ et on voit donc que $\mathrm{Ker}\, u$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{w}_0 = (1,0,1)$.

- Pour l'image, on peut apppliquer plusieurs méthodes:
  - *Première méthode, basée sur la connaissance du rang, très efficace en dimension* 3.
    - On sait que les vecteurs $(u(\vec{\imath}), u(\vec{\jmath}), u(\vec{k}))$ constituent une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.

* On calcule le rang de u en recherchant le rang de M:

$$M \sim \begin{array}{c} a_{11} \text{ pivot} \\ \ell_2+\ell_1 \\ \ell_3+\ell_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} a_{22} \text{ pivot} \\ \ell_3-\frac{2}{3}\ell_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient deux pivots: la matrice M est donc de rang 2 et en conséquence, $\mathrm{rg}(u) = 2$.

* On applique ensuite un résultat fondamental de la théorie de la dimension:

  si E est un espace vectoriel de dimension n et $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est une famille libre qui comporte n éléments, alors $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est une base de E.

* Il suffit donc ici de trouver une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Im}\, u$ comportant deux vecteurs.
* Les vecteurs $u(\vec{\imath}) = (1, -1, -1)$ et $u(\vec{\jmath}) = (1, 2, 1)$ sont clairement linéairement indépendants et forment donc une famille libre de $\mathrm{Im}\, u$ à deux vecteurs: c'est alors une base de $\mathrm{Im}\, u$:

$$\big((1, -1, -1), (1, 2, 1)\big) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\, u.$$

* *Remarques dans cette situation particulière.*
  · Ayant déjà déterminé le noyau de u et constaté que celui-ci est de dimension 1, le théorème du rang aurait directement donné $\dim(\mathrm{Im}\, u) = 2$, sans passer par la méthode du pivot. On poursuit ensuite comme ci-dessus.
  · Indépendamment de ce qui précède, puisque

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(\vec{\imath}), u(\vec{\jmath}), u(\vec{k})) = \mathrm{Vect}\big((1, -1, -1), (1, 2, 1), (-1, 1, 1)\big),$$

  et que l'on voit que les premier et troisième vecteurs sont opposés, on a

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\big((1, -1, -1), (1, 2, 1)\big)$$

  et puisque les deux vecteurs $\big((1, -1, -1), (1, 2, 1)\big)$ forment clairement une famille libre, ils constituent alors une base de $\mathrm{Im}\, u$.

– *Deuxième méthode, basée entièrement sur la méthode du pivot, un peu lourde en dimension 3.*

* Les vecteurs $(u(\vec{\imath}), u(\vec{\jmath}), u(\vec{k}))$ constituent une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$ et on applique le procédé développé plus haut: "exemple fondamental d'obtention d'une base du sous-espace-vectoriel engendré par une famille de vecteurs".
* Il s'agit de trouver une base de $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}(u(\vec{\imath}), u(\vec{\jmath}), u(\vec{k}))$ et la matrice de cette famille dans la base canonique est, par définition même, la matrice M.
* On lui applique la méthode du pivot en n'opérant que sur ses lignes:

$$M \sim \begin{array}{c} a_{11} \text{ pivot} \\ \ell_2+\ell_1 \\ \ell_3+\ell_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} a_{22} \text{ pivot} \\ \ell_3-\frac{2}{3}\ell_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M est donc de rang 2 et ce sont les colonnes 1 et 2 qui contiennent les pivots, ce qui implique que les vecteurs

$$\big((1, -1, -1), (1, 2, 1)\big)$$

constituent une base de $\mathrm{Im}\, u$.

Deuxième exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 12 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et de $\mathrm{Im}\, u$.

- Un vecteur $\vec{w} = (x, y, z, t)$ appartient à $\mathrm{Ker}\, u$ si et seulement si $u(\vec{w}) = \vec{0}$ donc si et seulement si sa matrice colonne $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ vérifie $AW = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i.e si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z + 5t & = & 0 \\ 2x + 4y - 7z + 12t & = & 0 \\ -x - 2y + t & = & 0 \\ x + 2y - 4z + 7t = 0 & & \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z + 5t = 0 \\ -z + 2t = 0 \\ -3z + 6t = 0 \\ -z + 2t = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z + 5t = 0 \\ \\ -z + 2t = 0. \end{array}\right.$$

Le système est obtenu est un système où les inconnues principales sont x et z car ce sont eux qui portent les pivots:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{1}x + 2y - 3z + 5t & = & 0 \\ \\ \mathbf{-1}z + 2t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - 3z & = & -2y - 5t \\ \\ z & = & 2t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 3z - 2y - 5t = 6t - 2y - 5t = t - 2y \\ \\ z = 2t \end{array}\right.$$

si bien que

$$\vec{w} \in \mathrm{Ker}\, u \iff \vec{u} = (t - 2y, y, 2t, t) = t(1, 0, 2, 1) + y(-2, 1, 0, 0)$$

ce qui met en évidence qu'une base de $\mathrm{Ker}\, u$ est

$$\big((1, 0, 2, 1), (-2, 1, 0, 0)\big).$$

- Pour obtenir une base de l'image, on procède comme dans l'exemple précédent:
  – Les vecteurs

$$\big(u(1, 0, 0, 0), u(0, 1, 0, 0), u(0, 0, 1, 0), u(0, 0, 0, 1)\big)$$

  constituent une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.
  – On en obtient une base en écrivant la matrice de ces 4 vecteurs dans la base canonique qui, par définition même, n'est autre que la matrice A, à laquelles on applique la méthode de Gauß en ***opérant sur ses lignes***:

$$A \sim \begin{array}{c} a_{11} \text{ pivot} \\ \ell_2-2\ell_1 \\ \ell_3+\ell_1 \\ \ell_4-\ell_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} a_{23} \text{ pivot} \\ \ell_3-3\ell_2 \\ \ell_4-\ell_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  – Ayant obtenu une matrice échelonnée à 2 pivots, on en déduit que A est de rang 2 et puisque les pivots sont portés par les colonnes 1 et 3, on en déduit que les vecteurs d'origine situés sur les colonnes 1 et 3 de A, c'est à dire les vecteurs

$$\big((2, 4, -2, 2), (-3, -7, 0, -4)\big)$$

  constituent une base de $\mathrm{Im}\, u$.

13 Matrice de passage, formules de changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E.

Matrice d'une famille de vecteurs

Définition VIII.13.28 La matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une famille $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ de p vecteurs de E est la matrice M dont la première colonne est constituée de la matrice colonne dans $\mathcal{B}$ du vecteur $\vec{x}_1$ etc.

Exemple

Soit la famille de vecteurs

$$\mathcal{F} = \big((1,2,3),(1,3,2),(1,1,-1),(6,10,15)\big).$$

Alors sa matrice dans la base canonique est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & -1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'une famille de vecteurs et rang

Dans le contexte précédent:

Théorème VIII.13.36 Le rang de la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$, c'est à dire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$, est le rang de la matrice M.

Important: liberté, rang et méthode du pivot

Théorème VIII.13.37 Une famille $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ de p vecteurs de E est libre si et seulement si son rang vaut p .

Ce rang peut être calculé par la méthode du pivot de Gauß, appliqué à la matrice de cette famille (les vecteurs étant exprimés dans une certaine base).

Exemple

Reprenons l'exemple ci-dessus où

$$\mathcal{F} = \big((1,2,3),(1,3,2),(1,1,-1),(6,10,15)\big)$$

et la matrice M de cette famille dans la base canonique:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & -1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & -1 & 15 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

La matrice M est équivalente à une matrice échelonnée de rang 3, donc M est de rang 3. Ainsi,

$$\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = 3.$$

Matrice de passage

Théorème VIII.13.38 Lorsque $\dim E = n$, une famille $\mathcal{B}'$ de n vecteurs (donc autant de vecteurs que la dimension de E) est une base de E si et seulement si la matrice P de cette famille dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.
Dans ce cas, P est appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$ et

$$\mathcal{B}' = \big((1,2),(1,3)\big).$$

La matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique est $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Puisqu'il est clair que P est de rang 2, P est inversible (ou encore, $\det(P) = 1$) et alors $\mathcal{B}'$ est une base.

Formules de changement de base

Théorème VIII.13.39 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de l'espace E (typiquement, $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ est une "nouvelle base") et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

- ***Pour les vecteurs:*** soit $\vec{x}$ un vecteur de E, X et X' les matrices colonnes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$; alors
$$X' = P^{-1}X.$$
- ***Pour les matrices d'endomorphismes:*** soit u un endomorphisme de E, M et M' les matrices de u dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement; alors
$$M' = P^{-1}MP.$$

C'est une formule ***capitale*** dans la théorie de la réduction des endomorphismes et des matrices carrées.

Exemples

- Dans l'exemple ci-dessus dans $\mathbb{R}^2$ où
$$\mathcal{B}' = \big((1,2),(1,3)\big)$$
soit $\vec{v} = (-1,-4)$. Quelle sont les composantes de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}'$ i.e. quelle est la matrice colonne de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}'$?
  - On peut rechercher a et b tels que
$$(-1,-4) = a(1,2) + b(1,3) \iff (-1,-4) = (a+b, 2a+3b)$$
$$\iff \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + 3b = -4. \end{cases}$$
On trouve $a = 1$ et $b = -2$: donc les composantes de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(1,-2)$ ou encore: sa matrice colonne dans $\mathcal{B}'$ est $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

– On peut passer par les formules de changement de base en calculant P^{-1}:

$$\begin{array}{r c|c}
 & \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 & \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\\
L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}
\end{array}$$

d'où $P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Puisque $\vec{v} = (-1,-4)$, sa matrice colonne dans la base canonique est $X = \left(\begin{smallmatrix}-1\\ -4\end{smallmatrix}\right)$ et sa matrice colonne X' dans la base $\mathcal{B}'$ est alors

$$X' = PX = \left(\begin{smallmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix}-1\\ -4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\ -2\end{smallmatrix}\right).$$

On retrouve bien entendu les mêmes valeurs.

- Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\forall \vec{v} = (x,y),\ u(\vec{v}) = (x-y, 2x+y).$$

Déterminer la matrice M de u dans la base canonique et sa matrice M' dans la base $\mathcal{B}'$.

– On a $u(1,0) = (1,2)$ et $u(0,1) = (-1,1)$ donc $M = \left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

– D'après les formules de changement de base,

$$\begin{aligned} M' &= P^{-1}MP = \left(\begin{smallmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{smallmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{smallmatrix}-7 & -11\\ 6 & 9\end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Proposition VIII.13.40 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et P' la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}''$.
Alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$ est la matrice

$$P \times P'.$$

Démonstration 11

Chapitre IX

Compléments d'algèbre linéaire (deuxième année)

1 Puissances, les espaces $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; égalité d'ensembles

Applications linéaires particulières

E désigne un espace vectoriel, u et v désignent des endomorphismes quelconques de E.

Théorème IX.1.1 ***Composition d'endomorphismes.*** On note $u \circ v$ l'application $x \mapsto u(v(x))$:

$$\forall x \in E, \quad u \circ v(x) = u(v(x)).$$

- $u \circ v$ est un endomorphisme de E.
- Si E est de dimension finie, $\mathcal{B}$ est une base de E et M, N sont les matrices respectives de u et v dans $\mathcal{B}$, alors MN est celle de $u \circ v$ dans $\mathcal{B}$.

Définition IX.1.1 On dit que u et v commutent lorsque $u \circ v = v \circ u$.

Définition IX.1.2 ***Application identique, ou identité.*** Elle est notée Id, ou Id_E et c'est l'application qui à tout x de E associe x:

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Id}(x) = x.$$

- C'est évidemment un automorphisme de E (application linéaire bijective de E dans lui-même).
- Pour tout endomorphisme u de E, $u \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ u = u$.

Remarque. L'identité intervient notamment dans la théorie des valeurs et vecteurs propres (cf. plus loin):

- pour tout scalaire λ, $\lambda\mathrm{Id}$ désigne l'application $x \mapsto \lambda x$, appelée aussi homothétie de rapport λ.
- De ce fait,
$$u - \lambda\mathrm{Id}$$
est l'application $x \mapsto u(x) - \lambda x$:
$$\forall x \in E, \quad (u - \lambda\mathrm{Id})(x) = u(x) - \lambda x.$$
- Ainsi, un vecteur x de E appartient à $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id})$ si et seulement si $u(x) - \lambda x = \vec{0}$ i.e. si et seulement si $u(x) = \lambda x$:
$$\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}) = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}.$$

Définition IX.1.3 ***Composition d'un endomorphisme par lui-même, puissances.*** L'endomorphisme $u \circ u$, qui à tout x de E associe $u(u(x))$, est noté u^2:

$$\forall x \in E, \quad u^2(x) = u(u(x)).$$

Plus généralement, u^N désigne l'endomorphisme composé $u \circ \ldots \circ u$, N fois.
Pour tous entiers p et r,
$$u^p \circ u^r = u^{p+r}.$$
Par convention,
$$u^0 = \mathrm{Id}.$$

Remarque. On parle alors de "puissances" de u, mais ce n'en sont pas, puisqu'il n'y a pas de multiplication dans un espace vectoriel; c'est juste un vocabulaire et une notation commodes, par analogie au calcul des puissances d'un nombre réel.

Le saviez-vous? Comment prouver une inclusion entre ensembles? Que deux ensembles sont égaux?

- Démontrer que $A \subset B$ revient à démontrer que tout élément de A appartient à B.
  - On partira alors d'un élément x de A; l'appartenance à l'ensemble B se traduit en général par le passage d'un "test".
  - On fera alors passer le test à x: son appartenance à A, qui se caractérise par une certaine qualité, doit être suffisante pour que le test soit passé avec succès.
- ***Exemple typique:*** soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u \circ u)$.
  - Il s'agit donc de démontrer que tout élément appartenant à $\mathrm{Ker}\,(u)$ appartient également à $\mathrm{Ker}\,(u \circ u)$.
  - Soit donc $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$; on doit démontrer que $x \in \mathrm{Ker}\,(u \circ u)$ i.e. $(u \circ u)(x) = \vec{0}$.
  - On a $(u \circ u)(x) = u(u(x))$, mais comme $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$, c'est que $u(x) = \vec{0}$.
  - On a alors $(u \circ u)(x) = u(\vec{0}) = \vec{0}$ (c'est une propriété bien connue des applications linéaires) i.e. $x \in \mathrm{Ker}\,(u \circ u)$.
  - On a donc bien prouvé que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u \circ u)$.
- Naturellement, une égalité entre ensembles $A = B$ se prouvera par double inclusion: $A \subset B$ puis $B \subset A$, en procédant en deux étapes, bien distinctes. Typiquement, en algèbre linéaire, une seule inclusion pourra suffire en faisant valoir un argument de dimension.

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se donne un entier $n \geq 1$.

Théorème IX.1.2 On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble regroupant toutes les matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et sa dimension est n^2.
- Une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est constituée des *matrices élémentaires* $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ où E_{ij} est la matrice carrée $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en i-ième ligne et j-ième colonne, qui vaut 1.
- Il en est de même pour les matrices carrées à coefficients complexes.

Idée de la preuve.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bien un espace vectoriel: un espace vectoriel est grosso-modo un ensemble dans lequel on peut additionner les éléments entre eux et les multiplier par un scalaire; ce sont des opérations que l'on peut naturellement effectuer sur des matrices carrées.
- Pour $n = 2$, la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la base des matrices élémentaires est constituée des matrices
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
puisque toute matrice $M = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ s'écrit
$$M = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Premier exemple

Démontrer que l'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées symétriques à coefficients réels de taille 2×2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (rappelons qu'une matrice carrée M est symétrique si et seulement si $M^T = M$) et en donner une base.

- La matrice nulle appartient à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ puisqu'elle est évidemment symétrique.
- Si A et B appartiennent à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et λ, μ sont des scalaires, alors on déduit des propriétés de la transposition que
$$\begin{aligned}(\lambda A+\mu B)^T &= \lambda A^T+\mu B^T\\ &= \lambda A+\mu B \text{ car } A\in\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \text{ et donc } A^T = A;\text{ pareil pour } B.\end{aligned}$$
Cela prouve que la matrice $\lambda A+\mu B$ est symétrique i.e. $\lambda A+\mu B\in\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. La stabilité de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ par combinaison linéaire est donc établie, ce qui prouve que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Remarque:* la même preuve fonctionne pour démontrer que l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille $n\times n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, *mutatis mutandis*, pour démontrer que l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de taille $n\times n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Soit $M = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Alors M est symétrique si et seulement si $b = c$ donc si et seulement si
$$M = \begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$$
donc si et seulement si
$$M = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
donc si et seulement si $M\in\mathrm{Vect}(S_1,S_2,S_3)$, où
$$S_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad S_2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad S_3 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
ce qui démontre que
$$\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(S_1,S_2,S_3).$$
Enfin, la famille (S_1,S_2,S_3) est libre puisque
$$\alpha S_1+\beta S_2+\gamma S_3 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\alpha = 0\\\beta = 0\\\gamma = 0.\end{cases}$$
C'est donc une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Deuxième exemple

On se donne une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où n est un entier fixé quelconque) et on considère l'ensemble
$$C_M = \{N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ MN = NM\}$$
appelé *commutant* de M. Démontrer que C_M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En donner une base lorsque l'on prend $n = 2$ et $M = \begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}$.

- Il est clair que la matrice nulle O appartient à C_M:
$$O\times M = O,\quad M\times O = O$$
donc $O\times M = M\times O$.
- Soit N, N' deux matrices appartenant à C_M et a, b deux scalaires; il s'agit de démontrer que $aN+bN'\in C_M$. On a
$$\begin{aligned}(aN+bN')M &= aNM+bN'M\\ &= aMN+bMN' \quad \text{car } N\in C_M \text{ et donc } NM = MN;\text{ pareil pour } N'\\ &= M\times aN+M\times bN'\\ &= M(aN+bN'),\end{aligned}$$
ce qui démontre que
$$(aN+bN')M = M(aN+bN')$$
et donc que $aN+bN'\in C_M$.
- Ainsi, C_M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Supposons $M = \begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}$. Soit $N = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ et voyons à quelles conditions on a $MN = NM$. On calcule aisément:
$$MN = \begin{pmatrix}-a+b&-c+d\\2b&2d\end{pmatrix}\quad NM = \begin{pmatrix}-a&a+2c\\-b&b+2d\end{pmatrix}.$$
On a donc
$$\begin{aligned}MN = NM &\iff \begin{cases}-a+b = -a\\2b = -b\\-c+d = a+2c\\2d = b+2d\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}b = 0\\2b = -b\\d = a+3c\end{cases}\\ &\iff M = \begin{pmatrix}a&c\\0&a+3c\end{pmatrix}\\ &\iff M = a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui met en évidence:

$$N \in C_M \iff N \in \mathrm{Vect}(N_1, N_2)$$

où on a posé

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $C_M = \mathrm{Vect}(N_1, N_2)$ et puisqu'il est clair que (N_1, N_2) est une famille libre, c'est une base de C_M.

Troisième exemple

On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application u définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad u(M) = AM.$$

Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsque l'on prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, déterminer la matrice U de u dans la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des matrices élémentaires.

- Tout d'abord, u est bien une application de E dans E puisque pour toute $M \in E$, le produit AM est une matrice $n \times n$, donc un élément de E. Ensuite, pour toutes matrices M, N de E et tous scalaires a, b

$$\begin{aligned} u(aM + bN) &= A(aM + bN) \\ &= aAM + bAN \quad \text{(propriété du produit matriciel)} \\ &= au(M) + bu(N), \end{aligned}$$

  ce qui prouve que u est linéaire et finalement un endomorphisme de E.
- Dans le fond, cette recherche de repésentation matricielle ne se distingue pas des autres situations: on obtient la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme en commenant par calculer les images par cet endomorphisme des éléments de cette base. L'originalité de la situation provient de la particularité de l'espace vectoriel en jeu, à savoir un espace de matrices et non un espace du type $\mathbb{R}^n$ ou du type $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit de respecter le protocole: il s'agit de calculer les unes après les autres les images par u des éléments de cette base, d'exprimer ces images en fonction des éléments de cette base et de reporter en colonne les résultats obtenus.
  - La base en question est la base $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - On commence par calculer $u(E_{11})$:

$$\begin{aligned} u(E_{11}) &= A \times E_{11} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

    De manière évidente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    et donc

$$u(E_{11}) = 1 \times E_{11} - 1 \times E_{21}$$

    et même mieux:

$$u(E_{11}) = 1 \times E_{11} + 0 \times E_{12} - 1 \times E_{21} + 0 \times E_{22}$$

    et c'est pourquoi la première colonne de la matrice U de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  - En procédant de même avec le calcul de $u(E_{12})$, $u(E_{21})$ et $u(E_{22})$, on obtient

$$\begin{aligned} u(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \times E_{11} + 1 \times E_{12} + 0 \times E_{21} - 1 \times E_{22} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ u(E_{21}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \times E_{11} + 0 \times E_{12} + 2 \times E_{21} + 0 \times E_{22} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \times E_{11} + 0 \times E_{12} + 0 \times E_{21} + 2 \times E_{22} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

    on obtient finalement

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'espace $\mathcal{L}(E)$

Définition IX.1.4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ regroupant tous les endomorphismes de E, est lui-même un espace vectoriel et sa dimension est n^2.

- En effet, un espace vectoriel est grosso-modo un ensemble dans lequel on peut additionner les éléments entre eux et les multiplier par un scalaire; ce sont des opérations que l'on peut naturellement effectuer sur des endomorphismes.
- Via le choix d'une base de E, on peut identifier un endomorphisme et une matrice $n \times n$. L'ensemble des matrices $n \times n$ est lui-même de dimension n^2.

2 Projections, projecteurs

2.1 Définitions et premiers résultats: absolument fondamental

Rappels: notion de supplémentaire et critères de supplémentarité

E est un espace vectoriel et A, B sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Supplémentaire.

- Le sous-espace B est un supplémentaire de A dans E lorsque $A+B=E$ et $A\cap B=\{\vec{0}\}$. Ceci a lieu si et seulement si tout z de E s'écrit de façon unique $z=x+y$ avec $x\in A$ et $y\in B$. Ce phénomène est alors noté $E=A\oplus B$.
- Lorsque $E=A\oplus B$ on n'a pas $E=A\cup B$: tout vecteur de E n'est pas soit dans A, soit dans B!

Critères de supplémentarité en dimension finie.

- En dimension finie, $E=A\oplus B$ a lieu si et seulement si $A\cap B=\{\vec{0}\}$ et $\dim A+\dim B=\dim E$.
- En dimension finie, les sous-espaces A et B sont supplémentaires si et seulement si la réunion d'une base de A et d'une base de B est une famille libre de E. Cette base de l'espace est dite ***adaptée*** à la somme directe $E=A\oplus B$.

Définition d'une projection

Définition IX.2.5 Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:

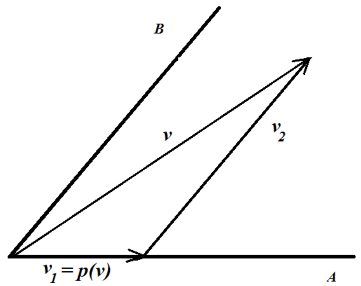
$$E=A\oplus B.$$

Tout vecteur $\vec{v}$ de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1\in A$ et $\vec{v}_2\in B$.

- Par définition, la projection p sur A et parallèlement à B est l'application qui à tout $\vec{v}$ de E associe le vecteur $\vec{v}_1$.
- C'est un endomorphisme de E et
$$\mathrm{Im}\,(p)=A,\quad \mathrm{Ker}\,(p)=B.$$
- Pour tout vecteur $\vec{v}\in E$,
$$p(\vec{v})=\vec{v}\iff\vec{v}\in A,\quad p(\vec{v})=\vec{0}\iff\vec{v}\in B$$
autrement dit,
$$\mathrm{Ker}\,(p-\mathrm{Id}_E)=A,\quad \mathrm{Ker}\,(p)=B.$$
- Il vérifie la propriété $p\circ p=p$.

Remarquons en effet que

$$\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(p-\mathrm{Id}_E)\iff(p-\mathrm{Id}_E)(\vec{v})=\vec{0}\iff p(\vec{v})-\mathrm{Id}_E(\vec{v})=\vec{0}\iff p(\vec{v})-\vec{v}=\vec{0}\iff p(\vec{v})=\vec{v}.$$



Un tout premier exemple de projection

Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces

$$A=\mathrm{Vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath})\quad\text{et}\quad B=\mathrm{Vect}(\vec{k})$$

sont évidemment supplémentaires: tout vecteur $\vec{v}=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{v}&=(x,y,0)+(0,0,z)\\&=\underbrace{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}}_{\in A}+\underbrace{z\vec{k}}_{\in B}.\end{aligned}$$

Soit p la projection sur A et parallèlement à B. Puisque pour tout vecteur $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\vec{v}=(x,y,0)+(0,0,z)$$

et que

$$(x,y,0)\in\mathrm{Vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath}),\quad(0,0,z)\in\mathrm{Vect}(\vec{k}),$$

on a par définition

$$p(\vec{v})=(x,y,0).$$

Preuves des propriétés d'une projection.

- C'est un endomorphisme de E:
  - Soit $\vec{v},\vec{w}\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Écrivons
  $$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2,\ \vec{w}=\vec{w}_1+\vec{w}_2$$
  avec $\vec{v}_1,\vec{w}_1\in A$ et $\vec{v}_2,\vec{w}_2\in B$, si bien que
  $$p(\vec{v})=\vec{v}_1,\quad p(\vec{w})=\vec{w}_1.$$
  - Alors
  $$\vec{v}+\lambda w=\vec{v}_1+\lambda\vec{w}_1+\vec{v}_2+\lambda\vec{w}_2$$
  et comme A et B sont des sous-espaces, $\vec{v}_1+\lambda\vec{w}_1\in A$ et $\vec{v}_2+\lambda\vec{w}_2\in B$.
  - Par définition, on a donc $p(\vec{v}+\lambda\vec{w})=\vec{v}_1+\lambda\vec{w}_1$ et on a bien $p(\vec{v}+\lambda\vec{w})=p(\vec{v})+\lambda p(\vec{w})$.
- On a $\mathrm{Im}\,(p)=A$, ce que l'on prouve par double inclusion:
  - l'image de l'application p est l'ensemble des images $p(\vec{v})$, $\vec{v}$ parcourant E, et $p(\vec{v})$ est par définition même un vecteur de A; ceci prouve: $\mathrm{Im}\,(p)\subset A$.
  - Tout $\vec{v}$ de A s'écrit $\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}$; puisque $\vec{0}\in B$, c'est la décomposition de $\vec{v}$ en la somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B. Par définition, on a alors $p(\vec{v})=\vec{v}$. Ainsi, $\vec{v}$ est une image (la sienne!) et donc $\vec{v}\in\mathrm{Im}\,(p)$. Ceci prouve $A\subset\mathrm{Im}\,(p)$ puisque l'on vient de prouver que tout vecteur de A appartient à l'image de p.
- On a $\mathrm{Ker}\,(p)=B$, ce que l'on prouve par double inclusion:
  - si $\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(p)$ i.e. $p(\vec{v})=\vec{0}$, c'est que dans l'écriture $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1\in A$ et $\vec{v}_2\in B$, on a $\vec{v}_1=\vec{0}$. On a donc $\vec{v}=\vec{v}_2\in B$. Ainsi, $\vec{v}\in B$. Ceci prouve: $\mathrm{Ker}\,(p)\subset B$.
  - Tout $\vec{v}$ de B s'écrit $\vec{v}=\vec{0}+\vec{v}$; puisque $\vec{0}\in A$, c'est la décomposition de $\vec{v}$ en la somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B. Par définition, on a alors $p(\vec{v})=\vec{0}$. Ainsi, $\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(p)$. Ceci prouve $B\subset\mathrm{Ker}\,(p)$ puisque l'on vient de prouver que tout vecteur de B appartient au noyau de p. Cela apporte donc la preuve que
  $$p(\vec{v})=\vec{0}\iff\vec{v}\in B.$$
- Les vecteurs de A sont invariants: $p(\vec{v})=\vec{v}$ pour tout $\vec{v}\in A$ et on a même:
$$p(\vec{v})=\vec{v}\iff\vec{v}\in A,$$
ce que l'on prouve en deux temps:

- on a vu plus haut que pour tout $\vec{v} \in A$, on a $p(\vec{v}) = \vec{v}$.
- si $p(\vec{v}) = \vec{v}$, c'est que $\vec{v} \in A$, car:
  * $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$;
  * on a donc $p(\vec{v}) = \vec{v}_1$ mais $p(\vec{v}) = \vec{v}$ donne $\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, c'est à dire $\vec{v}_2 = \vec{0}$.
  * C'est donc que $\vec{v} = \vec{v}_1 \in A$. Ainsi, $\vec{v} \in A$.

- On a $p \circ p = p$, ce que l'on prouve ainsi:
  - soit $\vec{v} \in E$, que l'on écrit $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$; alors $p(\vec{v}) = \vec{v}_1$
  - et du fait que $\vec{v}_1 \in A$, on a $p(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ (comme on l'a vu ci-dessus).
  - On a donc $p(p(\vec{v})) = p(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 = p(\vec{v})$, ce qui prouve que $p \circ p = p$.
- ***Remarque importante.*** Le cadre et la définition théoriques devront *toujours être présents à l'esprit*.

Caractérisation des projections: projecteurs

Il existe une réciproque à la propriété $p \circ p = p$:

Théorème IX.2.3 Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $p \circ p = p$, une tel endomorphisme étant appelé un *projecteur*.

- Alors $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont supplémentaires et p est la projection sur $\mathrm{Im}\,(p)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$; de plus $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id})$.
- En définitive, un endomorphisme p vérifiant $p \circ p = p$ est la projection sur $\mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id})$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$.
- Ainsi, en dimension finie, si M est la matrice de p (dans une base quelconque de E), alors p est une projection si et seulement si $M^2 = M$.

Démonstration 12

Théorème fondamental sur les projections

Ce résultat est capital:

Théorème IX.2.4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, A et B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:
$$E = A \oplus B$$
et p la projection sur A et parallèlement à B.

- Soit $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r, \vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = A \oplus B$, c'est à dire:
  - $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r)$ est une base de A,
  - $(\vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n)$ est une base de B (cf. page 116).
- Alors la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ ("codage" des images des vecteurs de la base) est la matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Très importante preuve.

- Par définition même de p et du fait que $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r$ sont dans A alors que $\vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n$ sont dans B, on a
$$p(\vec{f}_1) = \vec{f}_1, \quad p(\vec{f}_2) = \vec{f}_2, \ldots, p(\vec{f}_r) = \vec{f}_r, \quad p(\vec{f}_{r+1}) = \vec{0}, \ldots, p(\vec{f}_n) = \vec{0},$$
ce que l'on écrit ainsi:
$$\begin{array}{rcl} p(\vec{f}_1) & = & 1 \times \vec{f}_1 + 0 \times \vec{f}_2 + \ldots + 0 \times \vec{f}_n \\ p(\vec{f}_2) & = & 0 \times \vec{f}_1 + 1 \times \vec{f}_2 + 0 \times \vec{f}_3 + \ldots + 0 \times \vec{f}_n \\ \ldots & & \ldots \\ p(\vec{f}_r) & = & 0 \times \vec{f}_1 + \ldots + 0 \times \vec{f}_{r-1} + 1 \times \vec{f}_r + 0 \times \vec{f}_{r+1} + \ldots + 0 \times \vec{f}_n \\ p(\vec{f}_{r+1}) & = & 0 \times \vec{f}_1 + \ldots + 0 \times \vec{f}_n \\ \ldots & & \ldots \\ p(\vec{f}_n) & = & 0 \times \vec{f}_1 + \ldots + 0 \times \vec{f}_n. \end{array}$$
- Par définition même de la notion de matrice d'une application dans une base, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ ("codage" des images des vecteurs de la base) est la matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^3$, A est un plan et B une droite, alors
$$\begin{array}{rcl} p(\vec{f}_1) & = & 1 \times \vec{f}_1 + 0 \times \vec{f}_2 + 0 \times \vec{f}_3 \\ p(\vec{f}_2) & = & 0 \times \vec{f}_1 + 1 \times \vec{f}_2 + 0 \times \vec{f}_3 \\ p(\vec{f}_3) & = & 0 \times \vec{f}_1 + 0 \times \vec{f}_2 + 0 \times \vec{f}_3 \end{array}$$
et c'est pourquoi la matrice de p dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est la matrice
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Exemples de recherche de projeté et/ou de matrices de projections

Remarque préliminaire. Soit E un espace vectoriel, A et B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:
$$E = A \oplus B$$
et p la projection sur A et parallèlement à B. On a donc
$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x})$$
avec
$$p(\vec{x}) \in A, \quad \vec{x} - p(\vec{x}) \in B$$
et rechercher le projeté $p(\vec{x})$ de $\vec{x}$ sur A et parallèlement à B, c'est déterminer l'unique vecteur $\vec{x}_1$ de E tel que
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_1 \in A \\ \vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1 \in B. \end{array} \right.$$

Remarques.

- Pour un vecteur donné $\vec{x}$ dont on recherche le projeté $\vec{x}_1$, la relation $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ montre que l'on peut aussi se concentrer sur la recherche de $\vec{x}_2$: on aura alors $\vec{x}_1 = \vec{x} - \vec{x}_2$.
- Suivant le contexte (sous-espace défini par le passage d'un "test", sous-espace défini par un $\mathrm{Vect}\ldots$), on sera amenés à rechercher $\vec{x}_1$ ou $\vec{x}_2$ par des conditions portant sur leurs composantes ou comme combinaisons de certains vecteurs.

Premier exemple fondamental

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit P le plan engendré par les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$ et $\vec{v}_2 = (2, -1, 0)$, D la droite dirigée par le vecteur $\vec{v}_3 = (1, 3, -1)$ et p la projection sur P parallèlement à D. Déterminer l'image de tout vecteur $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par p et en déduire la matrice M de p dans la base canonique.

- Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; il existe donc $\vec{u}_1 \in P$ et $\vec{u}_2 \in D$ tels que

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

et il s'agit de déterminer $\vec{u}_1$ en fonction de $\vec{u}$ c'est à dire en fonction de x, y, z. Puisque $P = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $D = \mathrm{Vect}(\vec{v}_3)$, il existe des scalaires a, b, c tels que

$$\vec{u}_1 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2, \quad \vec{u}_2 = c\vec{v}_3$$

et donc

$$\vec{u} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3,$$

c'est à dire

$$(x, y, z) = (a + 2b + c, -b + 3c, -a - c).$$

On a donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 2b + c & = & x \\ -b - 3c & = & y \\ -a - c & = & z. \end{array} \right.$$

On trouve sans problème

$$a = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y - \frac{7}{6}z, \quad b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z, \quad c = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z.$$

Enfin, le but est d'exprimer $\vec{u}_1$, c'est à dire $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$; mais il est plus rapide d'exprimer $\vec{u}_2$, c'est à dire $c\vec{v}_3$, et lorsque l'on a le second, on a le premier puisque $\vec{u}_1 = \vec{u} - \vec{u}_2$. On calcule

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_1 & = & \vec{u} - \vec{u}_2 = \vec{u} - c\vec{v}_3 = (x, y, z) - \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right)(1, 3, -1) \\ & = & \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{7}{6}z\right). \end{array}$$

Ainsi, la projection p sur P parallèlement à D est l'application p définie par

$$\forall \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(\vec{u}) = \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{7}{6}z\right).$$

- On en déduit la matrice M de p dans la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: il suffit de calculer avec cette formule

$$\begin{array}{rcl} p(\vec{\imath}) & = & p(1, 0, 0) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) \\ p(\vec{\jmath}) & = & p(0, 1, 0) = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \\ p(\vec{k}) & = & p(0, 0, 1) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right) \end{array}$$

et d'écrire ces vecteurs verticalement. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

Deuxième exemple fondamental

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit P le plan défini par

$$P = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y - z = 0\}$$

et D la droite dirigée par le vecteur $\vec{v}_3 = (2, -1, 0)$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection sur P parallèlement à D. Déterminer la matrice M de p dans la base canonique.

- ***Réponse.***
  1. On a

$$\vec{u} = (x, y, z) \in P \iff z = x + y \iff \vec{u} = (x, y, x + y) \iff \vec{u} = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1),$$

ce qui démontre que $P = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ avec $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1))$ et ces deux vecteurs formant manifestement une famille libre, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de P et dans la mesure où

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant -3, on en conclut que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc que P et D sont supplémentaires.

  2. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On sait alors que $\vec{u}$ s'écrit de manière unique

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in P, \, \vec{u}_2 \in D$$

et puisque $D = \mathrm{Vect}(\vec{v}_3)$, sous la forme

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \lambda\vec{v}_3, \quad \vec{u}_1 \in P, \, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mais alors

$$\vec{u}_1 \in P \iff \vec{u} - \lambda\vec{v}_3 \in P$$

et puisque

$$\vec{u} - \lambda\vec{v}_3 = \big(x - 2\lambda, y + \lambda, z\big),$$

on a

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_1 \in P \iff \big(x - 2\lambda, y + \lambda, z\big) \in P & \iff & (x - 2\lambda) + (y + \lambda) - z = 0 \\ & \iff & \lambda = x + y - z, \end{array}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_1 = \vec{u} - \lambda\vec{v}_3 & = & \big(x - 2\lambda, y + \lambda, z\big) \\ & = & \big(x - 2(x + y - z), y + (x + y - z), z\big) \\ & = & \big(-x - 2y + 2z, x + 2y - z, z\big). \end{array}$$

On en déduit la matrice M de p dans la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: il suffit de calculer avec cette formule

$$\begin{array}{rcl} p(\vec{\imath}) & = & p(1, 0, 0) = (-1, 1, 0) \\ p(\vec{\jmath}) & = & p(0, 1, 0) = (-2, 2, 0) \\ p(\vec{k}) & = & p(0, 0, 1) = (2, -1, 1) \end{array}$$

et d'écrire ces vecteurs verticalement. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Symétries

Définition IX.3.6 Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:

$$E = A \oplus B.$$

Tout vecteur $\vec{v}$ de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$.

- Par définition, la symétrie s sur A et parallèlement à B est l'application qui à tout $\vec{v}$ de E associe $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
- C'est un automorphisme de E i.e. une application linéaire bijective de E dans E, avec

  $$s^{-1} = s,$$

  ce qui résulte du fait que

  $$s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$

- Pour tout vecteur $\vec{v} \in E$,

  $$s(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in A, \quad s(\vec{v}) = -\vec{v} \iff \vec{v} \in B$$

  autrement dit,

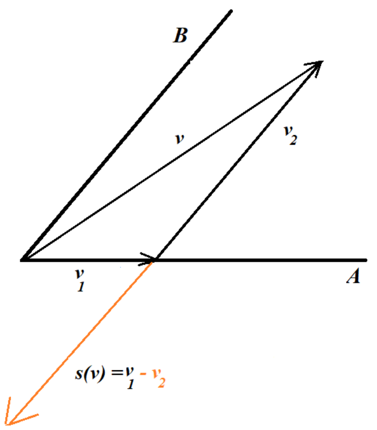
  $$\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) = A, \quad \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E) = B.$$

Remarquons en effet que

$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \iff (s - \mathrm{Id}_E)(\vec{v}) = \vec{0} \iff s(\vec{v}) - \mathrm{Id}_E(\vec{v}) = \vec{0} \iff s(\vec{v}) - \vec{v} = \vec{0} \iff s(\vec{v}) = \vec{v}$$

et de même,

$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E) \iff s(\vec{v}) = -\vec{v}.$$



Un tout premier exemple de symétrie

Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces

$$A = \mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Vect}(\vec{k})$$

sont évidemment supplémentaires: tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (x, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= \underbrace{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}_{\in A} + \underbrace{z\vec{k}}_{\in B}. \end{aligned}$$

Soit s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B. Puisque pour tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\vec{v} = (x, y, 0) + (0, 0, z)$$

et que

$$(x, y, 0) \in \mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}), \quad (0, 0, z) \in \mathrm{Vect}(\vec{k}),$$

on a par définition

$$\begin{aligned} s(\vec{v}) &= (x, y, 0) - (0, 0, z) \\ &= (x, y, -z). \end{aligned}$$

Preuves des propriétés d'une symétrie.

- C'est un endomorphisme de E:
  - Soit $\vec{v}, \vec{w} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Écrivons

    $$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \ \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

    avec $\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in A$ et $\vec{v}_2, \vec{w}_2 \in B$, si bien que

    $$s(\vec{v}) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad s(\vec{w}) = \vec{w}_1 - \vec{w}_2.$$

  - Alors

    $$\vec{v} + \lambda w = \vec{v}_1 + \lambda\vec{w}_1 + \vec{v}_2 + \lambda\vec{w}_2$$

    et comme A et B sont des sous-espaces, $\vec{v}_1 + \lambda\vec{w}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 + \lambda\vec{w}_2 \in B$.
  - Par définition, on a donc

    $$\begin{aligned} s(\vec{v} + \lambda\vec{w}) &= \vec{v}_1 + \lambda\vec{w}_1 - (\vec{v}_2 + \lambda\vec{w}_2) \\ &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \lambda(\vec{w}_1 - \vec{w}_2) \end{aligned}$$

    et on a bien

    $$s(\vec{v} + \lambda\vec{w}) = s(\vec{v}) + \lambda s(\vec{w}).$$

- *Propriété* $s(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in A$.
  - Les vecteurs de A sont invariants: $s(\vec{v}) = \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in A$:
    - tout $\vec{v}$ de A s'écrit $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$; puisque $\vec{0} \in B$, c'est la décomposition de $\vec{v}$ en la somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B.
    - Par définition, on a alors $s(\vec{v}) = \vec{v} - \vec{0} = \vec{v}$.
  - On a $s \circ s = \mathrm{Id}$, ce que l'on prouve ainsi:
    - soit $\vec{v} \in E$, que l'on écrit $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$;
    - on a donc

      $$s(\vec{v}) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

      et comme $-\vec{v}_2 \in B$, c'est *la décomposition de* $s(\vec{v})$ *en la somme d'un vecteur de* A *et d'un vecteur de* B.

* *Par définition, on a alors*

$$\begin{aligned} s(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) &= \vec{v}_1 - (-\vec{v}_2) \\ &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \end{aligned}$$

  c'est à dire $s(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{v}$.
* *On a donc* $s(s(\vec{v})) = \vec{v}$.

– En particulier, s est un automorphisme i.e. une bijection de E dans E et $s^{-1} = s$.

– Un vecteur invariant est un vecteur de A: si $s(\vec{v}) = \vec{v}$, c'est que $\vec{v} \in A$:

* $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$;
* on a donc $s(\vec{v}) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ mais $s(\vec{v}) = \vec{v}$ donne $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, c'est à dire $\vec{v}_2 = \vec{0}$.
* C'est donc que $\vec{v} = \vec{v}_1$ et comme $\vec{v}_1 \in A$, c'est que $\vec{v} \in A$.

– On a donc prouvé:

$$s(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in A.$$

• *Propriété* $s(\vec{v}) = -\vec{v} \iff \vec{v} \in B$.

– Tout d'abord, $s(\vec{v}) = -\vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in B$:

* tout $\vec{v}$ de B s'écrit $\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$ et puisque $\vec{0} \in B$, c'est *la décomposition de $\vec{v}$ en la somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B.*
* *Par définition, on a alors*

$$\begin{aligned} s(\vec{v}) &= \vec{0} - \vec{v} \\ &= -\vec{v}. \end{aligned}$$

– Réciproquement, si $s(\vec{v}) = -\vec{v}$, c'est que $\vec{v} \in B$:

* $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$;
* on a donc $s(\vec{v}) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ mais $s(\vec{v}) = -\vec{v}$ donne

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

  et donc $\vec{v}_1 = -\vec{v}_1$, c'est à dire $\vec{v}_2 = \vec{0}$.
* C'est donc que $\vec{v} = \vec{v}_2$ et comme $\vec{v}_2 \in B$, c'est que $\vec{v} \in B$.

– On a donc prouvé:

$$s(\vec{v}) = -\vec{v} \iff \vec{v} \in B.$$

• On a $s = 2p - \mathrm{Id}$ i.e.:

$$\forall x \in E,\ s(x) = 2p(x) - x$$

puisque $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$.

Caractérisation des symétries

Il existe une réciproque à la propriété $s \circ s = \mathrm{Id}_E$:

Théorème IX.3.5 Soit s un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

• Alors $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.
• Ainsi, en dimension finie n, si M est la matrice de s (dans une base quelconque de E), alors s est une symétrie si et seulement si $M^2 = I_n$.

Démonstration 13

Lien entre projection et symétrie

Proposition IX.3.6 Soit E un espace vectoriel,

• A et B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:

$$E = A \oplus B,$$

• p la projection sur A et parallèlement à B,
• s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B.
• Alors

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E$$

  i.e. pour tout vecteur $\vec{v} \in E$,

$$s(\vec{v}) = 2p(\vec{v}) - \vec{v}.$$

En effet, on écrit $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$, $\vec{v}_2 \in B$ si bien que

$$p(\vec{v}) = \vec{v}_1$$

et

$$\begin{aligned} s(\vec{v}) &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ &= 2\vec{v}_1 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ &= 2\vec{v}_1 - (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \\ &= 2p(\vec{v}) - \vec{v}. \end{aligned}$$

Théorème fondamental sur les symétries

Ce résultat est capital:

Théorème IX.3.7 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, A et B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:

$$E = A \oplus B$$

et s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B.

• Soit $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r, \vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = A \oplus B$, c'est à dire:

  – $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r)$ est une base de A,
  – $(\vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n)$ est une base de B (cf. page 116).

• Alors la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ ("codage" des images des vecteurs de la base) est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Très importante preuve.

• Par définition même de s et du fait que $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r$ sont dans A alors que $\vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n$ sont dans B, on a

$$s(\vec{f}_1) = \vec{f}_1, \quad s(\vec{f}_2) = \vec{f}_2, \ldots, s(\vec{f}_r) = \vec{f}_r, \quad s(\vec{f}_{r+1}) = -\vec{f}_{r+1}, \ldots, s(\vec{f}_n) = -\vec{f}_n,$$

ce que l'on écrit ainsi:

$$\begin{array}{rcl} s(\vec{f_1}) & = & 1\times\vec{f_1}+0\times\vec{f_2}+\ldots+0\times\vec{f_n} \\ s(\vec{f_2}) & = & 0\times\vec{f_1}+1\times\vec{f_2}+0\times\vec{f_3}+\ldots+0\times\vec{f_n} \\ \ldots & & \ldots \\ s(\vec{f_r}) & = & 0\times\vec{f_1}+\ldots+0\times\vec{f}_{r-1}+1\times\vec{f_r}+0\times\vec{f}_{r+1}+\ldots+0\times\vec{f_n} \\ s(\vec{f}_{r+1}) & = & 0\times\vec{f_1}+\ldots+0\times\vec{f_r}-1\times\vec{f}_{r+1}+0\times\vec{f}_{r+1}+\ldots+0\times\vec{f_n} \\ \ldots & & \ldots \\ s(\vec{f_n}) & = & 0\times\vec{f_1}+\ldots+0\times\vec{f}_{n-1}-1\times\vec{f_n}. \end{array}$$

- Par définition même de la notion de matrice d'une application dans une base, la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ ("codage" des images des vecteurs de la base) est donc la matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, si $E=\mathbb{R}^3$, A est un plan et B une droite, alors

$$\begin{array}{rcl} s(\vec{f_1}) & = & 1\times\vec{f_1}+0\times\vec{f_2}+0\times\vec{f_3} \\ s(\vec{f_2}) & = & 0\times\vec{f_1}+1\times\vec{f_2}+0\times\vec{f_3} \\ s(\vec{f_3}) & = & 0\times\vec{f_1}+0\times\vec{f_2}-1\times\vec{f_3} \end{array}$$

et c'est pourquoi la matrice de p dans la base $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ est la matrice

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4 Déterminants et trace

On parle de déterminant:

- d'une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$): *il n'existe pas de déterminant pour une matrice non carrée,*
- d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie,
- d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n: *il n'existe donc pas, par exemple, de déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$,*

et dans les trois cas, il s'agit d'un scalaire.

4.1 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème IX.4.8 Soit un entier $n\geq 1$. L'application dét (déterminant) est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Elle vérifie les propriétés fondamentales suivantes: pour toutes matrices carrées M et N de taille $n\times n$:

- M est inversible si et seulement si $\text{dét}\,(M)\neq 0$ et alors $\text{dét}\,(M^{-1})=\frac{1}{\text{dét}\,(M)}$.
- $\text{dét}\,(MN)=\text{dét}\,(M)\times\text{dét}\,(N)$
- $\text{dét}\,(I_n)=1$
- $\text{dét}\,(M^T)=\text{dét}\,(M)$.
- $\text{dét}\,(kM)=k^n\text{dét}\,(M)$ pour tout scalaire k.
- On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à l'une de ses colonnes (resp. lignes) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

La démonstration de l'existence de cette notion ainsi que ses propriétés sont admises.

Remarque importante. Comme on le verra, cette dernière propriété est capitale dans le calcul pratique d'un déterminant, dans le but de "nettoyer" une ligne ou une colonne, comme dans la méthode du pivot de Gauß.

Convention d'écriture. Soit $M=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Alors $\text{dét}\,(M)$ est noté

$$\text{dét}\,(M)=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cas particuliers fondamentaux

Théorème IX.4.9

- ***Déterminant d'une matrice 2 × 2.*** Soit $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\text{dét}\,(M)=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

- ***Déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire.*** Dans les deux cas, c'est le produit des coefficients situés sur la diagonale:

$$D=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} a_1 & & & termes \\ 0 & a_2 & & qcq \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$\text{dét}\,(D)=a_1\times a_2\times\ldots\times a_n \qquad \text{dét}\,(T)=a_1\times a_2\times\ldots\times a_n.$$

4.2 Formule donnant le déterminant; développement suivant une ligne ou une colonne

Définition IX.4.7 Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un couple (i_0, j_0) étant donné, on note $\Delta_{i_0 j_0}$ le déterminant de la matrice carrée $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la i_0-ème ligne et la j_0-ème colonne de M et on l'appelle *mineur* relatif au coefficient $a_{i_0 j_0}$.

Exemple avec $i_0 = 3$, $j_0 = 2$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & \cancel{b} & c & d \\ e & \cancel{f} & g & h \\ \cancel{i} & \cancel{j} & \cancel{k} & \cancel{l} \\ m & \cancel{n} & o & p \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta_{32} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

La connaissance théorique de la formule qui va suivre dans le cas général peut être réservée à une seconde lecture, au profit d'une application systématique:

Proposition IX.4.10

Formule de développement suivant la i_0-ème ligne:

$$\text{dét}\,(M) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i_0+k} a_{i_0 k} \Delta_{i_0 k}\,.$$

Formule de développement suivant la j_0-ème colonne:

$$\text{dét}\,(M) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j_0} a_{k j_0} \Delta_{k j_0}\,.$$

Remarques pour bien comprendre la technique qui va suivre.

- Que ce soit un développement suivant une ligne ou une colonne, un déterminant $n \times n$ est (en théorie) la somme des coefficients balayant la ligne ou la colonne choisie, chacun affecté d'un signe $+$ ou $-$ et de son mineur relatif, qui est un déterminant $(n-1)\times(n-1)$. Il s'agit donc d'une formule récurrente.
- Les signes sont distribués de cette façon:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

- Cette formule appliquée à la lettre donne, pour ce qui est de ce déterminant 4×4 développé suivant sa 3-ième colonne ($j_0 = 3$):

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = +c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - g \begin{vmatrix} a & b & d \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & p \end{vmatrix} - o \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}.$$

Calcul pratique d'un déterminant

Remarque capitale.

- Dans le développement du déterminant d'une matrice suivant une ligne ou une colonne, un mineur Δ_{ij} associé à un coefficient a_{ij} nul n'a pas besoin d'être calculé puisque sa contribution dans la formule donnant le déterminant sera $(1)^{i+j}\Delta_{ij}a_{ij} = 0$.
- Il sera donc intéressant de développer un déterminant suivant une ligne ou une colonne comportant un grand nombre de zéros.
- Mais les matrices seront le plus souvent "pleines". D'où la nécessité de faire apparaître des 0 par des combinaisons convenables des lignes ou des colonnes, en mode pivot de Gauß, *ce qui ne change pas la valeur du déterminant*.

Exemple

Soit à calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Alors par les opérations indiquées:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -7 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$dis \overset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -7 & -4 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

et on développe suivant la 3-ième colonne:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & + & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -7 & -4 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \\ &\overset{\text{dév}/C_3}{=} +1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 4 \\ -3 & -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &\overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -7 & -11 & 4 \\ -3 & -7 & 3 \end{vmatrix} \\ &\overset{C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -7 & -11 & -17 \\ -3 & -7 & -6 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{dév}/L_1}{=} -1 \times (66 - 119) \\ &= 53. \end{aligned}$$

4.3 Autres propriétés d'un déterminant

Proposition IX.4.11 Le calcul du déterminant est une opération *multilinéaire* par rapport aux colonnes: considérons des colonnes
$$C_1, C_1', C_2, \ldots, C_n$$
et un scalaire α. Alors
$$\begin{aligned} \text{dét}\,(\alpha C_1, C_2, \ldots, C_n) &= \alpha \text{dét}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \text{dét}\,(C_1 + C_1', C_2, \ldots, C_n) &= \text{dét}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \text{dét}\,(C_1', C_2, \ldots, C_n) \end{aligned}$$
(et cette propriété mise en évidence sur la première colonne est bien entendu valable sur les autres colonnes).

De même, le calcul du déterminant est une opération multilinéaire par rapport aux lignes.

En permutant deux colonnes (resp lignes) d'une matrice, on transforme le déterminant en son opposé.

En permutant deux vecteurs d'une famille de n vecteurs, on transforme le déterminant en son opposé.

Ainsi, un facteur commun à tous les coefficients d'une colonne, respectivement ligne, peut "sortir" du déterminant. On a donc par exemple

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x & \alpha x' & x'' \\ y & ay' & y'' \\ z & \alpha z' & z'' \end{vmatrix} &= \alpha \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ \alpha z & \alpha z' & \alpha z'' \end{vmatrix} &= \alpha \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} x & x'+u & x'' \\ y & y'+v & y'' \\ z & z'+w & z'' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & u & x'' \\ y & v & y'' \\ z & w & z'' \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} x & x'' & x' \\ y & y'' & y' \\ z & z'' & z' \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} z & z' & z'' \\ y & y' & y'' \\ x & x' & x'' \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

4.4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition IX.4.8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. Le déterminant de u, noté $\text{dét}\,(u)$, est le déterminant de n'importe quelle matrice représentant cet endomorphisme.

Remarque importante. C'est un fait remarquable, sous-entendu dans la définition, que quelle que soit la matrice représentant un endormorphisme u, on trouvera toujours la même valeur pour le déterminant de cette matrice.

Théorème IX.4.12 ***Propriétés du déterminant d'un endomorphisme.*** Soit u et v deux endomorphismes de E.

- u est un automorphisme de E si et seulement si $\text{dét}\,(u) \neq 0$ et alors $\text{dét}\,(u^{-1}) = \frac{1}{\text{dét}\,(u)}$.
- $\text{dét}\,(u \circ v) = \text{dét}\,(u) \times \text{dét}\,(v)$.

Premier exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par
$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ u(P) = 2P - P'$$
(il est facile de vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$). A-t-on affaire à un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

- Soit la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Dans la mesure où
$$\begin{aligned} u(1) &= 2 \\ u(X) &= 2X - 1 \\ u(X^2) &= 2X^2 - 2X \\ u(X^3) &= 2X^3 - 3X^2, \end{aligned}$$
la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ est
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
on a
$$\begin{aligned} \text{dét}\,(u) &= \text{dét}\,(M) \\ &= 16 \end{aligned}$$
(le produit des éléments de sa diagonale puisque M est triangulaire).
- Puisque $\text{dét}\,(u) \neq 0$, u est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Deuxième exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$ et u_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme u_a est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3$?

- Puisque M_a représente u_a dans la base canonique, on a
$$\text{dét}\,(u) = \text{dét}\,(M_a).$$
- En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on a
$$\text{dét}\,(M_a) = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 3 & 1+a & 0 \\ 2 & -1-a & 0 \end{vmatrix}$$
et en développant suivant la troisième colonne, on obtient
$$\begin{aligned} \text{dét}\,(M_a) &= -\begin{vmatrix} 3 & 1+a \\ 2 & -1-a \end{vmatrix} \\ &= 5 - a. \end{aligned}$$

- Ainsi,
$$\text{dét}\,(u_a) = 5 - a$$
et en conséquence, u_a est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 5$.

Troisième exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice
$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Pour quelles valeurs du scalaire λ l'endomorphisme $\lambda\text{Id} - u$ n'est-il pas un automorphisme de $\mathbb{R}_2$?

- Puisque M représente u dans la base canonique, l'endomorphisme $\lambda\text{Id} - u$ est représenté dans la base canonique par
$$\lambda I_2 - M = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$
- On calcule
$$\begin{aligned} \text{dét}\,(\lambda I_2 - M) &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)(\lambda-2) - 1 \\ &= \lambda^2 - 5. \end{aligned}$$
- On a donc
$$\text{dét}\,(\lambda\text{Id} - u) = \lambda^2 - 5$$
et en conséquence, $\lambda\text{Id} - u$ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si
$$\lambda^2 - 5 = 0 \iff \lambda = \sqrt{5} \text{ ou } \lambda = -\sqrt{5}.$$

4.5 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition IX.4.9 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n (typiquement $E = \mathbb{R}^3$), soit $\mathcal{B}$ une base de E (typiquement la base canonique de $\mathbb{R}^3$) et $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une famille de n vecteurs de E (donc autant que la dimension de E).

Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ de cette famille relativement à cette base est le déterminant de la matrice de cette famille dans cette base (la 1-ère colonne de M est constituée des composantes de $\vec{v}_1$ dans $\mathcal{B}\dots$).

Remarque importante. Si on change de base, la valeur du déterminant d'une famille de vecteurs change.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\vec{v}_1 = (4,3)$, $\vec{v}_2 = (-2,1)$ et la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

- Soit $\mathcal{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La matrice M de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ est la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
dont le déterminant vaut 10. En conséquence,
$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 10.$$
- Soit la base $\mathcal{B}' = \big((1,1),(-1,1)\big)$. On a facilement
$$\begin{aligned} (4,3) &= \frac{7}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1) \\ (-2,1) &= -\frac{1}{2}(1,1) + \frac{3}{2}(-1,1) \end{aligned}$$
et c'est pourquoi
$$M' = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
est la matrice de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}'$, dont le déterminant vaut 5. En conséquence,
$$\text{dét}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = 5.$$
On constate donc que la famille $\mathcal{F}$ n'a pas le même déterminant dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Le principal intérêt de cette notion est le suivant:

Théorème IX.4.13 La famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Premier exemple

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, la famille
$$\mathcal{F} = \big(X^3 - 1, X^3 + 1, X^3 + X^2 + 1, X^3 + X^2 - X\big)$$
est une base.

- En effet, $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4,
- la famille $\mathcal{F}$ comporte 4 vecteurs,
- sa matrice M dans la base
$$(1, X, X^2, X^3)$$
est la matrice
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
- En développant suivant L_2, on obtient
$$\det(M) = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
et en développant suivant L_2,
$$\begin{aligned} \det(M) &= -1 \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

ce qui apporte la preuve que $\mathcal{F}$ est bien une base $\mathbb{R}_3[X]$.

Deuxième exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, pour quelles valeurs de a la famille de vecteurs
$$\mathcal{F} = \big((3,-1,1),(a,1,0),(1,2,-1)\big)$$
est-elle une base?

- La famille $\mathcal{F}$ comporte 3 vecteurs, qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$.
- La matrice M de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$M = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
- En effectuant $L_1 \longleftarrow L_1 - aL_2$,
$$\det(M) = \begin{vmatrix} 3=a & 0 & 1-2a \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
et en développant suivant C_2:
$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 3+a & 1-2a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= a-4 \end{aligned}$$
et c'est pourquoi $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 4$.

5 Trace

Définition IX.5.10 Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On appelle *trace* de M le nombre $\mathrm{Tr}(M)$ défini par
$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \ldots + a_{nn}$$
c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux.
- L'application $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est alors une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire
$$\mathrm{Tr}(aM + bN) = a\mathrm{Tr}(M) + b\mathrm{Tr}(N)$$
pour toutes matrices $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tous scalaires $(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
- De plus,
$$\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$$
pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, de façon évidente,
$$\mathrm{Tr}(M^T) = \mathrm{Tr}(M).$$

Démonstration 14

Exemple

Pour $M = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Tr}(I_3) = 3$ et plus généralement pour tout entier $n \geq 1$, $\mathrm{Tr}(I_n) = n$.

6 Vecteurs et valeurs propres, sous-espaces propres

6.1 Vecteurs et valeurs propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel, de dimension finie ou non, sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition IX.6.11 Un vecteur $\vec{v}$ de E est dit propre pour un endomorphisme u s'il est $\vec{v}$ non nul et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}.$$
On dit alors que le vecteur $\vec{v}$ est associé à la valeur propre λ.

Un tout premier exemple

On prend $E = \mathbb{R}^2$ et u est l'endomorphisme de E défini par
$$u : \vec{v} = (x,y) \mapsto (x+2y, 2x-2y).$$
Alors les vecteurs $\vec{v}_0 = (2,1)$ et $\vec{v}_1 = (1,-2)$ sont des vecteurs propres pour u associés à 2 et -3 respectivement car
$$\begin{array}{ccccccccc} u(\vec{v}_0) & = & u(2,1) & = & (4,2) & = & 2(2,1) & = & 2\vec{v}_0 \\ u(\vec{v}_1) & = & u(1,-2) & = & (-3,6) & = & -3(1,-2) & = & -3\vec{v}_1. \end{array}$$

Définition IX.6.12 Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

- Un scalaire λ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur propre de u associé à λ, donc s'il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul tel que $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
- On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u. On le note $\mathrm{Sp}(u)$.

Deuxième exemple

On reprend $E = \mathbb{R}^2$ et u et l'endomorphisme u de E défini par
$$u : \vec{v} = (x,y) \mapsto (x+2y, 2x-2y).$$
Alors le scalaire $\lambda = 4$ n'est pas une valeur propre de u car pour tout vecteur $\vec{v} = (x,y)$, on a
$$\begin{aligned} u(\vec{v}) = 4\vec{v} &\iff (x+2y, 2x-2y) = 4(x,y) \\ &\iff \begin{cases} x+2y = 4x \\ 2x-2y = 4y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3x+2y = 0 \\ 2x-6y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$
$3L_1 + L_3$ donne $-7x = 0$, donc $x = 0$ puis L_1 donne $y = 0$ et en conséquence, $\vec{v} = \vec{0}$. L'égalité
$$u(\vec{v}) = 4\vec{v}$$
ne se produit donc pour aucun vecteur $\vec{v}$ non nul, ce qui démontre que 4 n'est pas une valeur propre de u.

Troisième exemple

On prend $E = \mathbb{R}^2$ et u est l'endomorphisme de E défini par

$$u : \vec{v} = (x, y) \mapsto (-y, x).$$

Alors aucun vecteur $\vec{v}$ n'est propre pour u.

- En effet, si $\vec{v} = (x, y)$ était propre pour u associé à une valeur propre λ, on aurait $(-y, x) = \lambda(x, y)$ et donc
$$\begin{cases} -y &= \lambda x \\ x &= \lambda y \end{cases}$$
d'où $-y = \lambda^2 x$ i.e. $(\lambda^2 + 1)y = 0$.
- Mais $y = 0$ donnerait $x = 0$ et $\vec{v} = (0, 0)$ ce qui est totalement exclu puisque $\vec{v}$ n'est pas le vecteur nul.
- C'est donc que $y = 0$ et en conséquence $\lambda^2 + 1 = 0$, ce qui est absurde.

Quatrième exemple

On prend $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $u : f \mapsto f'$ (la linéarité de u découle de la linéarité de la dérivation et si f est de classe C^∞, alors f' est aussi de classe C^∞, ce qui démontre que f est bien une application de E dans E et donc un endomorphisme de E).

- Alors tout réel λ est une valeur propre de u.
- En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit f_λ la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$. On a
$$f'_\lambda(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda f_\lambda(t).$$
Autrement dit, $f'_\lambda = \lambda f_\lambda$ c'est à dire $u(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$.
- On a donc prouvé que λ est une valeur propre de u et que f_λ est un vecteur propre associé.

6.2 Vecteurs et valeurs propres d'une matrice carrée

Définition IX.6.13 Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dit propre pour M s'il est ***non nul*** et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \lambda X$.
- Un scalaire λ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur colonne X non nul tel que $MX = \lambda X$. On dit alors que X est un vecteur colonne propre de M associé à λ.
- Le spectre de M, noté $\mathrm{Sp}(M)$, est l'ensemble des valeurs propres de M.

Les notions de valeur propre d'un endomorphisme et de valeur propre d'une matrice carrée sont intimement liées:

Théorème IX.6.14 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$,

- $\mathcal{B}$ une base de E,
- u un endomorphisme de E,
- M la matrice de u dans $\mathcal{B}$,
- $\vec{v}$ un vecteur (non nul) de E, X son vecteur colonne dans la base $\mathcal{B}$
- et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

Alors λ est une valeur propre de u si et seulement si λ est une valeur propre de M et $\vec{v}$ est un vecteur propre pour u associé à λ si et seulement si X est un vecteur colonne propre pour M associé à λ.

En effet, par définition de la représentation matricielle d'un endomorphisme dans une base, MX est le vecteur colonne du vecteur $u(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}$ et en conséquence,

$$u(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \iff MX = \lambda X.$$

Ainsi,

En dimension finie, un endomorphisme et une matrice qui représente cet endomorphisme ont les mêmes valeurs propres.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à M dans la base canonique.

- On a
$$\begin{aligned} MX &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2X \end{aligned}$$
ce qui prouve que 2 est une valeur propre de M et que X est un vecteur colonne propre associé.
- Maintenant, soit $\vec{v} = (2, 1)$. Alors X est la matrice colonne de $\vec{v}$ dans la base canonique, si bien que $u(\vec{v})$ se calcule avec la matrice M:
$$MX = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \implies u(\vec{v}) = (4, 2) = 2 \times (2, 1) = 2\vec{v},$$
ce qui montre que $\vec{v}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 2.

La situation suivante est fréquente et importante.

Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension finie n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

- Si la j_0-ième colonne de M est de la forme
$$\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_0 \longleftarrow \text{sur la diagonale} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$
alors $u(\vec{e}_{j_0}) = \lambda_0 \vec{e}_{j_0}$ donc $\vec{e}_{j_0}$ est un vecteur propre pour u associé à la valeur propre λ_0.
- Réciproquement, si $\vec{e}_{j_0}$ est un vecteur propre pour u associé à la valeur propre λ_0, alors la j_0-ième colonne de M aura l'allure ci-dessus.

Cela résulte de la théorie de la représentation matricielle/codage des endomorphismes:

- Si la j_0-ième colonne est de cette forme, c'est que par définition

$$\begin{array}{rcl} u(\vec{e}_{j_0}) & = & 0\times\vec{e}_1+\ldots+0\times\vec{e}_{j_0-1}+\lambda_0\times\vec{e}_{j_0}+0\times\vec{e}_{j_0+1}+\ldots+0\times\vec{e}_n \\ & = & \lambda_0\times\vec{e}_{j_0} \end{array}$$

- et réciproquement si $u(\vec{e}_{j_0})=\lambda_0\vec{e}_{j_0}$, alors

$$\begin{array}{rcl} u(\vec{e}_{j_0}) & = & \lambda_0\times\vec{e}_{j_0} \\ & = & 0\times\vec{e}_1+\ldots+0\times\vec{e}_{j_0-1}+\lambda_0\times\vec{e}_{j_0}+0\times\vec{e}_{j_0+1}+\ldots+0\times\vec{e}_n \end{array}$$

  et la j_0-ième colonne aura l'allure annoncée.

Exemples

En notant $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, resp. $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, la base canonique de $\mathbb{R}^4$, resp. $\mathbb{R}^3$:

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\2&0&0&1\\3&-1&4&-1\\1&4&0&2\end{pmatrix}}_{\vec{e}_3\text{ propre assoc. à }4}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-2&1\\-1&0&2\end{pmatrix}}_{\vec{\jmath}\text{ propre assoc. à }-2}$$

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\2&1&2\end{pmatrix}}_{\vec{k}\text{ propre assoc. à }2}$$

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-1&1\\0&3&2\end{pmatrix}}_{\vec{\imath}\text{ propre assoc. à }-1}$$

$$D = \underbrace{\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&0&2\\-1&0&1\end{pmatrix}}_{\vec{\jmath}\text{ propre assoc. à }0}$$

6.3 Sous-espaces propres

Soit E un espace vectoriel.

On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Théorème IX.6.15 Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u.

- Le sous-espace propre de u associé à λ est le noyau $\mathrm{Ker}\,(u-\lambda\mathrm{Id})$.
- Il est constitué (à l'exception du vecteur nul) de tous les vecteurs propres associés à λ. En effet,

$$u(\vec{v})=\lambda\vec{v} \iff u(\vec{v})-\lambda v=\vec{0} \iff (u-\lambda\mathrm{Id})(\vec{v})=\vec{0} \iff \vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(u-\lambda\mathrm{Id}).$$

- C'est donc un sous-espace non réduit à $\{\vec{0}\}$ et donc de dimension au moins égale à 1.
- On appelle éléments propres de u son spectre et ses sous-espaces propres.

En effet,

$$\begin{array}{rcl} u(\vec{v})=\lambda\vec{v} & \iff & u(\vec{v})-\lambda v=\vec{0} \\ & \iff & (u-\lambda\mathrm{Id})(\vec{v})=\vec{0} \\ & \iff & \vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(u-\lambda\mathrm{Id}). \end{array}$$

Et pour les matrices carrées:

Définition IX.6.14 Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de M.

- Le sous-espace propre de M associé à λ est le noyau $\mathrm{Ker}\,(M-\lambda I_n)$.
- Il est constitué (à l'exception du vecteur nul) de tous les vecteurs colonnes propres associés à λ.
- On appelle éléments propres de M son spectre et ses sous-espaces propres.

Sous-espaces propres dans la pratique

Pour trouver une base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(u-\lambda\mathrm{Id})$ associé à une valeur propre λ, on sera amenés à résoudre le système d'équations $MX=\lambda X$; pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, cela conduira à un système 3×3 dont les solutions formeront un plan ou une droite, définies par une équation, resp. deux équations. Dès lors, on saura en déterminer une base.

Exemple.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}.$$

Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre -1.

- Soit $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$. Dans la mesure où:
  - u et M sont canoniquement associés,
  - $V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est la matrice colonne de $\vec{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

– et que

$$\begin{aligned}
M\times V &= \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x+2y-z\\ 2x+y-z\\ 2x-y+z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

on a

$$u(\vec{v}) = (x+2y-z, 2x+y-z, 2x-y+z)$$

et en conséquence

$$\begin{aligned}
\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}\\
&\iff (x+2y-z,2x+y-z,2x-y+z)+(x,y,z)=(0,0,0)\\
&\iff (2x+2y-z,2+2y-z,2x-y+2z)=(0,0,0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{l}2x+2y-z=0\\ 2x+2y-z=0\\ 2x-y+2z=0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l}2x+2y-z=0\\ 2x-y+2z=0.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

L_2-L_1 conduit à $z=y$; reporté dans L_1, on obtient $y=-2x$ et donc $z=-2x$, si bien que

$$\begin{aligned}
\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id}) &\iff \vec{v}=(x,-2x,-2x)\\
&\iff \vec{v}=x(1,-2,-2)\\
&\iff \vec{v}\in\mathrm{Vect}(1,-2,-2),
\end{aligned}$$

ce qui met en évidence que $\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id})$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(1,-2,-2)$.

Autre exemple

Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 de la matrice

$$M=\begin{pmatrix}-1 & -6 & 6\\ -3 & -4 & 6\\ -3 & -6 & 8\end{pmatrix}.$$

- Soit $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
M\times X &= \begin{pmatrix}-1 & -6 & 6\\ -3 & -4 & 6\\ -3 & -6 & 8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-x-6y+6z\\ -3x-4y+6z\\ -3x-6y+8z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- En conséquence,

$$\begin{aligned}
X\in\mathrm{Ker}\,(M-2I_3) &\iff MX-2X=0\\
&\iff \begin{pmatrix}-x-6y+6z\\ -3x-4y+6z\\ -3x-6y+8z\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-3x-6y+6z\\ -3x-6y+6z\\ -3x-6y+6z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff -3x-6y+6z=0\\
&\iff -x-2y+2z=0\\
&\iff x=-2y+2z\\
&\iff X=\begin{pmatrix}-2y+2z\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
&\iff X=y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\\
&\iff X\in\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

ce qui met en évidence que

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

est une base de $\mathrm{Ker}\,(M-2I_3)$.

6.4 Cas de la valeur propre 0

Dans ce paragraphe, tout est affaire de définition.

Proposition IX.6.16 Le scalaire 0 est une valeur propre de u si et seulement s'il existe un vecteur non nul $\vec{v}$ tel que

$$u(\vec{v})=0\times\vec{v},$$

c'est à dire tel que $u(\vec{v})=\vec{0}$.

- Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est donc tout simplement $\mathrm{Ker}\,u$.
  - La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est donc la dimension de $\mathrm{Ker}\,u$
  - D'après le théorème du rang:

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(u))+\dim(\mathrm{Im}\,(u))=\dim(E),$$

    la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 vaut aussi

$$n-\dim(\mathrm{Im}\,(u))$$

    (où $n=\dim E$), ou ce qui revient au même, $n-\mathrm{rg}(u)$.

Remarques.

- Une autre façon de dire que 0 est une valeur propre de u est de dire que $\mathrm{Ker}\,u$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$ (on dit "pas réduit à $\{\vec{0}\}$" pour dire "il n'y a pas que le vecteur nul dans $\mathrm{Ker}\,u$").

- ***En dimension finie*** (donc la plupart du temps dans la pratique), on sait qu'un endomorphisme est un automorphisme (i.e. est bijectif) si et seulement si $\operatorname{Ker} u$ est *réduit* à $\{\vec{0}\}$. On peut donc dire qu'un endomorphisme possédant la valeur propre 0 n'est pas un automorphisme et vice-versa:
  - 0 est valeur propre $\Longrightarrow$ pas bijectif, pas bijectif $\Longrightarrow$ 0 est valeur propre,
  - 0 n'est pas valeur propre $\Longrightarrow$ bijectif, bijectif $\Longrightarrow$ 0 n'est pas valeur propre
  - et on peut aussi remplacer "bijectif" dans ces phrases par "de rang n".
- ***Matriciellement***, on peut faire du "copier-coller" des lignes ci-dessus. Aussi, on peut souvent "voir" le rang par considération des colonnes.
  - Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
    * Il est clair que M est de rang 2 ou ce qui revient au même, u est de rang 2.
    * Donc $\operatorname{Ker} M$ est de dimension 1 ou ce qui revient au même, $\operatorname{Ker} u$ est de dimension 1.
    * Donc 0 est valeur propre de M et son sous-espace propre associé est de dimension 1 ou ce qui revient au même, 0 est valeur propre de u et son sous-espace propre associé est de dimension 1.

6.5 Valeurs et vecteurs propres: cas des projections et symétries

Théorème IX.6.17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et A, B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires:
$$E = A \oplus B.$$
On note p la projection sur A et parallèlement à B et s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B.
- Les valeurs propres de p sont 1 et 0, les sous-espaces propres associés étant respectivement A et B.
- Les valeurs propres de s sont 1 et -1, les sous-espaces propres associés étant respectivement A et B.

Démonstration 15

7 Quelques compléments

7.1 Stabilité

Soit E un espace vectoriel et u endomorphisme de E.

Définition IX.7.15 Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u lorsque $u(F) \subset F$, c'est à dire lorsque pour tout $x \in F$, le vecteur $u(x)$ appartient encore à F.

Premier exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé canoniquement à la matrice
$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
et le plan F défini par
$$F = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y - x = 0\}.$$
Alors F est stable par u.
- En effet, soit $\vec{v} = (x, y, z) \in F$. On calcule $u(\vec{v})$:
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - y + z \\ -3x + y + z \\ -3x + 2y \end{pmatrix}$$
si bien que
$$u(\vec{v}) = (-x - y + z, -3x + y + z, -3x + 2y).$$
- Faisons passer le "test d'appartenance" à F au vecteur $u(\vec{v})$:
$$(-3x + y + z) - (-x - y + z) = -2x + 2y$$
et puisque $\vec{v} \in F$, on a $y - x = 0$ et donc $-2x + 2y = 0$. C'est la preuve que $u(\vec{v}) \in F$.
- Ainsi, pour tout $\vec{v} \in F$, on a $u(\vec{v}) \in F$ et c'est pourquoi F est stable par u.

En revanche, le sous-espace vectoriel
$$F' = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$$
n'est pas stable par u. En effet, le vecteur $\vec{v} = (2, -1, -1)$ appartient à F' mais
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$
si bien que $u(\vec{v}) = (-2, -8, -8)$ et il est clair que $u(\vec{v})$ n'appartient pas à F'.

Deuxième exemple

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \geq 1$ fixé), soit u l'endomorphisme défini par
$$\forall P \in E,\ u(P) = XP'$$
(il est facile de vérifier que u est un endomorphisme de E). Alors le sous-espace F constitué par les polynômes qui s'annulent en 0 et dont la dérivée est nulle en 0 est stable par u.
- En effet, soit $P \in F$. Dans la mesure où donc $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$, on a
$$\begin{aligned} u(P) &= XP' \\ \Rightarrow u(P)(0) &= 0 \times P'(0) = 0 \\ (u(P))' &= P' + XP' \\ \Rightarrow (u(P))'(0) &= P'(0) + 0 \times P''(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$
ce qui prouve que $u(P) \in F$.

- En revanche, soit G le sous-espace constitué par les polynômes qui s'annulent en 1. Ce sous-espace n'est pas stable par u. En effet, $P = X - 1 \in G$ mais
$$u(P) = X \times 1 = X \notin G.$$

Critère important de stabilité

Théorème IX.7.18 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ une base de F. Alors F est stable par u si et seulement si
$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ u(\vec{e}_i) \in F.$$

Démonstration 16

Premier exemple

On reprend l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ associé canoniquement à la matrice
$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
et le plan F défini par
$$F = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y - x = 0\}.$$
Apportons la preuve que F est stable par u en utilisant ce critère.

- Déterminons une base de F. Soit un vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$. Alors
$$\begin{array}{rcl} \vec{v} \in F & \iff & y - x = 0 \\ & \iff & y = x \\ & \iff & \vec{v} = (x, x, z) \\ & \iff & \vec{v} = x(1,1,0) + z(0,0,1) \\ & \iff & \vec{v} \in \operatorname{Vect}\big((1,1,0), (0,0,1)\big). \end{array}$$
Ainsi, $\big((1,1,0), (0,0,1)\big)$ est une base de F.
- Notons
$$\vec{e}_1 = (1,1,0),\ \vec{e}_2 = (0,0,1).$$
On calcule
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
donc
$$u(\vec{e}_1) = (-2, -2, -1)$$
et l'on voit que $u(\vec{e}_1)$ satisfait l'équation $y - x$ de F i.e. $u(\vec{e}_1) \in F$. De même,
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
donc
$$u(\vec{e}_2) = (1, 1, 0)$$
et l'on voit que $u(\vec{e}_2)$ satisfait l'équation $y - x$ de F i.e. $u(\vec{e}_2) \in F$.
- Ainsi,
$$u(\vec{e}_1) \in F,\ u(\vec{e}_2) \in F$$
et c'est pourquoi F est stable par u.

Deuxième exemple

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \geq 1$ fixé), on reprend l'endomorphisme u défini par
$$\forall P \in E,\ u(P) = XP'$$
et le sous-espace F constitué par les polynômes qui s'annulent en 0 et dont la dérivée est nulle en 0. Apportons la preuve que F est stable par u en utilisant ce critère.

- Déterminons une base de F. Soit un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors
$$\begin{array}{rcl} P(0) & = & a_0 \\ P'(0) & = & a_1 \end{array}$$
et en conséquence,
$$\begin{array}{rcl} P \in F & \iff & a_0 = 0,\ a_1 = 0 \\ & \iff & P = a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n \\ & \iff & P \in \operatorname{Vect}\big(X^2, \ldots, X^n\big), \end{array}$$
ce qui démontre que
$$\mathcal{B} = \big(X^2, \ldots, X^n\big)$$
est une base de F.
- Calculons les images par u des vecteurs de $\mathcal{B}$, c'est à dire calculons $u(X^k)$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$.
$$(X^k)' = kX^{k-1} \implies u(X^k) = kX^k.$$
Puisque $k \geq 2$, on a clairement
$$u(X^k)(0) = k \times 0 = 0$$
et
$$(u(X^k))' = (kX^k)' = k^2 X^{k-1}$$
et en conséquence
$$(u(X^k))'(0) = k^2 \times 0.$$
C'est la preuve que $u(X^k) \in F$ et ce pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et c'est pourquoi F est stable par u.

Endomorphisme induit

Définition IX.7.16 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel stable par u.

- L'application $x \mapsto u(x)$ lorsque l'on prend F comme espace de départ (on dit alors que l'on prend la *restriction* de u à F) est alors une application définie sur F et à valeurs dans F.
- C'est donc un *endomorphisme* de F, que l'on appelle endomorphisme *induit* par u sur F.
- L'endomorphisme induit se calcule évidemment avec la même formule, il n'y a que l'espace de définition et l'espace d'arrivée qui sont modifiés.
- On lui donne parfois une notation spécifique, comme $u_{|F}$, pour bien le distinguer de u.

Premier exemple

Reprenons le premier exemple ci-dessus. L'endomorphisme induit par u sur F, i.e. la restriction $u_{|F}$ de u à F, est donc un endomorphisme de F et à ce titre, jouit de toutes les prérogatives qui lui sont attachées, comme la représentation matricielle. Par exemple, déterminons une base $\mathcal{B}$ de F et déterminons la matrice M' de $u_{|F}$ dans $\mathcal{B}$.

- Un vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement si
$$\begin{aligned} y = x \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{v} = (x, x, z) \\ &\Longleftrightarrow \quad \vec{v} = x(1,1,0) + z(0,0,1), \end{aligned}$$
ce qui met en évidence le fait que
$$F = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(0,0,1)\big)$$
et que
$$\mathcal{B} = \big((1,1,0),(0,0,1)\big)$$
est une base de F.
- Déterminons la matrice M' de $u_{|F}$ dans $\mathcal{B}$, en suivant le protocole habituel; notons que puisque $\dim F = 2$, M' est une matrice 2×2. En notant
$$\vec{v}_1 = (1,1,0), \quad \vec{v}_2 = (0,0,1),$$
  - on calcule avec la matrice M
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
si bien que
$$u_{|F}(\vec{v}_1) = (-2,-2,-1),$$
image que l'on cherche à exprimer en fonction de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$:
$$(-2,-2,-1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} -2 = a \\ -2 = a \\ -1 = b. \end{cases}$$
D'où
$$u_{|F}(\vec{v}_1) = -2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$
et c'est pourquoi la première colonne de la matrice M' recherchée est $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
  - on calcule avec la matrice M
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
si bien que
$$u_{|F}(\vec{v}_2) = (1,1,0),$$
image que l'on cherche à exprimer en fonction de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$:
$$(1,1,0) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 1 = a \\ 0 = b. \end{cases}$$
D'où
$$u_{|F}(\vec{v}_2) = \vec{v}_1$$
et c'est pourquoi la deuxième colonne de la matrice M' recherchée est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Ainsi,
$$M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- *Remarque.* Le polynôme caractéristique $\chi_{u_{|F}}$ de $u_{|F}$ est donc
$$\begin{aligned} \chi_{u_{|F}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda+1)^2. \end{aligned}$$
Par ailleurs, un calcul facile conduirait à
$$\chi_u(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)^2$$
et on voit donc que le polynôme caractéristique de la restriction $u_{|F}$ divise le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u (on peut démontrer que ce fait est général).

Deuxième exemple

Reprenons le deuxième exemple ci-dessus. Notons $u_{|F}$ l'endomorphisme induit par u sur F et déterminons $\mathrm{Ker}\, u_{|F}$.

- Soit $P \in F$; alors
$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}\, u_{|F} \quad &\Longleftrightarrow \quad XP' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad P' = 0 \end{aligned}$$
donc si et seulement si P est constant, mais comme $P \in F$, $P(0) = 0$ et la constante est donc nulle: P est le polynôme nul.
- On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}\, u_{|F} = \{0\}$ et il en résulte que $u_{|F}$ est un automorphisme de F.

Observons que $\mathrm{Ker}\, u$, lui, n'est pas réduit au polynôme nul car pour un polynôme $P \in E$,
$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}\, u \quad &\Longleftrightarrow \quad XP' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad P' = 0 \end{aligned}$$
donc si et seulement si P est constant. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, u$ est l'ensemble des polynômes constants et n'est donc pas réduit au polynôme nul; de ce fait, u n'est pas un automorphisme de E.

Un exemple de bloc matriciel

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on note $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4)$ la base canonique; soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
À noter: le "bloc matriciel 2×2" $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ en haut à gauche.

- On note $F = \mathrm{Vect}(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Alors F est stable par u car
  - par définition même de u,
$$u(\vec{f}_1) = \vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 \in F, \quad u(\vec{f}_2) = 2\vec{f}_1 - \vec{f}_2 \in F.$$

– Maintenant, soit $\vec{v} \in F$. Par définition, il existe deux scalaires a et b tels que
$$\vec{v} = a\vec{f_1} + b\vec{f_2}$$
et alors par linéarité de u
$$\begin{array}{rcl} u(\vec{v}) & = & au(\vec{f_1}) + bu(\vec{f_2}) \\ & = & a(\vec{f_1} + 2\vec{f_2}) + b(2\vec{f_1} - \vec{f_2}) \\ & = & (a+2b)\vec{f_1} + (2a-b)\vec{f_2} \\ & \in & \mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \vec{f_2}), \end{array}$$
ce qui prouve que $u(\vec{v}) \in F$ et donc que F est stable par u.

– Notons $u_{|F}$ la restriction de u à F. Puisque
$$u(\vec{f_1}) = \vec{f_1} + 2\vec{f_2}, \quad u(\vec{f_2}) = 2\vec{f_1} - \vec{f_2},$$
on a
$$u_{|F}(\vec{f_1}) = \vec{f_1} + 2\vec{f_2}, \quad u_{|F}(\vec{f_2}) = 2\vec{f_1} - \vec{f_2}$$
et c'est pourquoi, par définition même dela notion de représentation matricielle, la matrice de $u_{|F}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ est la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
c'est à dire le bloc matriciel A.

Plus généralement, présence d'un bloc matriciel et stabilité

Proposition IX.7.19 Soit E un espace de dimension finie n, u un endomorphisme de E, $\mathcal{B} = (\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$ une base de E et $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. S'il existe une matrice carrée A de taille $r \times r$, une matrice C de taille $r \times (n-r)$ et une matrice carrée D de taille $(n-r) \times (n-r)$ telles que
$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$
où 0 est la matrice nulle de taille $(n-r) \times r$, alors:

- le sous-espace
$$F = \mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_r})$$
est stable par u
- et l'endomorphisme induit par u sur F a pour matrice A dans la base $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_r})$ de F.

Démonstration 17

Exemple de stabilité et de bloc matriciel

Sur l'espace $E = \mathbb{R}_4[X]$, on considère l'application u définie par
$$\forall P \in E, \quad u(P) = P + (X^4 + 2X^2)P(-1) + 3XP(0)$$
(il est facile de vérifier que u est un endomorphisme de E). Alors le sous-espace F constitué par les polynômes qui s'annulent en 0 et dont la dérivée est nulle en 0:
$$F = \{P \in E,\ P(0) = 0,\ P'(0) = 0\}$$
est stable par u.

- En effet, soit $P \in F$. Dans la mesure où donc $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$, on a
$$\begin{array}{rcl} u(P) & = & P + (X^4 + 2X^2)P(-1) + 3XP(0) \\ \Rightarrow u(P)(0) & = & 0 + 0 \times P(-1) + 0 \times 0 \\ & = & 0 \\ (u(P))' & = & P' + (4X^3 + 4X)P(-1) + 3P(0) \\ \Rightarrow (u(P))'(0) & = & P'(0) + 0 \times P(-1) + 3P(0) \\ & = & 0, \end{array}$$
ce qui prouve que $u(P) \in F$.

Recherchons une base de F.

- Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$. Alors
$$P' = b + 2cX + 3dX^2 + 4eX^3$$
si bien que
$$P(0) = 0, \quad P'(0) = b$$
et donc
$$\begin{array}{rcl} P \in F & \iff & a = 0,\ b = 0 \\ & \iff & P = cX^2 + dX^3 + eX^4 \\ & \iff & P \in \mathrm{Vect}(X^2, X^3, X^4), \end{array}$$
ce qui démontre que (X^2, X^3, X^4) est une base de F.

Il est clair $\mathcal{B} = (X^2, X^3, X^4, 1, X^2)$ est une base de E: le choix de mettre en premier les vecteurs de la base de F va être décisif pour la suite; déterminons la matrice M de u dans cette base. On va suivre strictement le protocole:

- On a
$$\begin{array}{rcl} u(X^2) & = & X^2 + (X^4 + 2X^2) \\ & = & 3X^2 + X^4 \end{array}$$
et l'on écrit
$$3X^2 + X^4 = 3 \times X^2 + 0 \times X^3 + 1 \times X^4 + 0 \times 1 + 0 \times X$$
et c'est pourquoi la première colonne de M est $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notons ce fait capital: la présence de 0 en 4-ème et 5-ème position est tout à fait cohérente avec la stabilité de F par u: X^2, qui est dans F, a son image qui appartient aussi à F et cette image est donc combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ que l'on a mis en premier, c'est à dire des trois premiers qui constituent une base de F et pas des deux derniers.
- On a
$$\begin{array}{rcl} u(X^3) & = & X^3 - (X^4 + 2X^2) \\ & = & -2X^2 + X^3 - X^4 \end{array}$$
et l'on écrit
$$-2X^2 + X^3 - X^4 = -2 \times X^2 + 1 \times X^3 - 1 \times X^4 + 0 \times 1 + 0 \times X$$
et c'est pourquoi la première colonne de M est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- On a
$$\begin{array}{rcl} u(X^4) & = & X^4 + (X^4 + 2X^2) \\ & = & -X^2 + 2X^4 \end{array}$$
et l'on écrit
$$2X^2 + 2X^4 = 2 \times X^2 + 0 \times X^3 2 \times X^4 + 0 \times 1 + 0 \times X$$
et c'est pourquoi la première colonne de M est $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On a
$$\begin{aligned} u(1) &= 1+(X^4+2X^2)+3X \\ &= 1+3X+2X^2+X^4 \end{aligned}$$
et l'on écrit
$$1+3X+2X^2+X^4 = 2\times X^2+0\times X^3+1\times X^4+1\times 1+3\times X$$
et c'est pourquoi la première colonne de M est $\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.
- On a
$$\begin{aligned} u(X) &= X-(X^4+2X^2) \\ &= X-2X^2-X^4 \end{aligned}$$
et l'on écrit
$$X-2X^2-X^4 = -2\times X^2+0\times X^3-1\times X^4+0\times 1+1\times X$$
et c'est pourquoi la première colonne de M est $\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Notons que M est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, stabilité et présence d'un bloc matriciel

Proposition IX.7.20 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de dimension r, stable par u. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E, dite *adaptée*, dans laquelle la matrice M de u a la forme
$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
où A est carrée de taille $r\times r$, C est de taille $r\times(n-r)$, D est carrée de taille $(n-r)\times(n-r)$ et où 0 est la matrice nulle de taille $(n-r)\times r$.
Une telle base $\mathcal{B}$ est obtenue par réunion d'une base de F et d'une base d'un supplémentaire quelconque de F.

Démonstration.
- En effet, soit G un supplémentaire de F dans E:
$$E = F\oplus G,$$
soit $(e_1,\ldots,e_r)$ une base de F et soit $(e_{r+1},\ldots,e_n)$ une base de G. On sait alors que
$$\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_n)$$
est une base de E.
- Puisque $u(e_1)\in F$, ..., $u(e_r)\in F$, il existe des scalaires $a_{11},\ldots,a_{rr}$ tels que
$$\begin{aligned} u(e_1) &= a_{11}e_1+\ldots+a_{r1}e_r \in F \\ &\vdots \\ u(e_r) &= a_{1r}e_1+\ldots+a_{rr}e_r \in F. \end{aligned}$$
- En notant $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix}$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ a la forme de la matrice M ci-dessus.

7.2 Produit d'espaces vectoriels

Rappelons que le *produit cartésien* $E_1\times E_2\times\ldots\times E_p$ de p ensembles $E_1,\ldots,E_p$ est l'ensemble de tous les p-uplets $(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ avec $x_1\in E_1, x_2\in E_2,\ldots,x_p\in E_p$.

Lorsque $E_1,\ldots,E_p$ sont chacun des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on peut conférer naturellement une structure d'espace vectoriel à ce produit cartésien:

Définition IX.7.17 *Produit d'espaces vectoriels.* Soit $E_1,\ldots,E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (avec $p\geq 2$). Alors le produit cartésien $E = E_1\times E_2\times\ldots\times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'on le munit des lois suivantes:
- *loi interne:* pour tout $(x_1,\ldots,x_p)\in E$ et tout $(y_1,\ldots,y_p)\in E$, on pose
$$(x_1,\ldots,x_p) + (y_1,\ldots,y_p) = (x_1+y_1,\ldots,x_p+y_p)$$
- *loi externe:* pour tout $(x_1,\ldots,x_p)\in E$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, on pose
$$\lambda(x_1,\ldots,x_p) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_p).$$
Le vecteur nul de E est alors le vecteur
$$(\vec{0}_1,\ldots,\vec{0}_p),$$
où $\vec{0}_1,\ldots,\vec{0}_p$ sont les vecteurs nuls respectifs de $E_1,\ldots,E_p$.

Démonstration 18

Exemple

Soit l'espace vectoriel
$$E = \mathbb{R}_3[X]\times\mathbb{R}.$$
Démontrer que l'application
$$\varphi : (P,a) \longmapsto (P-aX, P(0)+a)$$
est un endomorphisme de E.

Réponse. Il est clair que φ est une application de E dans E puisque pour tout $(P,a)\in E$, $P-aX$ est un polynôme de degré ≤ 3 car P est lui-même un polynôme de degré ≤ 3 et $P(0)+a\in\mathbb{R}$ et donc
$$\begin{aligned} \varphi(P) &\in \mathbb{R}_3[X]\times\mathbb{R} \\ &= E. \end{aligned}$$

Ensuite, soit (P,a) et (Q,b) deux éléments de E et λ,μ deux scalaires. Alors, en respectant les lois interne et externe:

$$\begin{aligned}
\varphi\big(\lambda(P,a)+\mu(Q,b)\big) &= \varphi\big((\lambda P,\lambda a)+(\mu Q,\mu b)\big)\\
&= \varphi\big(\lambda P+\mu Q,\lambda a+\mu b\big)\\
&= \big((\lambda P+\mu Q)-(\lambda a+\mu b)X,(\lambda P(0)+\mu Q(0))+(\lambda a+\mu b)\big)\\
&= \big(\lambda(P-aX)+\mu(Q-bX),\lambda(P(0)+a)+\mu(Q(0)+b)\big)\\
&= \big(\lambda(P-aX),\lambda(P(0)+a)\big)+\big(\mu(Q-bX),\mu(Q(0)+b)\big)\\
&= \lambda(P-aX,P(0)+a)+\mu(Q-bX,Q(0)+b)\\
&= \lambda\varphi(P,a)+\mu\varphi(Q,b),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que φ est une application linéaire sur E et finalement un endomorphisme de E.

Remarque. Cette définition est tout à fait cohérente avec la définition de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$):

$$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$$

car les lois qui régissent l'espace vectoriel habituel $\mathbb{R}^n$ coïncident alors avec les lois de l'espace vectoriel produit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$.

Théorème IX.7.21 *Dimension de l'espace vectoriel produit.* Dans le contexte précédent, supposons les espaces vectoriels $E_1,\ldots,E_p$ de dimension finie avec

$$\dim(E_1)=n_1,\ldots,\dim(E_p)=n_p.$$

Alors l'espace vectoriel produit $E=E_1\times E_2\times\ldots\times E_p$ est de dimension finie $n_1+n_2+\ldots+n_p$:

$$\dim(E_1\times E_2\times\ldots\times E_p)=\sum_{i=1}^{p}\dim(E_i).$$

Démonstration 19

Exemple

On reprend l'endomorphisme φ ci-dessus de $E=\mathbb{R}_3[X]\times\mathbb{R}$. Démontrer que φ est un automorphisme de E.

Réponse. Puisque $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension finie (égale à 4) et que $\mathbb{R}$ est de dimension finie (égale à 1), on sait maintenant que E est de dimension finie (égale à $4+1=5$). D'après un théorème fondamental, il suffit de démontrer que $\operatorname{Ker}\varphi=\{\vec{0}\}$, c'est à dire démontrer que

$$\forall(P,a)\in\mathbb{R}_3[X]\times\mathbb{R},\ (P-aX,P(0)+a)=(O,0)\implies(P,a)=(O,0)$$

(où O est le polynôme nul, qui est le vecteur nul de $\mathbb{R}_3[X]$). Soit donc $(P,a)\in\mathbb{R}_3[X]\times\mathbb{R}$ tel que $(P-aX,P(0)+a)=(O,0)$. On a donc

$$\begin{cases} P=aX\\ P(0)+a=0\end{cases}$$

et alors

$$\begin{aligned} P(0) &= a\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

si bien que

$$P(0)+a=0$$

donne $a=0$ et alors $P=aX$ donne $P=O$. On a donc bien

$$(P,a)=(O,0)$$

i.e. $\operatorname{Ker}\varphi=\{\vec{0}\}$ et φ est effectivement un automorphisme de E.

7.3 Sommes directes; des sous-espaces propres sont en somme en directe

Rappelons que si A et B sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, on note $A+B$ l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{x}+\vec{y}$, où $\vec{x}$ parcourt A et $\vec{y}$ parcourt B. C'est toujours un sous-espace vectoriel.

Le but de cette section est d'étendre la notion de somme de sous-espaces vectoriels à plus de deux sous-espaces.

Somme de sous-espaces vectoriels

Définition IX.7.18 Soit F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

- On note $F_1+F_2+\ldots+F_r$ l'ensemble des vecteurs de E de la forme

$$\vec{x}_1+\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_r,$$

où $\vec{x}_1$ parcourt F_1, ..., $\vec{x}_r$ parcourt F_r:

$$F_1+F_2+\ldots+F_r=\{\vec{x}_1+\ldots+\vec{x}_r,\ (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_r)\in F_1\times\ldots\times F_r\}.$$

- Alors l'ensemble $F=F_1+F_2+\ldots+F_r$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration 20

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, soit

$$\vec{f_1}=(1,1,0,0),\ \vec{f_2}=(1,-1,0,0),\ \vec{f_3}=(1,1,1,1),\ \vec{f_4}=(3,1,1,1).$$

On note

$$F_1=\operatorname{Vect}(\vec{f_1},\vec{f_2}),\quad F_2=\operatorname{Vect}(\vec{f_1},\vec{f_3}),\quad F_3=\operatorname{Vect}(\vec{f_1},\vec{f_4}).$$

- Le sous-espace vectoriel $F=F_1+F_2+F_3$ est constitué des vecteurs de la forme

$$\begin{aligned}&(\alpha\vec{f_1}+\beta\vec{f_2})+(\delta\vec{f_1}+\gamma\vec{f_3})+(\lambda\vec{f_1}+\mu\vec{f_4})\\ &=(\alpha+\delta+\lambda)\vec{f_1}+\beta\vec{f_2}+\gamma\vec{f_3}+\mu\vec{f_4},\end{aligned}$$

donc des vecteurs de la forme

$$A\vec{f_1}+\beta\vec{f_2}+\gamma\vec{f_3}+\mu\vec{f_4}.$$

- Ainsi,

$$F=\operatorname{Vect}(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3},\vec{f_4}).$$

- Or on observe que

$$\vec{f_4}=\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3}.$$

On a donc

$$F=\operatorname{Vect}(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$$

et on voit facilement que $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ est une famille libre.
- Ainsi, $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ est une base de F.

Somme directe

Théorème IX.7.22 Soit F_1, F_2, ..., F_r des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
La somme
$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_r$$
est dite *directe*, ou on dit aussi que $F_1, \ldots, F_r$ sont en somme directe, si tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme somme d'éléments des F_i donc si pour tout $x \in F$, il existe un unique r-uplet $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r$ tel que
$$x = \vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_r.$$

- Lorsque ce phénomène se produit, on note alors
$$F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_r,$$
ou encore
$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i.$$
- et ceci se produit si et seulement si le vecteur nul admet la décomposition unique $\vec{0} = \vec{0} + \ldots + \vec{0}$,
- c'est à dire: si $\vec{x}_1 \in F_1$, ..., $\vec{x}_r \in F_r$ sont tels que $\vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_r = \vec{0}$, alors $\vec{x}_1 = \ldots = \vec{x}_r = \vec{0}$. C'est ce critère qui est généralement mis en œuvre dans la pratique.

Démonstration 21

Premier exemple

Reprenons l'exemple précédent où
$$\vec{f_1} = (1,1,0,0),\ \vec{f_2} = (1,-1,0,0),\ \vec{f_3} = (1,1,1,1),\ \vec{f_4} = (3,1,1,1)$$
et
$$F_1 = \mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \vec{f_2}), \quad F_2 = \mathrm{Vect}(\vec{f_3}), \quad F_3 = \mathrm{Vect}(\vec{f_4}).$$
La somme $F = F_1 + F_2 + F_3$ n'est *pas* directe puisqu'ayant observé que
$$\vec{f_4} = \vec{f_1} + \vec{f_2} + \vec{f_3},$$
on peut écrire
$$\vec{0} = \underbrace{(\vec{f_1} + \vec{f_2})}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{f_3}}_{\in F_2} - \underbrace{\vec{f_4}}_{\in F_3},$$
ce qui prouve que le vecteur nul ne se décompose pas de façon unique comme somme de vecteurs de F_1, F_2 et F_3.

Deuxième exemple

Toujours dans $\mathbb{R}^4$, soit
$$\vec{f_1} = (1,1,0,0),\ \vec{f_2} = (1,-1,0,0),\ \vec{f_3} = (1,1,1,1),\ \vec{f_4} = (1,1,1,-1).$$
On note
$$F_1 = \mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \vec{f_2}), \quad F_2 = \mathrm{Vect}(\vec{f_3}), \quad F_3 = \mathrm{Vect}(\vec{f_4}).$$
Démontrons que la somme $F = F_1 + F_2 + F_3$ est directe.

- Si $\vec{x}_1 \in F_1$, $\vec{x}_2 \in F_2$ et $\vec{x}_3 \in F_3$ sont tels que
$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{0},$$
alors il existe α, β tels que
$$\vec{x}_1 = \alpha \vec{f_1} + \beta \vec{f_2},$$
il existe λ tel que $\vec{x}_2 = \lambda \vec{f_3}$ et μ tel que $\vec{x}_3 = \mu \vec{f_4}$ et on a donc
$$\alpha \vec{f_1} + \beta \vec{f_2} + \lambda \vec{f_3} + \mu \vec{f_4} = \vec{0}.$$
- D'où
$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha+\beta+\lambda+\mu & = & 0 \\ \alpha-\beta+\lambda+\mu & = & 0 \\ \lambda+\mu & = & 0 \\ \lambda-\mu & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha+\beta+\lambda+\mu & = & 0 \\ \alpha-\beta+\lambda+\mu & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0, \end{array}\right.$$
ce qui entraîne $\alpha = \beta = \lambda = \mu = 0$ et finalement
$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{x}_3 = \vec{0},$$
ce qu'il fallait démontrer.

Attention! Lorsque l'on pense "somme directe de deux sous-espaces", on pense immédiatement à "intersection réduite au vecteur nul" mais cela ne marche pas du tout lorsque plus de deux sous-espaces vectoriels sont en jeu!

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, soit $\vec{f_1} = (1,0)$, $\vec{f_2} = (0,1)$, $\vec{f_3} = (1,1)$ et
$$F_1 = \mathrm{Vect}(\vec{f_1}), \quad F_2 = \mathrm{Vect}(\vec{f_2}), \quad F_3 = \mathrm{Vect}(\vec{f_3}).$$
Il est clair que
$$F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}, \quad F_1 \cap F_3 = \{\vec{0}\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}\}$$
et cependant, la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe, puisque $\vec{f_3} = \vec{f_1} + \vec{f_2}$ et en conséquence
$$\vec{0} = \underbrace{\vec{f_1}}_{\in F_1} + \underbrace{\vec{f_2}}_{\in F_2} - \underbrace{\vec{f_3}}_{\in F_3}.$$

Base adaptée

Théorème IX.7.23 Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ *en somme directe* et on note
$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_r.$$

- Si $\mathcal{B}_1 = (\vec{f}_{1,1}, \ldots, \vec{f}_{1,d_1})$ est une base de F_1, ..., $\mathcal{B}_r = (\vec{f}_{r,1}, \ldots, \vec{f}_{r,d_r})$ est une base de F_r, alors le regroupement de ces bases
$$\mathcal{B} = ((\vec{f}_{1,1}, \ldots, \vec{f}_{1,d_1}), \ldots, (\vec{f}_{r,1}, \ldots, \vec{f}_{r,d_r}))$$
est une base de F, dite *adaptée à la décomposition en somme directe* $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_r$.
- On a donc
$$\dim F = \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_r).$$
- En particulier, E est la somme directe des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$, c'est à dire
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_r$$
si et seulement si
$$\dim(F_1) + \ldots + \dim(F_r) = \dim(E)$$
et lorsque cette condition est satisfaite, le regroupement de bases
$$\mathcal{B} = ((\vec{f}_{1,1}, \ldots, \vec{f}_{1,d_1}), \ldots, (\vec{f}_{r,1}, \ldots, \vec{f}_{r,d_r}))$$
(notations ci-dessus) est une base de E, dite *adaptée à la décomposition en somme directe* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_r$.

Démonstration 22

Exemple

On reprend l'exemple: dans $\mathbb{R}^4$, on note

$$F_1 = \mathrm{Vect}(\vec{f_1}, \vec{f_2}), \quad F_2 = \mathrm{Vect}(\vec{f_3}), \quad F_3 = \mathrm{Vect}(\vec{f_4})$$

avec

$$\vec{f_1} = (1,1,0,0),\ \vec{f_2} = (1,-1,0,0),\ \vec{f_3} = (1,1,1,1),\ \vec{f_4} = (1,1,1,-1).$$

On a vu que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe.

- De manière évidente, puisque $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$ est libre et est en conséquence une base de F_1, on a

  $$\dim(F_1) = 2$$

  et bien entendu

  $$\dim(F_2) = 1, \quad \dim(F_3) = 1.$$

- Ainsi,

  $$\begin{aligned} \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3) &= 4 \\ &= \dim(\mathbb{R}^4), \end{aligned}$$

  ce qui assure que

  $$\mathbb{R}^4 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3.$$

- Enfin,

  $$(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}, \vec{f_4})$$

  est une base de $\mathbb{R}^4$, adaptée à la décomposition en somme directe

  $$\mathbb{R}^4 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3.$$

Le théorème suivant sera utile ultérieurement:

Théorème IX.7.24 ***Somme directe de sous-espaces propres.***

- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E possédant des valeurs propres.
- Soit λ_1, λ_2, ..., λ_N (avec $N \geq 2$) des valeurs propres de u, deux à deux distinctes et E_1, E_2,... E_N les sous-espaces propres associés.
- Alors la somme $E_1 + E_2 + \ldots + E_N$ est directe.
- En particulier si E est de dimension finie n, alors u possède au maximum n valeurs propres.

Démonstration 23

7.4 Hyperplans; équation d'un hyperplan

Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, on a défini dans un précédent chapitre un hyperplan comme un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$; cette définition est toujours d'actualité mais l'objectif de cette section est d'appréhender les hyperplans sous un autre angle.

Hyperplan

Définition IX.7.19 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

- On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E admettant une droite comme supplémentaire.
- C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.
- Tout vecteur $v \notin H$ dirige alors un supplémentaire de H:

  $$E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$$

- ou, suivant le contexte, si on dispose d'une base $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ de H, alors tout vecteur v tel que $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ soit une base de E dirige alors un supplémentaire de H.

Démonstration 24

Premier exemple

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soit

$$v_1 = (1,1,0), \quad v_2 = (1,2,1), \quad H = \mathrm{Vect}(v_1, v_2).$$

- Puisque, (v_1, v_2) est libre, H est de dimension 2: c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
- Soit $v = (0,0,1)$; alors (v_1, v_2, v) est une base de $\mathbb{R}^3$ car

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  matrice échelonnée à 3 pivots, ce qui prouve que (v_1, v_2, v) est de rang 3.
- On a donc $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$.
- On démontrerait de même que $v' = (0,1,0)$ est également tel que (v_1, v_2, v') est une base de $\mathbb{R}^3$ et qu'en conséquence on a aussi $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathrm{Vect}(v')$.

Deuxième exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit

$$H = \{\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - 3z = 0\}.$$

- Soit $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

  $$\begin{aligned} \vec{\in} H &\iff 2x + y - 3z = 0 \\ &\iff y = 3z - 2x \\ &\iff \vec{v} = (x, 3z - 2x, z) \\ &\iff \vec{v} = x(1,-2,0) + z(0,3,1), \end{aligned}$$

  ce qui met en évidence que

  $$\big((1,-2,0),(0,3,1)\big)$$

  est une base de H.

- Posons $\vec{v} = (1,0,0)$. Alors $\vec{v} \notin H$ (puisque $\vec{v}$ échoue au test du $2x+y-3z$). Ainsi, $\mathrm{Vect}(1,0,0)$ est un supplémentaire de H.

Troisième exemple

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, soit H l'ensemble des polynômes P tels que $P'(0) = 0$.

- H est un sous-espace de E car le polynôme nul appartient à E et si P et Q sont dans H et λ est un scalaire, alors $(P+\lambda Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0) = 0$ et donc $P + \lambda Q \in H$.
- Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Alors $P'(0) = b$ donc $P \in H \iff b = 0 \iff P = a + cX^2 + dX^3$.
- En conséqence,
$$H = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^3),$$
ce qui prouve que H est de dimension 3 et puisque E est de dimension 4, on en déduit que H est un hyperplan de E.
- De manière évidente, H admet $\mathrm{Vect}(X)$ comme supplémentaire:
  - $X \notin H$ (puisque X échoue au test du $P'(0)$),
  - ou encore parce que $(1, X^2, X^3, X)$ est évidemment une base E.

Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan

Théorème IX.7.25 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et φ une forme linéaire sur E, c'est à dire une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui n'est pas la forme linéaire nulle.

Alors $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est un hyperplan de E et donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) = n-1$.

Tout vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$ est la base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$:
$$E = \mathrm{Ker}\,(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(v).$$

Démonstration 25

Premier exemple

L'application
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v = (x,y,z) & \longmapsto & 2x+y-3z \end{array}$$
est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ (la linéarité est immédiate).

- Par définition même,
$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x+y-3z = 0\}.$$
- Le théorème précédent permet donc d'affirmer que cet ensemble est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ i.e. un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 (et donc un plan vectoriel au sens usuel du terme).
- On a par exemple
$$\varphi(1,0,0) = 2 \neq 0.$$
Ainsi, $\mathrm{Vect}(1,0,0)$ est un supplémentaire du plan vectoriel d'équation $2x+y-3z = 0$.

- *Remarque.* On pouvait aussi démontrer "à l'ancienne" que le sous-espace
$$P = \{\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x+y-3z = 0\}$$
est bien de dimension 2:
$$\begin{array}{rcl} \vec{v} = (x,y,z) \in P & \iff & 2x+y-3z = 0 \\ & \iff & y = 3z - 2x \\ & \iff & \vec{v} = (x, 3z-2x, z) \\ & \iff & \vec{v} = x(1,-2,0) + z(0,3,1) \\ & \iff & \vec{v} \in \mathrm{Vect}\big((1,-2,0),(0,3,1)\big) \end{array}$$
ce qui met en évidence que $\big((1,-2,0),(0,3,1)\big)$ est une famille génératrice de P; comme elle est manifestement libre, c'est une base de P, qui est alors de dimension 2. Enfin, puisque
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est visiblement de rang 3, cela prouve que la famille
$$\big((1,0,0),(1,-2,0),(0,3,1)\big)$$
est une base et qu'en conséquence, $\mathrm{Vect}(1,0,0)$ est un supplémentaire de P.

Deuxième exemple

On fixe un entier $n \geq 1$. Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère
$$H = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; \int_{-1}^{1} xP(x)\,dx = 0\}.$$

Nous allons démontrer que H est un sous-espace vectoriel de E, en donner sa dimension et déterminer un supplémentaire de H de façon très efficace.

- L'application
$$\varphi : P \mapsto \int_{-1}^{1} xP(x)\,dx$$
est une forme linéaire sur E. En effet,
  - C'est une application définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$,
  - pour tout $(P,Q) \in E \times E$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{array}{rcl} \varphi(\alpha P + \beta Q) & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} x(\alpha P(x) + \beta Q(x))\,dx \\ & = & \alpha \displaystyle\int_{-1}^{1} xP(x)\,dx + \beta \int_{-1}^{1} xQ(x)\,dx \\ & = & \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q). \end{array}$$
- L'ensemble H en est précisément le noyau *et c'est là le point essentiel.*
- Comme φ n'est pas la forme linéaire nulle, car on a par exemple
$$\varphi(X) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},$$
on en déduit que H est un hyperplan de E et en conséquence
$$\begin{array}{rcl} \dim(H) & = & \dim(E) - 1 \\ & = & n+1-1 \\ & = & n. \end{array}$$

- On a $\varphi(X) = \frac{2}{3} \neq 0$, donc $\mathrm{Vect}(X)$ est un supplémentaire de H.

Troisième exemple

Soit un entier $n \geq 2$. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on considère la forme linéaire f définie par

$$\forall \vec{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{v}) = x_1 + \ldots + x_n.$$

Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Ker}\, f$ puis en déduire une base.

- Il est clair que f n'est pas la forme linéaire nulle sur $\mathbb{R}^n$ puisque par exemple $f(1, 0, \ldots, 0) = 1$.
- On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ i.e. $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - 1$.
- Déterminons une famille génératrice de $\mathrm{Ker}\, f$. Soit $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \mathrm{Ker}\, f \quad &\Longleftrightarrow \quad f(\vec{v}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x_1 + \ldots + x_n = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x_n = -x_1 - \ldots - x_{n-1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \vec{v} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_1 - \ldots - x_{n-1}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \vec{v} = x_1(1, 0, \ldots, 0, -1) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0, -1) + \ldots + x_{n-1}(0, \ldots, 0, 1, -1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \vec{v} \in \mathrm{Vect}\big((1, 0, \ldots, 0, -1), (0, 1, 0, \ldots, 0, -1), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, -1)\big).
\end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\big((1, 0, \ldots, 0, -1), (0, 1, 0, \ldots, 0, -1), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, -1)\big)$$

  est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}\, f$.

- *Base de* $\mathrm{Ker}\, f$. Puisque

$$\big((1, 0, \ldots, 0, -1), (0, 1, 0, \ldots, 0, -1), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, -1)\big)$$

  est une famille génératrice comportant $n - 1$ vecteurs du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\, f$ que l'on sait être de dimension $n - 1$, il résulte de la théorie de la dimension que c'est une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

Équation d'un hyperplan

Proposition IX.7.26 Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

Alors il existe une forme linéaire φ sur E telle que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. On dit alors que H est l'hyperplan d'équation $\varphi(x) = 0$ ou que $\varphi(x) = 0$ est une équation de H.

Si ψ est une autre forme linéaire dont H est le noyau, alors il existe un scalaire non nul k tel que $\psi = k\varphi$.

En conséquence, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, alors :

- il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que H ait pour équation

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

  dans $\mathcal{B}$, c'est à dire qu'un vecteur x de E appartient à H si et seulement si ses composantes $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathcal{B}$ satisfont cette équation
- et toute autre équation de H dans $\mathcal{B}$ est proportionnelle à celle-ci.

Démonstration 26

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, soit

$$\vec{e}_1 = (1, -1, 1, 2),\ \vec{e}_2 = (1, 1, 0, 1),\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$$

et

$$H = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

On va vérifier que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et en donner une équation.

- Démontrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ revient à démontrer que $\dim(H) = 3$. Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une famille génératrice de H, on va démontrer qu'elle est également libre, ce qui prouvera que c'est une base de H et que $\dim(H) = 3$.
- On applique la méthode du pivot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Ayant obtenu une matrice échelonnée à 3 pivots, on en déduit que le rang de la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vaut 3 et c'est donc une famille libre.

- Déterminons à présent une équation de H. Un vecteur $\vec{v} = (x, y, z, t)$ appartient à H si et seulement si :

  - $\vec{v}$ est combinaison des vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
  - donc si et seulement si le rang de la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{v})$ vaut 3
  - donc si et seulement si la méthode du pivot appliquée à cette famille conduit à 3 pivots.

  Cette dernière condition va donner lieu à une contrainte sur x, y, z, t qui fournira l'équation recherchée.

  - On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 2 & 1 & 0 & t \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & x+y \\ 0 & -1 & 1 & z-x \\ 0 & -1 & 0 & t-2x \end{pmatrix} \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & z-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 & t-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y \end{pmatrix}.$$

  - Cette matrice comporte déjà les 3 pivots 1, 2 et 1; elle est donc de rang 3 si et seulement si le coefficient $t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y$ est nul.

  Ainsi,

$$\vec{v} \in H \iff t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 0.$$

  L'application

$$\varphi : \vec{v} = (x, y, z, t) \longmapsto t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y$$

  est manifestement une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$. Ainsi,

$$t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$$

  est une équation de H. On peut lui préférer l'équation

$$2t - 3x + y = 0$$

  qui lui est proportionnelle.

7.5 Intersection d'hyperplans

En géométrie élémentaire de l'espace, une droite (vectorielle) peut toujours être considérée comme l'intersection de deux plans; par exemple, la droite D définie par les équations

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 3z = 0. \end{cases}$$

De faọn plus, formelle, on peut voir D comme l'intersection des deux hyperplans H_1 et H_2 d'équations respectives

$$H_1 : \ 2x - y + z = 0, \quad H_2 : \ x - 3z = 0.$$

Ce qui va suivre a pour but de généraliser cette observation.

Proposition IX.7.27 ***Intersection d'hyperplans.*** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère p hyperplans H_1, H_2, ..., H_p de E (avec $p \geq 2$). Alors

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_p) \geq n - p.$$

Démonstration 27

Remarque. Bien évidemment, l'intersection de ces hyperplans peut être de dimension strictement supérieure à $n-p$; c'est la cas par exemple si tous les H_i sont égaux à un même hyperplan H, auquel cas $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_p = H$, qui est de dimension $n-1$.

Théorème IX.7.28 ***Sous-espace vectoriel intersection d'hyperplans.*** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$. Alors il existe r hyperplans H_1, ..., H_r tels que

$$F = H_1 \cap \ldots \cap H_r.$$

Le sous-espace F est donc défini par un système de r équations.

Démonstration 28

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (1, 1, 0, 1)$.

- Vérifier que (e_1, e_2) est libre. On note alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
- Donner un système d'équations de F.

Réponse.

- Les vecteurs e_1 et e_2 sont clairement non proportionnels et forment donc une famille libre.
- Un vecteur $v = (x, y, z, t)$ appartient à H si et seulement si v est combinaison des vecteurs (e_1, e_2) donc si et seulement si le rang de la famille (e_1, e_2, v) vaut 2 donc si et seulement si la méthode du pivot appliquée à cette famille conduit à 2 pivots, ce qui donnera lieu à des conditions sur x, y, z, t.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & -1 & z-x \\ 0 & -1 & t-2x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2} L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}.$$

Cette matrice comporte déjà les 2 pivots 1 et 2; elle est donc de rang 2 si et seulement si les coefficients $z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ et $t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y$ sont nuls. Ainsi,

$$v \in H \iff \begin{cases} z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 0. \end{cases}$$

Les applications $v : (x, y, z, t) \mapsto z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ et $v :\mapsto t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y$ sont clairement deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$. Ainsi,

$$\begin{cases} z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ t - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

est un système d'équations de F. On peut lui préférer le système

$$\begin{cases} 2z - x + y = 0 \\ 2t - 3x + y = 0. \end{cases}$$

Chapitre X

Séries numériques (première et deuxième année)

1 Les fondements

1.1 Convergence, divergence d'une série numérique

Définition X.1.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, réelle ou complexe.

- La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pout tout $n\in\mathbb{N}$, par

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k, \\ &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n. \end{aligned}$$

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on dit que S_n est la somme partielle de rang n de la série et que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série.

Un tout premier exemple

La série de terme général $\frac{1}{n+1}$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_0 = \frac{1}{1},\ S_1 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, S_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}.$$

Remarques.

- Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$, resp. $(u_n)_{n\geq 2}$, la suite (S_n) est évidemment définie pour $n\geq 1$, resp. $n\geq 2$, par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, resp. $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} u_k$.
- Une série est donc tout simplement une suite, mais le terme série est employé pour mettre l'accent sur la manière de former les termes de cette suite.
- Dans l'univers des séries, on prendra bien soin de distinguer le mot "suite" du mot "série". Dans un même problème peuvent cohabiter des suites et des séries!

On dit aussi "la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$" à la place de "la série de terme général u_n".

La notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour représenter une suite est un raccourci pour désigner la suite infinie de termes

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$$

De même, on utilise la notation $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ pour représenter la série de terme général u_n: c'est un raccourci pour désigner la suite infinie de termes

$$u_0,\ u_0+u_1,\ u_0+u_1+u_2,\ \ldots$$

Cette notation ne désigne donc pas une somme.

Définition d'une série convergente

Définition X.1.2

- La série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ est dite convergente lorsque la suite (S_n) est convergente, donc lorsqu'il existe un réel S (ou un complexe) tel que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S.$$

- La limite de la suite (S_n) est alors appelée *somme* de la série $\sum u_n$.
- Cette limite est notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.
- Pour tout $N\in\mathbb{N}$, le nombre $R_N = S - S_N$ est appelé *reste* d'ordre N de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et est noté

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\ .$$

Un tout premier exemple

Considérons la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$, autrement dit la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1.

- On sait que pour tout entier n,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} &= 1 \times \frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

- Puisque $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, on sait que

$$\frac{1}{3^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et c'est pourquoi

$$\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{3}{2}$$

autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{3}{2}.$$

- Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}.$$

Remarque importante. On se ramènera toujours à cette définition:

- dans les questions théoriques,
- lors du calcul de la *somme* dans un contexte de série télescopique.

Remarque. Dans le contexte de la définition ci-dessus, il est clair que

$$R_N\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Il est important de souligner qu'en général on ne connait pas explicitement la valeur de la somme d'une série convergente. Aussi, il peut être intéressant d'en donner des valeurs approchées. Puisque par définition,

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}u_n\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}S,$$

les sommes partielles S_N constituent de façon naturelle des valeurs approchées de S.

Mais remarquons que la notion de valeur approchée n'a de sens que si l'on est en mesure de contrôler numériquement *l'erreur commise*: l'erreur commise en approchant le réel x par le réel y est $|y-x|$ (la valeur absolue est nécessaire pour englober les cas de valeurs approchées par excès ou par défaut). Sans parler d'erreur commise, quel sens peut-on donner à "8 est une valeur approchée de x"? Aucun. En revanche, affirmer que "8 est une valeur approchée de x à 10^{-1} près" signifie que l'erreur commise en approximant x par 8 est inférieure à 10^{-1} i.e. $|x-8|\leq 10^{-1}$ et donc que

$$7,9\leq x\leq 8,1$$

ce qui est une réelle information concernant x.

Dans le contexte des séries numériques, étant donné que $S=S_N+R_N$, on a évidemment le résultat suivant:

Proposition X.1.1 Pour tout entier N, S_N est une valeur approchée à $|R_N|$ près de la somme S de la série.

Dans deux cas particuliers, on verra des méthodes de majoration de $|R_N|$ qui permettront un contrôle de l'erreur commise en approximant la somme d'une série par ses sommes partielles.

Définition d'une série divergente

Définition X.1.3 La série $\sum_{k\geq 0}u_k$ est dite divergente lorsque la suite (S_n) est divergente. La divergence peut se manifester par:

- $S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ ou $S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$,
- S_n ne tend vers rien, pas même une limite infinie.

Premier exemple

Considérons la série de terme général $u_n=n$.

- On sait que pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

  autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

- Manifestement,

$$\frac{n(n+1)}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

- Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0}n$ est divergente.

Deuxième exemple

Considérons la série de terme général $u_n=(-1)^n$.

- Alors

$$\begin{aligned}u_0&=1\\u_0+u_1&=1-1\\&=0\\u_0+u_1+u_2&=1-1+1\\&=1\\u_0+u_1+u_2+u_3&=1-1+1-1\\&=0\end{aligned}$$

  et on prouve très facilement que

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k=\begin{cases}1\text{ si }n\text{ est pair}\\0\text{ si }n\text{ est impair.}\end{cases}$$

- La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ ne possède donc pas de limite et la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ est donc divergente.

1.2 Premiers résultats: divergence grossière, combinaison de séries convergentes

Théorème X.1.2 *Condition nécessaire de convergence d'une série: intérêt et danger!*

- Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

  On dit alors que la série "diverge grossièrement".
- Par contraposée, si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ne pas se méprendre! La convergence vers 0 du terme général n'entraîne pas du tout la convergence de la série! La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente et son terme général tend vers 0!

Preuve du premier point (le deuxième s'en déduit par contraposition). Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, on sait (par définition) qu'il existe un nombre (réel ou complexe) complexe S tel que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S.$$

Évidemment, on a aussi

$$S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S.$$

par conséquent,

$$S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= u_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Le résultat suivant est très naturel:

Proposition X.1.3 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ deux séries convergentes, à terme réels ou complexes et α, β deux scalaires.
Alors la série $\sum_{n\geq 0} (\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \; + \; \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

En conséquence, l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels (resp. complexes) telles que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).

Démonstration. Elle résulte de la définition même : pour tout entier N,

$$\sum_{n=0}^{N} (\alpha u_n + \beta v_n) \quad = \quad \alpha \sum_{n=0}^{N} u_n \; + \; \beta \sum_{n=0}^{N} v_n$$

et comme par hypothèse et par définition, $\sum_{n=0}^{N} u_n$, resp. $\sum_{n=0}^{N} v_n$ possèdent des limites lorsque N tend vers $+\infty$, égales respectivement à $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, on en déduit

$$\sum_{n=0}^{N} (\alpha u_n + \beta v_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \; + \; \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n,$$

d'où le résultat.

Remarque. Ce théorème implique notamment que la multiplication des termes d'une suite par un même scalaire non nul n'altère pas la nature de la série associée:

$$\forall \alpha \neq 0, \quad \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge } \iff \sum_{n\geq 0} \alpha u_n \text{ converge }.$$

En effet, si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} \alpha u_n$ converge aussi d'après le théorème et si $\sum_{n\geq 0} \alpha u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\alpha} \times \alpha u_n$ converge aussi d'après le même théorème.

Exemple. La série

$$\sum_{n\geq 1} -\frac{2}{3n^2}$$

est donc de même nature que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

(qui est convergente comme on le verra plus loin).

2 Séries de référence

Comme pour les intégrales de référence, ces résultats sont incontournables.

2.1 Séries géométriques

Le résultat suivant est fondamental. Soit $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème X.2.4

- La série géométrique $\sum_{n\geq 1} r^n$ de raison r est convergente si et seulement si $|r| < 1$ donc, lorsque $r \in \mathbb{R}$, si et seulement si $r \in \,]-1, 1[$
- et pour tout $r \in \mathbb{C}$ tel que $|r| < 1$ et donc pour tout réel $r \in \,]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

- Plus généralement, pour tout $r \in \mathbb{C}$ tel que $|r| < 1$ ou pour tout réel $r \in \,]-1, 1[$ et pour tout entier n_0, la série $\sum_{n\geq n_0} r^n$ est convergente et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} r^n = \frac{r^{n_0}}{1-r}.$$

Démonstration 29

2.2 Séries télescopiques

Ce résultat est incontournable et la démonstration est à maîtriser et à savoir restituer.

Théorème X.2.5 On se donne une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose

$$u_n = v_n - v_{n+1}$$

et on considère la série $\sum u_n$. Alors pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}.$$

En conséquence, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $v_0 - v_{n+1}$ possède une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, donc si et seulement si la suite (v_n) est convergente.
Lorsque la suite (v_n) est convergente et L est sa limite, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = v_0 - L.$$

On a en effet

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1})\\ &= (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \ldots + (v_{n-1} - v_n) + (v_n - v_{n+1})\\ &= v_0 - v_{n+1}.\end{aligned}$$

C'est le phénomène de télescopage: "dont les éléments s'emboîtent et coulissent les uns dans les autres" (dictionnaire le Robert).

2.3 Séries de Riemann

Tout aussi fondamental est le résultat suivant:

Théorème X.2.6 Soit α un paramètre réel. Alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Ce théorème sera démonté ultérieurement.

Exemples

- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est donc convergente. Pour information, on peut démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, dite *série harmonique*, est donc divergente. On peut démontrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

3 Théorèmes de comparaison

Le résultat suivant est surtout utile pour la démonstration des théorèmes de comparaison qui vont suivre:

Proposition X.3.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels ≥ 0.

- Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée.
- En cas de divergence de la série, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Rappelons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Il est immédiat que la suite (S_n) est croissante puisque

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\\ &= u_{n+1} \geq 0.\end{aligned}$$

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (S_n) est alors convergente, autrement dit, la série $\sum u_n$ est convergente, si et seulement si la suite (S_n) est majorée. Et d'après ce même théorème, si la suite (S_n) n'est pas convergente, elle tend vers $+\infty$.

Remarque. Ce théorème tombe en défaut pour une série qui ne serait pas à termes réels positifs: comme on l'a vu plus haut, la série de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente et cependant, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

si bien que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exemple

On sait que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente (Riemann). Étant à termes ≥ 0, on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3.1 Théorème de comparaison par majoration

La connaissance des théorèmes suivants est vitale pour l'étude d'une série: l'écrasante majorité des études de sériessera obtenue par l'un de ces théorèmes.

Théorème X.3.8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$$

(ou seulement à partir d'un certain rang).

- si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ l'est aussi.
- si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ l'est aussi.

Démonstration 30

Exemple

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$.

- On a la minoration $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ pour tout $n \geq 3$ (car $3 \geq e$).
- Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, il résulte alors du théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$ est divergente.

3.2 Théorème de comparaison par équivalence

Théorème X.3.9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels positifs telles que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature:

- si l'une converge, l'autre aussi,
- si l'une diverge, l'autre aussi.

Démonstration 31

Dans la pratique:

- on prendra soin de mentionner la positivité de l'équivalent obtenu, garantissant ainsi la condition de positivité;
- Bien entendu, ce théorème est également valable lorsque l'équivalent obtenu est constamment négatif.
- Ce théorème est extrêmement puissant: on pourra toujours rechercher un équivalent; il permettra alors de se ramener à l'étude d'une série dont le terme général est plus simple.

Exemple

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1$.

- On a

$$e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

- On a $\frac{1}{2n^2} > 0$ et la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge (Riemann).
- Il résulte alors du théorème de comparaison que la série $\sum u_n$ converge.

Une astuce logarithmique. Dans l'étude d'une série du type

$$\sum \ln(u_n) \text{ avec } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

on aura intérêt à raisonner ainsi, en écrivant:

$$\ln(u_n) = \ln(1 + [u_n - 1])$$

et puisque $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que l'on sait que

$$\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h,$$

on aura alors

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1.$$

Du théorème de comparaison (formellement: si $u_n - 1$ est de signe constant), on se ramènera donc à l'étude de la série $\sum(u_n - 1)$.

Exemple

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ avec $v_n = \ln \frac{n^2+n}{n^2+n+1}$.

- On a clairement $\frac{n^2+n}{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- On écrit alors

$$\ln \frac{n^2+n}{n^2+n+1} = \ln\left(1 + \left[\frac{n^2+n}{n^2+n+1} - 1\right]\right)$$

et puisque

$$\frac{n^2+n}{n^2+n+1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on a

$$\ln\left(1 + \left[\frac{n^2+n}{n^2+n+1} - 1\right]\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2+n}{n^2+n+1} - 1$$

i.e.

$$v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2+n}{n^2+n+1} - 1$$

.

- En réduisant au même dénominateur,
$$\frac{n^2+n}{n^2+n+1}-1=-\frac{1}{n^2+n+1}$$
et puisque
$$-\frac{1}{n^2+n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{n^2},$$
on a finalement
$$v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{n^2}$$
ce qui garantit la convergence de la série $\sum v_n$ en vertu du théorème de comparaison par équivalence et de la convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.

3.3 Théorème de comparaison série-intégrale

Théorème X.3.10 On se donne une fonction f définie sur $[0,+\infty[$, continue, décroissante et à valeurs positives et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$u_n=f(n).$$
Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ sont de même nature (i.e. toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Démonstration 32

Un tout premier exemple: les séries de Riemann

- Soit $\alpha>0$. La fonction $x\mapsto\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$. On déduit du théorème de comparaison série-intégrale que la série $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$.
- Observons que si $\alpha\leq 0$, la série est grossièrement divergente.
- Ce théorème est tout aussi valable pour une série $\sum\limits_{n\geq1}u_n$: la comparaison se fait alors avec $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$.
- ***Remarque importante.*** Ce théorème n'est à utiliser qu'en dernier recours, lorsque les théorèmes de comparaison par majoration et par équivalence ont échoué et sous réserve:
  - que le terme général provienne effectivement d'une fonction f agissant sur les réels ≥ 0, ce qui exclut par exemple les situations comprenant $(-1)^n$ ou $n!$,
  - et surtout lorsque l'on sera en mesure de produire une primitive de f permettant de calculer concrètement $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, dans le but de trouver la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$.

Exemple

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq2}\frac{1}{n\ln n}$.

- On ne peut pas vraiment produire d'équivalent: $\frac{1}{n\ln n}$ est suffisamment simple!
- Une majoration telle que
$$\frac{1}{n\ln n}\leq\frac{1}{n}$$
dès que $\ln n\geq 1$ i.e. dès que $n\geq 3$ ne donne rien puisque la série $\sum\frac{1}{n}$ est divergente et qu'en cas de majoration par le terme général d'une série divergente, on ne peut conclure ni dans un sens, ni dans l'autre. La majoration
$$\frac{1}{n\ln n}\leq\frac{1}{\ln n}$$
est également infructueuse.
- La fonction $f:x\mapsto\frac{1}{x\ln x}$ est positive et décroissante (immédiat) sur $[2,+\infty[$.
  - Or pour $X\geq 2$,
$$\int_2^X\frac{1}{x\ln x}\,dx=[\ln(\ln x)]_2^X=\ln(\ln X)-\ln(\ln 2)\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$
  - Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx$ est divergente et on déduit du théorème de comparaison série-intégrale que la série $\sum\limits_{n\geq2}\frac{1}{n\ln n}$ est divergente.

On conserve les notations et hypothèses du théorème précédent

Théorème X.3.11 En cas de convergence, le reste $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k$ de la série $\sum\limits_{n\geq0}u_n$ vérifie pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\int_{n+1}^{+\infty}f(t)dt\leq R_n\leq\int_n^{+\infty}f(t)dt.$$

Démonstration 33

Exemple

Le reste R_{10} de la série $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ vérifie donc compris entre
$$\int_{11}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt\leq R_n\leq\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt.$$
Or
$$\begin{aligned}\int_{10}^{T}\frac{1}{t^2}\,dt&=\left[-\frac{1}{t}\right]_{10}^{T}\\&=\frac{1}{10}-\frac{1}{T}\\&\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{10}\end{aligned}$$
si bien que par définition,
$$\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt=\frac{1}{10}.$$

On calcule de même

$$\int_{11}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{11}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{11} \leq R_{10} \leq \frac{1}{10}.$$

Par conséquent,

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{10^2} = \frac{1968329}{1270080} \approx 1.5497$$

est une valeur approchée de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

à $\frac{1}{10}$ près.

4 Autres critères pratiques

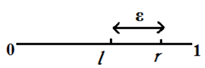
4.1 Règle de d'Alembert

Théorème X.4.12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels > 0 (ou seulement à partir d'un certain rang). On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite ℓ lorsque $n \to +\infty$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$ (ou $\ell = +\infty$), alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente et on a même $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $\ell = 1$, alors ce théorème ne permet pas de conclure.

Démonstration. Posons $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- Si $\ell < 1$, on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $r = \ell + \varepsilon$ soit < 1.



Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe un rang N à partir duquel $v_n \leq r$ *(exploitation de la convergence de (v_n) vers ℓ avec des ε)*. Écrivons, pour tout $n > N$:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} \leq r, \ \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \leq r, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq r.$$

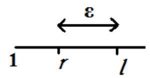
En multipliant membre à membre ces $n - N$ inégalités (ce qui est permis puisque tout le monde est > 0), il vient après simplifications: $\frac{u_n}{u_N} \leq r^{n-N}$ donc en posant $C = u_N r^{-N}$, on a

$$u_n \leq Cr^n$$

pour tout $n > N$. La série $\sum r^n$ étant une série géométrique convergente, on en déduit que $\sum u_n$ est convergente d'après le théorème de comparaison par majoration.

D'ailleurs la règle de d'Alembert est parfois appelée *principe de comparaison avec une série géométrique*.

- Enfin, si $\ell > 1$, en se donnant $\varepsilon > 0$ tel que $r = \ell - \varepsilon$ soit > 1,



on aurait, en procédant comme ci-dessus, une inégalité du type $u_n > Cr^n$ (à partir d'un certain rang), ce qui conduit au résultat, par comparaison avec une série géométrique divergente. ***Remarques.*** Cette règle est assez exigeante et s'applique presque exclusivement en présence de termes géométriques et/ou de factorielles. Elle est inapplicable en revanche dans des situations théoriques.

Exemple

Soit $u_n = \frac{n^2}{2^n}$. Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

- On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$

- Il résulte alors de la règle de d'Alembert que la série $\sum u_n$ est convergente.

4.2 Convergence absolue

Théorème X.4.13 Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente. Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente:

$$\sum_{n\geq 0} |u_n| \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.}$$

Démonstration 34

Exemples

Les séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n^2} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$$

sont convergentes car dans les trois cas, on a $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. La convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ entraîne alors par théorème de comparaison par majoration la convergence de la série $\sum |u_n|$ puis la convergence de la série $\sum u_n$ par théorème de convergence absolue.

Autre exemple classique

Démontrer que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, posons $v_n(z) = \left|\frac{z^n}{n!}\right|$ (il est clair que la série est convergente pour $z = 0$ car alors tous les termes de rang ≥ 1 sont nuls!).

- C'est une série à termes > 0 et l'on a
$$\frac{v_{n+1}(z)}{v_n(z)} = \frac{|z^{n+1}|}{|z^n|}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
La limite de ce rapport étant < 1, il résulte du théorème de d'Alembert que la série $\sum v_n(z)$ est convergente; autrement dit, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

- Il résulte alors du théorème de convergence absolue que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente.

Théorème de comparaison pour les séries absolument convergentes

Théorème X.4.14 On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels ou complexes. On suppose que la série $\sum v_n$ est absolument convergente et que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n).$$
Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Rappel: $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ signifie que le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ est borné au voisinage de $+\infty$. Par exemple,
$$n\sin n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n)$$
puisque
$$\left|\frac{n\sin n}{n}\right| = |\sin n| \leq 1.$$

Démonstration 35

Dans la pratique, on utilisera surtout le théorème suivant:

Théorème X.4.15 On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels ou complexes. On suppose que la série $\sum v_n$ est absolument convergente et que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n).$$
Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Démonstration 36

Remarque. Dans la pratique, les indications sont fréquentes. On prendra bien soin d'appliquer les résultats de croissance comparée.

Exemple

Démontrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.

- On a $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ car $n^{\frac{3}{2}} \times \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée.
- La convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ assure la convergence de la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ d'après le théorème de comparaison pour les séries absolument convergentes.

Théorème X.4.16 On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels ou complexes. On suppose que la série $\sum v_n$ est absolument convergente et que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$
Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Démonstration 37

Exemple

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$?

- On a évidemment
$$n^2+(-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$$
et donc
$$\frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$
- En posant
$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$
on a
$$|v_n| = \frac{1}{n^2}$$
ce qui prouve, d'après les exemples de Riemann, que la série $\sum v_n$ est absolument convergente.
- Il résulte du théorème de comparaison par équivalence des séries absolument convergentes que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Remarque. Ce théorème n'est pas d'un apport décisif; on aurait pu procéder ainsi:

- On a
$$|u_n| = \frac{1}{n^2+(-1)^n}$$
(car pour $n \geq 2$, $n^2+(-1)^n > 0$).
- On a évidemment
$$n^2+(-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$$
et donc
$$\frac{1}{n^2+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
d'où l'on déduit par théorème de comparaison par équivalence des séries à termes ≥ 0 que la série
$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2+(-1)^n}$$
est convergente.
- Autrement dit, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Grosso-modo, les mêmes arguments sont utilisés, mais pas dans le même ordre.

4.3 Séries alternées

Ce paragraphe concerne une catégorie de séries que l'on rencontre assez souvent dans la pratique.

Théorème X.4.17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels décroissant vers 0.

- Alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est convergente.
- En notant $S=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ sa somme, $S_N=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n$ sa somme partielle de rang N, on a
$$\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p+1}\leq S\leq S_{2p}.$$
- En notant $R_N=\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ son reste d'ordre N, on a
$$\forall N\in\mathbb{N},\ |R_N|\leq u_{N+1},$$
si bien que pour tout entier N, la somme partielle S_N est une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à u_{N+1}.

Démonstration 38

Remarques.
- Ce théorème est souvent appelé "critère spécial des séries alternées".
- La décroissance vers 0 de la suite (u_n) entraîne bien entendu la positivité de tous ses termes (mais la réciproque est fausse: cf. exemple plus bas).

Premier exemple

La série
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1},$$
dite *harmonique alternée*, est convergente car en posant
$$u_n=\frac{1}{n+1},$$
la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement décroissante et de limite nulle: le critère spécial s'applique.
Recherchons une valeur approchée de la somme S de cette série à 10^{-2} près. D'après le critère spécial, l'erreur commise $|R_N|$ en approximant S par la somme partielle S_N est inférieure à u_{N+1}. Pour disposer d'une approximation de S par S_N à 10^{-2} près, il suffit donc que
$$u_{N+1}\leq 10^{-2},$$
c'est à dire
$$\frac{1}{N+2}\leq 10^{-2}.$$
il suffit donc de prendre $N=98$. Ainsi,
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{98}\frac{(-1)^n}{n+1} &= \frac{97353652632905823380247894258032042316 37}{139440750459424954329067617870624607113 60}\\ &\approx 0;69\end{aligned}$$
est une valeur approchée de la somme de cette série à 10^{-2} près.
Il est à noter que cette série est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente, puisque
$$\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$$
et que l'on sait que la série $\sum\frac{1}{n+1}$ est divergente (Riemann).

Deuxième exemple

Considérons la série
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$
Posons $u_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ et considérons la fonction
$$f:x\mapsto\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$
On a
$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$
et on voit que
$$f'(x)\leq 0\iff x\geq e^2$$
et puisque
$$\lfloor e^2\rfloor=7,$$
la suite (u_n) n'est décroissante qu'à partir du rang 8. Par ailleurs, par croissance comparée,
$$u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
La série $\sum_{n\geq 8}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est donc convergente d'après le critère spécial et, bien entendu, il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
Toutefois, les inégalités $S_{2p+1}\leq S\leq S_{2p}$ et $|R_n|\leq v_{n+1}$ ne seront valables qu'à partir du rang 8, rang de décroissance.

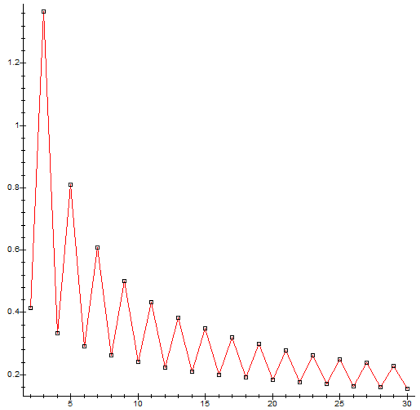
Troisième exemple

On considère la série de terme général $v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ avec $n\geq 2$.

1. Démontrer que
$$v_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 2}v_n$ est divergente.
3. Vérifier que
$$v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$
Que peut-on en conclure?

Réponse. Comme on va le voir ici, la seule présence de $(-1)^n$ ne suffit pas pour appliquer le critère spécial: il faut à tout prix la décroissance de la valeur absolue du terme général.

1. En notant $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, on a
$$u_{10}\approx 0.24\qquad u_{11}\approx 0.43\qquad u_{12}\approx 0.23$$
et il est relativement aisé de constater que la suite (u_n) est constamment oscillante tout en convergeant vers 0: ci-dessous les points de coordonnées $(n,u(n))$ avec $2\leq n\leq 30$.



Pour l'équivalent, on se ramène à $\frac{1}{1+h} = 1 - h + o(h)$ lorsque $h \to 0$ en écrivant:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

2. Posons

$$y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad z_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

   - Il est immédiat, d'après le critère spécial, que la série $\sum\limits_{n\geq 2} y_n$ est convergente, puisque la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ converge vers 0 en décroissant.
   - D'autre part,

   $$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

   si bien que $\sum z_n$ diverge par théorème de comparaison.

   En définitive, v_n est la somme de deux termes généraux de séries dont l'une converge et l'autre diverge. Donc $\sum u_n$ diverge.

3. Étant donné que

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

   on voit que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

   Comme mentionné ci-dessus, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente. Ainsi, on est en présence de deux termes généraux équivalents: mais l'un fournit une série divergente et l'autre une série convergente. Évidemment, cela ne contredit pas le théorème de comparaison par équivalence, puisque celui-ci exige que les termes généraux soient de signe constant (à partir d'un certain rang), ce qui n'est bien sûr pas le cas ici.

4.4 Produit de Cauchy

Théorème X.4.18 On considère deux séries absolument convergentes $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ (à termes réels ou complexes).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$, appelée produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

La démonstration est admise.

Exemple

On a vu que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. On note $S(z)$ la somme de cette série:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Démontrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$,

$$S(z+z') = S(z) \times S(z').$$

- La série produit de Cauchy des séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ est la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}.$$

- En écrivant $\frac{1}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}$, on voit que

$$w_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{1}{n!}(z+z')^n,$$

  si bien que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+z')^n = S(z+z').$$

- Mais d'après le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries, les séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ étant absolument convergentes, la série $\sum w_n$ a pour somme $S(z) \times S(z')$. Ainsi,

$$S(z+z') = S(z) \times S(z').$$

5 Intégration terme à terme

Un problème central en analyse est le suivant: la limite de l'intégrale d'une suite de fonctions est-elle égale à l'intégrale de la limite de cette suite de fonctions? Autrement dit, a-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt \ ?$$

Ou encore au niveau d'une série de fonctions: a-t-on

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,dt\ ?$$

Ce sont ce que l'on appelle des problèmes *d'interversion*. La réponse n'est pas automatiquement oui, il existe de nombreux contre-exemples; elle ne l'est que sous certaines conditions, dont celles abordées dans le théorème ci-dessous[1].

Rappel: notion de fonction intégrable. Soit I un intervalle et f une fonction définie et continue sur I, à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est intégrable sur I si l'intégrale

$$\int_a^b |f(t)|\,dt$$

est convergente, où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

Le théorème principal est le suivant:

Théorème X.5.19 Soit I un intervalle et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n une fonction définie et continue sur I, à valeurs réelles. On suppose:

- que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I,
- que pour tout $t \in I$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ est convergente et en notant

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t),$$

  que S est continue sur I,
- que la série $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n(t)|\,dt$ est convergente.

Alors S est intégrable sur I et

$$\int_I S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

Remarques.

- La démonstration est admise.
- Ce théorème répond bien à une question d'interversion, puisque par définition de la fonction S,

$$\int_I S(t)\,dt = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,dt$$

  et donc l'interversion, sous les hypothèses de ce théorème, est possible:

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

Exemple typique

En considérant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $I =]0, +\infty[$ par

$$\forall t \in I,\ f_n(t) = te^{-nt}$$

établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Réponse.

- À l'aide de la formule d'intégration par parties:

On suppose que

- $u(t)v(t)$ possède une limite finie ℓ lorsque t tend vers b,
- $u(t)v(t)$ possède une limite finie ℓ' lorsque t tend vers a.
- Ainsi, le "crochet" $[u(t)v(t)]_a^b$ existe et vaut alors $\ell - \ell'$.
- Ceci étant établi, $I = \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$ est alors de même nature que $J = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$
- et en cas de convergence,

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt.$$

on va établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrabilité de la fonction f_n sur $I =]0, +\infty[$ et calculer

$$J_n = \int_I |f_n(t)|\,dt$$

c'est à dire

$$J_n = \int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt$$

(les valeurs absolues ne changent évidemment rien ici).

- On pose $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-nt}$. Alors

$$u'(t) = 1, \quad v(t) = -\frac{1}{n}e^{-nt}.$$

- Par croissance comparée:

$$u(t)v(t) = -\frac{1}{n}te^{-nt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  Donc $[uv]_0^{+\infty}$ existe (et vaut 0) et en conséquence

$$\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt$$

  et

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$$

  sont de même nature.
- Or $\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$ converge (référence), donc J_n converge, autrement dit f_n est intégrable sur I et

$$\begin{aligned} J_n &= [uv]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt \\ &= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt. \end{aligned}$$

- On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^X e^{-nt}\,dt &= \left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^X \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - e^{-nX}\right) \\ &\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

[1] On retrouvera cette problématique avec le théorème de primitivation des séries entières.

Donc par définition

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n}$$

et en conclusion:

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt \\ &= \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

- Pour tout $t \in I$, la série $\sum_{n\geq 1} e^{-nt}$ est convergente, puisqu'il s'agit d'une série géométrique:

$$e^{-nt} = \left(e^{-t}\right)^n$$

de raison $e^{-t} \in]0,1[$ et en conséquence, la série $\sum_{n\geq 1} te^{-nt}$ est convergente et l'on a

$$\begin{aligned} \forall t \in I,\ \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt} &= t\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \\ &= t\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n \\ &= \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} \\ &= \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} \times \frac{e^t}{e^t} \\ &= \frac{t}{e^t - 1}. \end{aligned}$$

- La fonction

$$S : t \longmapsto \frac{t}{e^t - 1}$$

est clairement continue sur I.

- Enfin, la série $\sum_{n\geq 1} \int_I |f_n(t)|\,dt$ i.e. la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann).
- Il résulte du théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_I S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt,$$

c'est à dire

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Chapitre XI

Probabilités discrètes (première et deuxième année)

1 Formules de dénombrement

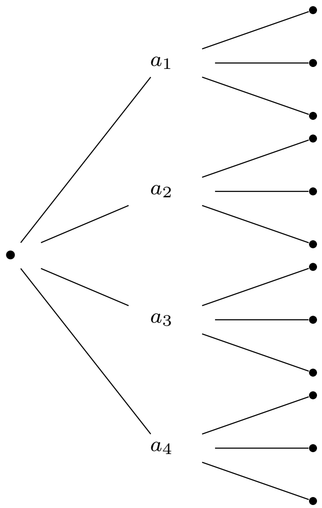
Le dénombrement est l'art de la détermination du nombre d'éléments (le cardinal) d'un ensemble. Les techniques de dénombrement reposent sur quelques situations de la théorie des ensembles, qui servira de modèle. Un des défis des situations pratiques consistera en la recherche d'un bon modèle.

1.1 Principe de multiplication; produit cartésien

Si une expérience X peut se décomposer en sous-expériences *indépendantes* $A, B \ldots$, de telle sorte que

- A peut se produire de a manières (ou "issues"),
- pour chaque résultat de A, l'expérience B peut se produire de b manières, à condition que les résultats de A n'ont pas d'influence sur les résultats de B, etc.
- et que les expériences $A, B, \ldots$ s'enchaînent jusqu'à la réalisation de X,

alors X comporte $a \times b \times \ldots$ issues possibles.
Cette situation peut se matérialiser naturellement par un arbre à plusieurs niveaux: au premier niveau d'arborescence, une première série de branches indique les choix d'une première issue; au deuxième niveau, une autre série de branches indique les choix d'une deuxième issue, et ainsi de suite. Le nombre total de branches correspond au nombre total d'issues possibles.



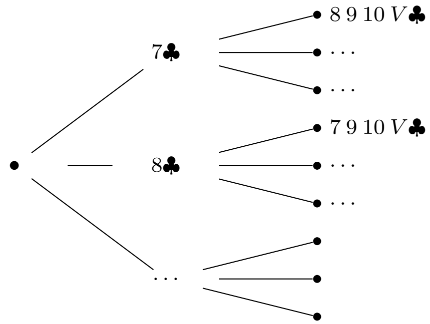
Exemple typique

Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 5 cartes existe-t-il comportant 2 trèfles et 3 carreaux?

- ***Réponse.*** Cette expérience peut se décomposer en le choix des 2 trèfles puis le choix des 3 carreaux, le choix des trèfles n'ayant pas d'influence sur le choix des carreaux.
- On a en tout 8 trèfles et donc $\binom{8}{2}$ façons de choisir les 2 trèfles (cf. plus bas: combinaisons d'éléments).
- De même, il existe $\binom{8}{3}$ façons de choisir les 3 carreaux et le choix de ces 3 carreaux est le même quel que soit le choix des 2 trèfles précédents.
- Il existe donc en tout $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568$ mains de 5 cartes comportant 2 trèfles et 3 carreaux.

Une expérience qui peut se décomposer en deux sous-expériences A et B ne relève pas obligatoirement du principe de multiplication énoncé ci-dessus; c'est le cas lorsque le résultat de A *a une influence* sur les résultats de B. Par exemple, dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 5 cartes existe-t-il comportant 5 trèfles?

- Puisqu'il existe 8 trèfles dans un jeu de 32 cartes, la bonne réponse est évidemment $\binom{8}{5} = 56$.
- Mais si on décompose l'expérience en: choix du premièr trèfle puis choix des 4 trèfles restants, on peut faire une grave erreur de raisonnement:
  - certes, il existe $\binom{8}{1} = 8$ façons de choisir le premier trèfle
  - ce trèfle étant choisi, il reste 4 trèfles à choisir parmi les 7 qui restent, ce qui fait $\binom{7}{4}$ choix possibles.
  - Le résultat final semblerait être $\binom{8}{1} \times \binom{7}{4}$, ce qui fait 280, soit 5 foix plus que le résultat correct. Alors où est l'erreur?
  - L'erreur vient du fait que le choix du premier trèfle *a une influence* sur le choix des 4 suivants: si je choisis en premier le 7 de trèfle, je n'ai pas le même choix, pour les 4 trèfles suivants, que si j'avais choisi le Roi de trèfle!
  - On le voit très bien sur un arbre, où plusieurs branches conduisent au bout du compte à la même main, comme par exemple $7\,8\,9\,10\,V\clubsuit$ (et il est facile de voir que chaque main de 5 trèfles apparaît exactement 5 fois dans cet arbre).



Produit cartésien

Définition XI.1.1 De façon formelle, si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles finis, alors

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \dots \times \mathrm{Card}(E_p),$$

où le *produit cartésien* $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble de tous les p-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_p \in E_p$.

Remarque. En particulier, si $\mathrm{Card}(E) = n$, le produit cartésien $E \times E \dots \times E$ (p-fois) est un ensemble qui modélise le concept de p-liste *avec* remise que l'on peut former avec les éléments de l'ensemble E:

- on "tire" un élément x_1 de E, on le note, on le "remet" dans E
- on tire un élément x_2 de E (qui peut être à nouveau x_1), on le note et on le remet, etc.
- Le résultat obtenu est une p-liste avec remise $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E, distincts ou non:
- il existe donc n^p telles listes.
- C'est un concept dans lequel l'ordre des éléments entre en jeu (le triplet (x_1, x_2, x_3) est différent du triplet (x_3, x_2, x_1).
- ***Le modéle typique*** est celui
  - d'un tirage successif de p boules dans une urne qui en comporte n, avec remise: il existe n^p tirages possibles en tout;
  - du lancer consécutif d'un même dé à 6 faces (par exemple 3 fois de suite): il existe $6^3 = 216$ résultats possibles.

1.2 Liste avec remise

Soit n et p deux entiers non nuls. Dans une population d'effectif n, on effectue l'expérience aléatoire qui consiste à extraire successivement, *avec remise*, p individus. Cela signifie que le même individu peut être choisi plusieurs fois. Les résultats de ces tirages successifs, rangés dans l'ordre de leur obtention, constituent une liste à p éléments, également appelée p-liste.

Formellement, il s'agit du nombre d'applications d'un ensemble dans un autre.

Proposition XI.1.1 Si A comporte p éléments et B en comporte n, le nombre total d'applications de A dans B est n^p.

En effet:

- on a n choix pour le premier élément de A,
- puis encore n choix pour le deuxième élément de A,...,
- puis encore n choix pour le dernier et p-ième élément de A, soit en tout n^p choix possibles.

1.3 Règle de la somme

C'est l'idée selon laquelle si on a a façons d'effectuer une certaine action et b façons d'en effectuer une autre et qu'on ne peut réaliser ces actions en même temps, alors on a $a + b$ façons de choisir une de ces actions.

Proposition XI.1.2 De façon formelle, si A et B sont des ensembles finis tels que $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Plus généralement, quels que soient les ensembles finis A et B,

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Remarque. C'est le "principe d'inclusion-exclusion".

Exemple

Combien existe-t-il d'entiers compris entre 1 et 1000 qui sont divisibles par 2 ou par 3?

- ***Réponse.*** Notons
  - A l'ensemble des entiers compris entre 1 et 1000 qui sont divisibles par 2,
  - B l'ensemble des entiers compris entre 1 et 1000 qui sont divisibles par 3.
- Il s'agit donc de déterminer $\mathrm{Card}(A \cup B)$.
- On a
  $$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$
  - De façon évidente, A consiste en l'ensemble
    $$\{1 \times 2, 2 \times 2, 3 \times 2, \dots, 500 \times 2\}$$
    et donc $\mathrm{Card}(A) = 500$.
  - De même, B consiste en l'ensemble
    $$\{1 \times 3, 2 \times 3, 3 \times 3, \dots, 333 \times 3\}$$
    et donc $\mathrm{Card}(B) = 333$.
  - Enfin, $A \cap B$ est constitué des entiers compris entre 1 et 1000 qui sont à la fois des multiples de 2 et des multiples de 3, c'est à dire des multiples de 6; il consiste donc en l'ensemble
    $$\{1 \times 6, 2 \times 6, 3 \times 6, \dots, 166 \times 6\}$$
    (puisque $166 \times 6 = 996$) et donc $\mathrm{Card}(A \cap B) = 166$.
- Ainsi,
  $$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B) &= 500 + 333 - 166 \\ &= 667.\end{aligned}$$

1.4 Permutations

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E, c'est à dire le nombre de bijections de l'ensemble E dans lui même, vaut $n!$.

C'est un concept qui modélise typiquement:

- le nombre de placements de n personnes qui s'installent dans une salle de cinéma comportant n places numérotées de 1 à n: il existe $n!$ placements différents *(la personne 1 va à la place numéro tant, la personne 2 va à la place numéro tant: à chaque disposition des personnes correspond une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$).*

- Le nombre de mots de n lettres que l'on peut former avec n lettres deux à deux distinctes (mots ayant un sens ou non): on peut former $n!$ mots.
- On dispose de n boules dans une urne. On les tire successivement, sans les remettre, en tenant compte de l'ordre d'apparition de chaque boule. Le nombre total de tirages possibles est $n!$.
- Le nombre $n!$ est le facteur qui entre en jeu entre une situation où l'ordre ne compte pas et celle où l'ordre compte. Par exemple, une association de 100 membres doit élire son bureau, qui comporte 3 membres.
  - Il existe $\binom{100}{3}$ bureaux possibles (cf. plus bas la notion de combinaison).
  - En réalité, le bureau comporte un président, un vice-président et un trésorier, bureau qui prend alors le nom de "comité". Chaque bureau donne naissance à $3!$ comités différents.
  - Il existe donc $3! \times \binom{1000}{3}$ comités différents.

1.5 Liste sans remise

Soit n et p deux entiers non nuls. Dans une population E d'effectif n, on extrait, successivement et sans remise p individus. Il en résulte que le même individu ne peut pas être choisi plusieurs fois et que $p \leq n$. Les résultats, rangés dans l'ordre de leur obtention, constituent une p-liste sans remise d'éléments choisis parmi n (on dit aussi un arrangement de p éléments). On dénombre ces arrangements de la façon suivante:

- on choisit un élément x_1 de E, on a donc n choix possibles, on le note et on le retire,
- on choisit un élément x_2 de E, qui est donc différent de x_1 et on a en conséquence $n-1$ choix possibles, on le note et on le retire, etc.
- on choisit un élément x_3 de E, qui est donc différent de x_1 et x_2 et on a en conséquence $n-2$ choix possibles, on le note et on le retire, etc.
- Il existe donc
$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$
tels arrangements. À noter que ce nombre vaut aussi
$$\frac{n!}{(n-p)!}.$$
- ***Situtation typique.*** Une urne comporte n boules numérotées de 1 à n. On en tire successivement p *et sans remise*, avec $p \leq n$. Il existe alors
$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$
tirages possibles.

Formellement:

> **Proposition XI.1.3** Soit A un ensemble de cardinal p et B un ensemble de cardinal n.
> Le nombre total d'applications *injectives* de A vers B est
> $$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1).$$

Remarque. Rappelons qu'une application *injective* est une application telle que des éléments différents ont des images différentes.

En effet

- on a n choix pour le premier élément de A,
- puis plus que $n-1$ choix pour le deuxième élément de A,...,
- puis plus que $n-p+1$ choix pour le dernier et p-ième élément de A, soit en tout $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$ choix possibles.

1.6 Combinaisons d'éléments; coefficients binomiaux

Soit n et p deux entiers non nuls. Dans une population E d'effectif n, on extrait *simultanément* p individus. Il en résulte que le même individu ne peut être choisi plusieurs fois et que la notion d'ordre n'intervient pas; en outre, on a nécessairement $p \leq n$. Le résultat de ce tirage simultané est une *combinaison* de p éléments choisis parmi n: il existe

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!}\end{aligned}$$

telles combinaisons.

- ***Situtation typique:*** le nombre de mains de p cartes que l'on peut former à partir d'un jeu qui en comporte n. typiquement comme les "mains" d'un jeu de cartes; par exemple, on peut former
$$\frac{32}{5} = 201376$$
mains de 5 cartes à partir d'un jeu qui en comporte 32.

Formellement:

> **Proposition XI.1.4** Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier avec $p \leq n$.
> Il existe
> $$\binom{n}{p}$$
> sous-ensembles de E comportant p éléments.

Remarques.

- Ces sous-ensembles à p éléments sont aussi appelés des p-combinaisons de E.
- C'est un concept dans lequel l'ordre des éléments n'entre pas en jeu; par exemple, le sous-ensemble $\{x_1, x_2, x_3\}$ est identique au sous-ensemble $\{x_3, x_2, x_1\}$.

> **Proposition XI.1.5** On a
> $$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1\\ \binom{n}{1} &= n\\ \binom{n}{2} &= \frac{n(n-1)}{2}\\ \binom{n}{n-p} &= \binom{n}{p}\\ \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

1.7 Nombre de parties d'un ensemble

Proposition XI.1.6 Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors E comporte en tout 2^n sous-ensembles (vide et E compris):

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Démonstration. Parmi les parties (sous-ensembles) de E, il y a:

- les parties à 0 élément
- les parties à 1 élément,
- les parties à 2 éléments,
- $\ldots$,
- les parties à n éléments.

En notant

- $\mathcal{P}_0$ l'ensemble de toutes les parties de E qui comportent 0 élément
- $\mathcal{P}_1$ l'ensemble de toutes les parties de E qui comportent 1 élément
- $\mathcal{P}_2$ l'ensemble de toutes les parties de E qui comportent 2 éléments,
- $\ldots$,
- $\mathcal{P}_n$ l'ensemble de toutes les parties de E qui comportent n éléments,

toute partie de E appartient à l'une des catégories

$$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$$

et seulement à une seule de ces catégories. Il en résulte:

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_0) + \mathrm{Card}(\mathcal{P}_1) + \mathrm{Card}(\mathcal{P}_2) + \ldots + \mathrm{Card}(\mathcal{P}_n).$$

De la proposition précédente, on déduit qu'il existe

- $\binom{n}{0}$ parties de E possédant 0 élément
- $\binom{n}{1}$ parties de E possédant 1 élément,
- $\binom{n}{2}$ parties de E possédant 2 éléments,
- $\ldots$,
- $\binom{n}{n}$ parties de E possédant n éléments.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} \\
&= (1+1)^n \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

1.8 Récapitulatif des formules de dénombrement

Tirages

Théorème XI.1.7 Soit une urne comportant n boules numérotées et un entier p; on tire p boules, les unes après les autres, si bien que l'ordre compte.

- *Tirages avec remise.* Si on remet chaque boule après son tirage, il existe n^p tirages possibles au total.
- *Tirages sans remise.* Si on ne remet pas la boule après son tirage, il existe
$$n(n-1)\ldots(n-p+1)$$
tirages possibles au total (en supposant alors évidemment $p \leq n$).

Modèle mathématique

Théorème XI.1.8 Soit E un ensemble fini de cardinal n.

- Il existe en tout 2^n parties de E: c'est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
- Pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, il existe $\binom{n}{p}$ parties de E comportant p éléments.
- Il existe $n!$ permutations de E (applications bijectives de E dans E).

Théorème XI.1.9

- $\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \ldots \times \mathrm{Card}(E_p)$, formule modélisant le nombre d'issues d'une expérience pouvant se décomposer en sous-expériences indépendantes.
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors
$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B),$$
formule modélisant une expérience aboutissant à deux choix possibles qui s'excluent.
- Plus généralement, quels que soient les ensembles finis A et B,
$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$
- Si $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$,
  - il existe en tout n^p applications de E dans F,
  - il existe en tout $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ applications injectives de E dans F (en supposant $p \leq n$).

1.9 Application des formules de dénombrement à l'équiprobabilité (rappels)

Définition XI.1.2 L'équiprobabilité sur un univers Ω, ou probabilité uniforme, est définie par:

pour tout événement A, $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

On dit aussi
$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre total de cas possibles}}.$$

- C'est une loi qui modèlise les situations de pur hasard (tirage de boules dans une urne, de cartes, lancer d'un dé ...).
- Les situations d'équiprobabilité relèvent donc avant tout de techniques de dénombrement.

Exemple

On distribue à un joueur de façon équiprobable une main de 5 cartes d'un jeu classique en comportant 32. Quelle est la probabilité que cette main comporte exactement 3 trèfles?

- Une main de 5 cartes est un sous-ensemble de 5 cartes que l'on peut former à partir d'un ensemble de cartes en comportant 32. Il existe donc
$$\binom{32}{5} = 201376$$
mains possibles.
- L'expérience consistant à former une main de 5 cartes comportant exactement 3 trèfles peut se décomposer en le choix des 3 trèfles puis des 2 autres cartes, le choix des trèfles n'ayant pas d'influence sur le choix des cartes restantes (qui ne sont pas des trèfles).
  - On a en tout 8 trèfles et donc
$$\binom{8}{3} = 56$$
façons de choisir les 3 trèfles.
  - Il existe $32 - 8 = 24$ cartes qui ne sont pas des trèfles et il existe donc
$$\binom{24}{2} = 276$$
façons de choisir les 2 cartes restantes et le choix de ces 2 carreaux est le même quel que soit le choix des 3 trèfles précédents.
  - Il existe donc en tout
$$\begin{aligned} \binom{8}{3} \times \binom{24}{2} &= 56 \times 276 \\ &= 15456 \end{aligned}$$
mains de 5 cartes comportant exactement 3 trèfles.
- La probabilité que cette main comporte exactement 3 trèfles est donc
$$\begin{aligned} \frac{\binom{8}{3} \times \binom{24}{2}}{\binom{32}{5}} &= \frac{15456}{201376} \\ &\approx 0,076. \end{aligned}$$

2 Formalisme; manipulation d'ensembles

Le cadre "abstrait" de la théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles: toutes les réalisations possibles d'une expérience sont regroupées dans un ensemble Ω, appelé univers, souvent monstrueux et difficile à décrire et dont la description totale est bien souvent inutile. Une loi de probabilité est une manière de calculer des probabilités sur des événements.

- Elle peut être imposée par une certaine formule, notamment dans le cadre des variables aléatoires
- et/ou résulter d'un raisonnement basé sur les propriétés d'une telle loi (cf. ci-dessous).

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
ensemble vide $\emptyset$	événement impossible
ensemble Ω	événement certain
élément de Ω	événement élémentaire
sous-ensemble A de Ω	événement
$A \subset B$	la réalisation de A entraîne celle de B
$A \cap B$	réalisation des événements A et B
$A \cup B$	réalisation d'au moins un des deux événements A ou B
$\overline{A}$	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	les événements A et B sont incompatibles

Exemples

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.

- L'univers Ω consiste en l'ensemble des 32 cartes.
- Tirer le Roi de trèfle est un événement élémentaire ω.
- Tirer un trèfle est un événement A. En vocabulaire ensembliste, A est l'ensemble des trèfles:
$$A = \{7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, As\clubsuit\}.$$
On a d'ailleurs $\omega \in A$.
- Tirer une carte noire est un événement B. En vocabulaire ensembliste, B est la réunion de l'ensemble des trèfles et de l'ensemble des piques
$$B = \{7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, As\clubsuit, 7\spadesuit, 8\spadesuit, 9\spadesuit, 10\spadesuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit, As\spadesuit\}.$$
- Lorsque l'on tire un trèfle, alors on tire une carte noire: la réalisation de l'événement A entraîne la réalisation de l'événement B. D'un point de vue ensembliste, on a $A \subset B$.
- Tirer une carte "habillée" (Roi, Dame ou Valet) est un événement C:
$$C = \{V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit\}.$$
- Tirer un trèfle habillé est un événement D qui correspond à la réalisation simultanée des événements A et C. En vocabulaire ensembliste, $D = A \cap C$:
$$\begin{aligned} D &= \{V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit\} \\ &= \{7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, As\clubsuit\} \cap \{V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, V\spadesuit, D\spadesuit, R\spadesuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit\}. \end{aligned}$$
- Tirer une carte rouge (cœur ou carreau) est un événement E:
$$E = \{7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, As\heartsuit, 7\diamondsuit, 8\diamondsuit, 9\diamondsuit, 10\diamondsuit, V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, As\diamondsuit\}.$$
  - Les événements A et E sont évidemment incompatibles, ce qui se traduit par
$$\begin{aligned} A \cap E &= \{7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, V\clubsuit, D\clubsuit, R\clubsuit, As\clubsuit\} \\ &\cap \{7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, V\heartsuit, D\heartsuit, R\heartsuit, As\heartsuit, 7\diamondsuit, 8\diamondsuit, 9\diamondsuit, 10\diamondsuit, V\diamondsuit, D\diamondsuit, R\diamondsuit, As\diamondsuit\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$
  - Les événements B et E sont contraires: $\overline{B} = E$, ce qui se traduit aussi par
$$B \cap E = \emptyset, \ B \cup E = \Omega.$$

Intersection

Proposition XI.2.10 Qu'elle soit en nombre fini ou infini, une intersection d'événements est l'événement qui correspond à la réalisation de *tous* les événements en jeu:

- l'événement $A \cap B$ est réalisé lorsque l'événement A et l'événement B sont réalisés,
- l'événement $\bigcap_{n=1}^{N} A_n$ est réalisé lorsque tous les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont réalisés,
- l'événement $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ lorsque tous les événements $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sont réalisés.

Réunion

Proposition XI.2.11 Qu'elle soit en nombre fini ou infini, une réunion d'événements est l'événement qui correspond à la réalisation *d'au moins un* des événements en jeu:

- l'événement $A \cup B$ lorsque l'événement A ou l'événement B est réalisé,
- l'événement $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ lorsque l'un au moins des événements $A_1, \ldots, A_N$ est réalisé,
- l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ lorsque l'un au moins des événements $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ est réalisé.

Opérations entre réunion et intersection

Proposition XI.2.12

- Quels que soient les ensembles en jeu
$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B &= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)\\ (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B &= (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B)\end{aligned}$$
et ces formules sont encore valables pour une intersection ou une réunion infinie:
$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \cap B &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_i \cap B)\\ \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \cup B &= \bigcap_{i=1}^{+\infty} (A_i \cup B).\end{aligned}$$
- En notant $\overline{A}$ le complémentaire dans Ω de l'ensemble A ($\overline{A}$ est donc constitué des éléments de Ω qui ne sont pas dans A), on a
$$\begin{aligned}\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} &= \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\\ \overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} &= \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_n\end{aligned}$$
et ces formules sont encore valables pour une intersection ou une réunion infinie:
$$\begin{aligned}\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i} &= \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i\\ \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i} &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i.\end{aligned}$$

Démonstration 39

3 Loi de probabilité; cas particulier d'un univers infini

3.1 Définition et premières propriétés

La différence avec le programme de première année réside dans le fait que l'on va envisager des expériences probabilistes conduisant à un univers infini, c'est à dire pour lesquelles il existe une infinité de réalisations possibles. Par exemple:

- on lance une pièce de monnaie et on note le résultat: si on a obtenu pile, on s'arrête mais si on a obtenu face, on recommence, et ainsi de suite. L'univers est infini, car constitué des suites de résultats
$$P,\ (F, P),\ (F, F, P),\ (F, F, F, P), \ldots$$
- Une urne contient deux boules vertes et trois boules rouges. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne; on recommence et on s'arrête lorsque l'on a tiré six boules rouges consécutivement. L'univers est infini et assez monstrueux à décrire.

Considèrons une expérience aléatoire; l'univers, noté Ω, est l'ensemble constitué de toutes les réalisations possibles de cette expérience. Une loi de probabilité est une application P qui agit sur des *événements*, c'est à dire des sous-ensembles de Ω, qui produit un réel entre 0 et 1 (la notion de probabilité étant expérimentalement profondément liée à la notion de *fréquence* d'apparition d'un événement) et qui satisfait les propriétés suivantes (pour une définition plus formelle, et notamment concernant la famille $\mathcal{A}$ de parties apparaissant dans cette définition, on pourra lire la dernière section de ce chapitre):

Définition XI.3.3 ***Définition d'une loi de probabilité.***
Une loi de probabilité sur un univers Ω est une application P agissant sur un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω, appelée *tribu*, dont les membres sont appelés *événements* et vérifiant les propriétés suivantes:

- $P(\Omega) = 1$,
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, c'est à dire telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$, la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ est convergente et
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$
(propriété de σ-additivité).

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Remarque. La propriété de σ-additivité, comme on va le voir ci-dessous, généralise la propriété classique (de première année)

si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

et est typique d'une situation conduisant à une infinité d'issues deux à deux incompatibles ("ou bien ceci, ou bien cela,... avec une infinité de possibilités); par exemple: "on obtient le premier pile au bout d'un lancer, ou au bout de deux lancers,...

Désormais, on considérera un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; on dispose donc d'une application P qui jouit des propriétés ci-dessus et le reste de ce paragraphe va être dédié à en déduire d'autres.

Voici une première salve:

Proposition XI.3.13 Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- $P(\emptyset) = 0$.
- Si $A_1, \ldots, A_N$ sont des événements deux à deux disjoints, alors
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_N)$$
c'est à dire
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n).$$
- Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- *Croissance de la probabilité:* pour tout $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$,
$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B).$$
- Pour tous événements A et B,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
et en conséquence
$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$
- Plus généralement, pour tous événements $A_1, \ldots, A_N$ (en nombre fini), alors
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Démonstration 40

Définition XI.3.4

- Un événement B est dit presque sûr lorsque $P(B) = 1$.
- Un événement A est dit négligeable lorsque $P(A) = 0$.

Remarque. On se donne deux entiers k et n avec $1 \leq k \leq n$; on lance n fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins k piles consécutifs au cours de ces lancers?

- Voici quelques valeurs numériques pour $k = 2$, donc pour deux piles consécutifs:

nombre de lancers	10	20	30	100
probabilité	0,8594	0,98311	0,9979	0,9999

Comme on s'y attend, la probabilité s'approche très rapidement de 1.
- Pour six piles consécutifs:

nombre de lancers	10	30	100	1000
probabilité	0,0468	0,1917	0,5461	0,9997

La probabilité s'approche de 1, mais c'est évidemment moins rapide.
- Pour dix piles consécutifs:

nombre de lancers	100	500	1000	10000
probabilité	0,0441	0,2145	0,3854	0,9925

Et bien sûr encore moins rapide.
- On peut démontrer que pour tout entier k, la probabilité de l'événement B: "au cours d'une partie de pile ou face, sans limitation du nombre de lancers, on a obtenu k piles consécutifs" vaut 1. Pour de faibles valeurs de k, la pratique donne évidemment raison à cette assertion. Pour des valeurs de k plus élevées, la vérification pratique a ses limites! Et pour k très élevé (ce résultat affirme donc que la probabilité d'obtenir un million de piles consécutifs vaut 1!), on convient évidemment que la vérification est impossible. La notion d'événement "presque sûr" est donc une notion toute relative qui doit être interprétée en regard de l'expérience probabiliste en jeu.

3.2 Autres propriétés: continuité croissante, décroissante et sous-additivité

Il est important de déceler les situations conduisant à des univers infinis; tout dépend de la nature de l'expérience. Observons tout d'abord que certaines situations conduisent évidemment à un univers fini: "on lance 3 fois de suite un dé", "on tire 5 cartes d'un jeu de 32", "on tire successivement et sans remise toutes les boules d'une urne qui en contient 10". Ou encore: "on tire une boule d'une urne qui en contient n", "on dispose de n urnes, on en choisit une et on tire dans cette urne", "on lance n fois de suite une pièce de monnaie".
Cependant, même pour des expériences très simples, l'univers associé est infini. Ceci est typique de la répétition d'une même expérience jusqu'à obtention d'un certain résultat: tous les rangs n, $n \in \mathbb{N}^*$ peuvent être envisagés pour la réalisation de cet événement. Par exemple:

- on lance une pièce jusqu'à obtention du premier pile. Quelle est la probabilité que le rang de ce premier pile soit un multiple de 3?
- Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules blanches. On tire successivement et avec remise une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer 4 fois de suite une boule rouge?
- Deux joueurs A et B s'affrontent en lançant à tour de rôle deux dés; A gagne si la somme obtenue est 3 ou 4, B gagne si la somme obtenue est 4 ou 5. Le jouer A commence: quelle est la probabilité que A gagne?

Pour résoudre ces problèmes et justifier rigoureusement les calculs, on pourra avoir recours à ces formules:

Principe de continuité croissante

Théorème XI.3.14 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $A_n \subset A_{n+1}$. Une telle suite est dite *croissante.* Alors
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Démonstration 41

Rappelons que l'inclusion $A_n \subset A_{n+1}$ modélise "la réalisation de l'événement A_n entraîne celle de A_{n+1}". Par exemple: A_n est l'événement "on obtient au moins une fois pile lors des n premiers lancers".

Champ d'application. Principe à utiliser pour le calcul de la probabilité qu'un certain événement se réalise au moins une fois lors de la répétition, sans limitation, d'une même expérience.

Principe de continuité décroissante

Théorème XI.3.15 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $A_{n+1} \subset A_n$. Une telle suite est dite *décroissante*. Alors

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Démonstration 42

Rappelons que l'inclusion $A_{n+1} \subset A_n$ modélise "la réalisation de l'événement A_{n+1} entraîne celle de A_n". Par exemple: A_n est l'événement "on obtient pile du premier au n-ième lancer".

Champ d'application. Principe à utiliser pour le calcul de la probabilité qu'un certain événement se réalise à toutes les étapes lors de la répétition d'une même expérience, sans limitation du nombre de répétitions.

Proposition XI.3.16 ***Principe de sous-additivité.*** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Démonstration 43

Remarque. Dans cette formule, il est sous-entendu qu'en cas de divergence de la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$, on attribue la valeur $+\infty$ à $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Et enfin cette dernière proposition:

Proposition XI.3.17 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

Démonstration 44

Exemple de continuité décroissante

- On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une infinité de fois une pièce équilibrée et l'événement A: "obtenir pile à tous les lancers".
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement: "on obtient pile du premier au n-ième lancer".
  - Alors $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ puisque $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ correspond à la réalisation de tous les A_n et donc à l'obtention de pile à tous les lancers.
  - Naturellement, $P(A_n) = \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$ (il y a évidemment indépendance des lancers).
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_{n+1} \subset A_n$ puisque si on a obtenu pile du premier au $(n+1)$-ième lancer alors à plus forte raison on a obtenu pile du premier au n-ième lancer.
  - Du principe de continuité décroissante on déduit alors

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Remarque: l'événement A a une probabilité nulle: il n'en est pas pour autant impossible!

Exemple de continuité croissante

- On considère l'expérience aléatoire suivante: au départ, une urne contient deux boules: une rouge et une noire. On tire une boule au hasard: si cette boule est rouge, on la remet dans l'urne; si cette boule est noire, on la remet dans l'urne mais on rajoute une boule noire. On tire une nouvelle fois : si cette boule est rouge on la remet dans l'urne, et si cette boule est noire, on la remet dans l'urne et on rajoute une boule noire et ainsi de suite, sans limitation du nombre de lancers. Au cours de ce processus, quelle est la probabilité de l'événement A: "tirer une boule rouge"?
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement: "au moins une boule rouge a été obtenue lors des n premiers tirages".
  - Alors $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. En effet:
    - $*$ si l'événement A est réalisé, c'est que la boule rouge a été tirée: soit n_0 le rang auquel elle a été tirée; alors l'événement A_{n_0} est réalisé. Ainsi, $A \subset A_{n_0}$ et à plus forte raison $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.
    - $*$ si l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est réalisé, c'est donc qu'un événement A_{n_0} (au moins) est réalisé: une boule rouge a été tirée au cours des n_0 premiers tirages. Ainsi, une boule rouge a été tirée et l'événement A est donc réalisé.
  - On a $A_n \subset A_{n+1}$ car si A_n est réalisé, alors au moins une boule rouge a été obtenue lors des n premiers tirages et a fortiori au moins une boule rouge a été obtenue lors des $(n+1)$ premiers tirages.
  - Pour calculer $P(A_n)$, on va passer par l'événement complémentaire: $\overline{A_n}$ est réalisé lorsque la boule rouge n'a pas été tirée au cours des n premiers tirages i.e.
    - $*$ pas au premier, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{1}{2}$,
    - $*$ pas au deuxième et comme l'urne contient alors une boule rouge et deux noires, cela se produit avec la probabilité $\frac{2}{3}$,
    - $*$ pas au troisième et comme l'urne contient alors une boule rouge et trois noires, cela se produit avec la probabilité $\frac{3}{4}$ etc.
    - $*$ pas au n-ième et comme l'urne contient alors une boule rouge et $n-1$ noires, cela se produit avec la probabilité $\frac{n-1}{n}$

    et donc

$$P(\overline{A_n}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

  - Ainsi, $P(A_n) = 1 - \frac{1}{n}$.

– Du principe de continuité croissante on déduit alors

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

Remarque: l'événement A est de probabilité 1: il n'en est pas pour autant certain!

3.3 Probabilité conditionnelle, indépendance

Dans toute cette section, on considère un espace probabilisé d'univers Ω muni d'une loi de probabilité P.

Probabilité conditionnelle

Définition XI.3.5 Soient A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ d'un espace probabilisé Ω.
La *probabilité conditionnelle* de A sachant B est le réel $P(A|B)$ noté aussi $P_B(A)$, défini par

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Comme son nom l'indique, cette formule a pour objet d'évaluer la probabilité de réalisation de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. Soit A l'événement "on obtient un 6" et B l'événement "on obtient un nombre pair".

- Bien entendu, $P(A) = \frac{1}{6}$.
- Mais si l'on sait que l'événement B est réalisé i.e. si l'on sait que l'on a obtenu un 2, un 4 ou un 6, la probabilité d'obtenir un 6 est de $\frac{1}{3}$: *c'est du bon sens.*
- Remarquons que l'événement $A \cap B$ n'est autre que l'événement A lui-même: obtenir un 6 *et* obtenir un nombre pair, c'est tout simplement obtenir un 6. Par ailleurs, $P(B)$ vaut naturellement $\frac{1}{2}$. Remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.\end{aligned}$$

La formule de probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé donne donc un résultat conforme au bon sens.

Proposition XI.3.18 Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors l'application

$$P_B : A \longmapsto P_B(A)$$

définit une loi de probabilité sur Ω.

Démonstration 45

Indépendance

Indépendance de deux événements.

Définition XI.3.6 On dit que les événements A et B sont indépendants lorsque

$$P(A\cap B) = P(A)P(B).$$

Lorsque $P(B) \neq 0$, ceci se produit si et seulement si

$$P(A|B) = P(A).$$

- La notion d'indépendance a pour but de modéliser une situation où la connaissance de la réalisation d'un événement n'a pas d'influence sur la réalisation d'un autre événement.
- À ce titre, puisque

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \quad P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

on voit que

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) \iff P(A|B) = P(A) \iff P(B|A) = P(B).$$

Cette définition de l'indépendance est donc conforme au bon sens.

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. Soit A l'événement "on obtient un nombre pair", B l'événement "on obtient un nombre ≤ 4" et C l'événement "on obtient un nombre ≤ 3".

- Bien entendu, $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(A|B) = \frac{1}{2}$ puisque sachant que B est réalisé, i.e. on a obtenu 1, 2, 3 ou 4, la probabilité que A se réalise, i.e. la probabilité d'obtenir un 2 ou un 4, vaut $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $P(A) = P(A|B)$ donc A et B sont indépendants: *c'est le bon sens*, étant donné que parmi les entiers ≤ 4, il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs.
- D'autre part, $A \cap B$, i.e. obtenir un nombre pair ≤ 4, c'est à dire obtenir un 2 ou un 4, a une probabilité de $\frac{2}{6}$:

$$P(A\cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Et puisque $P(B)$ vaut naturellement $\frac{4}{6}$, remarquons que

$$\begin{aligned}P(A)\times P(B) &= \frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\\ &= \frac{1}{3}\\ &= P(A\cap B).\end{aligned}$$

Ainsi, A et B sont indépendants au sens donné par la définition: ceci est donc conforme au bon sens.
- Maintenant, sachant que C est réalisé, i.e. sachant que l'on a obtenu 1, 2 ou 3, la probabilité que A se réalise tombe à $\frac{1}{3}$. Ainsi, $P(A|C) \neq P(A)$ i.e. les événements A et C ne sont pas indépendants.

- D'autre part, $A \cap C$, i.e. obtenir un nombre pair ≤ 3, c'est à dire obtenir un 2, a une probabilité de $\frac{1}{6}$:
$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}.$$
Et puisque $P(C)$ vaut naturellement $\frac{3}{6}$, remarquons que
$$\begin{aligned} P(A) \times P(C) &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{4} \\ &\neq P(A \cap C). \end{aligned}$$
Ainsi, A et C ne sont pas indépendants au sens donné par la définition: ceci est donc conforme au bon sens étant donné que parmi les entiers ≤ 3, il y a moins de nombres pairs que de nombres impairs.

Proposition XI.3.19 Soit A et B deux événements indépendants. Alors $(\overline{A}, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ et $(A, \overline{B})$ sont des couples d'événements indépendants.

Démonstration 46

Remarque. Cette proposition est logique: si l'événement A n'a pas d'influence sur l'événement B, alors que A soit réalisé ou non i.e. que A soit réalisé ou que $\overline{A}$ soit réalisé, cela n'aura pas d'influence sur la réalisation ou non de B, c'est à dire sur la réalisation de B ou sur la réalisation de $\overline{B}$. C'est une autre manière de dire que $\overline{A}$ est indépendant de B, etc.

Indépendance d'une famille d'événements.

Définition XI.3.7 Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements (en nombre fini). On dit que ces événements sont *mutuellement indépendants* lorsque pour tous événements $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ de cette famille, on a
$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \times \ldots \times P(A_{i_r}).$$
Lorsque les événements $(A_1, \ldots, A_n)$ sont mutuellement indépendants, alors les événements $(B_1, \ldots, B_n)$, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A}_i$, sont également mutuellement indépendants.

L'indépendance par passage au complémentaire se démontre par récurrence sur n (inintéressant).

Exemple

Dans le cas de trois événements A, B, C, l'indépendance mutuelle a lieu si et seulement si
$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)P(C),$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Remarque importante: l'indépendance deux à deux n'entraîne pas toujours l'indépendance mutuelle. Par exemple, on lance un dé deux fois de suite.

- Soit A l'événement: "le premier lancer donne un nombre pair".
- Soit B l'événement: "le deuxième lancer donne un nombre pair".
- Soit C l'événement: "la somme des deux lancers donne un nombre pair".

On prendra naturellement comme univers $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$ muni de la probabilité uniforme.

- On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 36$.
- L'événement A est constitué des couples de tirages (pair,quelconque). Puisque 3 lancers donnent un résultat pair, on a
$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A) &= 3 \times 6 \\ &= 18 \end{aligned}$$
et donc
$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{18}{36} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
De même,
$$P(B) = \frac{1}{2}.$$
- La somme de deux entiers est paire si et seulement si ces entiers sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs; l'événement C est donc constitué des couples de tirages (pair,pair), qui sont au nombre de 3×3, et de tirages (impair,impair), également au nombre de 3×3. Comme ces deux catégories sont disjointes, on a
$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(C) &= 3 \times 3 \,+\, 3 \times 3 \\ &= 18, \end{aligned}$$
d'où
$$P(C) = \frac{1}{2}.$$
- L'événement $A \cap B$ est constitué des couples de tirages (pair,pair), qui sont au nombre de 3×3. Ainsi,
$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A \cap B) &= 3 \times 3 \\ &= 9, \end{aligned}$$
d'où
$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$
Puisque
$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$
on en déduit
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
et donc A et B sont indépendants.
- Ensuite, l'événement $A \cap C$ est constitué des couples de tirages (pair,pair), qui sont au nombre de 3×3 et donc
$$\mathrm{Card}(A \cap C) = 9,$$
d'où
$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= \frac{9}{36} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} P(A)P(C) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

on en déduit que A et C sont indépendants.

- De la même manière, B et C sont indépendants.
- Intéressons-nous enfin à l'événement $A \cap B \cap C$. Observons tout d'abord que si A et B sont réalisés, alors C est également réalisé i.e.

$$(A \cap B) \subset C.$$

C'est pourquoi

$$(A \cap B) \cap C = A \cap B$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= (A \cap B) \cap C \\ &= A \cap B. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned} P(A)P(B)P(C) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

On a donc

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C).$$

- Les événements (A, B, C) ne sont donc pas mutuellement indépendants.

3.4 Formule des probabilités composées

Théorème XI.3.20 On considère des événements $A_1, \dots A_m$ tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_m) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_m|A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}).$$

Démonstration 47

Remarques. On peut noter la logique de cette formule: A_1, A_2,..., A_n sont réalisés lorsque:

- A_1 est réalisé
- et, sachant que A_1 est réalisé, lorsque A_2 est réalisé
- puis, sachant que A_1 et A_2 sont réalisés, autrement dit sachant que $A_1 \cap A_2$ est réalisé, lorsque A_3 est réalisé et ainsi de suite.

Cette formule est souvent utilisée lorsqu'une expérience se déroule en plusieurs étapes successives, en suivant une chronologie, le résultat de chaque expérience dépendant du résultat des expériences précédentes.

Premier exemple

Considérons une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules rouges. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches?

Réponse.

- On note A_i l'événement: la i-ème boule tirée est blanche. Il s'agit bien entendu de déterminer $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Clairement

$$P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

- Le calcul direct de $P(A_2)$ est moins évident car on ne connaît pas la composition précise de l'urne lors du deuxème tirage. Cependant, le calcul de $P(A_2|A_1)$ est facile: l'événement A_1 étant réalisé, c'est qu'une boule blanche a été tirée; les tirages s'effectuant sans remise, l'urne ne contient plus que 9 boules, dont 3 sont blanches, ce qui explique que

$$\begin{aligned} P(A_2|A_1) &= \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- De même pour le calcul de $P(A_2|A_1 \cap A_2)$: l'événement $A_1 \cap A_2$ étant réalisé, i.e. A_1 et A_2 sont réalisés, c'est qu'une boule blanche a été tirée au premier tirage ainsi qu'au deuxième tirage; les tirages s'effectuant sans remise, l'urne ne contient plus que 8 boules, dont 2 sont blanches, ce qui explique que

$$\begin{aligned} P(A_3|A_1 \cap A_2) &= \frac{2}{8} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Par probabilités composées, on obtient alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}.$$

Deuxième exemple

On effectue n tirages dans une urne contenant au départ b boules blanches et b boules noires selon le protocole suivant:

- lorsque l'on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne;
- lorsque l'on tire une boule noire, on la remet et on rajoute b boules blanches.

Déterminer la probabilité des événements:

- B: "on ne tire que des boules blanches"
- N: "on ne tire que des boules noires".

Réponse. Dans les deux cas, on va appliquer la formule des probabilités composées.

- Soit B_k l'événement: "on obtient une boule blanche au k-ième tirage". On cherche donc

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n).$$

  - On applique la formule des probabilités composées:

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times \dots \times P(B_n|B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}).$$

  - Puisque dans le cas de tirage d'une bouche blanche, le tirage de boules blanches ne modifie pas la composition de l'urne, on a

$$P(B_k|B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) = \frac{1}{2}$$

et puisque $P(B_1) = \frac{1}{2}$:

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- Soit N_k l'événement: "on obtient une boule noire au k-ième tirage. On cherche donc $P(N_1 \cap \ldots \cap N_n)$.
  - On applique la formule des probabilités composées:
  $$P(N_1 \cap \ldots \cap N_n) = P(N_1) \times P(N_2|N_1) \times \ldots \times P(N_n|N_1 \cap \ldots \cap N_{n-1})$$
  - Si l'on a tiré $k-1$ fois de suite une boule noire, le stock de boules noires se trouve augmenté de $(k-1)b$ boules blanches et l'urne comporte alors b boules noires et $b+(k-1)b$ boules blanches, donc en tout $b(k+1)$ boules.
  - La probabilité de tirer une boule noire d'une telle urne est donc $\frac{b}{b(k+1)} = \frac{1}{k+1}$:
  $$\Longrightarrow P(N_k|N_1 \cap \ldots \cap N_{k-1}) = \frac{1}{k+1}$$
  et puisque $P(N_1) = \frac{1}{2}$:
  $$P(N_1 \cap \ldots \cap N_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

3.5 Formule des probabilités totales et formule de Bayes

C'est la formule qui est à l'origine de la construction d'un arbre et qui pourrait se résumer par: *"la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement,"* autrement dit, lorsqu'une expérience se déroule en deux étapes et que la première aboutit à deux résultats différents, ou plusieurs résultats différents (voire une infinité!). Cependant (lu dans un rapport de concours): *"la construction d'un arbre ne constitue pas une preuve en soi; il est attendu une application rigoureuse de la formule des probabilités totales."* Toutefois, il sera toujours possible de construire un arbre sur un brouillon et d'appliquer ensuite la formule rigoureuse.
En termes probabilistes, on dit "système complet d'événements" pour parler de "résultats différents".

Formule des probabilités totales dans le cas d'un univers fini

Théorème XI.3.21

- Soit un entier $N \geq 2$ et $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ un système complet d'événements, c'est à dire une famille d'événements telle que
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$,
  - $A_1 \cup \ldots \cup A_N = \Omega$.

  Alors pour tout événement B,
  $$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1) \times P(A_1) + \ldots + P(B|A_N) \times P(A_N) \\ &= \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n) \times P(A_n) \end{aligned}$$
  (en adoptant la convention $P(B|A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$).
- ***Cas particulier fréquent.*** Pour tout événement A, $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements et alors
  $$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$
  pour tout événement B.

Démonstration 48

Remarque. En termes ensemblistes[1], on dit que la famille d'ensembles $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ forme une *partition* de Ω:

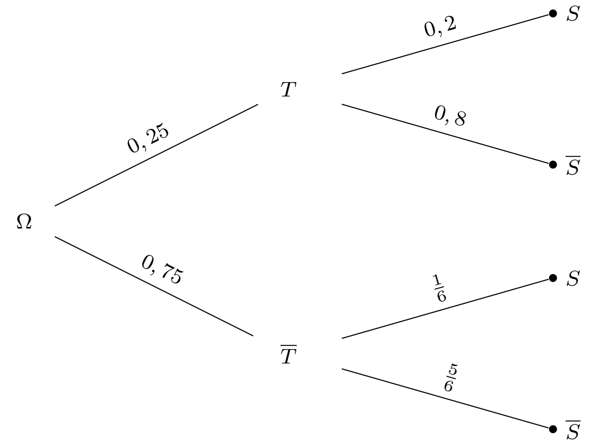
- $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \Omega$
- et les A_n sont deux à deux disjoints, c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ dès lors que $i \neq j$
- donc lorsque tout élément ω de Ω se trouve dans un et un seul A_n, $1 \leq n \leq N$.

Premier exemple

Un sac contient 75% de dés non truqués et 25% de dés truqués. Les dés truqués sont tels que la probabilité de sortie du 6 soit égale à $0,2$. On prélève un dé au hasard et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir 6?

Réponse.

- Notons T l'événement "le dé prélevé est truqué" et S l'événement "on a obtenu un 6". On peut construire un arbre pour matérialiser la situation:



- Formellement, les événements $(T, \overline{T})$ forment un système complet d'événements et la formule des probabilités totales donne
  $$P(S) = P(S|T) \times P(T) + P(S|\overline{T}) \times P(\overline{T}).$$
- D'après les données, on a $P(T) = 0,25$ et donc $P(\overline{T}) = 0,75$. Ensuite, sachant que l'on est en possession d'un dé truqué, la probabilité d'obtenir un 6 est $0,2$ i.e. $P(S|T) = 0,2$ alors que si le dé est non truqué, la probabilité d'obtenir un 6 est évidemment $\frac{1}{6}$ i.e. $P(S|\overline{T}) = \frac{1}{6}$. Ainsi,
  $$\begin{aligned} P(S) &= 0,2 \times 0,25 + \frac{1}{6} \times 0,75 \\ &= 0,175. \end{aligned}$$

[1] Rappelons qu'un événement élémentaire ω est un élément de l'univers Ω ("obtenir le huit de carreaux") alors qu'un événement A est un sous-ensemble de l'univers Ω i.e. un ensemble d'événements élémentaires ("obtenir un carreau").

Deuxième exemple

On lance un dé parfait à 5 faces, numérotées de 1 à 5, sans limitation du nombre de lancers. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

- Calculer p_1.
- Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
- En déduire p_n pour tout entier n.

Réponse.
Pour tout entier $n \geq 1$, notons A_n l'événement "la somme obtenue est paire".

- L'événement A_1 correspond à obtenir 2 ou 4 au premier lancer, donc $p_1 = \frac{2}{5}$.
- Fixons un entier $n \geq 1$. Le système $(A_n, \overline{A}_n)$ est un système complet d'événements et d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n \times P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A}_n) \times P(\overline{A}_n).$$

En partant du principe que

  - quand on rajoute un entier pair à un entier pair, on obtient un entier pair
  - quand on rajoute un entier impair à un entier impair, on obtient un entier pair,

On a:

  - Sachant que la somme obtenue au rang n est paire, celle au rang $n+1$ le sera aussi si le $n+1$-ème lancer donne un entier pair i.e. un 2 ou un 4 et puisqu'obtenir un 2 ou un 4 se fait avec la probabilité $\frac{2}{5}$, on a
$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{2}{5}.$$
  - Sachant que la somme obtenue au rang n est impaire, celle au rang $n+1$ le sera aussi si le $n+1$-ème lancer donne un entier impair i.e. un 1, un 3 ou un 5 et puisqu'obtenir un 1, un 3 ou un 5 se fait avec la probabilité $\frac{3}{5}$, on a
$$P(A_{n+1}|\overline{A}_n) = \frac{3}{5}.$$

Puisque par définition,
$$P(A_n) = p_n \quad P(\overline{A}_n) = 1 - p_n,$$
la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{5} \times p_n + \frac{3}{5} \times (1 - p_n) \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{5} p_n. \end{aligned}$$

- La suite (p_n) est une suite "arithmético-géométrique"; on recherche alors α tel que

$$\alpha = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\alpha,$$

ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2}$. En posant $u_n = p_n - \alpha$, on a alors

$$\begin{aligned} u_n &= p_n - \alpha \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{5} p_n - \alpha \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{5} p_n - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\alpha \right) \\ &= -\frac{1}{5} (p_n - \alpha) \\ &= = -\frac{1}{5} u_n. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est géometrique de raison $-\frac{1}{5}$ et on a alors

$$u_n = \left(-\frac{1}{5} \right)^{n-1} u_1.$$

Puisque

$$u_1 = p_1 - \alpha = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10},$$

on obtient

$$\begin{aligned} p_n &= u_n + \alpha \\ &= u_n + \frac{1}{2} \\ &= \left(-\frac{1}{5} \right)^{n-1} \times \frac{-1}{10} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{10} \times (-1)^{n-1} \times \frac{1}{5^{n-1}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{(-1)^n}{10 \times 5^{n-1}} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Troisième exemple

Dans un champ, on trouve seulement trois espèces de plantes, que l'on notera A, B et C.

- 12% des plantes de l'espèce A,
- 7% de celles de l'espèce B,
- 15% de celles de l'espçe C

sont résistantes à l'herbicide commun. On sait, de plus, que 30% des plantes du champ sont de l'espèce A et 20% sont de l'espèce B et donc 50% sont de l'espèce C. On prélève une plante au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit résistante à l'herbicide commun?

Réponse.

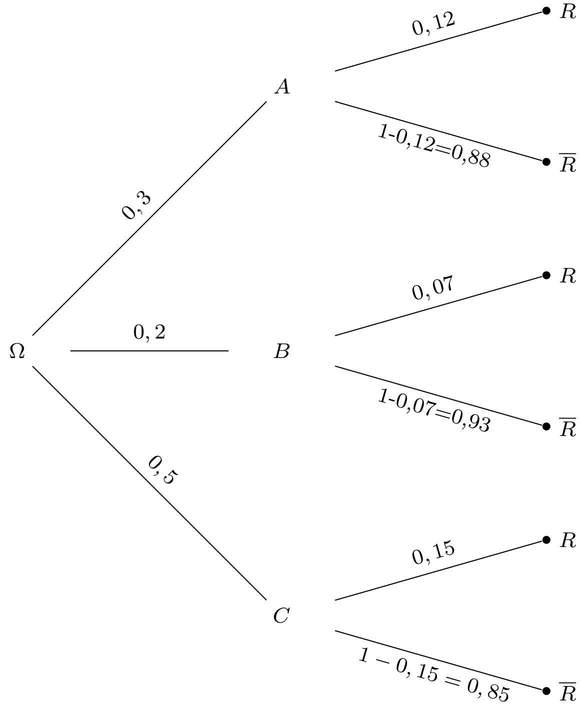
- On note :

  - A l'évènement "la plante prélevée est de l'espèce A".
  - B l'évènement "la plante prélevée est de l'espèce B"
  - C l'évènement "la plante prélevée est de l'espèce C"
  - R, l'évènement "la plante prélevée est résistante à l'herbicide commun".

  Les données de l'énoncé permettent d'écrire:

$$P(A) = 0,3 \quad P(B) = 0,2 \quad P(C) = 0,5$$
$$P(R|A) = 0,12 \quad P(R|B) = 0,07 \quad P(R|C) = 0,15.$$

  D'où l'arbre :



- Formellement, les événements (A, B, C) forment un système complet d'événements et la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|A) \times P(A) + P(R|B) \times P(B) + P(R|C) \times P(C) \\ &= 0,3 \times 0,12 + 0,2 \times 0,07 + 0,5 \times 0,15 \\ &= 0,125. \end{aligned}$$

Formule des probabilités totales dans le cas d'un univers infini

Théorème XI.3.22

- On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements lorsque:
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$ i.e. les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles,
  - $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$.

  Pour tout événement B, on a alors

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B|A_n) \times P(A_n)$$

  (en adoptant la convention $P(B|A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$). C'est la formule des *probabilités totales*.

- Plus généralement, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1$$

  (on ne suppose donc plus que la réunion de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme l'univers Ω tout entier: cette famille est appelée *système quasi-complet d'événements*), pour tout événement B, on a alors

$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B|A_n) \times P(A_n).$$

  (en adoptant la convention $P(B|A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$).

Démonstration 49

Remarques.

- En termes ensemblistes, on dit que la famille d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme une *partition* de Ω:
  - $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$
  - et les A_n sont deux à deux disjoints, c'est à dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ dès lors que $i \neq j$
  - donc lorsque tout élément ω de Ω se trouve dans un et un seul A_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Formule de Bayes

Théorème XI.3.23 ***Formule de Bayes***. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un système complet d'événements, fini ou infini, et B un événement.

- Alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,
$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$
- que l'on peut écrire aussi
$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{n=1}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)}$$
(somme finie si l'on a un système complet fini).

Démonstration 50

C'est la formule de ***probabilité des causes***: si B peut être dû à plusieurs causes possibles $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, alors $P(A_i|B)$ mesure la probabilité que, l'événement B étant réalisé, A_i en soit l'origine.

Exemple

Une urne contient deux dés. L'un est équilibré et l'autre donne systématiquement un 6. On choisit un dé dans l'urne et on le lance. On suppose que le dé lancé donne un 6; quelle est la probabilité que le dé qu'on a lancé soit équilibré?

Réponse.

- Notons A l'événement "le dé choisi est équilibré". Par hypothèse, on a
$$P(A) = P(\overline{A}) = 0,5.$$
- Notons B l'événement "le dé lancé donne un 6". On veut donc calculer $P(A|B)$.
- Par la formule de Bayes,
$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}.$$
Or
$$P(B|A) \times P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$
et par la formule des probabilités totales basée sur le système complet d'événements $(A, \overline{A})$, on a
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \times P(A) + P(B|\overline{A}) \times P(\overline{A}) \\ &= \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{12}. \end{aligned}$$
- Ainsi,
$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} \\ &= \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

4 Un regard plus abstrait

4.1 Lois abstraites sur $\mathbb{N}$

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à 6 faces; l'univers est
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
et on a évidemment
$$P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$
En observant que
$$\{1, 4\} = \{1\} \cup \{4\}$$
et que les événements $\{1\}$ et $\{4\}$ sont incompatibles, on a donc par exemple
$$P(\{1, 4\}) = P(\{1\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{3}.$$
En suivant ce principe, on peut calculer $P(A)$ pour toute partie A incluse dans Ω: il suffit d'écrire A comme réunion des différents singletons le composant et d'effectuer la somme des probabilités des singletons.

De façon évidente, ce principe s'applique quelle que soit l'expérience aléatoire en jeu lorsque l'univers Ω est fini mais aussi dans certains cas où Ω est infini et plus précisément lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, à condition de considérer des sommes de séries.

Pour résumer, considérons une expérience aléatoire pour laquelle $\Omega = \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$, comme le rang d'obtention du premier pile dans une partie de pile ou face sans limitation du nombre de lancers); on suppose avoir calculé la probabilité de tous les événements $P(\{n\})$, $n \in \mathbb{N}$. La connaissance de ces valeurs permettra donc de calculer la probabilité $P(A)$ pour toute partie A incluse dans $\mathbb{N}$: en écrivant
$$A = \{n_1, n_2, \ldots\}$$
on aura donc
$$P(A) = P(\{n_1\}) + P(\{n_2\}) + \ldots,$$
c'est à dire en fait
$$P(A) = \sum_{n\in A} P(n)$$
(pour ne pas alourdir les notations, on écrira $P(n)$ à la place de $P(\{n\})$). En particulier, toujours lorsque $\Omega = \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\mathbb{N}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \end{aligned}$$
et comme par définition d'une loi de probabilité, on a $P(\Omega) = 1$, c'est que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) = 1.$$

L'objet de la proposition suivante est d'établir la réciproque de cette observation: en dehors de toute expérience probabiliste "concrète", il est possible de définir une loi de probabilité à partir d'une formule:

Proposition XI.4.24 ***Lois abstraites sur*** $\mathbb{N}$.

- Soit P une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$p_n = P(\{n\}).$$
Alors la série $\sum_{n\geq 0} p_n$ est une série convergente à termes réels ≥ 0 de somme 1:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$
- Réciproquement, on se donne une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels ≥ 0 telle que la série $\sum_{n\geq 0} p_n$ soit convergente et de somme 1:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$
On définit alors une loi de probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant, pour toute partie A de $\mathbb{N}$:
$$P(A) = \sum_{n\in A} p_n.$$

Ainsi, la donnée d'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels permet de définir une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant, pour toute partie A de $\mathbb{N}$:
$$P(A) = \sum_{n\in A} p_n$$
si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} p_n$ est une série convergente à termes réels ≥ 0 de somme 1:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

Démonstration 51

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons
$$p_n = \frac{1}{2^{n+1}}.$$
Dans la mesure où
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 1,\end{aligned}$$
on définit bien d'une loi de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant
$$P(A) = \sum_{n\in A} P(n)$$
pour toute partie A de $\mathbb{N}$.

On peut calculer des probabilités d'événements tels que

1. $A = \{5, 6, 8\}$,
2. $B = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 11\}$,
3. C: ensemble des entiers impairs,
4. D: ensemble des entiers pairs,

en appliquant la définition
$$P(A) = \sum_{n\in A} P(n)$$
et les règles:

1. On a
$$P(A) = \sum_{n\in A} P(n) = P(5) + P(6) + P(8) = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} = \frac{13}{512}.$$
2. En s'appuyant sur la somme des termes d'une série géométrique:
$$\begin{aligned}P(B) &= \sum_{n\in B} P(n) = \sum_{n=11}^{+\infty} P(n) = \sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{11}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{11}}.\end{aligned}$$
3. Un entier impair est de la forme $2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Ainsi,
$$\begin{aligned}P(C) &= \sum_{n\in C} P(n) = \sum_{p=0}^{+\infty} P(\{2p+1\}) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{(2p+1)+1}}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p}} = \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4^p} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$
4. Puisque $D = \overline{C}$, on a $P(D) = 1 - P(C) = \frac{2}{3}$.

Autre exemple

Pour quelle valeur du réel β définit-on une loi de probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ en posant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = \frac{\beta}{3^n}\ ?$$

Réponse.

- On pose $p_n = \frac{\beta}{3^n}$.
- On doit donc avoir $\beta \geq 0$;
- la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ est convergente et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$
- La condition
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$
i.e. $\beta \times \frac{3}{2} = 1$ est donc réalisée si et seulement si $\beta = \frac{2}{3}$.

4.2 Note concernant la notion de tribu et la définition formelle d'une loi de probabilité

Cette section peut être réservée à une seconde lecture.

Considèrons une expérience aléatoire; l'univers, noté Ω, est l'ensemble constitué de toutes les réalisations possibles de cette expérience.

Rappelons qu'un événement est un sous-ensemble A de l'univers Ω et qu'un événement élémentaire est un élément ω de Ω.

On pourrait chercher à définir la probabilité d'un événement A comme étant la somme des probabilités des événements élémentaires dont A est la réunion.

- Dans le lancer d'un dé équilibré, soit A l'événement "obtenir un nombre N pair".
- Alors $A = \{2,4,6\}$ et

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N=2)+P(N=4)+P(N=6) \\ &= 3\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mais lorsque l'univers Ω est infini, ce moyen de définir la probabilité d'un événement peut ne pas avoir de sens:

- Un astéroïde est sur le point de frapper la Terre et la précision des calculs ne permet pas d'affirmer si certaines zones sont plus à risque que d'autres.
- On peut donc penser à l'équiprobabilité, mais de quoi? De chaque point de la Terre? En un sens mathématique, il y a une infinité de points sur la Terre et la probabilité que l'astéroïde tombe sur un point donné est nécessairement nulle car attribuer une même probabilité non nulle à un événement élémentaire sur un univers infini est en violation du principe selon lequel la probabilité de l'univers vaut 1.
- Il est évidemment plus pertinient de dire que la probabilité que l'astéroïde tombe sur une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

C'est la raison pour laquelle lorsque l'univers est infini, on s'intéressera moins à des événements élémentaires, qu'à des "zones" de l'univers:

- dans le cas de l'astéroïde, des "rectangles sphériques" (parties du globe comprises entre deux latitudes et deux longitudes données)
- des intervalles de temps dans les problèmes de durée de vie (d'un moteur, d'un composant électronique ...).

Formellement, ces "zones" de l'univers, qui sont donc certains sous-ensembles de l'univers, vont constituer la *tribu* $\mathcal{A}$ des événements en lesquels la probabilité sera définie.

Définition XI.4.8 ***Tribu.*** Soit Ω un ensemble. Une *tribu* sur Ω est une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω telle que:

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'ensemble $\overline{A}$ (complémentaire de A dans Ω) appartient également à $\mathcal{A}$,
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient également à $\mathcal{A}$ (stabilité par réunion dénombrable).

Ces axiomes sont taillés sur mesure pour satisfaire aux axiomes d'une loi de probabilité:

- l'univers Ω possède une probabilité,
- possibilité de considérer la probabilité de l'événement contraire,
- possibilité de considérer la réunion d'événements (et donc aussi l'intersection via un passage par le complémentaire).

Exemples de tribus

Soit Ω un ensemble.

- L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω est évidemment une tribu.
- L'ensemble $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (la vérification immédiate).
- Si $\Omega = \{a,b,c,d\}$, alors $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d\}, \Omega\}$ est une tribu: on voit bien que le complémentaire de tout membre de cette tribu l'est aussi et la propriété de réunion est immédiate.
- Si $\Omega = \{a,b,c,d\}$, alors $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \Omega\}$ n'est pas une tribu: on voit bien que le complémentaire de tout membre de cette tribu l'est aussi mais la propriété de réunion fait défaut : $\{a\}\cup\{b\} = \{a,b\}$ n'appartient pas à la tribu.

Proposition XI.4.25 Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Soit $A_1, \ldots, A_N$ des membres de la tribu; alors $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{N} A_n$ appartiennent à $\mathcal{A}$ (stabilité par réunion et par intersection finies).
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$; alors l'intersection $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient également à $\mathcal{A}$ (stabilité par intersection dénombrable).

Démonstration 52

La définition formelle d'un espace probabilisé est alors la suivante:

Définition XI.4.9 Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$, dont les éléments sont appelés des *événements*.
On appelle probabilité sur le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ une application P définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans $[0,1]$ telle que:

- $P(\Omega) = 1$,
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, c'est à dire telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

- On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Chapitre XII

Réduction (deuxième année)

1 Matrices semblables

1.1 Position du problème et rappels

La réduction, c'est l'art de trouver la meilleure matrice représentant un endomorphisme ("meilleure" étant évidemment sujet à appréciation) et donc de trouver la meilleure base représentant cet endomorphisme.
La réduction des matrices tourne autour de la même problématique, même si on ne parle évidemment pas de base représentant une matrice; la notion appropriée pour les matrices est la notion de "matrices semblables".
Ces deux notions de réduction sont intimement liées, puisqu'à tout endomorphisme est lié une matrice et inversement et la clé de voute de tout l'édifice "réduction" repose sur la notion fondamentale de repésentation matricielle dans une base donnée d'une application linéaire.

Rappel: représentation matricielle

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 (par exemple), $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ une base de E, et u un endomorphisme de E. Dire que

$$T = \begin{pmatrix} a & \dots & \dots \\ b & \dots & \dots \\ c & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

est la matrice de u dans $\mathcal{B}$ signifie que la première colonne de T "code dans $\mathcal{B}$ " l'image $u(\vec{v}_1)$ du premier vecteur de $\mathcal{B}$, c'est à dire $u(\vec{v}_1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$ et de même pour les deuxième et troisième colonnes, qui codent $u(\vec{v}_2)$ et $u(\vec{v}_3)$.

Plus généralement, soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice carrée $n \times n$ obtenue en écrivant dans sa première colonne les composantes de $u(\vec{e}_1)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$u(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n \rightsquigarrow \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}}^{\text{1ère colonne}}$$

c'est à dire le "codage dans $\mathcal{B}$" de l'image $u(\vec{e}_1)$ du premier vecteur de $\mathcal{B}$, et ainsi de suite: dans sa $n^{\text{ième}}$ colonne les composantes de $u(\vec{e}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\text{Composantes de } u(\vec{e}_1) \text{ dans } \mathcal{B}} & \boxed{\text{Composantes de } u(\vec{e}_2) \text{ dans } \mathcal{B}} & \dots & \boxed{\text{Composantes de } u(\vec{e}_n) \text{ dans } \mathcal{B}} \end{pmatrix}.$$

Endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée

Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M est l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ défini de la façon suivante:

- pour tout vecteur $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$, on a $u(\vec{v}) = (y_1, \dots, y_n)$ avec
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
- On a donc
$$u(x_1, \dots, x_n) = \big(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n\big).$$

Par exemple, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

et soit $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Alors

$$M \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc $f(\vec{v}) = (4, 3, 3)$.

Remarques. On a donc

$$u(1, 0, \dots, 0) = (a_{11}, \dots, a_{n1})$$

si bien que la première colonne "code" effectivement dans la base canonique le vecteur $u(\vec{e}_1)$ où $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et ainsi de suite pour les autres colonnes.

Convention. On dit aussi que M et u sont associés dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1.2 Matrices semblables: 1ère caractérisation

Définition XII.1.1 Deux matrices carrées M et N à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont dites semblables (dans $\mathbb{K}$) s'il existe une matrice inversible P (à coefficients dans $\mathbb{K}$) telle que

$$N = P^{-1}MP.$$

Intérêt dans le calcul des puissances

Proposition XII.1.1 Si M et N sont semblables avec

$$N = P^{-1}MP$$

alors pour tout entier r

$$N^r = P^{-1}M^rP.$$

En effet,

$$\begin{aligned} N^2 &= (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) = P^{-1}M(PP^{-1})MP = P^{-1}MI_nMP \\ &= P^{-1}M^2P \\ N^3 &= N^2N = (P^{-1}M^2P)(P^{-1}MP) = P^{-1}M^2(PP^{-1})MP = (P^{-1}M^2I_nMP) \\ &= P^{-1}M^3P \end{aligned}$$

et ainsi de suite (on peut faire une démonstration par récurrence).

Cas particulier important de la matrice I_n, de la matrice nulle et plus généralement de la matrice kI_n.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que M soit semblable à la matrice kI_n. Alors M *est* la matrice kI_n. En effet, s'il existe une matrice P inversible telle que $M = P^{-1}kI_nP$, alors

$$\begin{aligned} M &= kP^{-1}I_nP \\ &= kP^{-1}P \\ &= kI_n. \end{aligned}$$

Ainsi,

Proposition XII.1.2

- si M est semblable à la matrice nulle, alors $M = 0$,
- si M est semblable à I_n, alors $M = I_n$,
- et plus généralement si M est semblable à kI_n, alors $M = kI_n$.

Propriétés partagées par un couple de matrices semblables

Théorème XII.1.3

- Deux matrices semblables ont la même trace (réciproque archi-fausse).
- Deux matrices semblables ont le même déterminant (réciproque archi-fausse).
- Toute matrice semblable à une matrice inversible est elle-même inversible; toute matrice semblable à une matrice non inversible est elle-même non inversible.
- Deux matrices semblables ont le même rang (réciproque archi-fausse).

Démonstration. Il existe une matrice inversible P telle que $N = P^{-1}MP$, et alors:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(N) &= \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) \\ &= \mathrm{Tr}((P^{-1}M)P) \\ &= \mathrm{Tr}(P(P^{-1}M)) \text{ (on a toujours } \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)) \\ &= \mathrm{Tr}((PP^{-1}M) \\ &= \mathrm{Tr}(I_nM) \\ &= \mathrm{Tr}(M) \\ \det(N) &= \det(P^{-1}MP) \\ &= \det(P^{-1}) \times \det(M) \times \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \times \det(M) \times \det(P) \\ &= \det(M). \end{aligned}$$

En conséquence, $\det(N) \neq 0 \iff \det(M) \neq 0$ et donc N est inversible si et seulement si M est inversible. Le dernier point sera démontré plus loin.

La réciproque est grossièrement fausse! Deux matrices peuvent fort bien avoir la même trace et ne pas être semblables!

Par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a une trace nulle, tout comme la matrice nulle, mais M n'est pas semblable à la matrice nulle!

1.3 Matrices semblables: 2ème caractérisation; trace d'un endomorphisme

Cette définition est fondamentale.

Théorème XII.1.4 Deux matrices carrées M et N à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont semblables lorsque, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M, il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ telle que que u soit représenté par la matrice N dans la base $\mathcal{B}'$.

En notant alors P la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base $\mathcal{B}'$, les formules de changement de base donnent $N = P^{-1}MP$.

Remarque.

- On dit aussi que deux matrices sont semblables dès lors qu'elles représentent, chacune dans une certaine base, un même endomorphisme.
- la raison pour laquelle deux matrices semblables ont le même rang, à savoir le rang de l'endomorphisme que ces deux matrices représentent.
- C'est la caractérisation généralement adoptée pour prouver concrètement que deux matrices données sont semblables (typiquement une matrice 3×3 "pleine" et une matrice triangulaire), comme dans les exemples suivants:

Premier exemple

Démontrons que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

- Notons $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M.
- Il s'agit de trouver une base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle u est représenté par la matrice N.
- *Ce point est crucial* Mais que veut dire "u est représenté par N dans la base $\mathcal{B}'$"? D'après la théorie de la représentation matricielle/codage, cela signifie que:
  - la première colonne de N représente le codage dans $\mathcal{B}'$ de $u(\vec{v}_1)$, premier vecteur de $\mathcal{B}'$ et qu'en conséquence,
  $$\begin{aligned} u(\vec{v}_1) &= 0 \times \vec{v}_1 + 0 \times \vec{v}_2 \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$
  - et la deuxième colonne de N représente le codage dans $\mathcal{B}'$ de $u(\vec{v}_2)$, deuxième vecteur de $\mathcal{B}'$ et qu'en conséquence,
  $$\begin{aligned} u(\vec{v}_2) &= 0 \times \vec{v}_1 + 1 \times \vec{v}_2 \\ &= \vec{v}_2. \end{aligned}$$

  Il s'agit donc de trouver une base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que
  $$\begin{cases} u(\vec{v}_1) = \vec{0} \\ u(\vec{v}_2) = \vec{v}_2. \end{cases}$$
- Mais dire que u et M sont associés dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ signifie, toujours d'après la théorie de la représentation matricielle/codage:
  $$\begin{aligned} u(\vec{\imath}) &= 1 \times \vec{\imath} + 0 \times \vec{\jmath} \quad \text{(première colonne de } M\text{)} \\ &= \vec{\imath} \\ u(\vec{\jmath}) &= 0 \times \vec{\imath} + 0 \times \vec{\jmath} \quad \text{(deuxième colonne de } M\text{)} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$
  Ainsi
  $$\begin{cases} u(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \\ u(\vec{\jmath}) = \vec{0} \end{cases}$$
  que l'on peut évidemment écrire
  $$\begin{cases} u(\vec{\jmath}) = \vec{0} \\ u(\vec{\imath}) = \vec{\imath}, \end{cases}$$
  ce qui démontre que la base $\mathcal{B}' = (\vec{\jmath}, \vec{\imath})$ fait le job!
- En conclusion, u est représenté
  - par la matrice M dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$,
  - par la matrice N dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{\jmath}, \vec{\imath})$,

  ce qui démontre que les matrices M et N sont semblables et on a
  $$N = P^{-1} M P$$
  où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $\mathcal{B}' = (\vec{\jmath}, \vec{\imath})$, c'est à dire
  $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième exemple

Démontrons que les matrices
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
sont semblables.

- Notons $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M.
- Il s'agit de trouver une base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle u est représenté par la matrice N.
- *Ce point est crucial* Mais que veut dire "u est représenté par N dans la base $\mathcal{B}'$"? D'après la théorie de la représentation matricielle/codage, cela signifie que:
  - la première colonne de N représente le codage dans $\mathcal{B}'$ de $u(\vec{v}_1)$, premier vecteur de $\mathcal{B}'$ et qu'en conséquence,
  $$\begin{aligned} u(\vec{v}_1) &= 2 \times \vec{v}_1 + 0 \times \vec{v}_2 \\ &= 2\vec{v}_1 \end{aligned}$$
  - et la deuxième colonne de N représente le codage dans $\mathcal{B}'$ de $u(\vec{v}_2)$, deuxième vecteur de $\mathcal{B}'$ et qu'en conséquence,
  $$\begin{aligned} u(\vec{v}_2) &= 1 \times \vec{v}_1 + 2 \times \vec{v}_2 \\ &= \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2. \end{aligned}$$

  Il s'agit donc de trouver une base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que
  $$\begin{cases} u(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1 \\ u(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2. \end{cases}$$
- Trouver un vecteur $\vec{v}_1$ tel que $u(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1$ est immédiat. En effet, dire que u et M sont associés dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ signifie, toujours d'après la théorie de la représentation matricielle/codage:
  $$\begin{aligned} u(\vec{\imath}) &= 2 \times \vec{\imath} + 0 \times \vec{\jmath} \quad \text{(première colonne de } M\text{)} \\ &= 2\vec{\imath}. \end{aligned}$$
  On posera donc
  $$\vec{v}_1 = \vec{\imath}.$$
- On est donc à présent à la recherche d'un vecteur $\vec{v}_2$ tel que
  $$\begin{aligned} u(\vec{v}_2) &= \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ &= \vec{\imath} + 2\vec{v}_2. \end{aligned}$$
  - Posons
  $$\vec{v}_2 = (a, b).$$
  Rappel capital. On a
  $$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= (a, b) \\ &= a(1,0) + b(0,1) \\ &= a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \end{aligned}$$
  de sorte que $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est la matrice colonne de $\vec{v}_2$ dans la base canonique. On calcule
  $$\begin{aligned} M \times V &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ 2b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par définition du fait que M et u sont associés dans la base canonique,

$$u(\vec{v}_2) = (2a + 3b, 2b).$$

Ainsi, la contrainte

$$u(\vec{v}_2) = \vec{\imath} + 2\vec{v}_2$$

s'écrit

$$\begin{aligned}(2a+3b, 2b) &= (1,0) + (2a, 2b) \\ &= (1+2a, 2b)\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} 2a+3b = 1+2a \\ 2b = 0+2b, \end{cases}$$

système équivalent à

$$\{\ 3b = 1$$

i.e. $b = \frac{1}{3}$ et aucune contrainte sur a.

– Prenons par exemple $a = 0$[1] et donc

$$\vec{v}_2 = \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

– Il est alors clair que $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puisque le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

valant $\frac{1}{3}$ est non nul.

– Ainsi, $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ dont les vecteurs satisfont les contraintes

$$\begin{cases} u(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1 \\ \\ u(\vec{v}_2) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \end{cases}$$

et qui traduisent le fait que u est représenté par la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- En conclusion, u est représenté
  – par la matrice M dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$,
  – par la matrice N dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ avec

$$\vec{v}_1 = (1,0), \quad \vec{v}_2 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

ce qui démontre que les matrices M et N sont semblables et on a

$$N = P^{-1}MP$$

où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

[1] Il faut faire un choix; tout choix est honorable, $a = -2$ aurait fait l'affaire mais il est préférable d'avoir le plus de 0 possible dans le but de créer une matrice de passage P comportant le plus de 0 possible: P^{-1}, si son expression est nécessaire, sera plus facile à calculer.

Comme conséquence du fait que deux matrices semblables ont la même trace, on peut définir sans ambiguïté la notion de trace d'un endomorphisme:

Définition XII.1.2 ***Trace d'un endomorphisme.*** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On définit la trace $\operatorname{tr} u$ de u comme la trace de toute matrice représentant u.

Remarque: il n'y a effectivement aucune ambiguïté dans cette définition: si Unetelle choisit la matrice N pour représenter u et Untel choisit la matrice M pour représenter u, alors M et N vont être semblables (théorème précédent) et auront donc même trace, ce qui met donc tout le monde d'accord pour définir la trace de u.

2 Polynôme caractéristique

2.1 Définition

Définition XII.2.3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son polynôme caractéristique $\chi_M(\lambda)$ est le déterminant de $\lambda I_n - M$:

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M).$$

- C'est un polynôme de degré n, de terme dominant λ^n.
- Les racines (dans $\mathbb{K}$) du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de M.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Son polynôme caractéristique $\chi_u(\lambda)$ est le déterminant de $\lambda \mathrm{Id}_E - u$:

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u).$$

- C'est un polynôme de degré n, de terme dominant λ^n.
- Les racines (dans $\mathbb{K}$) du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de u.

Concrètement, si M la matrice de u dans une base quelconque de E, le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de M:

$$\chi_u(\lambda) = \chi_M(\lambda).$$

Démonstration.

- On démontre que χ_M est un polynôme unitaire de degré n par développement suivant une colonne et par récurrence sur n (inintéressant).

- Remarquons que dans toute base de E, $\lambda \mathrm{Id}_E$ est représenté par λI_n et donc $\lambda \mathrm{Id}_E - u$ est représenté par $\lambda I_n - M$ et puisque deux matrices semblables ont même déterminant, c'est la raison pour laquelle $\chi_u(\lambda) = \chi_M(\lambda)$ et il suffit alors de démontrer pour u le résultat concernant les valeurs propres.

- Étant en dimension finie,

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = 0 &\iff \lambda \mathrm{Id}_E - u \text{ est non bijectif}\\
&\iff \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id}_E - u) \text{ est non réduit à } \{\vec{0}\}\\
&\iff \text{il existe } \vec{x} \neq 0 \text{ dans } \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id}_E - u)\\
&\iff \text{il existe } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ tel que } (\lambda \mathrm{Id}_E - u)(\vec{x}) = \vec{0}\\
&\iff \text{il existe } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ tel que } \lambda\vec{x} - u(\vec{x}) = \vec{0}\\
&\iff \text{il existe } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ tel que } u(\vec{x}) = \lambda\vec{x},
\end{aligned}$$

donc si et seulement si λ est une valeur propre de u.

Exemples complets de recherche d'éléments propres

- Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$u : (x, y) \mapsto (-2x + 2y, 3x - y)$$

et en déduire ses valeurs propres et une base de chacun de ses sous-espaces propres.

  – La matrice de u dans la base canonique, obtenue en suivant le protocole de calcul des images $u(\vec{\imath})$ et $u(\vec{\jmath})$, est

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Son polynôme caractéristique χ_u est donc

$$\begin{aligned}
\chi_u(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - M)\\
&= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}\\
&= \lambda^2 + 3\lambda - 4.
\end{aligned}$$

  Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u, à savoir -4 et 1 (après calcul du discriminant).

  – Déterminons une base du sous-espace propre associé à la valeur propre -4 et d'abord un rappel:

  > Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme u est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ (il est donc constitué, avec le vecteur nul, de tous les vecteurs propres associés à λ).
  >
  > Puisque
  >
  > $$\begin{aligned} u(\vec{v}) = \lambda\vec{v} &\iff u(\vec{v}) - \lambda\vec{v} = \vec{0}\\ &\iff (u - \lambda \mathrm{Id})(\vec{v}) = 0, \end{aligned}$$
  >
  > le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est
  >
  > $$\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}).$$

  Soit $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(u + 4\mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v}) = -4\vec{v}\\
&\iff \begin{cases} -2x + 2y = -4x \\ 3x - y = -4y \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}\\
&\iff x + y = 0\\
&\iff \vec{v} = (x, -x)\\
&\iff \vec{v} = x(1, -1)
\end{aligned}$$

  ce qui démontre que

$$\mathrm{Ker}\,(u + 4\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1, -1).$$

  – Déterminons une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
  Soit $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v}) = \vec{v}\\
&\iff \begin{cases} -2x + 2y = x \\ 3x - y = y \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}\\
&\iff 3x - 2y = 0\\
&\iff \vec{v} = \left(x, \frac{3}{2}x\right)\\
&\iff \vec{v} = x\left(1, \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

  ce qui démontre que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,(u + 4\mathrm{Id}) &= \mathrm{Vect}\left(1, \frac{3}{2}\right)\\
&= \mathrm{Vect}(2, 3).
\end{aligned}$$

- Même question pour l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

  – Le polynôme caractéristique χ_u de u est donc

$$\begin{aligned}
\chi_u(\lambda) &= \det(M - \lambda I_2)\\
&= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda - 1 & -1 \\ 3 & -2 & \lambda \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

En effectuant $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$, on a

$$\chi_u(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 3 & \lambda-2 & -1 \\ 3 & \lambda-2 & \lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 3 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

ce qui donne par développement suivant C_2:

$$\chi_u(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)^2.$$

Les valeurs propres de u sont donc 2 et -1. Remarquons que -1 est une racine double du polynôme caractéristique alors que 2 est une racine simple.

– Déterminons une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 2. Soit $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dans la mesure où:
  - $*$ u et M sont canoniquement associés,
  - $*$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la matrice colonne de $\vec{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
  - $*$ et que

$$\begin{aligned} M \times X &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x-y+z \\ -3x+y+z \\ -3x+2y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v}) = 2\vec{v} \\ &\iff MX = 2X \\ &\iff \begin{cases} -x-y+z = 2x \\ -3x+y+z = 2y \\ -3x+2y = 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3x-y+z = 0 \\ -3x-y+z = 0 \\ -3x+2y-2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3x-y+z = 0 \\ -3x+2y-2z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$L_2 - L_1$ conduit à $z = y$; reporté dans L_1, on obtient $x = 0$ si bien que

$$\begin{aligned} \vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}) &\iff \vec{v} = (0, y, y) \\ &\iff \vec{v} = y(0, 1, 1), \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(0, 1, 1).$$

– Déterminons une base du sous-espace propre associé à la valeur propre -1. Soit $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} \vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v}) = -\vec{v} \\ &\iff MX = -X \\ &\iff \begin{cases} -x-y+z = -x \\ -3x+y+z = -y \\ -3x+2y = -z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -y+z = 0 \\ -3x+2y+z = 0 \\ -3x+2y+z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -y+z = 0 \\ -3x+2y+z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = y \\ -3x+3y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = y \\ x = y \end{cases} \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}) &\iff \vec{v} = (y, y, y) \\ &\iff \vec{v} = y(1, 1, 1), \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1, 1, 1).$$

Remarques.

- Le choix de la base de l'espace, et donc de la matrice représentant u, n'a pas d'influence: on trouvera le même polynôme. C'est une propriété remarquable, due au fait que deux matrices semblables (qui représentent un même endomorphisme) ont le même polynôme caractéristique.
- On tentera, dans la mesure du possible, d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes du déterminant pour préparer au mieux son développement.

Cas d'une matrice diagonale ou triangulaire

Théorème XII.2.5 Soit

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & & \textit{termes} \\ & \ddots & \textit{qcq} \\ \Large 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

alors le polynôme caractéristique de D comme celui de T est:

$$\chi(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn}).$$

Démonstration 53

On en déduit donc le très important résultat suivant.

Théorème XII.2.6 Les valeurs propres d'une matrice diagonale ou d'une matrice triangulaire sont les coefficients situés sur sa diagonale.

2.2 Multiplicité

Rappel: multiplicité d'une racine d'un polynôme

- Une racine a du polynôme P est dite d'ordre de multiplicité α ($\alpha \in \mathbb{N}$) lorsque $(X-a)^\alpha$ divise P et $(X-a)^{\alpha+1}$ ne divise pas P, c'est à dire lorsque l'on peut écrire
$$P(X) = (X-a)^\alpha Q(X)$$
où Q est un polynôme tel que $Q(a) \neq 0$.
- Une racine a du polynôme P est de multiplicité *au moins égale à* α ($\alpha \in \mathbb{N}$) lorsque $(X-a)^\alpha$ divise P, c'est à dire lorsque l'on peut écrire
$$P(X) = (X-a)^\alpha Q(X)$$
où Q est un polynôme.

Exemples.

- Pour le polynôme $P(X) = (X-3)^3(X+1)(X-1)^2$, 3 est une racine de multiplicité 3 (on dit aussi une racine triple), -1 est une racine de multiplicité 1 (on dit aussi une racine simple) et 1 est une racine de multiplicité 2 (racine double).
- Soit Q un polynôme et $P = (X-1)^2Q(X)$. Alors 1 est une racine de multiplicié au moins égale à 2 (au moins, car 1 pourrait être une racine de Q, auquel cas $Q(X)$ serait au moins factorisable par $(X-1)$).

Multiplicité d'une valeur propre

Définition XII.2.4 Soit M une matrice carrée ou u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et λ_0 une valeur propre de M ou de u.
On appelle multiplicité de λ_0 sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de M ou de u.

Remarques.

- Une valeur propre simple est une valeur propre de multiplicité 1. Par exemple, si une matrice 3×3 posséde trois valeurs propres distinctes, ces valeurs propres sont simples.
- Une valeur propre double est une valeur propre de multiplicité 2.

Proposition XII.2.7 Soit T une matrice triangulaire ou D une matrice diagonale, dont on sait que ses valeurs propres sont les coefficients situés sur sa diagonale.
La multiplicité d'une valeur propre d'une telle matrice est alors le nombre de fois que cette valeur propre apparaît sur la diagonale.

Démonstration 54

Par exemple, les valeurs propres de la matrice triangulaire
$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
sont 3, -1 et 2 et leur multiplicité respective est 2, 1 et 1.

Dimension d'un sous-espace propre et multiplicité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

Théorème XII.2.8

- Soit λ_0 une valeur propre de l'endomorphisme u (ou d'une matrice carrée M), m sa multiplicité et d la dimension du sous-espace propre associé à λ_0. Alors
$$d \leq m.$$
- *En particulier:* si λ_0 est une valeur propre *simple* de l'endomorphisme u (ou d'une matrice carrée M), alors son sous-espace propre associé est une *droite vectorielle*.

Démonstration 55

Par exemple, si λ_0 est une valeur propre double, alors son sous-espace propre associé est de dimension 2 ou 1 i.e. un plan ou une droite, à voir bien entendu au cas par cas.

3 Diagonalisation

3.1 Définitions et exemples fondamentaux

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

Théorème XII.3.9

- L'endomorphisme u est diagonalisable lorsque E possède une base constituée de vecteurs propres pour u. Dans une telle base, la matrice de u est alors diagonale.
- Ou bien, ce qui est strictement équivalent, un endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale; les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont alors des vecteurs propres pour u.

En effet, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que
$$u(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \dots, u(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n,$$
ce qui s'écrit aussi
$$\begin{array}{rcl} u(\vec{e}_1) & = & \lambda_1 \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 + \dots + 0 \times \vec{e}_n \\ u(\vec{e}_2) & = & 0 \times \vec{e}_1 + \lambda_2 \times \vec{e}_2 + \dots + 0 \times \vec{e}_n \\ \dots & & \dots \\ u(\vec{e}_n) & = & 0 \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \times \vec{e}_n \end{array}$$

et c'est pourquoi ("protocole de codage") la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base dans laquelle la matrice de u est du type D ci-dessus, alors on voit que

$$\begin{array}{rcl} u(\vec{e}_1) & = & \lambda_1 \vec{e}_1 \\ \dots & & \dots \\ u(\vec{e}_n) & = & \lambda_n \vec{e}_n \end{array}$$

et les vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sont effectivement propres, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Premier exemple

On reprend (cf. ci-dessus) l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a vu que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sp}(u) & = & \{2, -1\} \\ \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}) & = & \mathrm{Vect}(0, 1, 1) \\ \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}) & = & \mathrm{Vect}(1, 1, 1). \end{array}$$

Peut-on créer une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de u et donc en puisant dans ces deux droites? Bien sûr que non, puisque de ces deux vecteurs appartiendraient nécessairement à une même droite vectorielle et ce serait donc mort pour créer une famille libre de trois vecteurs. On en conclut que u n'est pas diagonalisable.

Deuxième exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

- Le polynôme caractéristique de u est $\lambda^2 + \lambda - 6$ dont les racines sont 2 et -3. Les valeurs propres de u sont donc 2 et -3.
- Pour trouver le sous-espace propre associé à la valeur propre 2, c'est à dire $\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id})$, on recherche les vecteurs $\vec{v} = (x, y)$ tels que $u(\vec{v}) = 2\vec{v}$; puisque M est le "mode d'emploi de u", on calcule
$$MX = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$$
et c'est pourquoi
$$u(\vec{v}) = (x + 2y, 2x - 2y)$$
et alors
$$u(\vec{v}) = 2\vec{v} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 2x \\ 2x - 2y & = & 2y. \end{array} \right.$$
On voit que ce système équivaut à l'égalité
$$x - 2y = 0.$$
Donc
$$\vec{v} = (x, y) \in \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id}) \iff \vec{v} = (2y, y) \iff \vec{v} = y(2, 1).$$
On en déduit donc que $\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{Id})$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{v}_1 = (2, 1)$.
- Par un calcul similaire, $\mathrm{Ker}\,(u + 3\mathrm{Id})$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{v}_2 = (-3, 1)$.
- Il est clair que les vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ sont linéairement indépendants et constituent donc ***une base de*** $\mathbb{R}^2$, constituée de vecteurs propres pour u.
- On en déduit que u est diagonalisable.
- De plus, puisque
$$\begin{array}{rcl} u(\vec{v}_1) & = & 2\vec{v}_1 \\ & = & 2\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 \\ u(\vec{v}_2) & = & -3\vec{v}_2 \\ & = & 0\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2. \end{array}$$
La matrice de u dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est donc
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$
- *Remarque.* Notons
$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
la matrice de passage de la base canonique à la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$; les formules de changement de base donnent
$$D = P^{-1} M P$$
et en conséquence, M est semblable à une matrice diagonale, ce qui va conduire à la définition ci-dessous.

Matrice diagonalisable: définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition XII.3.5 La matrice carrée M est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ (on dit aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) lorsque M est semblable dans $\mathbb{K}$ à une matrice diagonale, donc lorsqu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P, toutes deux à coefficients dans $\mathbb{K}$, telles que

$$D = P^{-1} M P.$$

Un tout premier exemple, complètement artificiel.

- Considérons les matrices
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
qui est inversible puisque $\det(P) = 3$. Un calcul facile donne
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
- Posons et calculons
$$\begin{array}{rcl} M & = & PDP^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$
Dans la mesure où
$$M = PDP^{-1} \implies D = P^{-1} M P,$$
On en déduit que la matrice M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, semblable à la matrice diagonale D.

Le lien suivant, entre endomorphisme diagonalisable et matrice diagonalisable, est assez évident d'après les formules de changement de bases.

Théorème XII.3.10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.

- Alors M est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si u est diagonalisable
- et en cas de diagonalisation, si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres pour u et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, la matrice
$$D = P^{-1}MP$$
est diagonale, semblable à M.

Démonstration 56

On en déduit cette autre caractérisation de la diagonalisation d'une matrice, similaire à celle d'un endomorphisme:

Théorème XII.3.11 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs (colonnes) propres de M.

Démonstration 57

3.2 Comment prouver qu'un endomorphisme est diagonalisable? Première caractérisation

Le théorème suivant a surtout une portée théorique:

Proposition XII.3.12 Soit un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les différentes valeurs propres d'un endomorphisme u de l'espace E, et
$$E_1 = \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id}), \dots, E_p = \operatorname{Ker}(u - \lambda_p \mathrm{Id})$$
les différents sous-espaces propres correspondants. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

- u est diagonalisable,
- l'espace E est la somme (directe) des sous-espaces propres de u: $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Démonstration 58

Pour un endomorphisme u "concret" (typiquement dans $\mathbb{R}^3$, u étant déterminé par sa matrice dans la base canonique), on utilisera surtout le théorème suivant.

Théorème XII.3.13 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les différentes valeurs propres de u.

- Soit $d_1 = \dim\left(\operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id})\right), \dots, d_p = \dim\left(\operatorname{Ker}(u - \lambda_p \mathrm{Id})\right)$ les dimensions des sous-espaces propres associés.
- Alors u est diagonalisable si et seulement si $d_1 + \cdots + d_p = \dim(E)$.
- Si cette condition est réalisée, soit
  - $\mathcal{B}_1 = (e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1})$ une base de $\operatorname{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id})$, ...
  - $\mathcal{B}_p = (e_{p,1}, \dots, e_{p,d_p})$ une base de $\operatorname{Ker}(u - \lambda_p \mathrm{Id})$.

  Alors
  $$\mathcal{B} = \left(e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,d_p}\right)$$
  est une base de l'espace constituée de vecteurs propres et la matrice D de u dans cette base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale
  $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_p & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$
  $$\underbrace{\qquad\qquad}_{\lambda_1 \text{ apparaît } d_1 \text{ fois}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\lambda_p \text{ apparaît } d_p \text{ fois}}$$

Démonstration 59

Remarque. La diagonale de cette matrice est donc constituée des valeurs propres de u, chacune apparaissant un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé et donc un nombre de fois égal à sa multiplicité (cf. théorème plus bas).

Un tout premier exemple

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 6 \\ -3 & -4 & 6 \\ -3 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$
est-il diagonalisable?

- On a
$$\chi_u(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 6 & -6 \\ 3 & \lambda+4 & -6 \\ 3 & 6 & \lambda-8 \end{vmatrix}.$$
$L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$ donne
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 6 & -6 \\ 0 & \lambda-2 & -\lambda+2 \\ 3 & 6 & \lambda-8 \end{vmatrix}$$
et $C_3 \longleftarrow C_2 + C_3$ donne
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 6 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

et le développement par rapport à L_2 donne

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

- Ainsi, les valeurs propres de u sont 2 (double) et -1 (simple).
- Recherchons une base de $\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})$. Soit $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Dans la mesure où:
  - u et A sont canoniquement associés,
  - $V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est la matrice colonne de $\vec{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
  - et que

$$\begin{aligned} A\times V &= \begin{pmatrix}-1&-6&6\\-3&-4&6\\-3&-6&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-x-6y+6z\\-3x-4y+6z\\-3x-6y+8z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

on a

$$u(\vec{v}) = (-x-6y+6z, -3x-4y+6z, -3x-6y+8z)$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned}\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v})-2\vec{v}=\vec{0}\\ &\iff (-x-6y+6z,-3x-4y+6z,-3x-6y+8z)-2(x,y,z)=(0,0,0)\\ &\iff (-3x-6y+6z,-3x-6y+6z,-3x-6y+6z)=(0,0,0)\\ &\iff -3x-6y+6z=0\\ &\iff -x-2y+2z=0\\ &\iff x=-2y+2z\\ &\iff \vec{v}=(-2y+2z,y,z)\\ &\iff \vec{v}=y(-2,1,0)+z(2,0,1)\\ &\iff \vec{v}\in\mathrm{Vect}\big((-2,1,0),(2,0,1)\big),\end{aligned}$$

ce qui met en évidence que

$$\big((-2,1,0),(2,0,1)\big)$$

est une base de $\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})$ et donc que $\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})$ est de dimension 2.
- Ensuite,

$$\begin{aligned}\vec{v}\in\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}\\ &\iff (-x-6y+6z,-3x-4y+6z,-3x-6y+8z)+(x,y,z)=(0,0,0)\\ &\iff (-6y+6z,-3x-3y+6z,-3x-6y+9z)=(0,0,0)\\ &\iff \begin{cases}-6y+6z=0\\-3x-3y+6z=0\\-3x-6y+9z=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=z\\x=z\\x=z=0\end{cases}\\ &\iff \vec{v}=(z,z,z)\\ &\iff \vec{v}=z(1,1,1)\\ &\iff \vec{v}\in\mathrm{Vect}(1,1,1)\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id})$ est de dimension 1.

- Ainsi

$$\begin{aligned}\dim\big(\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}\,(u+\mathrm{Id})\big) &= 3\\ &= \dim(\mathbb{R}^3)\end{aligned}$$

et on en déduit que u est diagonalisable.
- Enfin,

$$\mathcal{B}=\big((-2,1,0),(2,0,1),(1,1,1)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres pour u et u est représenté par la matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

dans cette base.

Autre exemple

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

est-il diagonalisable?

- On a

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\-2&\lambda-1&1\\-2&1&\lambda-1\end{vmatrix}.$$

$L_2\longleftarrow L_2-L_3$ donne

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\0&\lambda-2&2-\lambda\\-2&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

et $C_3\longleftarrow C_2+C_3$ donne

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\0&\lambda-2&0\\-2&1&\lambda\end{vmatrix}.$$

Le développement par rapport à L_2 donne

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-2&\lambda\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2)\\ &= (\lambda-2)^2(\lambda+1).\end{aligned}$$

- Ainsi, les valeurs propres de u sont 2 (double) et -1 (simple).
- Recherchons une base de $\mathrm{Ker}\,(u-2\mathrm{Id})$. Soit $\vec{v}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Dans la mesure où:
  - u et A sont canoniquement associés,
  - $V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est la matrice colonne de $\vec{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
  - et que

$$\begin{aligned}A\times V &= \begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x+2y-z\\2x+y-z\\2x-y+z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

on a

$$u(\vec{v}) = (x+2y-z, 2x+y-z, 2x-y+z)$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \operatorname{Ker}(u-2\mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v}) - 2\vec{v} = \vec{0}\\
&\iff (x+2y-z, 2x+y-z, 2x-y+z) - 2(x,y,z) = (0,0,0)\\
&\iff (-x+2y-z, 2x-y-z, 2x-y-z) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} -x+2y-z=0\\ 2x-y-z=0\\ 2x-y-z=0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -x+2y-z=0\\ 2x-y-z=0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$L_2 - L_1$ conduit à $x = z$; reporté dans L_1, on obtient $y = z$ si bien que

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \operatorname{Ker}(u-2\mathrm{Id}) &\iff \vec{v} = (z,z,z)\\
&\iff \vec{v} = z(1,1,1)\\
&\iff \vec{v} \in \mathrm{Vect}(1,1,1),
\end{aligned}$$

ce qui met en évidence que $\operatorname{Ker}(u-2\mathrm{Id})$ est de dimension 1.

- Ensuite,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}) &\iff u(\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}\\
&\iff (x+2y-z, 2x+y-z, 2x-y+z) + (x,y,z) = (0,0,0)\\
&\iff (2x+2y-z, 2+2y-z, 2x-y+2z) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} 2x+2y-z=0\\ 2x+2y-z=0\\ 2x-y+2z=0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 2x+2y-z=0\\ 2x-y+2z=0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$L_2 - L_1$ conduit à $z = y$; reporté dans L_1, on obtient $y = -2x$ si bien que

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id}) &\iff \vec{v} = (x,-2x,-2x)\\
&\iff \vec{v} = x(1,-2,-2)\\
&\iff \vec{v} \in \mathrm{Vect}(1,-2,-2),
\end{aligned}$$

ce qui met en évidence que $\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id})$ est de dimension 1.

- Ainsi

$$\begin{aligned}
\dim\big(\operatorname{Ker}(u-2\mathrm{Id})\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(u+\mathrm{Id})\big) &= 2\\
&\neq \dim(\mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

et on en déduit que u n'est pas diagonalisable.

3.3 Comment prouver qu'une matrice est diagonalisable? Première caractérisation

Grosso-modo, de la même manière que pour un endomorphisme.

Théorème XII.3.14 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les différentes valeurs propres de M dans $\mathbb{K}$.

- Soit $d_1 = \dim\big(\operatorname{Ker}(u-\lambda_1\mathrm{Id})\big), \dots, d_p = \dim\big(\operatorname{Ker}(u-\lambda_p\mathrm{Id})\big)$ les dimensions des sous-espaces propres associés.
- Alors M est diagonalisable si et seulement si $d_1 + \cdots + d_p = n$.
- Si cette condition est réalisée, soit
  - $B_1 = (\vec{V}_{1,1}, \dots, \vec{V}_{1,d_1})$ une base de $\operatorname{Ker}(M - \lambda_1 I_n)$, ...
  - $B_p = (\vec{V}_{p,1}, \dots, \vec{V}_{p,d_p})$ une base de $\operatorname{Ker}(u - \lambda_p I_n)$.

  On a alors l'égalité

  $$D = P^{-1}MP$$

  $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \lambda_1 &&& \\ &&& \ddots && \\ &&&& \lambda_p & \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& \lambda_p \end{pmatrix}$$

  $\underbrace{\qquad}_{\lambda_1 \text{ apparaît } d_1 \text{ fois}} \qquad \underbrace{\qquad}_{\lambda_p \text{ apparaît } d_p \text{ fois}}$

  où P est la matrice des vecteurs colonnes

  $$(\vec{V}_{1,1}, \dots, \vec{V}_{1,d_1}, \dots, \vec{V}_{p,1}, \dots, \vec{V}_{p,d_p})$$

  i.e. les colonnes de P sont constituées des composantes des vecteurs $(\vec{V}_{1,1}, \dots, \vec{V}_{p,d_p})$.

Remarque. La diagonale de cette matrice est donc constituée des valeurs propres de M, chacune apparaissant un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé et donc un nombre de fois égal à sa multiplicité (cf. théorème plus bas).

Exemple

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -9\\ 0 & -4 & -3\\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable?

- On calcule $\chi_M(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$ donc -1 et 2 sont les valeurs propres de M, respectivement double et simple.

- Déterminons $\operatorname{Ker}(M + I_3)$, sous-espace propre de M associé à la valeur propre -1. Soit $X =$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} M \times X &= \begin{pmatrix} -1 & -9 & -9 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x-9y-9z \\ -4y-3z \\ 6y+5z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(M+I_3) &\iff MX + X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -x-9y-9z \\ -4y-3z \\ 6y+5z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -9y-9z \\ -3y-3z \\ 6y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff y+z=0 \text{ (aucune contrainte sur } x) \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff X = x\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

si bien que

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

est une base du sous-espace propre associé à la valeur propre -1, qui est donc de dimension 2.

- De même,

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(M-2I_3) &\iff MX - 2X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -x-9y-9z \\ -4y-3z \\ 6y+5z \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -3x-9y-9z \\ -6y-3z \\ 6y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -3x-9y-9z=0 \\ -6y-3z=0 \\ 6y+3z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3x-9y-9z=0 \\ 6y+3z=0. \end{cases} \end{aligned}$$

L_2 donne $z=-2y$ que l'on reporte dans L_1, qui donne $x=3y$. Ainsi

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(M-2I_3) &\iff X = \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} \\ &\iff X = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui met en évidence que $\operatorname{Ker}(M-2I_3)$ est la droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et donc que $\operatorname{Ker}(M-2I_3)$ est de dimension 1.

- La somme des dimensions des sous-espaces propres de M vaut $2+1=3$ donc M est diagonalisable et on a
$$D = P^{-1}BP$$
avec
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et en prenant pour P la matrice des vecteurs colonnes
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
(dont l'ordre des vecteurs correspond à l'ordre des valeurs propres apparaissant sur la diagonale de D), c'est à dire
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{\textit{Autre exemple}}}$

La matrice
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable?

- On calcule $\chi_M(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$ donc 0 et 2 sont les valeurs propres de M, respectivement simple et double.
- Déterminons $\operatorname{Ker}(M)$, sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} M \times X &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x+z \\ -x+z \\ x-y-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} X\in \operatorname{Ker}(M) &\iff MX=0\\ &\iff \begin{pmatrix}-x+z\\-x+z\\x-y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}-x+z=0\\x-y-z=0\end{array}\right. .\end{aligned}$$

L_1 donne $z=x$; reporté dans L_2, on obtient $y=0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} X\in \operatorname{Ker}(M) &\iff X=\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix}\\ &\iff X=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\ &\iff X\in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui met en évidence que $\operatorname{Ker}(M)$ est la droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et donc que $\operatorname{Ker}(M)$ est de dimension 1.

- De même,

$$\begin{aligned} X\in \operatorname{Ker}(M+I_3) &\iff MX+X=0\\ &\iff \begin{pmatrix}-x+z\\-x+z\\x-y-z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}z\\-x+y-z\\x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}z=0\\-x+y-z=0\\x-y=0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}z=0\\x=y\end{array}\right.\\ &\iff X=\begin{pmatrix}x\\x\\0\end{pmatrix}\\ &\iff X=x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui met en évidence que $\operatorname{Ker}(M+I_3)$ est la droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, et donc que $\operatorname{Ker}(M+I_3)$ est de dimension 1.

- La somme des dimensions des sous-espaces propres de M vaut $1+1=2$ donc M n'est pas diagonalisable.

3.4 Cas particulier fréquent et important: valeurs propres distinctes

Théorème XII.3.15 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.
Si u possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Démonstration. Les valeurs propres, pour des raisons de degré (le degré du polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace de dimension n vaut n) sont alors toutes simples et les dimensions des sous-espaces propres valent toutes 1 (théorème XI.2.8); la somme des dimensions des sous-espaces propres est donc égale à n, ce qui assure la diagonalisation de u (théorème XI.3.15).

Remarque. Cette condition n'est *absolument pas* nécessaire: on a vu plein d'exemples d'endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{R}^3$ possédant seulement 2 valeurs propres distinctes.

Un tout premier exemple

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

est-il diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

- On calcule son polynôme caractéristique

$$\begin{array}{rcl} \chi_u(\lambda) &=& \chi_A(\lambda)\\ &=& \begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-2&\lambda&1\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\\ C_2\longleftarrow C_2+C_1 &=& \begin{vmatrix}\lambda-1&\lambda-2&1\\-2&\lambda-2&1\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}\\ L_1\longleftarrow L_1-L_2 &=& \begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\-2&\lambda-2&1\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}\\ \text{dév.}/L_1 &=& (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1).\end{array}$$

- Ainsi u, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, possède les trois valeurs propres réelles distinctes -1, 2 et 1, ce qui assure que u est diagonalisable.

Version matricielle:

Théorème XII.3.16 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A possède n valeurs propres deux à deux distinctes dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Deuxième exemple

La matrice $T=\begin{pmatrix}4&5&6\\0&7&8\\0&0&9\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

- La matrice T étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux 4, 7 et 9:

Si T est une matrice triangulaire, ses valeurs propres sont les coefficients situés sur sa diagonale.

- La matrice T, qui est une matrice 3×3, possède donc 3 valeurs propres distinctes.
- Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Troisième exemple

Soit un entier $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & n^2 \end{pmatrix}$$

où les $*$ désignent des coefficients quelconques. Alors T est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque T possède n valeurs propres distinctes, à savoir les n entiers deux à deux distincts $1, 4, \dots, n^2$.

3.5 Une autre condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Pour un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomophisme de E.

Théorème XII.3.17 L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

- Le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$ i.e. toutes ses racines dans $\mathbb{K}$
- et pour chaque valeur propre λ de u, la dimension d_λ du sous-espace propre associé à λ égale sa multiplicité m_λ.
- Toute matrice diagonale D représentant u aura sa diagonale constituée des valeurs propres de u, chacune apparaissant un nombre de fois égal à sa multiplicité.

Remarques importantes.

- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la première condition est donc que le polynôme caractéristique de u ne possède que des racines réelles,
- alors que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la première condition est toujours réalisée, puisque l'on sait qu'un polynôme à coefficients complexes a toutes ses racines dans $\mathbb{C}$.
- Si λ est une valeur propre *simple* de u, i.e. $m_\lambda = 1$, la condition $d_\lambda = m_\lambda$ est satisfaite: en effet, on sait que pour une valeur propre simple, le sous-espace propre associé est une droite; on a donc $d_\lambda = 1$.
- Ce théorème permet de prédire si un endomorphisme va être diagonalisable; *stricto sensu*, il ne fournit pas la diagonalisation. Pour ce faire, il faudrait déterminer une base de chaque sous-espace propre; bref, appliquer la première caractérisation vue preécédemment.

Premier exemple fondamental

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

est-il diagonalisable?

- En développant suivant la première ligne, on calcule son polynôme caractéristique χ_u et l'on trouve
$$\chi_u(\lambda) = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 2\,\lambda + 2\right).$$
  - Les racines de χ_u sont donc 2 et les racines du trinôme $\lambda^2 - 2\,\lambda + 2$.
  - Ce dernier ayant pour discriminant -4, χ_u possède des racines complexes non réelles.
- Ainsi, le polynôme caractéristique de u n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et c'est pourquoi u n'est pas diagonalisable.

Deuxième exemple fondamental

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-il diagonalisable?

- On calcule
$$\chi_u(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4),$$
donc les racines du polynôme caractéristique de u sont déjà toutes réelles: 4 (simple) et 1 (double).
- Puisque 4 est une valeur propre simple de u, son sous-espace propre associé est de dimension 1 *(résultat fondamental du cours)*.
- Déterminons la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
  - *Première méthode.* Recherchons une base de $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$. Soit $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dans la mesure où:
    - u et B sont canoniquement associés,
    - $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la matrice colonne de $\vec{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
    - et que

$$\begin{aligned} B \times V &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x - 3z \\ 3x + y - 3z \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a

$$u(\vec{v}) = (4x - 3z, 3x + y - 3z, z)$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) &\iff u(\vec{v}) - \vec{v} = \vec{0} \\
&\iff (4x - 3z, 3x + y - 3z, z) - (x, y, z) = (0,0,0) \\
&\iff (3x - 3z, 3x - 3z, 0) = (0,0,0) \\
&\iff x = z \quad \text{(sans contrainte sur } y) \\
&\iff \vec{v} = (x, y, x) \\
&\iff \vec{v} = x(1,0,1) + y(0,1,0) \\
&\iff \vec{v} \in \operatorname{Vect}\big((1,0,1),(0,1,0)\big)
\end{aligned}$$

ce qui met en évidence que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$ est de dimension 2.

– Cette méthode est premium On va déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$ sans rechercher de base de ce sous-espace, mais en appliquant le *théorème du rang*: pour tout endomorphisme v d'un espace E de dimension finie,

$$\dim(\operatorname{Ker}(v)) + \operatorname{rg}(v) = \dim(E),$$

que l'on applique ici à l'endomorphisme $v = u - \operatorname{Id}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\dim(\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})) + \operatorname{rg}(u - \operatorname{Id}) = 3$$

et en conséquence,

$$\dim(\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})) = 3 - \operatorname{rg}(u - \operatorname{Id}).$$

Il suffit donc de calculer $\operatorname{rg}(u - \operatorname{Id})$, c'est à dire $\operatorname{rg}(B - I_3)$. Or

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est manifestement une matrice de rang 1. Cela prouve que

$$\operatorname{rg}(B - I_3) = 1$$

et donc

$$\operatorname{rg}(u - \operatorname{Id}) = 1$$

et finalement,

$$\dim(\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})) = 2.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est donc de dimension 2.

- En conclusion, u a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$ et pour chacune de ses valeurs propres, la dimension du sous-espace propre est égale à sa multiplicité, ce qui assure que u est diagonalisable.

Pour une matrice carrée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème XII.3.18 La matrice carrée M est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

- Le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{K}$ i.e. toutes ses racines dans $\mathbb{K}$
- et pour chaque valeur propre λ de M, la dimension d_λ du sous-espace propre associé à λ égale sa multiplicité m_λ.
- Toute matrice diagonale D semblable à M aura sa diagonale constituée des valeurs propres de M, chacune apparaissant un nombre de fois égal à sa multiplicité.

Démonstration 60

Premier exemple fondamental

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

- On calcule son polynôme caractéristique χ_M et l'on trouve

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right).$$

  – Les valeurs propres de M sont donc: 2 et les racines du trinôme $\lambda^2 - 2\lambda + 2$.

  – Ce dernier ayant pour discriminant -4, χ_M possède des racines complexes non réelles.

  Ainsi, M possède des valeurs propres non réelles ou encore, le polynôme caractéristique de M n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et c'est pourquoi M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

- Par un calcul facile, les racines complexes de $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ sont $1 + i$ et $1 - i$. si bien que M possède trois valeurs propres distinctes, qui sont 2, $1 + i$ et $1 - i$. Une matrice 3×3 possédant 3 valeurs propres complexes distinctes est diagonalisable dans $\mathbb{C}$: *résultat fondamental du cours*.

Deuxième exemple fondamental

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

- On calcule

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2),$$

  donc les valeurs propres de A sont 2 (simple) et -1 (double) et sont déjà toutes dans $\mathbb{R}$.

- Puisque 2 est une valeur propre simple de A, son sous-espace propre associé est de dimension 1 *(résultat fondamental du cours)*.

- On applique la méthode premium Pour déterminer la dimension du sous-espace propre

$$\operatorname{Ker}(A + I_3)$$

  associé à la valeur propre -1, on va passer par le calcul de $\operatorname{rg}(A + I_3)$ puis appliquer le théorème du rang. On a

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  qui est clairement de rang 2 (les colonnes deux et trois sont identiques et la première et deuxième sont clairement non liées) et ce, *que A soit considérée comme étant à coefficients réels comme à coefficients complexes*. Ainsi,

$$\operatorname{rg}(A + I_3) = 2$$

et du théorème du rang appliqué à la matrice $A+I_3$:

$$\dim(\text{Ker }(A+I_3)) + \dim(\text{Im }(A+I_3)) = \dim(\mathbb{R}^3),$$

on déduit que

$$\dim(\text{Ker }(A+I_3)) = 1$$

i.e. le sous-espace propre associé à la valeur propre double -1 est de dimension 1.

- En conclusion, la condition "pour chaque valeur propre de A, la dimension du sous-espace propre est égale à sa multiplicité" n'est pas satisfaite, ce qui permet d'affirmer que A n'est pas diagonalisable, ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.

3.6 Calcul des puissances d'une matrice par diagonalisation

Comment calculer les puissances successives d'une matrice diagonalisable M?

- Après avoir déterminé une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}MP,$$

on a alors

$$M = PDP^{-1}$$

et on sait dans ces conditions que pour tout entier N,

$$M^N = PD^NP^{-1}.$$

- On calcule P^{-1} et on finalise le calcul en effectuant le produit PD^NP^{-1}.

$\boxed{\textbf{\textit{Exemple fondamental}}}$

Calculer B^N où

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -9 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Le polynôme caractéristique de B est après calculs

$$\chi_B(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

- Ainsi, -1 et 2 sont les valeurs propres de B.
- Par résolution de $BX=-X$ et de $BX=2X$, on obtient aisément que

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

est une base du sous-espace propre associé à la valeur propre -1 et

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

est une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

- Pour chaque valeur propre de B, dimension égale multiplicité: on en conclut que B est diagonalisable.
- Ensuite, on obtient la relation $D = P^{-1}BP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et en prenant pour P la matrice des vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (dont l'ordre des vecteurs correspond à l'ordre des valeurs propres apparaissant sur la diagonale de D), c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- On calcule aisément

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- On calcule enfin

$$\begin{aligned} B^N &= PD^NP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^N & 3((-1)^N - 2^N) & 3((-1)^N - 2^N) \\ 0 & 2((-1)^N - 2^N) & (-1)^N - 2^N \\ 0 & 2(2^N - (-1)^N) & 2(2^N - (-1)^N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4 Diagonalisation des projections et symétries

$\boxed{\textbf{\textit{Diagonalisation des projections}}}$

Le contexte est le suivant: E est un espace vectoriel de dimension finie n, A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

$$E = A \oplus B.$$

Tout vecteur $\vec{v}$ de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$. Soit p la projection sur A et parallèlement à B. Par définition, $p(\vec{v}) = \vec{v}_1$.

- Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = A \oplus B$, c'est à dire:
  - $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ est une base de A,
  - $(\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de B (cf. page 116).
- Par définition même de p, et du fait que $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ sont dans A alors que $\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n$ sont dans B, on a

$$p(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad p(\vec{e}_2) = \vec{e}_2, \ldots, p(\vec{e}_r) = \vec{e}_r, \quad p(\vec{e}_{r+1}) = \vec{0}, \ldots, p(\vec{e}_n) = \vec{0},$$

ce que l'on écrit ainsi:

$$\begin{aligned} p(\vec{e}_1) &= 1 \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 + \ldots + 0 \times \vec{e}_n \\ p(\vec{e}_2) &= 0 \times \vec{e}_1 + 1 \times \vec{e}_2 + 0 \times \vec{e}_3 + \ldots + 0 \times \vec{e}_n \\ \ldots & \quad \ldots \\ p(\vec{e}_r) &= 0 \times \vec{e}_1 + \ldots + 0 \times \vec{e}_{r-1} + 1 \times \vec{e}_r + 0 \times \vec{e}_{r+1} + \ldots + 0 \times \vec{e}_n \\ p(\vec{e}_{r+1}) &= 0 \times \vec{e}_1 + \ldots + 0 \times \vec{e}_n \\ \ldots & \quad \ldots \\ p(\vec{e}_n) &= 0 \times \vec{e}_1 + \ldots + 0 \times \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Par définition même de la notion de matrice d'une application dans une base, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ ("codage" des images des vecteurs de la base) est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc p est diagonalisable. Notons que le scalaire 1, resp. 0, apparaît autant de fois sur la diagonale de D que le phénomène $p(\vec{e}_i) = 1 \times \vec{e}_i$ se produit, resp. $p(\vec{e}_i) = 0 \times \vec{e}_i$, c'est à dire r fois, resp. $n-r$ fois.

Par exemple, si $E=\mathbb{R}^3$, A est un plan et B une droite, alors

$$\begin{array}{rcl} p(\vec{e}_1) & = & 1\times\vec{e}_1+0\times\vec{e}_2+0\times\vec{e}_3 \\ p(\vec{e}_2) & = & 0\times\vec{e}_1+1\times\vec{e}_2+0\times\vec{e}_3 \\ p(\vec{e}_3) & = & 0\times\vec{e}_1+0\times\vec{e}_2+0\times\vec{e}_3 \end{array}$$

et c'est pourquoi la matrice de p dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est la matrice

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour résumer

Théorème XII.4.19 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et A,B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires:

$$E=A\oplus B.$$

On note p la projection sur A et parallèlement à B et $r=\dim(A)$.
Alors p est diagonalisable et dans une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r,\vec{e}_{r+1},\ldots,\vec{e}_n)$ adaptée à la décomposition $E=A\oplus B$, c'est à dire:

- $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r)$ est une base de A,
- $(\vec{e}_{r+1},\ldots,\vec{e}_n)$ est une base de B,

p est représentée par la matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où 1 apparaît r fois sur la diagonale et 0 apparaît $n-r$ fois.

Diagonalisation des symétries

Dans le contexte précédent, soit s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B. Par définition, $s(\vec{v})=\vec{v}_1-\vec{v}_2)$ pour tout vecteur $\vec{v}$ de E s'écrivant $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1\in A$ et $\vec{v}_2\in B$.

- Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r,\vec{e}_{r+1},\ldots,\vec{e}_n)$ une base adaptée à la décomposition $E=A\oplus B$, c'est à dire:
  - $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r)$ est une base de A,
  - $(\vec{e}_{r+1},\ldots,\vec{e}_n)$ est une base de B (cf. page 116).
- Par définition même de s, et du fait que $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r$ sont dans A alors que $\vec{e}_{r+1},\ldots,\vec{e}_n$ sont dans B, on a

$$s(\vec{e}_1)=\vec{e}_1,\quad s(\vec{e}_2)=\vec{e}_2,\ldots,s(\vec{e}_r)=\vec{e}_r,\quad s(\vec{e}_{r+1})=-\vec{e}_{r+1},\ldots,s(\vec{e}_n)=-\vec{e}_n,$$

ce que l'on écrit ainsi:

$$\begin{array}{rcl} s(\vec{e}_1) & = & 1\times\vec{e}_1+0\times\vec{e}_2+\ldots+0\times\vec{e}_n \\ s(\vec{e}_2) & = & 0\times\vec{e}_1+1\times\vec{e}_2+0\times\vec{e}_3+\ldots+0\times\vec{e}_n \\ \ldots & & \ldots \\ s(\vec{e}_r) & = & 0\times\vec{e}_1+\ldots+0\times\vec{e}_{r-1}+1\times\vec{e}_r+0\times\vec{e}_{r+1}+\ldots+0\times\vec{e}_n \\ s(\vec{e}_{r+1}) & = & 0\times\vec{e}_1+\ldots+0\times\vec{e}_r-1\times\vec{e}_{r+1}+0\times\vec{e}_{r+1}+\ldots+0\times\vec{e}_n \\ \ldots & & \ldots \\ s(\vec{e}_n) & = & 0\times\vec{e}_1+\ldots+0\times\vec{e}_{n-1}-1\times\vec{e}_n. \end{array}$$

Par définition même de la notion de matrice d'une application dans une base, la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ ("codage" des images des vecteurs de la base) est la matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

et donc s est diagonalisable. Notons que le scalaire 1, resp. -1, apparaît autant de fois sur la diagonale de D que le phénomène $s(\vec{e}_i)=1\times\vec{e}_i$ se produit, resp. $s(\vec{e}_i)=-1\times\vec{e}_i$, c'est à dire r fois, resp. $n-r$ fois.

Par exemple, si $E=\mathbb{R}^3$, A est un plan et B une droite, alors

$$\begin{array}{rcl} s(\vec{e}_1) & = & 1\times\vec{e}_1+0\times\vec{e}_2+0\times\vec{e}_3 \\ s(\vec{e}_2) & = & 0\times\vec{e}_1+1\times\vec{e}_2+0\times\vec{e}_3 \\ s(\vec{e}_3) & = & 0\times\vec{e}_1+0\times\vec{e}_2-1\times\vec{e}_3 \end{array}$$

et c'est pourquoi la matrice de s dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est la matrice

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour résumer

Théorème XII.4.20 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et A,B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires:

$$E=A\oplus B.$$

On note s la symétrie par rapport à A et parallèlement à B et $r=\dim(A)$.
Alors s est diagonalisable et dans une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r,\vec{e}_{r+1},\ldots,\vec{e}_n)$ adaptée à la décomposition $E=A\oplus B$, c'est à dire:

- $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r)$ est une base de A,
- $(\vec{e}_{r+1},\ldots,\vec{e}_n)$ est une base de B,

s est représentée par la matrice diagonale

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

où 1 apparaît r fois sur la diagonale et -1 apparaît $n-r$ fois.

5 Trigonalisation

5.1 Définitions

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

Définition XII.5.6 L'endomorphisme u est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si elle est semblable dans $\mathbb{K}$ à une matrice triangulaire, c'est à dire s'il existe une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$T = P^{-1}MP.$$

Remarque. D'après les formules de changement de base, ces deux notions sont intimement liées:

Proposition XII.5.21 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.

- Alors M est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si u est trigonalisable
- et en cas de trigonalisation, si $\mathcal{B}$ est une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, la matrice
$$T = P^{-1}MP$$
est triangulaire, semblable à M.

Remarques.

- Si la matrice d'un endomorphisme u est triangulaire ***supérieure*** dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$:
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$
c'est que l'on a
$$\begin{aligned} u(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{e}_1 \\ u(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 \\ &\dots \\ u(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned}$$
Retournons ces égalités:
$$\begin{aligned} u(\vec{e}_n) &= a_{nn}\vec{e}_n + \dots + a_{1n}\vec{e}_1 \\ &\dots \\ u(\vec{e}_2) &= a_{22}\vec{e}_2 + a_{12}\vec{e}_1 \\ &\dots \\ u(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{e}_1. \end{aligned}$$
On obtient alors que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_n, \dots, \vec{e}_1)$ est
$$\begin{pmatrix} a_{nn} & & & \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ & & a_{22} & \\ a_{1n} & \dots & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$
C'est une matrice triangulaire ***inférieure***.
- Il en résulte qu'une matrice semblable à une matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure et vice-versa.
- Il n'est donc pas nécessaire, dans les définitions précédentes, de spécifier si l'on parle de matrice triangulaire inférieure ou supérieure; mais par souci d'unification, on parlera surotut de matrices triangulaires supérieures.

5.2 Dans la pratique, comment trigonaliser une matrice carrée?

Au programme, il n'existe pas véritablement de méthode systématique comme pour la diagonalisation. Typiquement, les énoncés sont de la forme: "soit M telle matrice; démontrer que M est semblable à la matrice triangulaire T suivante".

Exemple modèle fondamental

On considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Démontrer que M est semblable à la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Il s'agit donc de démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}_0 = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ dans laquelle la matrice de u est T.
- Dans ce but, il est capital de bien interpréter les colonnes de T: dire que T représente u dans la base $\mathcal{C}_0$ signifie que la première colonne de T sont les composantes dans $\mathcal{C}_0$ du premier vecteur de $\mathcal{C}_0$, c'est à dire
$$u(\vec{w}_1) = 2 \times \vec{w}_1 + 0 \times \vec{w}_2 + 0 \times \vec{w}_3$$
i.e.
$$u(\vec{w}_1) = 2\vec{w}_1,$$
etc. Ainsi, T représente u dans $\mathcal{C}_0$ si et seulement si
$$\left\{ \begin{aligned} u(\vec{w}_1) &= 2\vec{w}_1 \\ u(\vec{w}_2) &= -\vec{w}_2 \\ u(\vec{w}_3) &= \vec{w}_2 - \vec{w}_3. \end{aligned} \right. \tag{5.2}$$
Pour trouver $\vec{w}_1$, on écrit $\vec{w}_1 = (x, y, z)$ et l'on cherche (x, y, z) tel que $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (ce qui revient à rechercher le sous-espace propre associé à la valeur propre 2). Après calcul, on trouve
$$u(\vec{w}_1) = 2\vec{w}_1 \iff \vec{w}_1 = (0, z, z).$$
On prendra par exemple
$$\vec{w}_1 = (0, 1, 1).$$
Par des calculs similaires, on prendra $\vec{w}_2 = (1, 1, 1)$.
- On recherche ensuite le vecteur $\vec{w}_3$ sous forme inconnue $\vec{w}_3 = (a, b, c)$, de sorte que $W = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est la matrice colonne de $\vec{w}_3$ dans la base canonique. Puisque
$$MW = \begin{pmatrix} -a - b + c \\ -3a + b + c \\ -3a + 2b \end{pmatrix}$$

on voit que la troisième ligne de 5.2 équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a-b+c &=& 1-a \\ -3a+b+c &=& 1-b \\ -3a+2b &=& 1-c, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -b+c &=& 1 \\ -3a+2b+c &=& 1 \\ -3a+2b+c &=& 1, \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -b+c &=& 1 \\ -3a+2b+c &=& 1. \end{array}\right.$$

En reportant $c = b+1$ dans L_2 on obtient $-3a+3b = 0$ i.e. $a = b$. Prenons par exemple $a = 0$, d'où $b = 0$ et $c = 1$ et enfin $\vec{w}_3 = (0,0,1)$.

- On calcule enfin le déterminant des vecteurs $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ dans la base canonique:

$$\begin{vmatrix} 0&1&0\\1&1&0\\1&1&1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

si bien que ces trois vecteurs forment une base $\mathcal{C}_0$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle, par construction même, la matrice de u est T.

- D'après les formules de changement de base, on a $M = P_0 T P_0^{-1}$ où P_0 est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}_0$, c'est à dire

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&1&0\\1&1&1 \end{pmatrix}.$$

5.3 Trigonalisation théorique: condition nécessaire et suffisante

Les théorèmes suivant sont admis:

Théorème XII.5.22

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
Alors u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique ne possède que des racines réelles.
- Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
Alors u est trigonalisable.

Version matricielle:

Théorème XII.5.23

- Une matrice carrée à coefficients réels est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme caractéristique ne possède que des racines réelles.
- Une matrice carrée à coefficients complexes est toujours trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Remarque. Il en résulte que toute matrice carrée M à coefficients réels est trigonalisable, mais a priori sur $\mathbb{C}$, donc semblable à une matrice triangulaire à coefficients complexes et avec une matrice de passage à coefficients complexes.

Exemples

- La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&0&-1\\0&1&0 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique

$$(\lambda-2)(\lambda^2+1).$$

Ce polynôme possède des racines complexes (i et $-i$) et M n'est donc pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

- La matrice

$$M = \begin{pmatrix} -2&3&1\\1&-1&2\\5&-6&3 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique

$$(\lambda-2)(\lambda+1)^2.$$

Les racines de ce polynôme sont toutes réelles et M est donc trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

5.4 Applications pratiques de la trigonalisation théorique; lien entre valeurs propres et trace, etc.

Théorème XII.5.24 Soit M une matrice carrée, à coefficients réels ou complexes.

- La trace de M est la somme de ses valeurs propres (y compris complexes), chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité,
- le déterminant de M est le produit de ses valeurs propres (y compris complexes), chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité.

Démonstration 61

Dans les situations concrètes, on vérifiera toujours que la somme des valeurs trouvées après calcul du polynôme caractéristique égale la trace de la matrice en jeu.

Exemple

Soit

$$M = \begin{pmatrix} -1&3&-3\\3&-1&3\\3&-3&5 \end{pmatrix}.$$

Si on pense avoir trouvé

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

alors on a fait une erreur, puisque la somme des valeurs propres, chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité, vaut $1+1+2=4$, qui n'est pas la trace de M.

Exemple d'utilisation de la trigonalisation pour parvenir à une diagonalisation

On considère un réel non nul a (ou un complexe), un entier $n \geq 2$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \dots & a \end{pmatrix}$$

i.e. dont tous les coefficients sont égaux à a.

- Déterminer son rang; en déduire que 0 est valeur propre de A et préciser la dimension du sous-espace propre associé.
- En considérant une matrice triangulaire semblable à A, démontrer que A possède une autre valeur propre α, que l'on précisera.
- En déduire les valeurs propres de A et leurs multiplicités.
- En déduire que A est diagonalisable et préciser une matrice diagonale semblable à A.

Réponse.

- Les colonnes de A étant toutes égales, A est de rang 1. Du théorème du rang
$$\dim(\text{Ker }(A)) + \text{rg}(A) = n,$$
on déduit que
$$\dim(\text{Ker } A)) = n - 1 \geq 1.$$
Ainsi, $\text{Ker } A$ est non réduit à $\{\vec{0}\}$ et donc 0 est valeur propre de A et son sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

Rappelons que
$$\text{Ker }(A) = \text{Ker }(A - 0 \times I_n)$$
est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0!

- La matrice A est trigonalisable et semblable à une matrice triangulaire T (à coefficients réels ou complexes)
  - Sur la diagonale de T figurent toutes les valeurs propres de A, la valeur propre 0 apparaissant un nombre de fois égal à sa multiplicité,
  - donc au moins $n - 1$ fois puisque l'on sait que la multiplicité d'une valeur propre est au moins égale à la dimension du sous-espace propre associé.

Rappel.

* Soit λ_0 une valeur propre de l'endomorphisme u (ou d'une matrice carrée M), m sa multiplicité et d la dimension du sous-espace propre associé à λ_0. Alors
$$d \leq m.$$
* *En particulier:* si λ_0 est une valeur propre *simple* de l'endomorphisme u (ou d'une matrice carrée M), alors son sous-espace propre associé est une *droite vectorielle.*

  - Notons α le dernier terme pour le moment inconnu de la diagonale de T. Puisque A est semblable à T, elles ont même trace; on a donc
$$na = \underbrace{0 + \ldots + 0}_{n-1 \text{ fois}} + \alpha$$
si bien que $\alpha = na$. On en déduit que l'élement diagonal na de T est une valeur propre de A.

- Rappelons que l'on "lit" les valeurs propres et leur multiciplité d'une matrice triangulaire T : ce sont les éléments diagonaux de T.
  - Ainsi, 0 apparaît $n - 1$ fois sur T et na apparaît une fois sur T.
  - Les valeurs propres de T sont donc 0, de multiplicité $n - 1$ et na, de multiplicité 1.
  - Donc les valeurs propres de A sont 0, de multiplicité $n - 1$ et na, de multiplicité 1 car A et T étant semblables, elles ont même polynôme caractéristique, dont mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

- En conclusion, A possède deux valeurs propres, 0 et na de multiplicités respectives $n-1$ et 1 et la dimension des sous-espaces propres associés vaut resp. $n - 1$ (attesté dès le début) et 1, comme pour toute valeur propre simple. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n et A est donc diagonalisable, semblable à la matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & na \end{pmatrix}.$$

6 Exemples de diagonalisation dans des situations plus compliquées

Le protocole standard de diagonalisation d'un endomorphisme u ou d'une matrice carrée M commence par le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice.
Or celui-ci peut-être difficile à obtenir: soit parce que la matrice est compliquée car de taille élevée (typiquement une matrice $n \times n$ avec n entier quelconque), soit parce que l'endomorphisme que l'on cherche à diagonaliser n'opère pas sur un espace habituel comme $\mathbb{R}^3$.
La recherche des éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres associés) se fait alors "à l'ancienne", c'est à dire en recherchant les scalaires λ pour lesquels il existe un vecteur non nul $\vec{v}$, resp. un vecteur colonne non nul X, tel que $u(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, resp. $MX = \lambda X$. Voici deux exemples de telles situations.

Premier exemple

On se donne un entier $n \geq 3$ et on considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche donc à résoudre le système
$$(S_\lambda) : \; MX = \lambda X$$
d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en se focalisant sur la problématique de l'existence de solutions à ce système autres que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - On a
$$MX = \lambda X \iff \begin{cases} x_n & = & \lambda x_1 \\ x_n & = & \lambda x_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n & = & \lambda x_n. \end{cases}$$
Il est naturel de vouloir exprimer $x_1, \ldots, x_{n-1}$ en fonction de x_n, de reporter ces expressions dans L_n et d'en tirer la valeur de x_n. Cette démarche n'est possible que si $\lambda \neq 0$. D'où la discussion suivante:

1. Si $\lambda = 0$, les lignes L_1 à L_{n-1} donnent $x_n = 0$ et L_n devient
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 0.$$
Les solutions de (S_λ) sont donc les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 0$ et donc tous les vecteurs colonnes
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ -x_1 - \ldots - x_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$
avec $(x_1, \ldots, x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$. Une autre description possible de l'ensemble des solutions de (S_λ) est bien entendu l'ensemble des vecteurs colonnes
$$\begin{pmatrix} -x_2 - \ldots - x_{n-1} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$
avec $(x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$.
2. Si $\lambda \neq 0$, alors $L_1, \ldots, L_{n-1}$ donnent respectivement
$$x_1 = \frac{1}{\lambda} x_n, \ \ldots, \ x_{n-1} = \frac{1}{\lambda} x_n$$
et L_n devient alors
$$\left(\frac{n-1}{\lambda} + 1 \right) x_n = \lambda x_n,$$
c'est à dire
$$\left(\frac{n-1}{\lambda} + 1 - \lambda \right) x_n = 0.$$
Face à un produit nul, une nouvelle discussion s'engage:
   * Si $\frac{n-1}{\lambda} + 1 - \lambda \neq 0$, alors $x_n = 0$ et en conséquence
   $$x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0$$
   et finalement, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est la seule solution de (S_λ).
   * Si $\frac{n-1}{\lambda} + 1 - \lambda = 0$, c'est à dire
   $$n - 1 + \lambda - \lambda^2 = 0,$$
   trinôme de discriminant $4n - 3 > 0$ et admettant donc les deux racines réelles
   $$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2},$$
   la ligne L_n devient $0 = 0$ si bien que (S_λ) est équivalent à ses $(n-1)$ premières lignes, dont les solutions sont alors les vecteurs colonnes
   $$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda} x_n \\ x_n \end{pmatrix}$$
   avec aucune contrainte sur x_n (et λ étant égal soit à λ_1, soit à λ_2).

- En déduire les valeurs propres de M et pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé.
  - Par définition, le scalaire λ est une valeur propre de M si et seulement s'il existe un vecteur colonne non nul X tel que $MX = \lambda X$ donc si et seulement si le système (S_λ) possède une autre solution que le vecteur colonne nul.
  - De la discussion précédente, on voit que cela ne se produit que lorsque $\lambda = 0$, $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$: pour toute autre valeur de λ, l'unique solution de (S_λ) est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - Ainsi, M possède 3 valeurs propres:
  $$\mathrm{Sp}(M) = \left\{ 0, \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \right\}.$$
  - Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, c'est à dire l'ensemble des solutions de S_0, est constitué des vecteurs colonnes
  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ -x_1 - \ldots - x_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$
  avec $(x_1, \ldots, x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$, que l'on écrit sous la forme
  $$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_{n-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  ce qui met en évidence le fait que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 admet la base
  $$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$
  et est donc de dimension $n - 2$.
  - Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, avec $\lambda = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ ou $\lambda = \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$, c'est à dire l'ensemble des solutions de S_λ, est constitué des vecteurs colonnes
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda} x_n \\ x_n \end{pmatrix}$$
  que l'on écrit sous la forme
  $$x_n \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui met en évidence le fait que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1, resp. λ_2, est la droite vectorielle dirigée par

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivement

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- En déduire que M est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}MP$.

  – De toute cette étude, il résulte que la somme des dimensions des sous-espaces propres de M égale

  $$n - 2 + 1 + 1 = n,$$

  ce qui démontre que M est diagonalisable et $D = P^{-1}MP$ où D est la matrice diagonale

  $$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

  avec $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$ et

  $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- Calculer $AM - MA$.

  – En posant les calculs, on trouve

  $$AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

- Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

  $$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \Phi(M) = AM - MA.$$

  Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

  – Évidemment, pour toute $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AM - MA$ est une matrice 2×2. Autrement dit, Φ est bien une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

  – D'après les propriétés du produit matriciel (distributivité du produit sur l'addition), pour toutes $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et tous scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

  $$\begin{aligned} \Phi(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A \\ &= \alpha AM + \beta AN - \alpha MA - \beta NA \\ &= \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA) \\ &= \alpha\Phi(M) + \beta\Phi(N), \end{aligned}$$

  ce qui démontre que Φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i.e. un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Déterminer les valeurs propres de Φ et les vecteurs propres associés.

  – *Remarque.* Il faut ici comprendre le mot "vecteur" comme élément de l'espace dans lequel on travaille i.e. l'espace sur lequel l'application Φ opère, c'est à dire $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Un "vecteur" est donc une matrice 2×2!

  – Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ est une valeur propre de Φ si et seulement s'il existe un "vecteur" non nul (donc une matrice qui n'est pas la matrice nulle) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

  $$\Phi(M) = \lambda M$$

  c'est à dire, d'après le calcul ci-dessus, telle que

  $$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

  On est donc amenés à résoudre le système

  $$(S_\lambda) : \begin{cases} 0 = \lambda a \\ -b = \lambda b \\ c = \lambda c \\ 0 = \lambda d \end{cases}$$

  d'inconnues (a, b, c, d), avec le soucis de trouver d'autres solutions que la solution $(0, 0, 0, 0)$. À l'examen de L_1, deux cas surviennent:

  * Si $\lambda = 0$, on a

    $$(S_\lambda) \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -b \\ 0 = c \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

    avec aucune contrainte sur a et d. Dans ce cas, les solutions de (S_λ) sont les quadruplets

    $$(a, 0, 0, d),\ (a, d) \in \mathbb{R}^2.$$

  * Si $\lambda \neq 0$, alors L_1 donne $a = 0$. Et maintenant, L_2 donne $(\lambda + 1)b = 0$, d'où la discussion qui suit:
  * Si $\lambda + 1 = 0$ i.e. $\lambda = -1$, on a (n'oublions que $a = 0$ ici)

    $$(S_\lambda) \iff \begin{cases} a = 0 \\ 0 = 0 \\ -c = c \\ -d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

    avec aucune contrainte sur b. Dans ce cas, les solutions de (S_λ) sont les quadruplets

    $$(0, b, 0, 0),\ b \in \mathbb{R}.$$

* Si $\lambda+1\neq 0$, alors L_2 donne $b=0$. Et maintenant, L_3 donne $(\lambda-1)c=0$, d'où la discussion qui suit:
* Si $\lambda-1=0$ i.e. $\lambda=1$, on a (n'oublions que $a=b=0$ ici)

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} a=0\\ b=0\\ 0=0\\ d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0\\ b=0\\ d=0 \end{cases}$$

avec aucune contrainte sur c. Dans ce cas, les solutions de (S_λ) sont les quadruplets

$$(0,0,c,0),\ c\in\mathbb{R}.$$

* Si $\lambda-1\neq 0$, alors L_3 donne $c=0$. Et maintenant, L_4 donne $\lambda d=0$, d'où la discussion qui suit:
* soit $\lambda=0$, mais ce cas a déjà été discuté.
* Soit $\lambda\neq 0$ et alors L_4 donne $d=0$ et comme on a déjà $a=b=c=0$ à ce stade de la discussion, c'est que $a=b=c=d=0$. Dans ce cas, (S_λ) ne possède que la solution $(0,0,0,0)$.

De cette discussion, il ressort que les valeurs de λ pour lesquelles le système (S_λ) ne possède pas que la seule solution $(0,0,0,0)$ i.e. pour lesquelles il existe une matrice non nulle $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(M)=\lambda M$, sont

$$0,\ -1,\ 1.$$

1. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est constitué des matrices $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ telles que (a,b,c,d) soit solution du système (S_λ) avec $\lambda=0$. Ces solutions étant les quadruplets
$$(a,0,0,d),\ (a,d)\in\mathbb{R}^2,$$
ce sous-espace est constitué des matrices
$$\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix},\ (a,d)\in\mathbb{R}^2$$
et que l'on écrit sous la forme
$$a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ (a,d)\in\mathbb{R}^2$$
ce qui met en évidence le fait que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 admet la base
$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right].$$
Il est donc de dimension 2.
2. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est constitué des matrices $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ telles que (a,b,c,d) soit solution du système (S_λ) avec $\lambda=-1$. Ces solutions étant les quadruplets
$$(0,b,0,0),\ b\in\mathbb{R},$$
ce sous-espace est constitué des matrices
$$\begin{pmatrix} 0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ b\in\mathbb{R}$$
et que l'on écrit sous la forme
$$b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ b\in\mathbb{R}$$
ce qui met en évidence le fait que le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (on dit "droite vectorielle" au sens le plus pur, c'est à dire l'ensemble des "vecteurs" (ici des matrices 2×2) qui sont multiples d'un "vecteur" donné).
3. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est constitué des matrices $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ telles que (a,b,c,d) soit solution du système (S_λ) avec $\lambda=1$. Ces solutions étant les quadruplets
$$(0,0,c,0),\ c\in\mathbb{R},$$
ce sous-espace est constitué des matrices
$$\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{R}$$
et que l'on écrit sous la forme
$$c\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{R}$$
ce qui met en évidence le fait que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle dirigée par $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

- L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable? Si oui, préciser une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour Φ.
  - L'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 puisqu'il admet la base
  $$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right].$$
  La somme des dimensions des sous-espaces propres de Φ vaut $2+1+1=4$ et c'est pourquoi Φ est diagonalisable. Une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour Φ est alors obtenue par réunion de bases des différents sous-espaces propres de Φ, comme
  $$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right].$$

Chapitre XIII

Géométrie (première année)

Dans tous les exercices, le plan et l'espace sont orientés, munis d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, resp. $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et toutes les coordonnées sont données dans ce repère.

1 Principes généraux

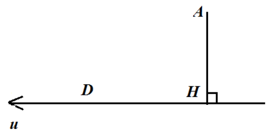
Les problèmes tournent en général autour de la recherche d'équations de certaines droites, de certains plans, d'obtention de certains points (projetés, symétriques...)... On procédera la plupart du temps en trois étapes:

- Caractérisation en termes géométriques "purs" de l'objet recherché (caractériser, c'est mettre en relief les spécificités distinctives de l'objet),
- mise en équation de ces caractéristiques,
- résolution de ces équations.

Un exemple

Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(1,2)$ sur la droite D d'équation cartésienne $2x-3y+1=0$.

- ***Caractérisation.*** Le point H est le seul point de D tel que (AH) soit orthogonal à D. On doit donc rechercher un point H de D tel que (AH) soit orthogonal à D.



- ***Mise en équation.*** On recherche les coordonnées (x,y) de H.
  - *Première méthode.*
    - Puisque $H \in D$, on a $2x-3y+1=0$.
    - (AH) est orthogonal à D si et seulement si $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de D; un tel vecteur est le vecteur $\vec{u}=(3,2)$. L'orthogonalité a donc lieu si et seulement si $\langle \overrightarrow{AH}, \vec{u} \rangle = 0$ donc si et seulement si
    $$\langle (x-1, y-2), (3,2) \rangle = 0 \iff 3(x-1)+2(y-2)=0.$$
  - *Deuxième méthode.*
    - (AH) est orthogonal à D si et seulement si (AH) est colinéaire à un vecteur normal $\vec{n}$ à D; un tel vecteur est le vecteur $\vec{n}=(2,-3)$. L'orthogonalité a donc lieu si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n}$ donc si et seulement si $(x-1, y-2) = (2\lambda, -3\lambda)$ donc si et seulement si $H(1+2\lambda, 2-3\lambda)$.
    - H appartient alors à D si et seulement si
    $$2(1+2\lambda)-3(2-3\lambda)+1=0.$$
- ***Résolution.***
- *Première méthode.* On résout
$$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3(x-1)+2(y-2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{19}{13} \\ y=\frac{17}{13} \end{cases}$$
donc $H\left(\frac{19}{13}, \frac{17}{13}\right)$.
- *Deuxième méthode.* On résout
$$2(1+2\lambda)-3(2-3\lambda)+1=0 \iff \lambda = \frac{3}{13}$$
ce qui donne $1+2\lambda = \frac{19}{13}$ et $2-3\lambda=\frac{17}{13}$ et donc $H\left(\frac{19}{13}, \frac{17}{13}\right)$.

2 Dans le plan: coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires, changement de repère

Définition XIII.2.1

- ***Repère, coordonnées dans un repère.***
  - Un repère $\mathcal{R}$ du plan est un triplet $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où O est un point du plan, appelé origine du repère, et $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ linéairement indépendants (et donc une base de $\mathbb{R}^2$).
  - Soit M un point du plan. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est alors combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que
  $$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$
  Ce couple (x,y) constitue les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $\mathcal{R}$.
- ***Repère orthonormé (ou orthonormal).*** C'est un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ pour lequel les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux et de norme 1.

Changement de repère

Changement d'origine. Le plan est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Théorème XIII.2.1 Soit Ω un point du plan de coordonnées (a, b) dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_\Omega$ le repère $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Si M est un point du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, ses coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}_\Omega$ sont données par

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \end{cases}$$

Changement d'axes. Le plan est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Théorème XIII.2.2 Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$, (a, b), (a', b') les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
On note $P = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
On considère le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$ et un point M du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$; alors les coordonnées (x', y') de M dans $\mathcal{R}'$ sont reliées à (x, y) par la formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Cas particuliers.

- Si le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé, alors le repère $\mathcal{R}'$ est orthonormé si et seulement si la matrice P est orthogonale.
- Si le plan est orienté et $\mathcal{R}$ est direct, alors $\mathcal{R}'$ est direct si et seulement si $\det(P) > 0$.

Remarques.

- La détermination explicite de (x', y') en fonction de (x, y) nécessite donc la connaissance de P^{-1}:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Pour les détails concernant la notion de matrice orthogonale, se reporter au chapitre "Produit scalaire".

Coordonnées polaires.

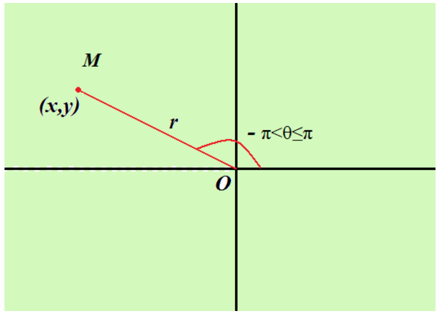
Théorème XIII.2.3

- Pour tout point $M(x, y)$ du plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, il existe un couple (r, θ) de réels, appelé coordonnées polaires du point M tel que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

- Si le point M est distinct de l'origine O du repère, il y a unicité du couple (r, θ) si l'on impose les contraintes $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.
- Sous ces contraintes, on a

$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}).$$



Remarques.

- Les autres coordonnées polaires de M sont les couples $(r, \theta + 2k\pi)$ et $(-r, \theta + (2k+1)\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Les coordonnées polaires de l'origine O sont les couples $(0, \theta)$ avec θ quelconque.

3 Dans le plan: angles orientés, produit scalaire et produit mixte

3.1 Angles orientés du plan

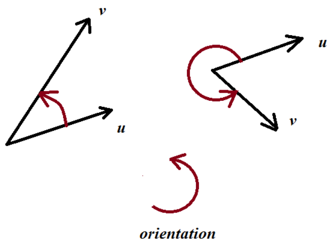
Définition XIII.3.2 Dans le plan orienté, l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifie

- $(\vec{u}, \vec{v})$ est défini modulo 2π
- $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$
- $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})\ [2\pi]$ (relation de Chasles).

Une mesure θ de leur angle orienté vérifie

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \end{cases}$$

où $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ est le produit mixte de $(\vec{u}, \vec{v})$.



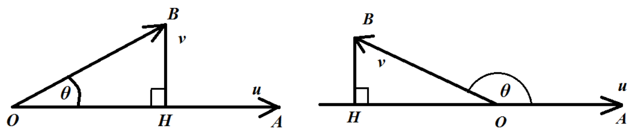
3.2 Produit scalaire

Définition XIII.3.3 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

- Si (a, b) et (a', b') sont les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base canonique et même dans toute base orthonormée, le produit scalaire $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est le réel défini par
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = aa' + bb'.$$
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux non nuls, on a
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$
et donc
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Remarques.

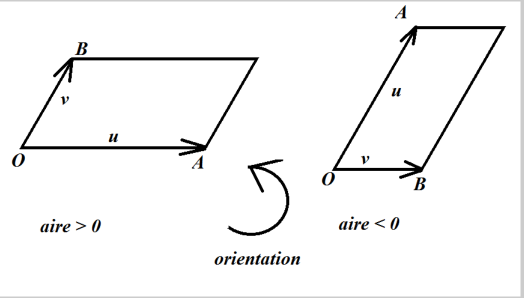
- Cette définition est celle du produit scalaire *canonique* sur $\mathbb{R}^2$ ou produit scalaire "usuel".
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont représentés par des bipoints (O, A), (O, B) et θ est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ (dans $[0, \pi]$, mesuré avec un rapporteur) alors $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est égal au produit des mesures algébriques $\overline{OA} \times \overline{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).



3.3 Produit mixte dans le plan

Définition XIII.3.4 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

- ***Définition et propriétés géométriques.***
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on définit leur produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}]$ par
$$[\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}).$$
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont représentés par des bipoints (O, A), (O, B), alors $[\vec{u}, \vec{v}]$ est égal à l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$:



  et l'aire géométrique en est la valeur absolue.

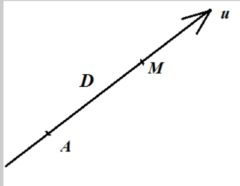
- ***Définition et propriétés algébriques.***
  - Si (a, b) et (a', b') sont les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée directe, et en particulier dans la base canonique, on définit le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}]$ par
$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}] &= ab' - ba' \\ &= \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \end{aligned}$$
  qui est donc un scalaire indépendant du choix de la base orthonormée directe; cette valeur est aussi notée $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$.
  - Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux non nuls, on a donc
$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$
  - Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.
  - $[\vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}]$ (antisymétrie)
  - $[\lambda \vec{u} + \mu \vec{u}', \vec{v}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}] + \mu [\vec{u}', \vec{v}]$ (bilinéarité).

4 Droites du plan; distance à une droite du plan

4.1 Équation cartésienne d'une droite dans le plan: absolument capital

Théorème XIII.4.4 ***Droite D passant par le point $A(x_0, y_0)$ et dirigée par $\vec{u} = (\alpha, \beta)$.*** Un point $M(x, y) \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont liés, donc si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ (on conviendra que les déterminants sont calculés dans la base canonique):

$$\begin{aligned} M \in D &\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0. \end{aligned}$$

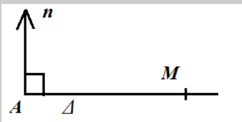


L'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite du plan dirigée par $\vec{u} = (-b, a)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (a, b)$.

Remarque. Dans ce genre de situation, on fera ce dessin et on pensera à: points alignés, vecteurs colinéaires, déterminant nul; ce qui fournira l'équation.

Théorème XIII.4.5 ***Droite Δ passant par le point $A(x_0, y_0)$ et normale à $\vec{n} = (a, b)$.*** Un point $M(x, y) \in \Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc si et seulement si $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$:

$$M \in \Delta \iff \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$



Remarque. Dans ce genre de situation, on fera ce dessin et on pensera à: orthogonalité, produit scalaire nul; ce qui fournira l'équation.

Distance d'un point à une droite dans le plan

Proposition XIII.4.6 Soit M un point et Δ une droite du plan.

- Si Δ passe par le point A et est normal au vecteur $\vec{n}$,
$$d(M, \Delta) = \frac{\left|\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle\right|}{\|\vec{n}\|}.$$
- Si Δ a pour équation cartésienne
$$ax + by + c = 0$$
dans un repère orthonormé et que M a pour coordonnées (x_0, y_0) dans ce repère,
$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4.2 Exemples d'obtention de projetés et de symétriques orthogonaux dans le plan

Comme mentionné en début de ce chapitre, on procédera la plupart du temps en trois étapes:

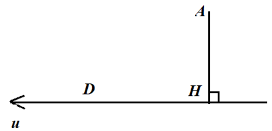
- caractérisation en termes géométriques "purs" de l'objet recherché (caractériser, c'est mettre en relief les spécificités distinctives de l'objet),
- mise en équation de ces caractéristiques,
- résolution de ces équations.

Projection orthogonale

Premier exemple

Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(1, 2)$ sur la droite D d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$.

- ***Caractérisation.*** Le point H est le seul point de D tel que (AH) soit orthogonal à D. On doit donc rechercher un point H de D tel que (AH) soit orthogonal à D, donc à un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.



- ***Mise en équation.*** On recherche les coordonnées (x, y) de H.
  - *Première méthode.*
    - Puisque $H \in D$, on a $2x - 3y + 1 = 0$.
    - (AH) est orthogonal à D si et seulement si $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de D; un tel vecteur est le vecteur $\vec{u} = (3, 2)$. L'orthogonalité a donc lieu si et seulement si $\langle \overrightarrow{AH}, \vec{u} \rangle = 0$ donc si et seulement si
    $$\langle (x - 1, y - 2), (3, 2) \rangle = 0 \iff 3(x - 1) + 2(y - 2) = 0.$$
  - *Deuxième méthode.*
    - (AH) est orthogonal à D si et seulement si (AH) est colinéaire à un vecteur normal $\vec{n}$ à D; un tel vecteur est le vecteur $\vec{n} = (2, -3)$. L'orthogonalité a donc lieu si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n}$ donc si et seulement si $(x-1, y-2) = (2\lambda, -3\lambda)$ donc si et seulement si $H(1 + 2\lambda, 2 - 3\lambda)$.

* H appartient alors à D si et seulement si

$$2(1+2\lambda)-3(2-3\lambda)+1=0.$$

- ***Résolution.***
  - *Première méthode.* On résout

$$\left\{\begin{array}{l}2x-3y+1=0\\ 3(x-1)+2(y-2)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x=\frac{19}{13}\\ y=\frac{17}{13}\end{array}\right.$$

  donc $H\left(\frac{19}{13},\frac{17}{13}\right)$.
  - *Deuxième méthode.* On résout

$$2(1+2\lambda)-3(2-3\lambda)+1=0 \iff \lambda=\frac{3}{13}$$

  ce qui donne $1+2\lambda=\frac{19}{13}$ et $2-3\lambda=\frac{17}{13}$ et donc $H\left(\frac{19}{13},\frac{17}{13}\right)$.

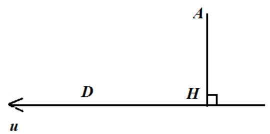
Deuxième exemple

Soit D la droite de représentation paramétrique

$$t\mapsto \left\{\begin{array}{l}x=3+2t\\ y=1-t.\end{array}\right.$$

Déterminer le projeté orthogonal du point $A(-1,0)$ sur la droite D.

- ***Caractérisation.*** Le point H est le seul point de D tel que (AH) soit orthogonal à D. On doit donc rechercher un point H de D tel que (AH) soit orthogonal à D, donc à un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.



- ***Mise en équation.***
  - De la représentation paramétrique de D, on déduit que D est dirigée par $\vec{u}=(2,-1)$
  - Puisque $H\in D$, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $H(3+2t,1-t)$ et on a alors $\overrightarrow{AH}=(4+2t,1-t)$
  - et $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à D si et seulement si $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\vec{u}$ i.e. $\langle\overrightarrow{AH},\vec{u}\rangle=0$ (produit scalaire nul).
  - ***Résolution.*** On a

$$\begin{array}{rcl}\langle\overrightarrow{AH},\vec{u}\rangle &=& 0\\ \iff (4+2t)\times 2+(1-t)\times(-1) &=& 0\\ \iff t &=& -\dfrac{7}{5},\end{array}$$

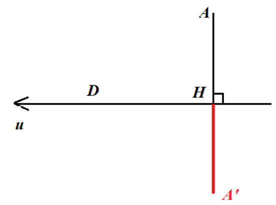
  ce qui donne $H\left(\frac{1}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Symétrie orthogonale

Premier exemple

Déterminer le symétrique orthogonal A' du point $A(1,2)$ par rapport à la droite D d'équation cartésienne $2x-3y+1=0$.

- ***Caractérisation.*** Le point A' vérifie $\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de A sur D.



- ***Résolution.*** On a trouvé précédemment $H\left(\dfrac{19}{13},\dfrac{17}{13}\right)$. Les coordonnées de A' sont alors

$$1+2\times\left(\frac{19}{13}-1\right)=\frac{25}{13}\quad 2+2\times\left(\frac{17}{13}-2\right)=\frac{8}{13},$$

  c'est à dire $A'\left(\frac{25}{13},\frac{8}{13}\right)$.

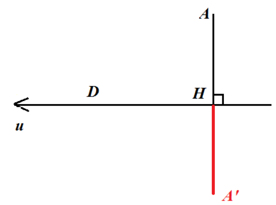
Deuxième exemple

Soit D la droite de représentation paramétrique

$$t\mapsto \left\{\begin{array}{l}x=3+2t\\ y=1-t.\end{array}\right.$$

Déterminer le symétrique orthogonal du point $A(-1,0)$ par rapport à la droite D.

- ***Caractérisation.*** Le point A' vérifie $\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal de A sur D.



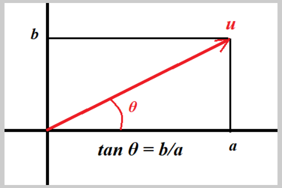
- ***Résolution.*** On a trouvé précédemment $H\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{12}{5}\right)$. Les coordonnées de A' sont alors

$$-1+2\times\left(\frac{1}{5}+1\right)=\frac{7}{5}\quad 0+2\times\left(\frac{12}{5}-0\right)=\frac{24}{5},$$

  c'est à dire $A'\left(\frac{7}{5},\frac{24}{5}\right)$.

4.3 Pente et ordonnée à l'origine

Définition XIII.4.5 *Pente d'un vecteur.* Soit $\vec{u}=(a,b)$ avec $a\neq 0$. Alors la pente de ce vecteur est le réel $\frac{b}{a}$.

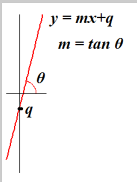


Cette pente représente la tangente de l'angle que fait le vecteur $\vec{u}$ avec l'axe des abscisses.

Pente d'une droite. Une droite D d'équation $ax+by+c=0$ avec $b\neq 0$ est non verticale car dirigée par le vecteur $\vec{u}=(-b,a)$, qui est non colinéaire au vecteur $\vec{\jmath}$. En divisant par b, une équation de D est de la forme

$$y=mx+q.$$

- Le réel m est appelé pente de la droite et m est la tangente de l'angle entre l'axe des abscisses et la droite D.
- Le réel q est l'ordonnée à l'origine: c'est la valeur de l'ordonnée du point d'intersection de D avec l'axe des ordonnées.



4.4 Représentation paramétrique

Théorème XIII.4.7

- Soit la droite D passant par $A(x_0,y_0)$ et dirigée par $\vec{u}=(a,b)$: un point $M(x,y)\in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont liés donc si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$, d'où la représentation paramétrique

$$\lambda\mapsto\begin{cases}x=x_0+\lambda a\\ y=y_0+\lambda b\end{cases}\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

- Réciproquement, une représentation telle que

$$t\mapsto\begin{cases}x=x_0+ta\\ y=y_0+tb\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

est celle de la droite passant par le point de coordonnées (x_0,y_0) et dirigée par le vecteur $\vec{u}=(a,b)$.

Passage d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne

On peut suivre ce modèle: soit D la droite de représentation paramétrique

$$t\mapsto\begin{cases}x=2-3t\\ y=1+2t.\end{cases}$$

L'obtention d'une équation cartésienne est basée sur le principe *d'élimination* du paramètre t entre x et y.

- En un point de paramètre t de D, L_1 donne $t=\frac{1}{3}(2-x)$.
- En reportant cette expression de t dans L_2, on obtient

$$y=1+2\times\frac{1}{3}(2-x)$$

c'est à dire:

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3},$$

qui est donc une équation cartésienne de D.

Remarque

Les problèmes où les données font apparaître des paramètres se résolvent de la même manière que lorsque les données sont "concrètes".

Un exemple

Soit $s\in\mathbb{R}$. Donner une équation cartésienne puis une représentation paramétrique de la droite D_s passant par le point $A(s)$ de coordonnées (s^2+s,s^3-s) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(s)=(2s+1,3s^2-1)$.

- Un point $M(x,y)$ du plan appartient à D_s si et seulement si $\overrightarrow{A(s)M}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(s)$ donc si et seulement si $\det(\overrightarrow{A(s)M},\vec{u}(s))=0$:

$$M\in D_s \iff \begin{vmatrix}x-s^2-s & 2s+1\\ y-s^3+s & 3s^2-1\end{vmatrix}=0 \iff$$
$$(3s^2-1)x-(2s+1)y-(s^2+s)(3s^2-1)+(s^3-s)(2s+1)=0.$$

- Un point $M(x,y)$ du plan appartient à D_s si et seulement si $\overrightarrow{A(s)M}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(s)$ donc si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{A(s)M}=\lambda\vec{u}(s)$, d'où la représentation paramétrique

$$\lambda\mapsto\begin{cases}x=s^2+s+\lambda(2s+1)\\ y=s^3-s+\lambda(3s^2-1)\end{cases}\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

4.5 Distance à une droite du plan

Proposition XIII.4.8 Soit D la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ et M un point du plan de coordonnées (x_0,y_0). Alors sa distance $d(M,D)$ à la droite D est donnée par

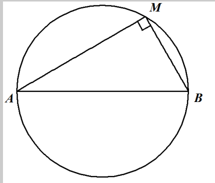
$$d(M,D)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Démonstration 62

5 Équation cartésienne d'un cercle

Théorème XIII.5.9 Le cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M du plan à distance R du point Ω, donc vérifiant $\|\overrightarrow{\Omega M}\| = R$ (et donc $\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2$).

- Dans un repère orthonormé, le cercle de centre Ω de coordonnées (a, b) et de rayon R a pour équation cartésienne
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$
- Étant donnés deux points distincts A et B du plan, le cercle de diamètre $[AB]$ est constitué des points M tels que $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\rangle = 0$.



6 Dans l'espace: coordonnées cartésiennes, changement de repère; coordonnées cylindriques

Définition XIII.6.6

- ***Repère, coordonnées dans un repère.***
  - Un repère $\mathcal{R}$ de l'espace est un quadruplet $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où O est un point de l'espace, appelé origine du repère, et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  - Soit M un point de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est alors combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$
    Ce triplet (x, y, z) constitue les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $\mathcal{R}$.
- ***Repère orthonormé (ou orthonormal).*** C'est un repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ pour lequel les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.
- ***Repère orthonormé direct.*** L'espace étant orienté, soit O un point et $(\vec{u}, \vec{v})$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, orthogonaux et unitaires. Alors $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est un repère orthonormé direct (et c'est le seul dont les deux premiers vecteurs sont $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Changement de repère

Changement d'origine. L'espace est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Proposition XIII.6.10 Soit Ω un point de l'espace de coordonnées $(a, , c)$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_\Omega$ le repère $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Si M est un point du plan de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, ses coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}_\Omega$ sont données par
$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - c. \end{cases}$$

Changement d'axes. L'espace est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Proposition XIII.6.11 Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathbb{R}^3$, (a, b, c), $(a', b', c'$, (a'', b'', c'') les composantes des vecteurs $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On note $P = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

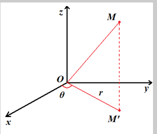
On considère le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et un point M du plan de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$; alors les coordonnées (x', y', z') de M dans $\mathcal{R}'$ sont reliées à (x, y, z) par la formule
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Cas particuliers.

- Si le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé, alors le repère $\mathcal{R}'$ est orthonormé si et seulement si la matrice P est orthogonale.
- Si le plan est orienté et $\mathcal{R}$ est direct, alors $\mathcal{R}'$ est direct si et seulement si $\det(P) > 0$.

- La détermination explicite de (x', y', z') en fonction de (x, y, z) nécessite donc la connaissance de P^{-1}:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
- Pour les détails concernant la notion de matrice orthogonale, se reporter au chapitre "Produit scalaire".

Théorème XIII.6.12 ***Coordonnées cylindriques.*** Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace, M un point de l'espace et (x, y, z) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$.



- Le projeté M' du point M sur le plan xOy a pour coordonnées cartésiennes $(x, y, 0)$ dans $\mathcal{R}$.
- Soit (r, θ) des coordonnées polaires de M' dans le plan xOy avec $r \geq 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$.
- Alors
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$
- On dit alors que (r, θ, z) sont des coordonnées cylindriques (ou semi-polaires) de M.

7 Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte dans l'espace

Produit scalaire

Définition XIII.7.7 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- Si (a, b, c) et (a', b', c') sont les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée, leur produit scalaire $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est donné par
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = aa' + bb' + cc'.$$
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux non nuls, on définit leur écart angulaire θ par
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Remarque. Cette définition est celle du produit scalaire *canonique* sur $\mathbb{R}^3$ ou produit scalaire "usuel".

Produit vectoriel

Définition XIII.7.8 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Si (a, b, c) et (a', b', c') sont les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée directe, alors leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur de composantes
$$(bc' - cb', -(ac' - ca'), ab' - ba')$$
dans cette même base. On peut obtenir ces composantes par calcul de déterminants, en affectant au deuxième le signe $-$
$$bc' - cb' = \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{a'} \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \quad ac' - ca' = \begin{vmatrix} a & a' \\ \cancel{b} & \cancel{b'} \\ c & c' \end{vmatrix} \quad ab' - ba' = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ \cancel{c} & \cancel{c'} \end{vmatrix}.$$

Propriétés fondamentales.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires,
- En posant $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$:
  - $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$,
  - $\|\vec{n}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \theta$ où θ est l'écart angulaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  - En particulier, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
  - si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires (c'est à dire tous deux de norme 1), alors la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base orthonormée directe; on a alors $\vec{v} \wedge \vec{n} = \vec{u}$ et $\vec{n} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

Autres propriétés. On a

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v} \text{ (antisymétrie)}$$
$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{u}\,') \wedge \vec{v} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u}\,' \wedge \vec{v} \text{ (bilinéarité).}$$

Produit mixte

Définition XIII.7.9 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est orienté. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ de ces trois vecteurs est le scalaire défini par
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \big\langle (\vec{u} \wedge \vec{v}), \vec{w} \big\rangle.$$

Propriétés fondamentales.

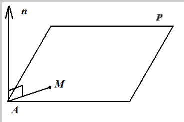
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
- Le produit mixte est antisymétrique:
$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$
- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire des vecteurs:
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}].$$
- Le produit mixte est trilinéaire: quels que soit les scalaires λ et λ'
$$\begin{aligned} [\lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}\,', \vec{v}, \vec{w}] &= \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \lambda' [\vec{u}\,', \vec{v}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \lambda \vec{v} + \lambda' \vec{v}\,', \vec{w}] &= \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \lambda' [\vec{u}, \vec{v}\,', \vec{w}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w} + \lambda' \vec{w}\,'] &= \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \lambda' [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,']. \end{aligned}$$
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est le volume algébrique du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ en est le volume géométrique.
- Si (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') sont les composantes respectives de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans une base orthonormée directe, alors
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$
qui est donc un déterminant dont la valeur est indépendante du choix de la base orthonormée directe dans laquelle sont exprimées les coordonnées de ces vecteurs.

8 Équation cartésienne d'un plan dans l'espace; distance à un plan

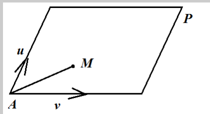
Théorème XIII.8.13

- ***Plan P passant par le point $A(x_0,y_0,z_0)$ et normal à $\vec{n}=(a,b,c)$.*** Un point $M(x,y,z)\in P$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc si et seulement si $\langle \overrightarrow{AM},\vec{n}\rangle = 0$:

$$M\in P \iff \langle \overrightarrow{AM},\vec{n}\rangle = 0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$



- ***Plan P passant par $A(x_0,y_0,z_0)$ et dirigé par $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$, $\vec{v}=(\alpha',\beta',\gamma')$.***



  – *Première approche.* Un point $M(x,y,z)\in P$ si et seulement si les vecteurs $(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})$ sont liés, donc si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$:

$$M\in P \iff \begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha & \alpha' \\ y-y_0 & \beta & \beta' \\ z-z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

  – *Deuxième approche.* Le vecteur

$$\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$$

  est, d'après les propriétés du produit vectoriel, orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et est donc normal à P. Ainsi,

$$M\in P \iff \langle \overrightarrow{AM},\vec{n}\rangle = 0,$$

  ce qui fournit une équation cartésienne de P.

- ***L'équation cartésienne*** $ax+by+cz+d=0$ (sous réserve que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$), est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}=(a,b,c)$.

Proposition XIII.8.14 Soit P le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et M un point de l'espace de coordonnées (x_0,y_0,z_0). alors sa distance $d(M,P)$ au plan P est donnée par

$$d(M,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Démonstration 63

9 Représentations d'une droite dans l'espace; distance à une droite dans l'espace

9.1 Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Théorème XIII.9.15 Soit D la droite passant par $A(x_0,y_0,z_0)$ et dirigée par $\vec{u}=(a,b,c)$; un point $M(x,y,z)\in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont liés donc si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$, d'où la représentation paramétrique

$$\lambda\mapsto\begin{cases} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \\ z=z_0+\lambda c \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Remarque. Remarquons que le point A est le point de paramètre 0 de cette paramétrisation.

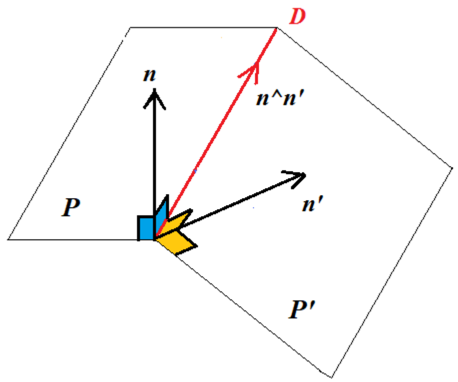
9.2 Système d'équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Théorème XIII.9.16 Le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}$$

est celui d'une droite D de l'espace (i.e. les points M de l'espace dont les coordonnées (x,y,z) satisfont ce système d'équations constituent une droite):

- D apparaît comme l'intersection des plans P et P' d'équations cartésiennes repsectives $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$
- la droite D est dirigée par $\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n}'$ où $\vec{n}=(a,b,c)$, $\vec{n}'=(a',b',c')$.



Il est bien entendu supposé que les plans P et P' sont non parallèles et donc que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires c'est à dire que les triplets (a,b,c) et (a',b',c') sont non proportionnels.

Exemples

- Le système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} x-2z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$
définit une droite de l'espace dirigée par le vecteur
$$\vec{u}=(1,0,-2)\wedge(1,1,-1)=(2,-1,1).$$
On peut en préciser un point de passage: prendre $z=0$ dans le système d'équations cartésiennes définissant D conduit à $x=2$ puis -1; ainsi, le point A de coordonnées $(2,-1,0)$ est un point de D et on peut donc affirmer que D est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
- Le système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases}$$
que l'on définit aussi par les équations
$$x=y=z,$$
définit une droite de l'espace dirigée par le vecteur
$$\vec{u}=(1,-1,0)\wedge(1,0,-1)=(1,1,1)$$
et cette droite passe manifestement par l'origine.

Passage d'un système d'équations cartésiennes à une représentation paramétrique

On y parvient comme dans la situation ci-dessous, en choisissant une des coordonnées comme paramètre:

- Soit D la droite de l'espace définie par le système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=-1. \end{cases}$$
  - Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace; alors
$$\begin{aligned} M\in D \quad &\iff \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=-2 \end{cases} \\ &\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\iff} \begin{cases} 3x+3y=-1 \\ x+2y+z=-2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=-\frac{1}{3}-x \\ x+2\left(-\frac{1}{3}-x\right)+z=-1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=-\frac{1}{3}-x \\ z=-\frac{1}{3}+x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=x \\ y=-\frac{1}{3}-x \\ z=-\frac{1}{3}+x. \end{cases} \end{aligned}$$
  - On dit que l'on a choisi x comme paramètre.
  - Ainsi, en renommant ce paramètre, une paramétrisation de D est
$$t\mapsto \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{1}{3}-t \\ z=-\frac{1}{3}+t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$
    On en déduit notamment que D passe par le point de coordonnées $(0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ et est dirigée par $\vec{u}=(1,-1,1)$.
- Soit D la droite de l'espace définie par le système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} x=y \\ x=z. \end{cases}$$
Il est immédiat que l'on peut choisir z comme paramètre (ou y ou x!) et qu'une paramétrisation de D est
$$t\mapsto \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$
- Soit D la droite de l'espace définie par le système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+y+z=-1. \end{cases}$$
  - En effectuant L_1+L_2, on obtient $3x=-1$, c'est à dire $x=-\frac{1}{3}$ (et x ne peut donc pas être pris comme paramètre).
  - Ainsi, D définie par le système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} x-\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}+y+z=-1 \end{cases}$$
autrement dit,
$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}-z \end{cases}$$
(on a donc pris z comme paramètre; on aurait pu prendre aussi y) si bien que D admet la représentation paramétrique
$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}-t \\ z=t, \end{cases}$$
ce qui met en évidence le fait que D passe par le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ et dirigée par $\vec{u}=(0,-1,1)$.

Passage d'une représentation paramétrique à un système d'équations cartésiennes

On peut suivre ce modèle, basé sur le principe *d'élimination* du paramètre t entre x, y et z. Soit D la droite de représentation paramétrique
$$t\mapsto \begin{cases} x=2-3t \\ y=1+2t \\ z=-1+t. \end{cases}$$

- En un point de paramètre t de D, L_1 donne $t=\frac{1}{3}(2-x)$.
- En reportant cette expression de t dans L_2, on obtient
$$y=1+2\times\frac{1}{3}(2-x)$$
c'est à dire:
$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3},$$
ce qui fournit une première équation.
- En reportant cette expression de t dans L_3, on obtient
$$z=-1+\frac{1}{3}(2-x),$$
c'est à dire
$$z=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3},$$
ce qui fournit une deuxième équation.

- Finalement, un système d'équations cartésiennes de D est

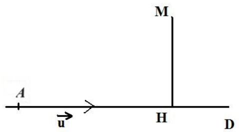
$$\left\{\begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \\ z = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

9.3 Distance à une droite dans l'espace

Proposition XIII.9.17 Soit D la droite de l'espace passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Alors pour tout point M de l'espace, sa distance $d(M, D)$ à la droite D est donnée par

$$d(M, D) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

En effet, cette distance est par définition la distance du point M à son projeté orthogonal H



sur D et on peut la calculer sans avoir à trouver le point H en procédant ainsi: en se basant sur le fait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont liés et donc que leur produit vectoriel est nul, on a dans un premier temps

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} &= \vec{u} \wedge (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \\ &= \vec{u} \wedge \overrightarrow{AH} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM} \\ &= \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}. \end{aligned}$$

Ensuite, sachant que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on obtient en prenant la norme des deux membres :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\| &= \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}\| \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\overrightarrow{HM}\|. \end{aligned}$$

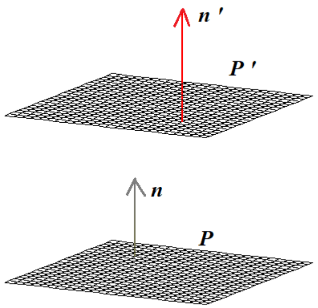
D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} d(M, D) &= HM \\ &= \|\overrightarrow{HM}\| \\ &= \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}. \end{aligned}$$

10 Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

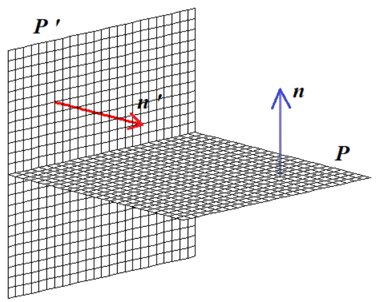
Proposition XIII.10.18 Deux plans P et P' sont parallèles:

- évidemment s'ils sont confondus ou sans point commun,
- lorsque des vecteurs normaux respectifs sont colinéaires,
- donc si P et P' ont pour équation respective $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, lorsque $\vec{n} = (a, b, c)$ et $\vec{n}\,' = (a', b', c')$ sont proportionnels.



Remarque. Lorsque ces deux vecteurs normaux dépendent de paramètres, il est recommandé d'exprimer la colinéarité par la nullité du produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{n}\,'$.

Proposition XIII.10.19 Deux plans P et P' sont perpendiculaires lorsque des vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux
donc si P et P' ont pour équation respective $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, lorsque $\vec{n} = (a, b, c)$ et $\vec{n}' = (a', b', c')$ satisfont $\langle \vec{n}, \vec{n}\,' \rangle = 0$.



Proposition XIII.10.20 Deux droites D et D' sont parallèles:

- évidemment si elles sont confondues ou sans point commun,
- lorsque des vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires; donc si D et D' sont respectivement dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$, lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont colinéaires.

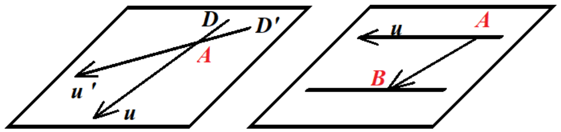
Remarque. Lorsque ces deux vecteurs dépendent de paramètres, il est recommandé d'exprimer la colinéarité par la nullité du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}\,'$.

Proposition XIII.10.21 Deux droites D et D' sont perpendiculaires lorsque des vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux; donc si D et D' sont respectivement dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$, lorsque $\langle \vec{u}, \vec{u}\,' \rangle = 0$.

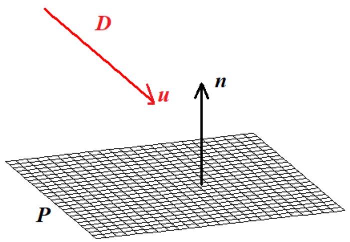
Proposition XIII.10.22 Deux droites D et D' sont coplanaires lorsqu'elles sont concourantes ou lorsqu'elles sont parallèles.

Le plan les contenant est alors

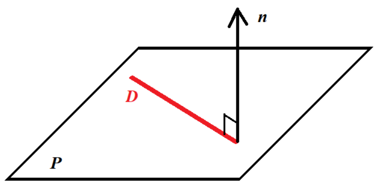
- le plan passant par le point de concours et dirigé par $(\vec{u}, \vec{u}')$ où $\vec{u}$, $\vec{u}'$ sont des vecteurs directeurs respectifs de D et D' dansle premier cas,
- le plan passant par un point A choisi sur D, dirigé par $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\,')$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et B un point choisi sur D'.



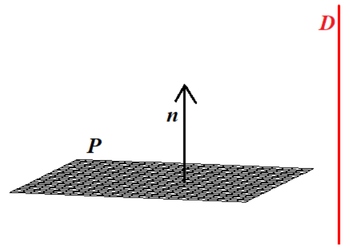
Proposition XIII.10.23 Une droite D est parallèle à un plan P lorsqu'un vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur normal à P.



Proposition XIII.10.24 Une droite D est incluse dans un plan P lorsqu'un vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur normal à P (ce qui assure le parallélisme) et lorsqu'il existe un point commun à D et à P.



Proposition XIII.10.25 Une droite D est orthogonale à un plan P lorsqu'un vecteur directeur de D est colinéaire à un vecteur normal à P.

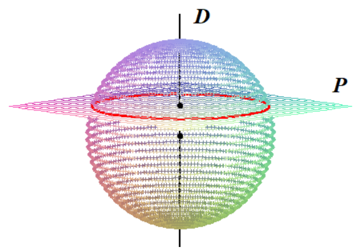


11 Sphères et cercles de l'espace

Proposition XIII.11.26

- La sphère S de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$ (ou encore $\Omega M^2 = R^2$).
- En notant $\Omega(a, b, c)$ et $M(x, y, z)$, le point M appartient à S si et seulement si
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$
qui est donc une équation cartésienne de S.
- L'application
$$(\theta, \varphi) \longmapsto (a + R\cos\varphi\sin\theta, b + R\sin\varphi\sin\theta, c + R\cos\theta)$$
avec $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, est une paramétrisation de cette sphère .
- Un cercle de l'espace est l'intersection (lorsqu'elle est non vide) d'une sphère S avec un plan P.
  - L'axe D du cercle est la normale au plan P passant par le centre de la sphère,
  - son centre est le projeté orthogonal du centre de la sphère sur le plan P

Remarque. Son rayon vaut $\sqrt{R^2 - h^2}$, où R est le rayon de la sphère et h est la distance du centre de la sphère au centre du cercle, comme on le voit en appliquant le théorème de Pythagore.



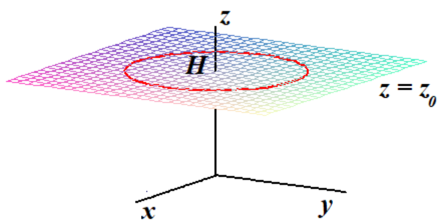
Cas particulier important:

Proposition XIII.11.27 Étant donnés un réel z_0 et un réel $r > 0$, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = z_0 \end{array}\right.$$

définissent un cercle: le cercle d'axe $(O; \vec{k})$, centré au point de coordonnées $(0, 0, z_0)$ et de rayon r.
Une paramétrisation de ce cercle est

$$t \longmapsto \left\{\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = z_0 \end{array}\right. \qquad t \in [0, 2\pi].$$



C'est en effet l'intersection de la sphère de centre $\Omega(0, 0, z_0)$ et de rayon r avec le plan d'équation $z = z_0$, puisque:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \\ z = z_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = z_0. \end{array}\right.$$

Chapitre XIV

Courbes paramétrées (deuxième année)

1 Préliminaires: continuité et dérivation des fonctions vectorielles

Dans cette section, il sera question d'étendre certaines définitions et certains résultats concernant la dérivation de fonctions définies sur un intervalle et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ autrement dit, dans une approche plus géométrique, à valeurs dans le plan ou dans l'espace.

Le plan est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et toutes les coordonnées des points seront données dans ce repère.

Définition XIV.1.1 *Limite d'une fonction à valeurs vectorielles.*
Soit I un intervalle et $f : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ une application définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$; ainsi, $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont des fonctions définies sur I et à valeurs réelles.
Soit t_0 un point de I ou une extrémité de I, éventuellement infinie.

- On dit que $f(t)$ tend vers le point M lorsque t tend vers t_0 lorsque $\|\overrightarrow{Mf(t)}\|$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0 i.e. lorsque la distance de $f(t)$ à M tend vers 0 lorsque t tend vers t_0. On dit alors que M est la limite de f en t_0.
- Les coordonnées de M étant (a, b), ceci se produit si et seulement si a et b sont la limite de x et y en t_0.

Démonstration. On a $\|\overrightarrow{Mf(t)}\| = \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2}$.

- Si $\|\overrightarrow{Mf(t)}\| \to 0$ lorsque $t \to t_0$, alors du fait que
$$\begin{aligned} |x(t) - a| &= \sqrt{(x(t) - a)^2} \\ &\leq \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2}, \end{aligned}$$
on voit par théorème de majoration que $|x(t) - a| \to 0$ i.e. $x(t) \to a$. De même, $y(t) \to b$.
- Si $x(t) \to a$ et $y(t) \to b$, alors
$$(x(t) - a)^2 \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0, \quad (y(t) - b)^2 \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$$
et en conséquence $\sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2} \to 0$. Ainsi, $\|\overrightarrow{Mf(t)}\| \to 0$.

Dans le contexte précédent, la notion suivante est naturelle:

Définition XIV.1.2 *Continuité d'une fonction à valeurs vectorielles.* On dit que f est continue en un point $t_0 \in I$ lorsque $f(t)$ tend vers $f(t_0)$ quand t tend vers t_0.

- Ceci se produit si et seulement si les fonctions x et y sont continues en t_0.

On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

- Ceci se produit si et seulement si les fonctions x et y sont continues sur I.

Définition XIV.1.3 Soit I un intervalle et $f : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ une application définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

- On dit que f est dérivable en un point $t_0 \in I$ sur I lorsque les fonctions x et y sont dérivables en t_0. On appelle alors vecteur dérivé de f en t_0 le vecteur
$$f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$
- On dit que f est de classe C^1 sur I lorsque les fonctions x et y sont de classe C^1 sur I.
- Plus généralement, on dit que f est de classe C^n sur I lorsque x et y sont de classe C^n sur I; dans ce cas pour tout $t \in I$, on note $f^{(n)}(t)$ le vecteur
$$f^{(n)}(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)).$$

Interprétation cinématique. On considère une fonction f de classe C^1 sur un intervalle I; il est d'usage, en l'absence d'ambiguïté, de noter $t \mapsto M(t)$ cette fonction. Les dérivées pourront aussi être notées $\frac{d}{dt}$, $\frac{d^2}{dt^2}$.

- $M(t)$ est appelé ***position*** du point mobile M à l'instant t,
- $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)$ est son ***vecteur vitesse***,
- $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)\right\|$ est sa ***vitesse numérique*** à l'instant t,
- $\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}(t)$ est son ***vecteur accélération*** à l'instant t (pour une fonction de classe C^2),
- l'ensemble des points $M(t)$, t parcourant I, est appelé ***trajectoire*** du point mobile.

Proposition XIV.1.1 ***Formule de Taylor-Young.*** Soit f une application de classe C^n sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Alors, au voisinage de tout point $t_0 \in I$:
$$f(t) \underset{t\to t_0}{=} f(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t - t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + \vec{o}\big((t - t_0)^n\big).$$

Remarque. La notation $\vec{o}\big((t - t_0)^n\big)$ est un raccourci pour
$$\left(o\big((t - t_0)^n\big), o\big((t - t_0)^n\big)\right).$$

Démonstration. Évidente, en raisonnant sur chaque composante.

Proposition XIV.1.2 Soit $\vec{V}$ une application de classe C^n sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $t \mapsto \lambda(t)$ une application de classe C^n sur I à valeurs réelles. Alors la fonction

$$t \longmapsto \lambda(t)\vec{V}(t)$$

est de classe C^n sur I et

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\lambda(t)\vec{V}(t)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{(k)}(t)\frac{d^{(n-k)}}{dt^{(n-k)}}(\vec{V})(t)$$

(formule de Leibniz). En particulier

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\vec{V}(t)\right) &= \lambda'(t)\vec{V}(t) + \lambda(t)\vec{V}'(t)\\
\frac{d^2}{dt^2}\left(\lambda(t)\vec{V}(t)\right) &= \lambda''(t)\vec{V}(t) + 2\lambda'(t)\vec{V}'(t) + \lambda(t)\vec{V}''(t).
\end{aligned}$$

Soit $\vec{W}$ une autre application de classe C^n sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ des scalaires. Alors la fonction

$$\alpha\vec{V} + \beta\vec{W} : t \longmapsto \alpha\vec{V}(t) + \beta\vec{W}(t)$$

est de classe C^n sur I et

$$\left(\alpha\vec{V} + \beta\vec{W}\right)^{(n)}(t) = \alpha\vec{V}^{(n)}(t) + \beta\vec{W}^{(n)}(t).$$

Démonstration. Évidente, en raisonnant sur chaque composante.

Le plan est muni de son produit scalaire habituel et le repère $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est supposé orthonormé.

Proposition XIV.1.3 Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux applications de classe C^1 sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Alors

$$k : t \mapsto \langle\vec{U}(t),\vec{V}(t)\rangle$$

est de classe C^1 sur I et

$$\forall t \in I,\ k'(t) = \langle\vec{U}'(t),\vec{V}(t)\rangle + \langle\vec{U}(t),\vec{V}'(t)\rangle.$$

Démonstration. Écrivons

$$\vec{U}(t) = (u_1(t),u_2(t)), \quad \vec{V}(t) = (v_1(t),v_2(t)),$$

si bien que

$$k(t) = u_1(t)v_1(t) + u_2(t)v_2(t).$$

Il est donc clair que k est de classe C^1 sur I (somme produit) et

$$k'(t) = u_1'(t)v_1(t) + u_1(t)v_1'(t) + u_2'(t)v_2(t) + u_2(t)v_2'(t)$$

et puisque

$$\vec{U}'(t) = (u_1'(t),u_2'(t)), \quad \vec{V}'(t) = (v_1'(t),v_2'(t)),$$

on a

$$\begin{aligned}
\langle\vec{U}'(t),\vec{V}(t)\rangle + \langle\vec{U}(t),\vec{V}'(t)\rangle &= u_1'(t)v_1(t) + u_1(t)v_1'(t) + u_2'(t)v_2(t) + u_2(t)v_2'(t)\\
&= k'(t).
\end{aligned}$$

Il en résulte:

Proposition XIV.1.4 Soit $\vec{U}$ une application de classe C^1 sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\|\vec{U}(t)\|$ soit constant. Alors, pour tout $t \in I$:

$$\vec{U}(t) \perp \vec{U}'(t).$$

Démonstration. En effet, par hypothèse, l'application

$$k \mapsto \langle\vec{U}(t),\vec{U}(t)\rangle$$

est constante. Sa dérivée est donc nulle. Par ailleurs, cette dérivée est

$$2\langle\vec{U}(t),\vec{U}'(t)\rangle,$$

d'où le résultat.

2 Introduction, définition et exemples

Soit $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. Tracer une courbe γ du plan de représentation paramétrique

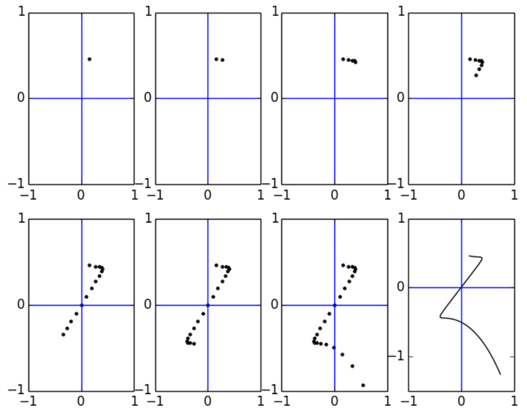
$$f : t \mapsto \left\{\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right. \qquad t \in I,$$

c'est tracer point par point, c'est à dire valeur de t après valeur de t, tous les points de coordonnées $(x(t),y(t))$ dans $\mathcal{R}$, t parcourant un certain domaine I.

Ci-dessous le tracé point par point de la courbe paramétrée

$$t \mapsto (t^2\sin(t) - t, t^3\cos(t) - t)$$

sur l'intervalle $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$.



- Le vocabulaire et les préoccupations sont les mêmes que pour le tracé du graphe d'une fonction. Principalement, on cherchera à tracer la courbe avec le moins de points possibles mais en garantissant un tracé le plus fin qui soit, ce que l'on pourra obtenir en étudiant:
  - des symétries,
  - des variations,
  - des tangentes,

– des branches infinies.

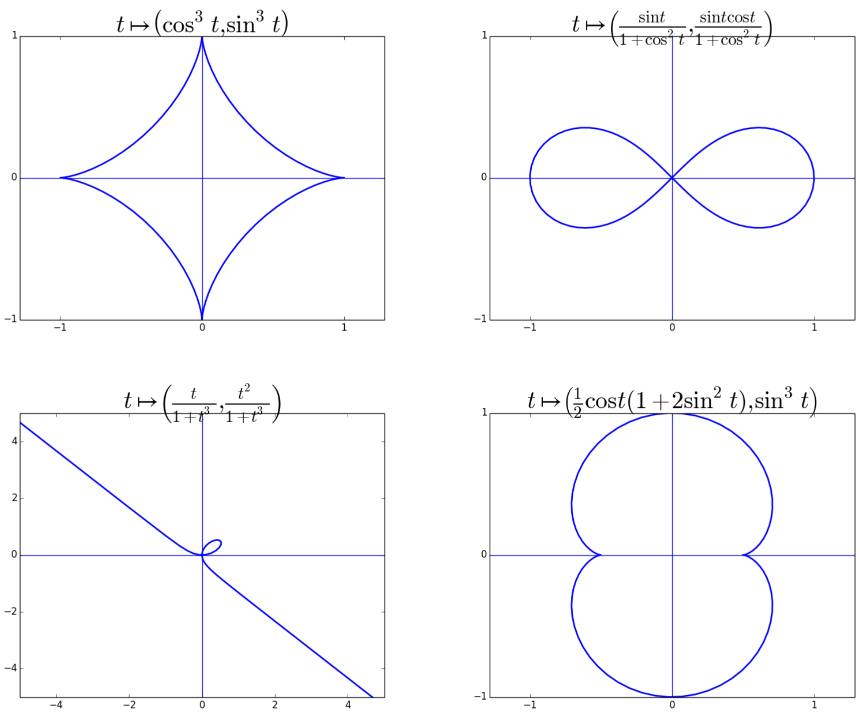
Mais il faudra bien prendre garde que le tracé d'une courbe paramétrée n'est pas le tracé du graphe d'une fonction: le paramètre t ne se "voit" pas: il n'est pas en abscisse, il n'est pas en ordonnée.

Définition XIV.2.4 On se donne une application f à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ par $f(t) = (x(t), y(t))$.

- L'ensemble γ des points du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ dans $\mathcal{R}$, t parcourant D est appelé une courbe paramétrée et on dit que f est une *paramétrisation* de γ ou une *représentation paramétrique* de γ.
- Ce paramétrage pourra aussi être noté sous la forme $f : t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ ou $t \mapsto M(t)$ et présenté sous la forme
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t). \end{cases}$$
- On dira aussi que γ admet la représentation paramétrique (D, f).

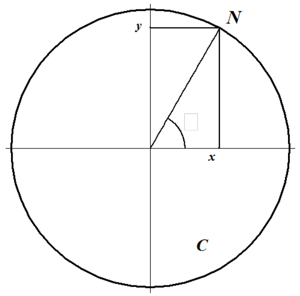
À titre d'exemples, quelques courbes classiques

À l'issue de ce chapitre, on aura tous les outils pour parvenir aux représentations des courbes suivantes:

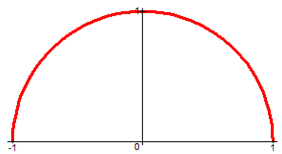


Autre exemple: paramétrisation d'un cercle

La courbe γ de représentation paramétrique
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$
sur $D = [0, 2\pi]$ est une paramétrisation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 car on sait que tout point N de ce cercle est représenté par un point de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ et vice-versa



alors que La courbe γ de représentation paramétrique
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$
sur $D' = [0, \pi]$ est une paramétrisation du demi-cercle de centre O et de rayon 1 du demi-plan $y \geq 0$:



Plus généralement,
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = a + R\cos t \\ y(t) = b + R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$
avec $R > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est une paramétrisation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R.

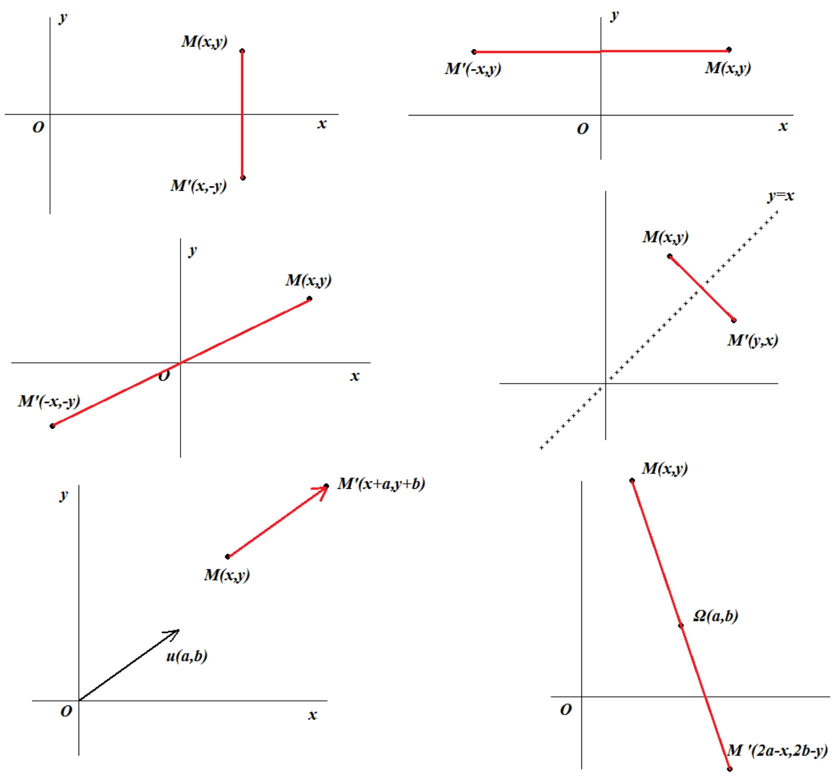
3 Réduction du domaine d'étude

Réduire le domaine d'étude, c'est se ramener à un domaine J le plus petit possible tel que le tracé de la courbe sur J auquel on fait subir une ou plusieurs transformations géométriques (essentiellement des symétries, quelques fois des translations) fournit l'entièreté de la courbe.

! C'est chose classique lors du tracé du graphe d'une fonction: si celle-ci est paire, il suffit de l'étudier et de la tracer sur $[0, +\infty[$ et de compléter le tracé par une symétrie par rapport à (Oy). Là aussi, les préoccupations sont les mêmes que pour le tracé d'une fonction mais techniquement, cela n'a rien à voir!

Ci-dessous quelques expressions analytiques de transformations géométriques usuelles (les symétries sont des symétries orthogonales):

- Symétrie d'axe Ox: $M(x,y) \longmapsto M'(x,-y)$.
- Symétrie d'axe Oy: $M(x,y) \longmapsto M'(-x,y)$.
- Symétrie de centre O : $M(x,y) \longmapsto M'(-x,-y)$.
- Symétrie par rapport à la droite $y=x$ (appelée première bissectrice): $M(x,y) \longmapsto M'(y,x)$.
- Translation de vecteur (a,b): $M(x,y) \longmapsto M'(x+a,y+b)$.
- Symétrie de centre $\Omega(a,b)$: $M(x,y) \longmapsto M'(2a-x,2b-y)$.



On sera très souvent amenés à constater que les points de paramètres t et $t'=-t$, ou t et $t'=t+\pi, \dots$ quelques fois t et $t'=\frac{1}{t}$ sont symétriques par rapport à l'un des axes, ou par rapport à l'origine ou un point précis, ou par rapport à une droite particulière, ou sont en translation, ce que l'on constate ainsi:

Comparaison des coord. de $M(t')$ et $M(t)$	$\begin{cases} x(t')=x(t) \\ y(t')=-y(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x(t')=-x(t) \\ y(t')=y(t) \end{cases}$
Lien entre $M(t)$ et $M(t')$	symétriques par rapport à Ox	symétriques par rapport à Oy

Comparaison des coord. de $M(t')$ et $M(t)$	$\begin{cases} x(t')=-x(t) \\ y(t')=-y(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x(t')=y(t) \\ y(t')=x(t) \end{cases}$	$\begin{cases} x(t')=x(t)+a \\ y(t')=y(t)+b \end{cases}$
Lien entre $M(t)$ et $M(t')$	symétriques par rapport à O	symétriques par rapport à $y=x$	en translation de vecteur (a,b)

On recherchera alors un domaine J tel que lorsque t parcourt J, le paramètre t' décrive le reste du domaine de définition I:

Théorème XIV.3.5

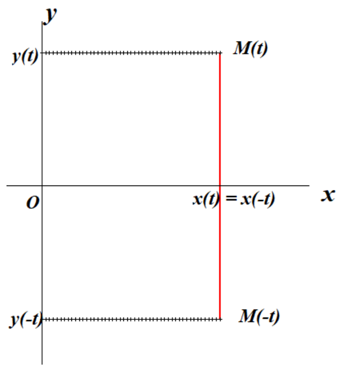
- Lorsque, pour étudier une courbe sur $I=\mathbb{R}$, resp. $I=[-a,a]$, des symétries se produisent en changeant t en $t'=-t$: on étudiera et tracera γ sur $J=\mathbb{R}^+$, resp. $J=[0,a]$; on complétera par la symétrie en question pour avoir tout γ.
- Lorsque, pour étudier une courbe sur $I=[0,2T]$, des symétries se produisent en changeant t en $t'=t+T$: on étudiera et tracera γ sur $J=[0,T]$; on complétera par la symétrie en question pour avoir tout γ.
- Lorsque, pour étudier une courbe sur $I=[0,T]$, des symétries se produisent en changeant t en $T-t$: on étudiera et tracera γ sur $J=\left[0,\frac{T}{2}\right]$; on complétera par la symétrie en question pour avoir tout γ.
- En cas de T-périodicité commune des fonctions x et y, la courbe γ est entièrement décrite sur tout intervalle de longueur T, comme $[0,T]$ ou $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$.

Premier exemple

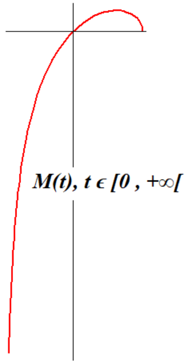
Déterminer un intervalle d'étude pour la courbe γ de paramétrisation

$$f_1 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \\ y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

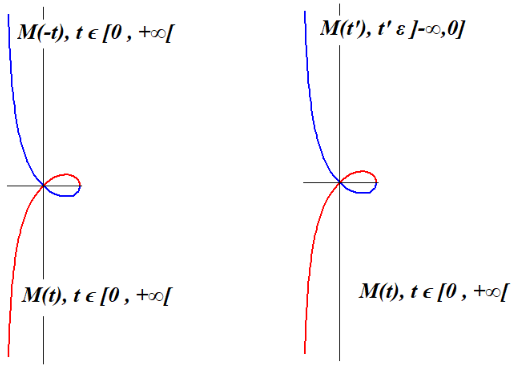
- On a
$$x(-t)=x(t), \quad y(-t)=-y(t)$$
donc les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox:



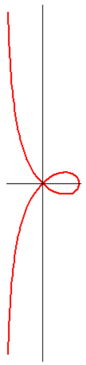
- Supposons avoir tracé la courbe sur $[0,+\infty[$ i.e. d'avoir tracé les points $M(t)$ avec $t \in [0,+\infty[$



- En effectuant le symétrique de cette portion de courbe par rapport à Ox, on trace en réalité les points $M(t)$ avec $t \in]-\infty, 0]$



- car lorsque t parcourt $[0, +\infty[$, $t' = -t$ parcourt $]-\infty, 0]$, et on obtient donc ainsi toute la courbe:



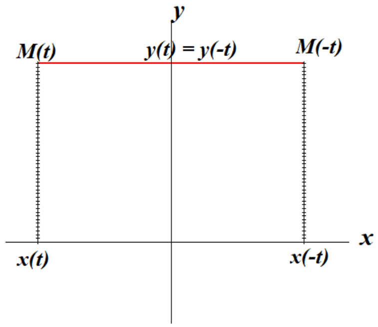
- Ainsi, il suffit d'étudier et tracer γ sur $[0, +\infty[$ et d'effectuer le symétrique de cette portion de courbe par rapport à Ox pour avoir toute la courbe γ.

Deuxième exemple

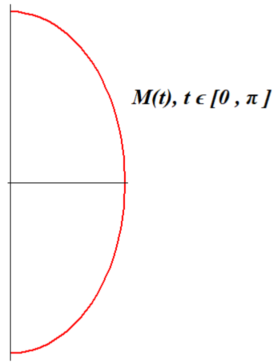
Déterminer un intervalle d'étude pour la courbe γ de paramétrisation

$$f_1 : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 2\sin t \\ y(t) = 3\cos t. \end{cases}$$

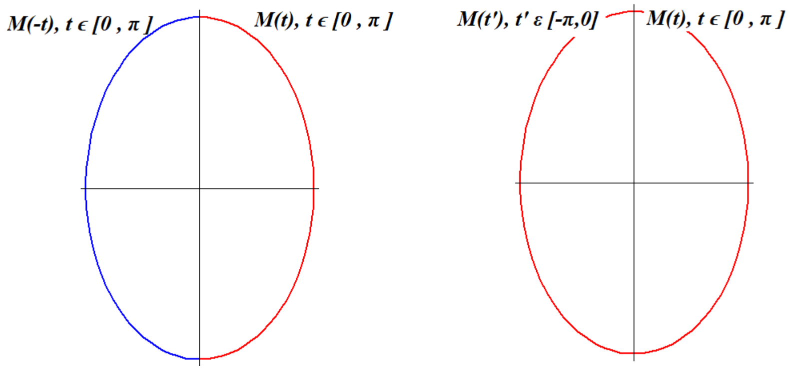
- x et y sont toutes deux 2π-périodiques: il est alors clair que γ est entièrement décrite sur un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$.
- On a
$$x(-t) = -x(t), \quad y(-t) = y(t)$$
donc les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy:



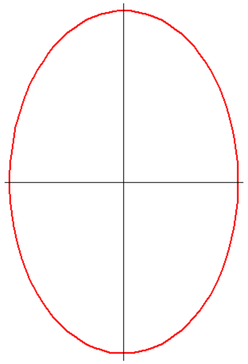
- Supposons avoir tracé la courbe sur $[0, \pi]$ i.e. d'avoir tracé les points $M(t)$ avec $t \in [0, \pi]$



- En effectuant le symétrique de cette portion de courbe par rapport à Oy, on trace en réalité les points $M(t)$ avec $t \in [-\pi, 0]$



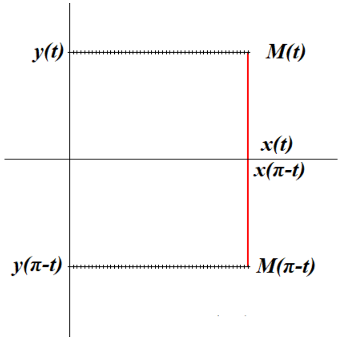
- car lorsque t parcourt $[0, \pi]$, $t' = -t$ parcourt $[-\pi, 0]$, et on obtient donc ainsi toute la courbe:



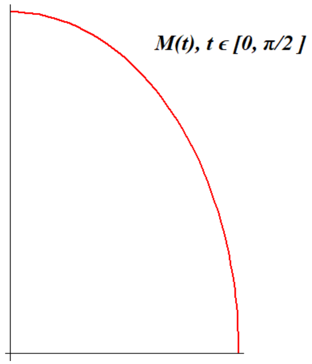
- Ainsi, il suffit d'étudier et tracer γ sur $[0, \pi]$ et d'effectuer le symétrique de cette portion de courbe par rapport à Oy pour avoir toute la courbe γ.
- Mais il y a une autre symétrie à mettre en évidence:

$$x(\pi - t) = 2\sin(\pi - t) = 2\sin t = x(t), \quad y(\pi - t) = 3\cos(\pi - t) = -3\cos t = -y(t),$$

donc les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox:

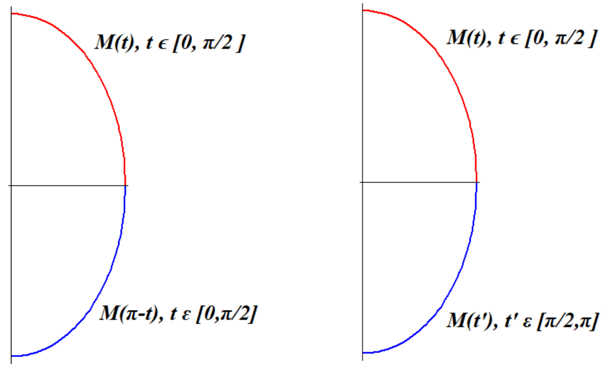


- Supposons avoir tracé la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ i.e. d'avoir tracé les points $M(t)$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

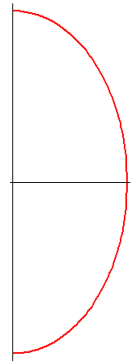


- En effectuant le symétrique de cette portion de courbe par rapport à Ox, on trace en réalité les points $M(t)$ avec $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ car

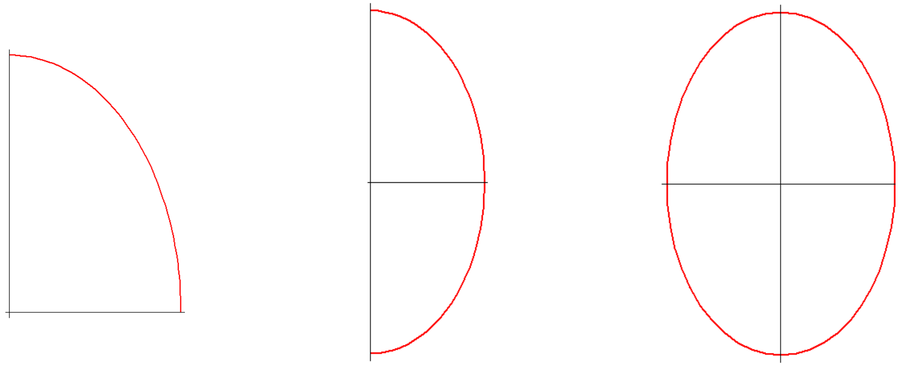
$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \implies -\frac{\pi}{2} \leq -t \leq 0 \implies \pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi - t \leq \pi$$



- autrement dit, lorsque t parcourt $[0, \frac{\pi}{2}]$, $t' = \pi - t$ parcourt $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ et on obtient ainsi toute la courbe sur $[0, \pi]$



- Ainsi, il suffit d'étudier et tracer γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et d'effectuer le symétrique de cette portion de courbe par rapport à Ox puis par rapport à Oy pour avoir toute la courbe γ:



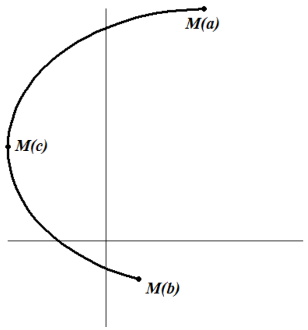
4 Variations

L'étude des variations de x et de y est très importante car leurs connaissances permettent de prévoir l'allure générale de la courbe en termes de "virages à gauche, à droite..."

- Si l'on a par exemple:

t	a		c		b
x		$\searrow$		$\nearrow$	
y		$\searrow$		$\searrow$	

- alors en traçant la courbe point par point, du point de paramètre a (point $M(a)$) au point de paramètre b (point $M(b)$), les abscisses et les ordonnées vont décroître jusqu'au point de paramètre c (point $M(c)$).
- À partir du point $M(a)$, on va donc descendre (décroissance de y) et aller vers la gauche (décroissance de x) jusqu'au point $M(c)$
- puis à partir du point $M(c)$, les abscisses vont se mettre à croître (croissance de x) alors que les ordonnées continuent de décroître (décroissance de y).
- À partir du point $M(c)$, on va donc descendre et aller vers la droite jusqu'au point $M(b)$.
- La courbe γ va donc présenter un coude:



Premier plan d'étude. On étudie les variations de x et y que l'on consigne dans un tableau. On calcule les coordonnées de quelques points de la courbe: les points dont les paramètres donnent lieu à des changements dans les variations de x et y suffisent en général.

Premier exemple d'ébauche de courbe

On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2 - \dfrac{2}{t} \\ \\ y(t) = t^2 + \dfrac{16}{t} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}^*.$$

Dresser le tableau de variations des fonctions x et y et en déduire une ébauche de γ.

- On calcule

$$x'(t) = 2t + \frac{2}{t^2} = 2\frac{t^3+1}{t^2}$$

et on a

$$t^3 + 1 \geq 0 \iff t^3 \geq -1 \iff t \geq -1.$$

On rappelle en effet que la fonction $t \mapsto t^3$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans lui-même dont l'application réciproque est $\varphi : u \mapsto \sqrt[3]{u}$ et qui est elle aussi strictement croissante; en conséquence:

$$t^3 \geq 1 \iff \sqrt[3]{t^3} \geq \sqrt[3]{-1} \iff t \geq -1.$$

- On calcule

$$y'(t) = 2t - \frac{16}{t^2} = 2\frac{t^3-8}{t^2}$$

et on a

$$t^3 - 8 \geq 0 \iff t^3 \geq 8 \iff t \geq 2.$$

- On en déduit le tableau des variations de x et y, où l'on précise les valeurs de x et y pour les valeurs des paramètres qui donnent lieu à des changements dans les variations de x et y:

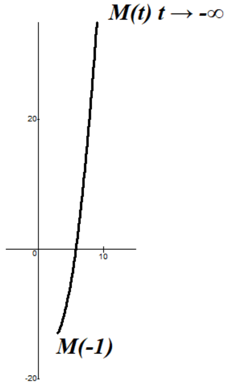
$$x(-1) = 3,\ y(-1) = -15 \qquad x(2) = 3,\ y(2) = 12$$

ainsi que les limites aux bornes du domaine d'étude:

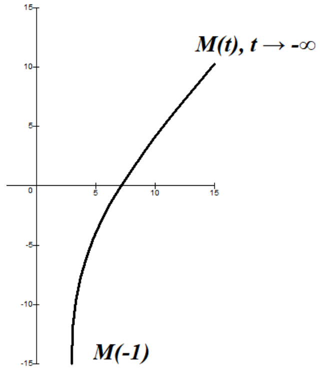
t	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-15	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

On procède à l'ébauche du tracé en parcourant le domaine $\mathbb{R}^*$ "par ordre chronologique", en s'arrêtant à chaque "événement" (changement de variation dans x ou y):

- lorsque t "part" de $-\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ sont tous les deux "situés au voisinage de $+\infty$" (donc en haut et à droite du graphique) et lorsque t parcourt $]-\infty, -1]$, x et y décroissent, ce qui se manifeste par une une progression vers la gauche (décroissance de x) et vers le bas (décroissance de y) pour atteindre le point $M(-1)$, point de coordonnées $(3, -15)$, ce qui donne l'allure suivante:

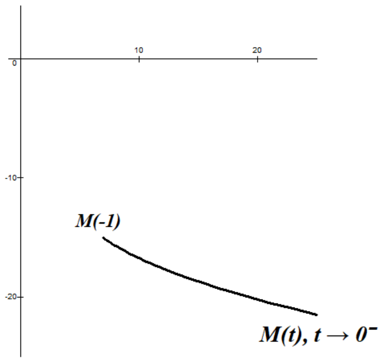


allure plausible

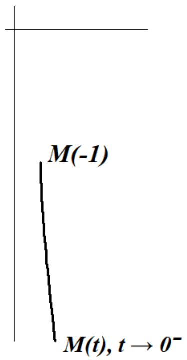


allure réelle (après étude approfondie)

– lorsque t parcourt $[-1, 0[$, x croît de 3 jusqu'à $+\infty$ et y décroît jusqu'à $-\infty$ à partir du point $M(-1)$, ce qui se manifeste par une une progression vers la droite (croissance de x) et vers le bas (décroissance de y); la courbe "atteint" alors le coin en bas à droite du graphique, ce qui donne l'allure suivante:

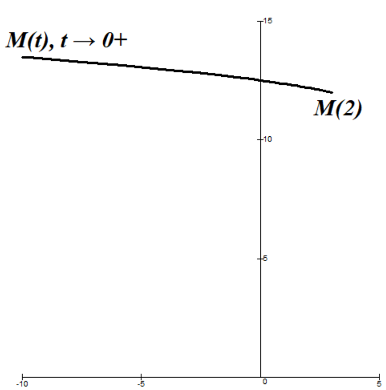


allure plausible

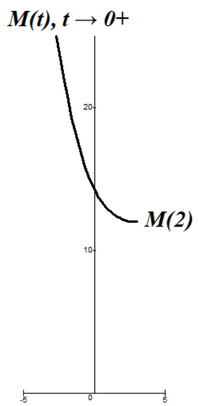


allure réelle (après étude approfondie)

– lorsque t parcourt $]0, 2]$, x croît de $-\infty$ jusqu'à 3 et y décroît de $+\infty$ jusqu'à 12 à partir du point $M(-1)$, ce qui se manifeste par une une progression vers la droite (croissance de x) et vers le bas (décroissance de y) du coin supérieur gauche du graphique vers le point de coordonnées $(3, 12)$, ce qui donne l'allure suivante:

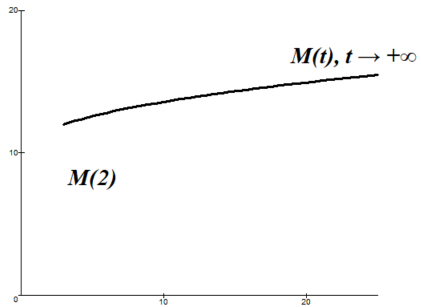


allure plausible

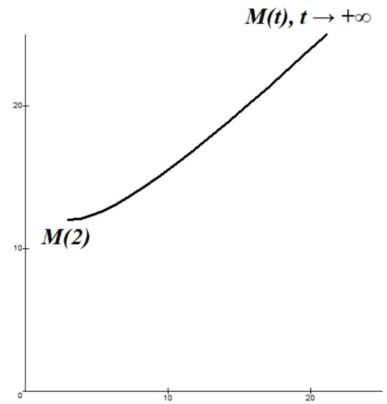


allure réelle (après étude approfondie)

– lorsque t parcourt $[2, +\infty[$, x croît de 3 jusqu'à $+\infty$ et y croît de 12 jusqu'à $+\infty$ à partir du point $M(2)$, ce qui se manifeste par une une progression vers la droite (croissance de x) et vers le haut (croissance de y) du point de coordonnées $(3, 12)$ vers le coin supérieur droit du graphique, ce qui donne l'allure suivante:

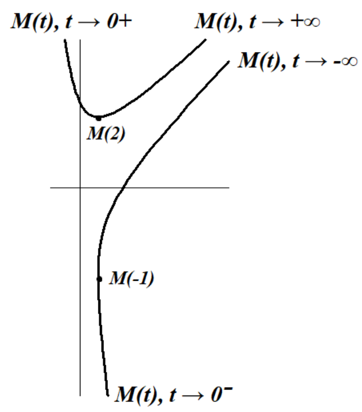


allure plausible



allure réelle (après étude approfondie)

Pour information, voilà à quoi ressemble la courbe γ après étude approfondie (tangentes, branches infinies).



courbe après étude approfondie

5 Tangente en un point régulier: absolument fondamental

Dans ce paragraphe et les suivants, les paramétrisations des courbes rencontrées seront toujours supposées de classe de dérivation suffisante pour que les énoncés aient un sens.

Théorème XIV.5.6 Un point $M(t_0)$ de γ de paramétrisation (I, f) est dit ***régulier*** si

$$f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0).$$

- La courbe γ possède alors une tangente au point $M(t_0)$.
- Cette tangente est dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.

Un point $N(x, y)$ appartient donc à cette tangente si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M(t_0)N}$ et $f'(t_0)$ sont liés, donc si et seulement si

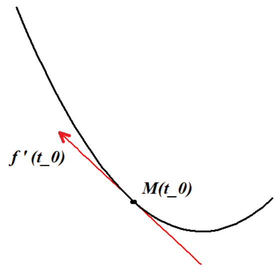
$$\det(\overrightarrow{M(t_0)N}, f'(t_0)) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation cartésienne

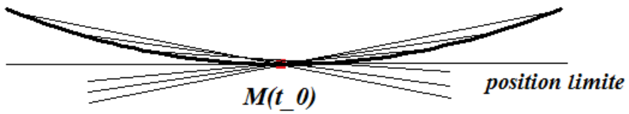
$$y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

La courbe γ est dite ***régulière*** si tous ses points sont réguliers, donc si

$$\forall t \in I,\ f'(t) \neq (0,0).$$



Démonstration. En effet, on dit naturellement que γ possède une tangente en $M(t_0)$ lorsque la droite $(M(t_0)M(t))$ possède une position limite lorsque t tend vers t_0 et cette droite limite est alors appelée tangente à γ au point $M(t_0)$:



- La tangente, si elle existe, passe déjà par $M(t_0)$: il faut donc préciser sa direction; la droite $(M(t_0)M(t))$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ mais celui-ci tend vers $\vec{0}$ (on suppose que f est continue), ce qui ne nous donne évidemment aucune information.
- La droite $(M(t_0)M(t))$ est aussi dirigée par le vecteur

$$\frac{1}{t - t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)$$

dont les composantes, par définition de la notion de dérivée, tendent vers $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Premier exemple

Soit γ la courbe de paramétrisation

$$f : t \mapsto (t^2 + t, -2t^3 + t^2).$$

Démontrer que le point $M(1)$ est régulier et déterminer une équation cartésienne de la tangente à γ en ce point.

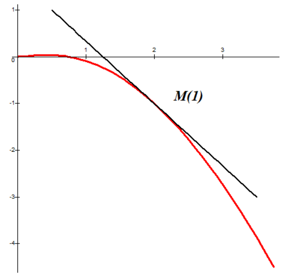
- On a

$$f'(t) = (2t + 1, -6t^2 + 2t) \implies f'(1) = (3, -4).$$

- Puisque $f'(1) = (3, -4) \neq (0,0)$, le point $M(1)$ est régulier et le vecteur $f'(1)$ dirige la tangente à γ en ce point.
- Puisque le point $M(1)$ est le point de coordonnées $(2, -1)$, un point $N(x, y)$ appartient à cette tangente si et seulement si $\overrightarrow{M(1)N}$ et $f'(1)$ sont liés, donc si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{M(1)N}, f'(1)) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - 2 & 3 \\ y + 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \iff -4(x-2) - 3(y+1) = 0$$

si bien que $-4x - 3y + 5 = 0$ est une équation cartésienne de la tangente à γ en son point de paramètre 1.



Deuxième exemple

Soit γ la courbe de paramétrisation

$$f : t \mapsto (\sin t, 2\cos t).$$

Démontrer que le point $M(0)$ est régulier et déterminer une équation cartésienne de la tangente à γ en ce point. Démontrer plus généralement que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ est régulier; déterminer ensuite une équation cartésienne de la tangente à γ en ce point.

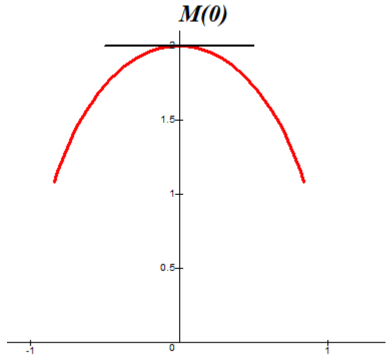
- On a

$$f'(t) = (\cos t, -2\sin t) \implies f'(0) = (1, 0).$$

- Puisque $f'(0) = (1, 0) \neq (0,0)$, le point $M(0)$ est régulier et le vecteur $f'(0)$ dirige la tangente à γ en ce point.
- Puisque le point $M(0)$ est le point de coordonnées $(0, 2)$, un point $N(x, y)$ appartient à cette tangente si et seulement si $\overrightarrow{M(0)N}$ et $f'(0)$ sont liés, donc si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{M(0)N}, f'(0)) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & 1 \\ y - 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff -(y-2) = 0$$

si bien que $-y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de la tangente à γ en son point de paramètre 0.



- Plus généralement, et dans la mesure où $\cos$ et $\sin$ ne s'annulent jamais simultanément en un même point, on voit que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (\cos t, -2\sin t) \neq (0,0),$$
ce qui est la définition même de la régularité du point $M(t)$.
- Un point $N(x,y)$ appartient à la tangente à γ en $M(t)$ si et seulement si $\overrightarrow{M(t)N}$ et $f'(t)$ sont liés, donc si et seulement si
$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{M(t)N}, f'(t)) = 0 \quad &\iff \quad \begin{vmatrix} x - \sin t & \cos t \\ y - 2\cos t & -2\sin t \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \quad -2x\sin t - y\cos t + 2\sin^2 t + 2\cos^2 t = 0 \\ &\iff \quad -2x\sin t - y\cos t + 2 = 0, \end{aligned}$$
qui est donc une équation cartésienne de la tangente à γ en son point de paramètre t.

Comment déterminer les points réguliers ou prouver la régularité?

Soit γ une courbe de paramétrisation
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in I.$$
Pour déterminer les points réguliers de f:
- on calculera formellement $f'(t)$,
- on recherchera les réels t qui satisfont simultanément
$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \quad t \in I.$$
- Les points $M(t)$ pour toute autre valeur de t que celles trouvées ci-dessus sont les points réguliers de γ.
- S'il n'existe aucune solution au système ci-dessus, la courbe γ est régulière.

Premier exemple

On considère la courbe γ de paramétrisation
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2(t-1)^2 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}.$$
Quels sont ses points réguliers?

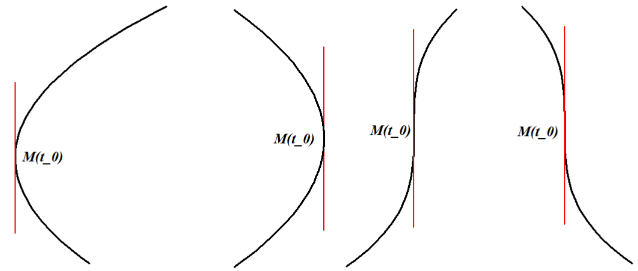
- On calcule
$$x'(t) = 2t(t-1)^2 + 2t^2(t-1), \quad y'(t) = 3t^2 - 3.$$
On voit que
$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\iff 2t(t-1)^2 + 2t^2(t-1) = 0 \iff 2t(t-1)(t-1+t) = 0 \iff t \in \left\{0, 1, \frac{1}{2}\right\} \\ y'(t) = 0 &\iff 3t^2 - 3 = 0 \iff t^2 - 1 = 0 \iff t \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$
si bien que $f'(t) = (0,0) \iff t = 1$. Tous les points de γ sont donc réguliers, à l'exception du point de paramètre 1.

Deuxième exemple

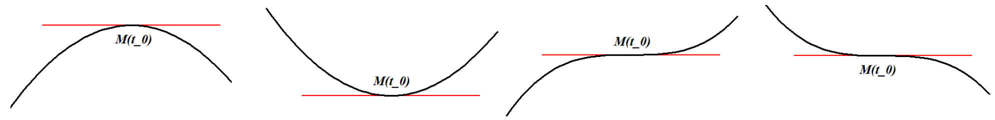
Soit la courbe γ de paramétrisation
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad t \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$
Démontrer que γ est régulière.
- On calcule et simplifie:
$$x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \quad y'(t) = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$
- x' s'annule en $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ et y' s'annule en 0 et en $\sqrt[3]{2}$.
- On voit que le système
$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \quad t \in D$$
ne possède aucune solution;
- La courbe γ est donc régulière.

Cas particuliers: tangentes horizontales et verticales

- En un point *régulier* $M(t_0)$ où $x'(t_0) = 0$, la tangente, dirigée par $f'(t_0) = (0, y'(t_0))$, est alors verticale. Voici quatre configurations possibles:



- En un point *régulier* $M(t_0)$ où $y'(t_0) = 0$, la tangente, dirigée par $f'(t_0) = (x'(t_0), 0)$, est alors horizontale. Voici quatre configurations possibles:



Exemple

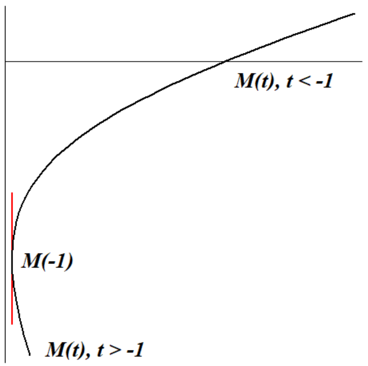
On reprend la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t^2 - \frac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{16}{t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*$$

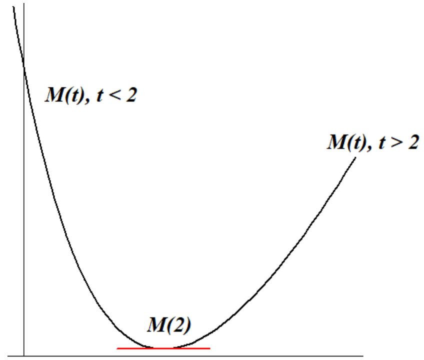
et le tableau de variations

t	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
x	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-15	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

- On a $f'(-1) = (x'(-1), y'(-1)) = (0, -18)$: le point $M(-1)$ est donc un point régulier à tangente verticale. Compte-tenu des variations locales au voisinage de -1 des fonctions x (décroissante puis croissante) et y (décroissante), ce qui se manifeste par une progression vers la gauche (décroissance de x) puis vers la droite (croissance de x) et constamment vers le bas (décroissance de y), l'allure de γ au voisinage de $M(-1)$ est la suivante:



- On a $f'(2) = (x'(2), y'(2)) = (\frac{9}{2}, 0)$: le point $M(2)$ est donc un point régulier à tangente horizontale. Compte-tenu des variations locales au voisinage de 2 des fonctions x (croissante) et y (décroissante puis croissante), ce qui se manifeste par une progression vers la droite (croissance de x) et vers le bas (décroissance de y) puis vers le haut (croissance de y), l'allure de γ au voisinage de $M(2)$ est la suivante:



6 Tangente en un point stationnaire: absolument fondamental

Soit γ une courbe de paramétrisation $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Théorème XIV.6.7

- Un point stationnaire (on dit aussi singulier) est un point $M(t_0)$ tel que $f'(t_0) = \vec{0}$ i.e. tel que $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$.
- La tangente en un tel point est alors la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le premier vecteur dérivé non nul en t_0.

Démonstration 64

Remarque. Dans la pratique, le premier vecteur dérivé non nul en un point stationnaire est très souvent le deuxième.

Concrètement pour déterminer la tangente à $\gamma = (I, f)$ en un point stationnaire $M(t_0)$:

- on calcule formellement $f''(t) = (x''(t), y''(t))$.
- On calcule alors $f''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0))$ et si ce vecteur est non nul, il dirigera la tangente à γ en $M(t_0)$.
- Si $f''(t_0) = (0, 0)$ (situation exceptionnelle), on calcule formellement $f'''(t) = (x'''(t), y'''(t))$, on calcule $f'''(t_0)$ et si ce vecteur est non nul, c'est lui qui dirigera la tangente, etc.

Exemple

On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \left(t^3 - 3t, t^2 + 2t\right).$$

Vérifier que le point $M(-1)$ est stationnaire; déterminer un vecteur directeur de la tangente à γ en ce point ainsi qu'une équation cartésienne de cette tangente.

- On a
$$f'(t) = \left(3t^2 - 3, 2t + 2\right) \quad \Longrightarrow \quad f'(-1) = (0, 0)$$
ce qui démontre que $M(-1)$ est un point stationnaire.

- On calcule
$$f''(t) = (6t, 2) \quad \Longrightarrow \quad f''(-1) = (-6, 0).$$
Étant non nul, le vecteur $f''(-1)$ dirige alors la tangente à γ au point $M(-1)$.
- Puisque $M(-1)$ est le point de coordonnées $f(-1) = (2, -1)$, un point $N(x, y)$ appartient à cette tangente si et seulement si $\overrightarrow{M(-1)N}$ et $f''(-1)$ sont liés, donc si et seulement si
$$\det(\overrightarrow{M(-1)N}, f''(-1)) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-2 & -6 \\ y+1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff -6(y+1) = 0$$
si bien que $y + 1 = 0$ est une équation cartésienne de la tangente à γ en son point de paramètre -1.

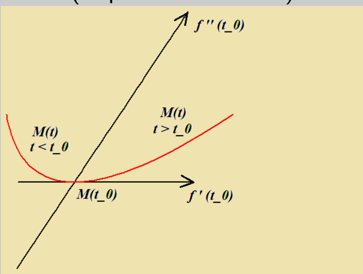
7 Disposition locale: point birégulier, d'inflexion, de rebroussement

Soit γ une courbe de paramétrisation $t \mapsto (x(t), y(t))$. En un point $M(t_0)$ de γ, on recherche:

Théorème XIV.7.8

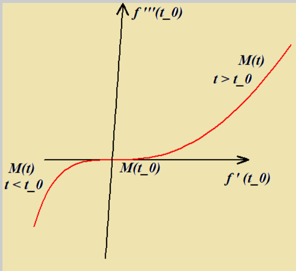
- le premier vecteur dérivé non nul $f^{(p)}(t_0)$ (c'est souvent $p = 1$ ou $p = 2$); comme on le sait, c'est ce vecteur qui dirige la tangente à γ en $M(t_0)$,
- puis le premier vecteur dérivé suivant $f^{(q)}(t_0)$ tel que $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ soient linéairement indépendants. On a alors les dispositions locales suivantes (et on parle alors de *nature* du point):

si $p = 1$ et $q = 2$: point birégulier (disposition ordinaire)



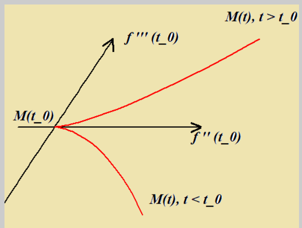
(plus génér. p impair, q pair)

si $p = 1$ et $q = 3$: point d'inflexion



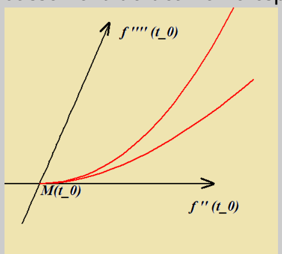
(plus génér. p impair, q impair)

si $p = 2$ et $q = 3$: point de rebroussement de première espèce



(plus génér. p pair, q impair)

si $p = 2$ et $q = 4$: point de rebroussement de deuxième espèce



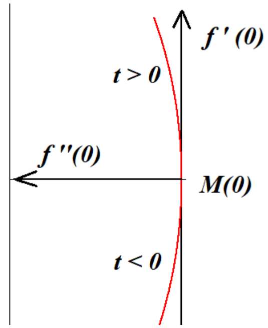
(plus génér. p pair, q pair)

Démonstration 65

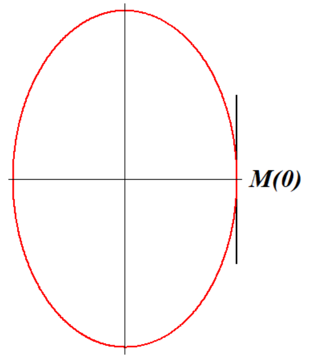
Premier exemple

Déterminer la nature du point $M(0)$ de la courbe γ de paramétrisation
$$f : t \mapsto (2\cos t, 3\sin t),\ t \in [-\pi, \pi]$$
et représenter γ localement au voisinage de ce point.

- On a
$$f'(t) = (-2\sin t, 3\cos t) \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = (0, 3)$$
ce qui montre que $M(0)$ est un point régulier de γ, la tangente à γ en ce point étant dirigée par $f'(0) = (, 3)$ ou, encore mieux car plus simple, par le vecteur $(0, 1)$ qui lui est colinéaire. On calcule
$$f''(t) = (-2\cos t, -3\sin t) \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = (-2, 0),$$
manifestement non lié au vecteur $f'(0)$: le point $M(1)$ est donc birégulier et γ présente donc la disposition ordinaire au voisinage du point $M(0)$:



- Pour information, voici le tracé sur $[-\pi, \pi]$ (à l'aide du logiciel Maple; il s'agit d'une ellipse):



Deuxième exemple

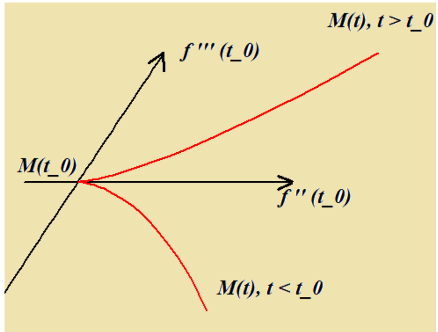
Déterminer la nature du point $M(0)$ de la courbe γ de paramétrisation
$$f : t \mapsto (-t^2 - 2t^3, t^3 + t^5)$$
et représenter γ localement au voisinage de ce point.

- On a
$$f'(t) = (-2t - 6t^2, 3t^2 + 5t^4) \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = (0, 0)$$
ce qui montre que $M(0)$ est un point stationnaire.

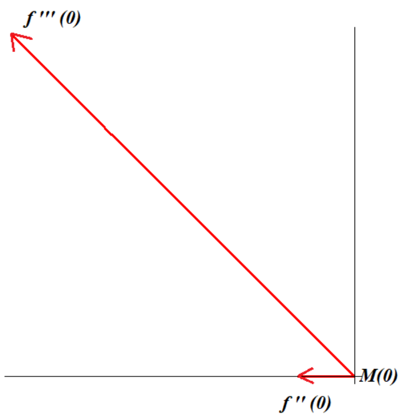
- On calcule
$$f''(t) = (-2 - 12t, 6t + 20t^3) \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = (-2, 0).$$
Le vecteur $f''(0)$ est le premier vecteur dérivé non nul en 0 et c'est donc ce vecteur qui dirige la tangente à γ en $M(0)$.

- On calcule
$$f'''(t) = (-12, 6 + 60t^2) \quad \Longrightarrow \quad f'''(0) = (-12, 6).$$
Les vecteurs $(f''(0), f'''(0))$ sont manifestement linéairement indépendants. Ainsi, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce (on est donc dans la situation $p = 2$, $q = 3$).

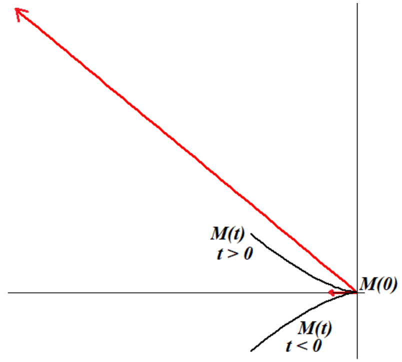
- Il reste à préciser la disposition locale: on place le repère $(M(0), f''(0), f'''(0))$ et il s'agit de reproduire la figure



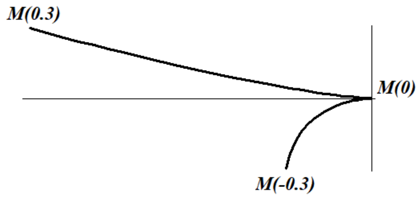
mais en tenant compte des sens et directions des vecteurs $f''(0)$ et $f'''(0)$:



- ce qui donne a priori cette allure:



- Pour information, voici le tracé sur $[-0.3, 0.3]$ (à l'aide du logiciel Maple):



Troisième exemple

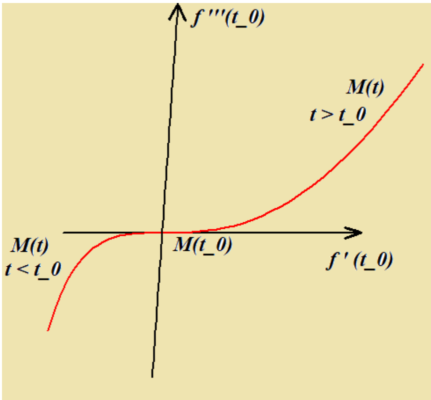
Déterminer la nature du point $M(1)$ de la courbe γ de paramétrisation
$$f : t \mapsto (e^t, t^2)$$
et représenter γ localement au voisinage de ce point.

- On a
$$f'(t) = (e^t, 2t) \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = (e, 2) \neq (0, 0),$$
ce qui montre que $M(1)$ est un point régulier, la tangente à γ en ce point étant dirigée par $f'(1)$.

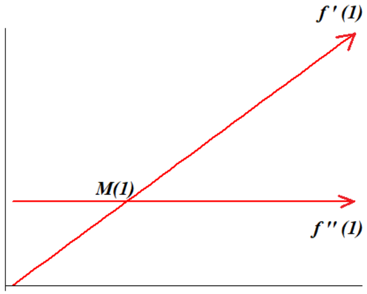
- On calcule
$$f''(t) = (e^t, 2) \quad \Longrightarrow \quad f''(1) = (e, 2),$$
manifestement lié au vecteur $f'(1)$: le point $M(1)$ n'est pas birégulier.

- On calcule
$$f'''(t) = (e^t, 0) \quad \Longrightarrow \quad f'''(1) = (e, 0).$$
Les vecteurs $(f'(1), f'''(1))$ sont manifestement linéairement indépendants, ce qui démontre que $M(1)$ est un point d'inflexion.

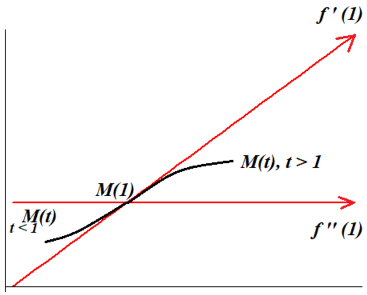
- Il reste à préciser la disposition locale: on place le repère $(M(1), f'(1), f'''(1))$ et il s'agit de reproduire la figure



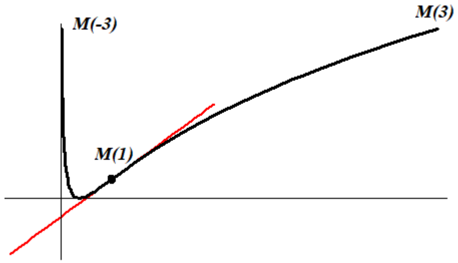
mais en tenant compte des sens et directions des vecteurs $f'(1)$ et $f'''(1)$:



- ce qui donne a priori cette allure:



- Pour information, voici le tracé sur $[-3, 3]$ (à l'aide du logiciel Maple):



Birégularité

Définition XIV.7.5 On se donne une courbe γ de paramétrisation $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$.

Un point $M(t)$ de γ est dit ***birégulier*** si les vecteurs $(f'(t), f''(t))$ sont linéairement indépendants.

On dit que γ est une courbe birégulière si tous ses points sont biréguliers.

Premier exemple

Démontrer que la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto (2\cos t, 3\sin t),\ t \in [-\pi, \pi]$$

est birégulière.

- On a

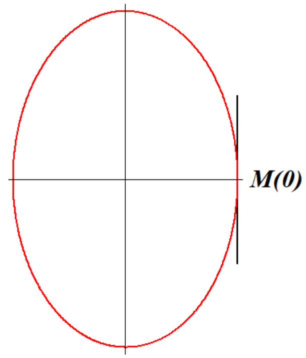
$$\begin{aligned} f'(t) &= (-2\sin t, 3\cos t) \\ f''(t) &= (-2\cos t, -3\sin t). \end{aligned}$$

- Pour étudier la birégularité de γ et donc la liberté de la famille $(f'(t), f''(t))$, on peut calculer le déterminant de ces deux vecteurs dans la base canonique:

$$\forall t \in [-\pi, \pi],\ \begin{vmatrix} -2\sin t & -2\cos t \\ 3\cos t & -3\sin t \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 6\sin^2 t + 6\cos^2 t \\ &= 6 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre que γ est birégulière.

- Pour information, voici le tracé sur $[-\pi, \pi]$ (à l'aide du logiciel Maple; il s'agit d'une ellipse):



Deuxième exemple

La courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \left\{ \begin{aligned} x(t) &= t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) &= t + \frac{1}{t} \end{aligned} \right. ,\quad t \in \mathbb{R}^*$$

est-elle birégulière?

- On calcule
$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(2t - \frac{2}{t^2}, 1 - \frac{1}{t^2}\right) \\ f''(t) &= \left(2 + \frac{4}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right). \end{aligned}$$
- Pour étudier la birégularité de γ et donc la liberté de la famille $(f'(t), f''(t))$, on peut calculer le déterminant de ces deux vecteurs dans la base canonique:
$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^*, \begin{vmatrix} 2t - \frac{2}{t^2} & 2 + \frac{4}{t^3} \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix} &= \frac{6}{t^2} - \frac{4}{t^3} - 2 \\ &= \frac{-2t^3 + 6t - 4}{t^3}. \end{aligned}$$
Le numérateur
$$P(t) = -2t^3 + 6t - 4$$
de ce déterminant est un polynôme de degré 3: ayant des limites opposées en $+\infty$ et en $-\infty$, il s'annule au moins une fois en un réel t_0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires et on voit que ce n'est pas en 0. Il existe donc au moins un réel $t_0 \neq 0$ tel que la famille $(f'(t_0), f''(t_0))$ soit liée i.e. tel que le point $M(t_0)$ ne soit pas birégulier. La courbe γ n'est donc pas birégulière.
- En fait, on voit que $P(1) = 0$ et la division euclidienne
$$\begin{array}{rrr|l} -2X^3 & +6X & -4 & X-1 \\ \cline{4-4} 2X^3 - 2X^2 & & & -2X^2 - 2X + 4 \\ \hline -2X^2 & +6X & & \\ 2X^2 & -2X & & \\ \hline & 4X & -4 & \\ & -4X & +4 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$
i.e.
$$-2X^3 + 6X - 4 = (X-1)(-2X^2 - 2X + 4)$$
montre après recherche des racines de $-2X^2 - 2X + 4$, qui sont 1 et -2, que les racines de P sont donc 1 (double) et -2 (simple). Autrement dit, les points $M(1)$ et $M(-2)$ sont les seuls points non biréguliers de γ.

8 Une astuce Taylorienne pour étudier la disposition locale

Développement limité et dérivées successives

Rappelons que toute fonction de classe C^n au voisinage de 0 admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0:
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$
(cf. formule de Taylor-Young). On remarque donc que pour une fonction de classe C^n, les coefficients du développement limité en 0 sont, aux factorielles près, les valeurs des dérivées successives de la fonction en 0. C'est la formule de Taylor qui est à l'origine de l'obtention de développements limités de la plupart des fonctions usuelles.

La connaissance du développement limité à l'ordre n d'une fonction f, par les procédés classiques de somme, produit... permet donc de retrouver la valeur des dérivées successives de cette fonction, comme dans l'exemple suivant:

Exemple

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction
$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{1+x}$$
et déduire de ce développement limité la valeur de $f^{(4)}(0)$.
- On a
$$\begin{aligned} \cos x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ \frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$
et par règle régissant le développement limité d'un produit (cf. chapitre suivant: on effectue le produit des parties polynomiales des développements en ne conservant que les termes de degré ≤ 4 et en mettant les autres dans la "poubelle" qu'est $o(x^4)$):
$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) \times \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4\right) + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$
- La fonction f est clairement de classe C^4 (et même de classe C^∞ au voisinage de 0) donc *si on le voulait*, on pourrait appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 en 0; elle donnerait:
$$\frac{\cos x}{1+x} = f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x\frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4).$$
- On a donc simultanément
$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + o(x^4) \\ f(x) = \frac{\cos x}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$
Mais la théorie affirme que lorsqu'il existe, le développement limité (à un ordre donné) est unique i.e. si on dispose de deux développements limités d'une même fonction au même ordre en 0, c'est que les coefficients respectifs de ces développements coïncident. C'est pourquoi:
$$\begin{aligned} f(0) &= 1 : \text{ identification des coefficients de degré } 0 \text{ (trivial ici)} \\ f'(0) &= -1 : \text{ identification des coefficients de degré } 1 \\ \frac{f''(0)}{2!} &= \frac{1}{2} : \text{ identification des coefficients de degré } 2 \\ \frac{f^{(3)}(0)}{3!} &= -\frac{1}{2} : \text{ identification des coefficients de degré } 3 \\ \frac{f^{(4)}(0)}{4!} &= \frac{13}{24} : \text{ identification des coefficients de degré } 4. \end{aligned}$$
On a donc
$$\begin{aligned} f^{(4)}(0) &= 4! \times \frac{13}{24} \\ &= 24 \times \frac{13}{24} \\ &= 13. \end{aligned}$$

Application à l'étude de la disposition locale

L'étude de la nature d'un point singulier passe donc par le calcul de dérivées successives; ces calculs peuvent être parfois fastidieux. Cependant, on a seulement besoin des valeurs des dérivées successives en un point donné et à ce titre, la confrontation d'un développement limité avec la formule de Taylor, comme ci-dessus, permet de trouver facilement ces valeurs.

Exemple

Déterminer la nature du point $M(0)$ de la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= \frac{\sin(t^2)}{1+t^3} \\ y(t) &= \frac{\cos(t^2)}{1+t^3}. \end{cases}$$

- On effectue un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$, par exemple à l'ordre 4 pour avoir une certaine sécurité, au voisinage de 0:

$$\begin{aligned} \sin(u) &\underset{u\to 0}{=} u + o(u^2) \\ \sin(t^2) &\underset{t\to 0}{=} t^2 + o(t^4) \\ \frac{1}{1+u} &\underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ \frac{1}{1+t^3} &\underset{t\to 0}{=} 1 - t^3 + t^6 + o(t^6) \\ &= 1 - t^3 + o(t^4) \\ x(t) = \frac{\sin(t^2)}{1+t^3} &\underset{t\to 0}{=} (t^2 + o(t^4))(1 - t^3 + o(t^4)) \\ &= t^2 + o(t^4) \end{aligned}$$

et on a donc

$$x'(0) = 0, \quad \frac{x''(0)}{2!} = 1, \quad \frac{x'''(0)}{3!} = 0, \quad \frac{x^{(4)}(0)}{4!} = 0$$

c'est à dire

$$x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2, \quad x'''(0) = 0, \quad x^{(4)}(0) = 0.$$

De même

$$\begin{aligned} \cos(u) &\underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ \cos(t^2) &\underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^4}{2} + o(t^4) \\ \frac{1}{1+t^3} &\underset{t\to 0}{=} 1 - t^3 + o(t^4) \\ y(t) = \frac{\cos(t^2)}{1+t^3} &\underset{t\to 0}{=} (1 - \frac{t^4}{2} + o(t^4))(1 - t^3 + o(t^4)) \\ &= -t^3 - \frac{t^4}{2} + o(t^4) \end{aligned}$$

et on a donc

$$y'(0) = 0, \quad \frac{y''(0)}{2!} = 0, \quad \frac{y'''(0)}{3!} = -1, \quad \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{1}{2}$$

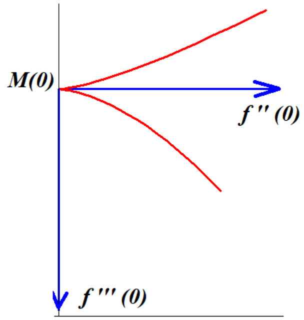
c'est à dire

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -6, \quad y^{(4)}(0) = -12.$$

- On a donc

$$\begin{aligned} f'(0) &= (x'(0), y'(0)) = (0,0) \\ f''(0) &= (x''(0), y''(0)) = (2,0) \\ f'''(0) &= (x'''(0), y'''(0)) = (0,-6). \end{aligned}$$

- Ainsi, la tangente à γ au point $M(0)$ est dirigée par $f''(0) = (2,0)$, premier vecteur dérivé non nul en 0.
- Ensuite, on voit que $(f''(0), f'''(0))$ n'est pas liée. C'est pourquoi $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

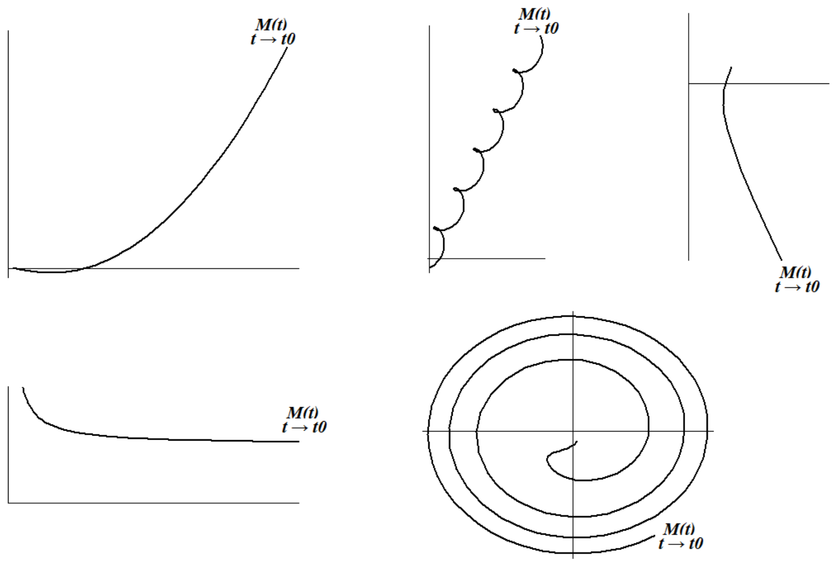


(les directions de f ''(0) et f '''(0) sont respectées mais pas leurs longueurs)

9 Branches infinies; point limite

Branches infinies

Le phénomène de branche infinie se produit lorsque $x(t)$ ou $y(t)$ (ou les deux) tendent vers l'infini lorsque t tend vers une "valeur interdite" ou vers $\pm\infty$ et peut se manifester de la façon suivante:



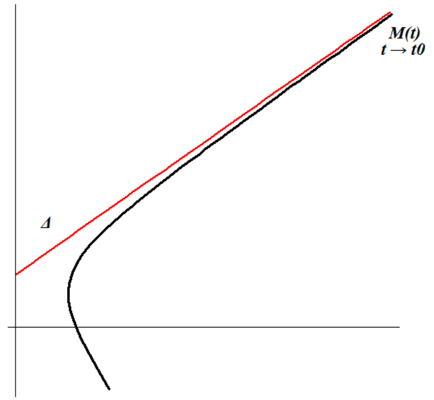
Pour mieux cerner une branche infinie, on cherchera des objets géométriques simples qui s'appprochent de ces branches, typiquement des droites (parfois des paraboles), ce qui conduit à la notion d'asymptote.

Rappelons que si Δ est la droite d'équation $ax + by + c = 0$, alors la distance $d(M, \Delta)$ d'un point M du plan de coordonnées (x_0, y_0) est donnée par

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On dira naturellement qu'une droite Δ d'équation $ax+by+c=0$ est asymptote à la courbe γ au voisinage de t_0 lorsque la distance du point $M(t)$ de γ à la droite Δ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0, donc lorsque

$$ax(t)+by(t)+c \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0.$$



Les deux situations ci-dessous sont naturelles:

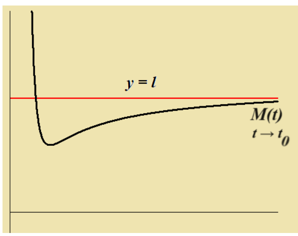
Proposition XIV.9.9 Si $x(t) \longrightarrow \pm\infty$ et $y(t) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors la droite horizontale d'équation $y=\ell$ est asymptote à γ.

Démonstration. La distance du point $M(t)$ à la droite d'équation $y-\ell=0$ est

$$|y(t)-\ell|$$

et cette distance tend bien vers 0 lorsque t tend vers t_0 par hypothèse. Et d'ailleurs, c'est la logique même: les points dont l'ordonnée vaut ℓ constituent la droite horizontale d'équation $y=\ell$; les points dont l'ordonnée est proche de ℓ ont donc tendance à s'approcher de cette droite.

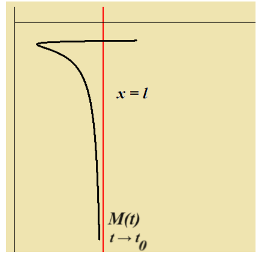
Ci-dessous une situation plausible: celle où $x(t)$ tend vers $+\infty$ et où $y(t)$ tend vers ℓ par valeurs inférieures.



De même, avec iune démonstration analogue:

Proposition XIV.9.10 Si $x(t) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $y(t) \longrightarrow \pm\infty$, alors la droite verticale d'équation $x=\ell$ est asymptote à γ.

Ci-dessous une situation plausible: celle où $y(t)$ tend vers $-\infty$ et où $x(t)$ tend vers ℓ par valeurs inférieures.



Les deux situations précédentes relèvent donc du bon sens; la proposition ci-dessous donne un protocole lorsque x et y tendent tous vers l'infini. *Il n'a donc pas à être enclenché dans l'une des deux situations précédentes; c'est une erreur fréquente.*

Proposition XIV.9.11 Si $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to \pm\infty$, on étudie $\frac{y(t)}{x(t)}$ et alors:

- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to m \in \mathbb{R}^*$ et si $y(t)-mx(t) \to h \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y=mx+h$ est asymptote à γ en t_0.
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to m \in \mathbb{R}^*$ et $y(t)-mx(t) \to \pm\infty \in \mathbb{R}$, γ présente une branche parabolique de direction $y=mx$, ou de pente m.
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow \pm\infty$, γ présente une branche parabolique dans la direction Oy.
- Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow 0$, γ présente une branche parabolique dans la direction Ox.

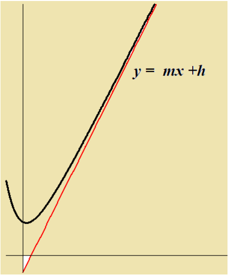
Démonstration. Dans le premier cas, la distance du point $M(t)$ à la droite d'équation $y=mx+h$, c'est à dire la droite $mx-y+h=0$ est

$$\frac{|mx(t)-y(t)+h|}{\sqrt{m^2+1}}$$

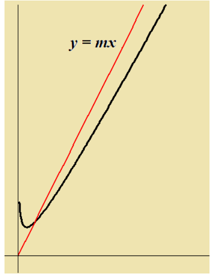
et cette distance tend bien vers 0 lorsque t tend vers t_0 par hypothèse.

Dans le deuxième cas, il n'y a pas d'asymptote, mais la terminologie est motivée par le fait que la direction du vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ tend alors vers le réel m (rappelons que la pente du vecteur $\vec{u}=(a,b)$ est le réel $\frac{b}{a}$: cf. p. 226).

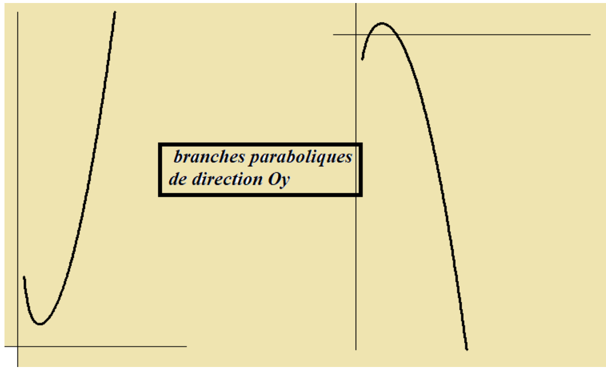
Dans les deux derniers cas, la terminologie est justifiée par le fait que si $\frac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow \pm\infty$, alors $y(t)$ est "infiniment plus grand" que $x(t)$ lorsque t tend vers t_0; l'accroissement de $y(t)$ est donc graphiquement beaucoup plus manifeste que celui de $x(t)$, tout comme dans la parabole $y=x^2$ (ensemble des points de la forme (x,x^2)), où l'ordonnée x^2 croît beaucoup plus fortement que l'abscisse x lorsque x tend vers $+\infty$. Conclusion inversée si $\frac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow 0$, par analogie avec la parabole d'équation $x=y^2$.

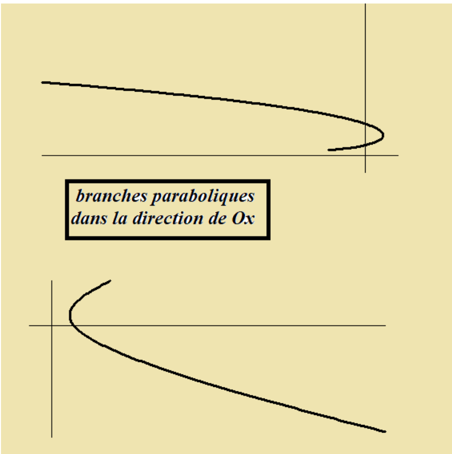


asymptote



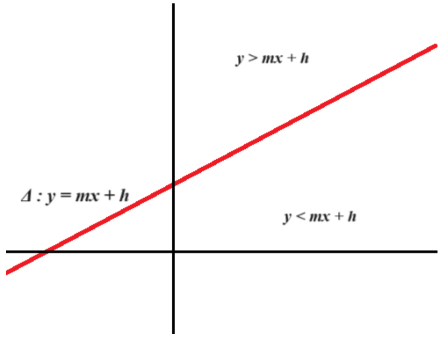
branche parabolique $y = mx$





Remarques:

- Les points du plan vérifiant $y > mx + h$ (resp. < 0) sont situés au-dessus (resp. en -dessous) de la droite Δ d'équation $y = mx + h$:



- Ainsi, par exemple, si $y(t) > mx(t) + c0$ lorsque t tend vers t_0, alors γ sera situé au-dessus de l'asymptote $y = mx + h$ (au moins sur un voisinage de t_0).
- Comme dans tout problème de recherche de limite, on pensera à produire des équivalents.

Exemple

Déterminer les variations de x et y, prouver l'existence de branches infinies de la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} - t \\[2ex] y(t) = \dfrac{2}{t} - 1 + t^3 \end{cases}$$

puis la tracer.

- Pour l'étude, on constate que $x(-t) = -x(t)$ mais dans la mesure où aucune relation n'est visible entre $y(-t) = -\frac{2}{t} - t^3$ et $y(t) = \frac{2}{t} - 1 + t^3$, on ne peut a priori pas réduire le domaine d'étude; on effectuera donc l'étude sur $\mathbb{R}^*$.
- On calcule

$$x'(t) = -\frac{1+t^2}{t^2}$$

qui est donc toujours < 0 alors que

$$y'(t) = \frac{3t^4 - 2}{t^2}$$

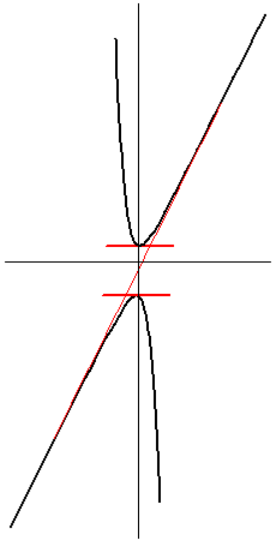
si bien que

$$y'(t) > 0 \iff 3t^4 - 2 > 0 \iff t^4 > \frac{2}{3} \iff t^2 > \sqrt{\frac{2}{3}} \iff t > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ ou } t < -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}},$$

d'où le tableau de variations:

t	$-\infty$		$-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$		0		$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
x	$+\infty$	$\searrow$	≈ -0.2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	≈ 0.2	$\searrow$	$-\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	≈ -4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	≈ 2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- La courbe γ est régulière: pour aucune valeur de t, on a simultanément $x'(t) = y'(t) = 0$.
- La courbe γ présente une tangente horizontale aux points de paramètres $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ et $-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$.
- La courbe γ présente manifestement quatre branches infinies, provenant des portions de courbes correspondant à $t \to +\infty$, $t \to -\infty$, $t \to 0^+$ et $t \to 0^-$.
- Lorsque $t \to \pm\infty$,
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{2}{t} - 1 + t^3}{\frac{1}{t} - t} \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \frac{t^3}{-t} = -t^2 \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \mp\infty$$
et on en conclut que γ présente deux branches paraboliques dans la direction Oy.
- Lorsque $t \to 0$,
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{2}{t} - 1 + t^3}{\frac{1}{t} - t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{t}} = 2 \xrightarrow[t\to 0]{} 2$$
puis
$$y(t) - 2x(t) = \frac{2}{t} - 1 + t^3 - \frac{2}{t} + 2t = -1 + 2t - t^3 \xrightarrow[t\to 0^\pm]{} -1$$
et on en conclut que la droite D d'équation $y - 2x = -1$ est asymptote à γ.
- Observons que
$$y(t) - 2x(t) + 1 = 2t - t^3 = t(2 - t^2),$$
ce qui démontre qu'au voisinage de 0 (dans la mesure où $2 - t^2 > 0$ lorsque t tend vers 0):
$$y(t) - 2x(t) + 1 \quad \begin{cases} > 0 & \text{pour } t > 0, \text{ donc } \gamma \text{ est au-dessus de } D \\ < 0 & \text{pour } t < 0, \text{ donc } \gamma \text{ est en-dessous de } D. \end{cases}$$

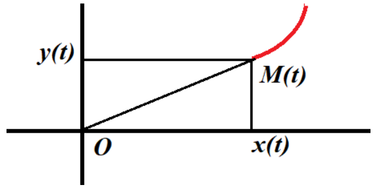


Point limite

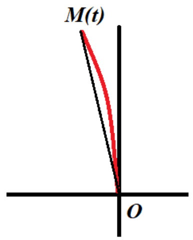
Définition XIV.9.6 Ce phénomène se produit typiquement lorsque x et y tendent chacun vers une limite finie a et b en l'une des bornes T du domaine de définition:
$$x(t) \xrightarrow[t\to T]{} a, \quad y(t) \xrightarrow[t\to T]{} b.$$
Dans ce cas, le point $M(t)$ de la courbe se rapproche de plus en plus du point de coordonnées (a, b), qui est alors appelé point limite de la courbe.

Premier exemple

Soit la courbe γ de paramétrisation
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t}{1+t} \\ y(t) = \dfrac{te^t}{1+t} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$
On a clairement
$$x(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$$
et
$$y(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} e^t \implies y(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0.$$
Si bien que l'origine est un point limite de γ. Mais de quelle manière le point $M(t)$ s'approche-t-il de l'origine? Par une approche horizontale, verticale, oblique? C'est le but de l'étude du quotient $\frac{y(t)}{x(t)}$, qui représente la pente de la droite $(OM(t))$:



On a ici
$$\frac{y(t)}{x(t)} = t \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty.$$
Une droite dont la pente tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est une droite qui tend vers la verticale. On en déduit que la droite $(OM(t))$ tend vers la verticale, autrement dit, l'axe Oy est tangente à γ au point O. Puisque l'on a clairement
$$\forall t < -1,\ x(t) < 0, \quad y(t) > 0,$$
γ est située dans le quart de plan supérieur gauche



Deuxième exemple

Soit la courbe γ de paramétrisation
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t-1}{2t+1}. \end{cases}$$
On a clairement
$$x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \implies x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

et

$$y(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2} \implies y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

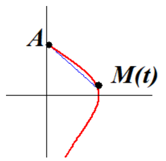
Si bien que le point A de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ est un point limite de γ. Mais de quelle manière le point $M(t)$ s'approche-t-il du point A? Par une approche horizontale, verticale, oblique? C'est le but de l'étude du vecteur

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM(t)} &= \left(x(t), y(t) - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{t}{t^2+1}, \frac{t-1}{2t+1} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{t}{t^2+1}, -\frac{3}{2(2t+1)}\right)
\end{aligned}$$

et du quotient

$$\frac{y(t) - \frac{1}{2}}{x(t)}$$

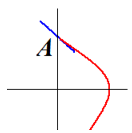
qui représente la pente de vecteur et donc de la droite $(AM(t))$:



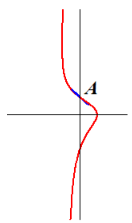
On a ici

$$\begin{aligned}
\frac{y(t) - \frac{1}{2}}{x(t)} &= -\frac{3}{2(2t+1)} \times \frac{t^2+1}{t} \\
&\underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{3t^2}{2 \times t \times t} \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Cette droite a donc une pente qui tend vers $-\frac{3}{4}$. Ainsi, la droite passant par A et de pente $-\frac{3}{4}$ est tangente à γ au point A.



Bien entendu, une étude similaire peut-être conduite lorsque t tend vers $-\infty$. Pour information, l'allure de la courbe:



10 Recherche de points doubles

Définition XIV.10.7 On parle de point double d'une courbe paramétrée dès lors que deux paramètres distincts donnent le même point i.e. s'il existe des réels t_1 et t_2 avec $t_1 \neq t_2$ tels que $M(t_1)$ et $M(t_2)$ soient confondus. La recherche de points doubles revient donc à résoudre le système

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \quad t_1 \neq t_2.$$

Le protocole est très souvent le suivant:

- on cherchera à factoriser par $t_1 - t_2$ dans les deux équations (après avoir éventuellement effectué une réduction au même dénominateur),
- on simplifie alors par $t_1 - t_2$ (ce qui est possible, puisque $t_1 - t_2 \neq 0$).
- Dans les expressions restantes, on cherchera à mettre en évidence les quantités $s = t_1 + t_2$ et $p = t_1 t_2$.
- On obtiendra alors un système d'équations en s et p, que l'on résoudra.
- *Ultime étape.* Connaissant s et p, on en déduit classiquement t_1 et t_2 de la manière suivante:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = s \\ t_1 t_2 = p \end{cases} \iff \begin{cases} t_2 = s - t_1 \\ t_1(s - t_1) = p \end{cases} \iff \begin{cases} t_2 = s - t_1 \\ -t_1^2 + st_1 - p = 0. \end{cases}$$

  On résout l'équation du second degré $-t_1^2 + st_1 - p = 0$ et selon que cette équation possède des solutions ou non, on en déduit l'existence ou non de points doubles.

Exemple

Déterminer les points doubles de la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2. \end{cases}$$

- Il est donc question résoudre le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} x(t_1) &= x(t_2) \\ y(t_1) &= y(t_2) \end{cases}$$

  avec la contrainte $t_1 \neq t_2$. On a

$$(S) \iff \left\{ 2t_1 - 2t_2 - \frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} = 0cr2t_1 - 2t_2 + t_1^2 - t_2^2 = 0. \right.$$

  Or en réduisant au dénominateur $t_1^2 t_2^2$,

$$\begin{aligned}
2t_1 - 2t_2 - \frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} &= \frac{2t_1^3 t_2^2 - 2t_1^2 t_2^3 - t_2^2 + t_1^2}{t_1^2 t_2^2} \\
&= \frac{2t_1^2 t_2^2 (t_1 - t_2) + (t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}{t_1^2 t_2^2} \\
&= \frac{(t_1 - t_2)(2t_1^2 t_2^2 + t_1 + t_2)}{t_1^2 t_2^2},
\end{aligned}$$

  et

$$2t_1 - 2t_2 + t_1^2 - t_2^2 = 2(t_1 - t_2) + (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = (t_1 - t_2)(2 + t_1 + t_2)$$

  si bien que

$$(S) \iff \begin{cases} \frac{(t_1 - t_2)(2t_1^2 t_2^2 + t_1 + t_2)}{t_1^2 t_2^2} = 0 \\ (t_1 - t_2)(2 + t_1 + t_2) = 0 \end{cases}$$

  et comme $t_1 - t_2 \neq 0$,

$$(S) \iff \begin{cases} 2t_1^2 t_2^2 + t_1 + t_2 = 0 \\ 2 + t_1 + t_2 = 0. \end{cases}$$

- On pose
$$s = t_1 + t_2, \quad p = t_1 t_2.$$
On a donc
$$(S) \iff \begin{cases} 2p^2 + s = 0 \\ 2 + s = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s = -2 \\ 2p^2 = -s \end{cases} \iff \begin{cases} s = -2 \\ p^2 = 1. \end{cases}$$
Ainsi, $s = -2$ et $p = 1$ ou $p = -1$.
  - Dans le premier cas $s = -2$, $p = 1$, on a donc $t_2 = -2 - t_1$, d'où
  $$1 = t_1 t_2 = t_1(-2 - t_1) = -t_1^2 - 2t_1$$
  i.e.
  $$t_1^2 + 2t_1 + 1 = 0$$
  dont l'unique racine est $t_1 = -1$, mais alors
  $$t_2 = -2 - t_1 = -1,$$
  ce qui est exclu puisque l'on a la contrainte $t_1 \neq t_2$.
  - Dans le deuxième cas $s = -2$, $p = -1$, on a donc $t_2 = -2 - t_1$, d'où
  $$-1 = t_1 t_2 = t_1(-2 - t_1) = -t_1^2 - 2t_1$$
  i.e.
  $$t_1^2 + 2t_1 - 1 = 0,$$
  équation dont les racines sont $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$. On a donc
  $$t_1 = -1 + \sqrt{2} \text{ et } t_2 = -2 - t_1 = -1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad t_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ et } t_2 = -2 - t_1 = -1 + \sqrt{2}.$$
  Observons la symétrie des solutions obtenues, ce qui est logique, vu le rôle totalement symétrique joué par t_1, t_2 au départ.
- On déduit donc de cette étude l'existence d'un unique point double, le point $M_1 = M(-1 + \sqrt{2})$ (ou si on préfère le point $M(-1 - \sqrt{2})$ mais c'est le même!) qui est tous calculs faits le point de coordonnées $(-5, 1)$.

Chapitre XV

Produit scalaire (deuxième année)

1 Définitions d'un produit scalaire et de la norme associée

Introduction. Au même titre que les espaces vectoriels "historiques" $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ servent de moteur et de référence dans la théorie abstraite des espaces vectoriels, le produit scalaire habituel dans le plan et dans l'espace a servi d'inspiration pour définir de façon plus large la notion de produit scalaire sur un espace vectoriel et ce, en dehors de tout contexte géométrique. Il est remarquable que quelques définitions abstraites permettent de retrouver — et d'étendre — de nombreux résultats de géométrie. Il faudra toujours garder présent à l'esprit ce souci d'abstraction, que l'on confrontera avec les connaissances du produit scalaire habituel dans le plan ou l'espace; dans cet esprit, le vocabulaire géométrique usuel sera conservé (orthogonalité, distance, isométrie...).

Définition d'un produit scalaire.

Définition XV.1.1 Un produit scalaire, c'est une application agissant sur deux vecteurs d'un espace vectoriel (réel) E, qui fabrique un scalaire (donc un réel) et vérifiant, pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tous scalaires α, β:

$$\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$$
$$\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}\rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{w}\rangle + \beta\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$$
$$\langle \vec{u}, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}\rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \beta\langle \vec{u}, \vec{w}\rangle$$
$$\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle \geq 0 \text{ et } \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Un *espace euclidien* est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Remarques.

- La première propriété est appelée "symétrie", la deuxième et troisième "bilinéarité" et la quatrième "définie positivité" *qui est la propriété que l'on démontrera toujours avec soin*.
- De façon évidente, la première et la deuxième entraînent la troisième si bien que pour vérifier qu'une application définit un produit scalaire sur un espace, on prouvera:
  - la symétrie,
  - la propriété
  $$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}\rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{w}\rangle + \beta\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$$
  - et la définie positivité.
- Remarquons que toutes les propriétés énumérées ci-dessus sont connues pour le produit scalaire habituel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ entre vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et en conséquence pour le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ en géométrie du plan ou de l'espace.

Propriétés immédiates du produit scalaire. Grâce à la bilinéarité, les calculs de développement de produit scalaire se font comme en présence d'une multiplication entre réels:

Proposition XV.1.1 Pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}'$ et tous scalaires a, a', b, b':

$$\langle a\vec{x} + b\vec{y}, a'\vec{x}\,' + b'\vec{y}\,'\rangle = aa'\langle \vec{x}, \vec{x}\,'\rangle + ab'\langle \vec{x}, \vec{y}\,'\rangle + ba'\langle \vec{y}, \vec{x}\,'\rangle + bb'\langle \vec{y}, \vec{y}\,'\rangle.$$

Pour tout vecteur $\vec{x}$ de E,
$$\langle \vec{x}, \vec{0}\rangle = \langle \vec{0}, \vec{x}\rangle = 0.$$

Démonstration. Posons $\vec{u} = a'\vec{x}\,' + b'\vec{y}\,'$. Par linéarité à gauche:

$$\langle a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{u}\rangle = a\langle \vec{x}, \vec{u}\rangle + b\langle \vec{y}, \vec{u}\rangle$$

puis par linéarité à droite

$$\begin{aligned}
a\langle \vec{x}, \vec{u}\rangle &= a\langle \vec{x}, \vec{a}'\vec{x}\,' + b'\vec{y}\,'\rangle \\
&= a\big(a'\langle \vec{x}, \vec{x}\,'\rangle + b'\langle \vec{x}, \vec{y}\,'\rangle\big) \\
&= aa'\langle \vec{x}, \vec{x}\,'\rangle + ab'\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \\
b\langle \vec{y}, \vec{u}\rangle &= b\langle \vec{y}, \vec{a}'\vec{x}\,' + b'\vec{y}\,'\rangle \\
&= b\big(a'\langle \vec{x}, \vec{x}\,'\rangle + b'\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle\big) \\
&= ba'\langle \vec{x}, \vec{x}\,'\rangle + bb'\langle \vec{x}, \vec{y}\,\rangle,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.
Ensuite, en remarquant que $\vec{0} = 0 \times \vec{0}$ et en jouant sur la linéarité à droite,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{0}\rangle &= \langle \vec{x}, 0 \times \vec{0}\rangle \\
&= 0 \times \langle \vec{x}, \vec{0}\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Remarque. Cette identité peut être comparée à

$$\forall(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4,\ \forall(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (ax + by) \times (a'x' + b'y') = aa'xx' + ab'xy' + ba'yx' + bb'yy'.$$

Norme associée à un produit scalaire. On se place dans le contexte ci-dessus d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.

Définition XV.1.2

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, la quantité $\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ est notée $\|\vec{u}\|$ et est appelée ***norme*** du vecteur $\vec{u}$.
- On dit que l'application
$$\vec{u} \longmapsto \|\vec{u}\|$$
est la norme associée au produit scalaire.
- La ***distance*** associée au produit scalaire est l'application d définie sur $E \times E$ par
$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2,\ d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v} - \vec{u}\|.$$

De façon historico-géométrique, la norme d'un vecteur est sa longueur et la définition de la distance est conforme au calcul de la distance entre deux points du plan ou de l'espace..

Propriétés de la norme

Proposition XV.1.2 Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E,
$$\|\vec{u}\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = 0.$$

En effet,
$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| = 0 &\Longleftrightarrow \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \vec{u} = 0 \end{aligned}$$
par définie positivité du produit scalaire.

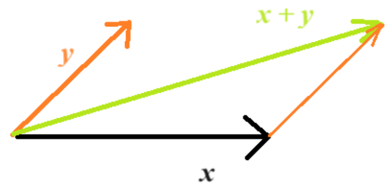
Théorème XV.1.3 ***Inégalité de Cauchy-Schwarz.*** Soit E un espace préhilbertien. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$
$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|$$
et dans cette inégalité, on a égalité si et seulement si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires. De plus,
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|$$
(sans les valeurs absolues) si et seulement si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires et de même sens.

Démonstration 66

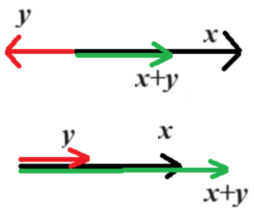
Proposition XV.1.4 Pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et tout scalaire λ:
$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda|\, \|\vec{x}\|$$
$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$
$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$
$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \text{ (inégalité triangulaire)}$$
et on a l'égalité
$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$
si et seulement si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires et de même sens.

Démonstration 67

Remarque. L'inégalité triangulaire est l'illustration du fait que dans un triangle, la longueur d'un côté est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres autres côtés :



Le cas d'égalité s'illustre également assez naturellement :



Proposition XV.1.5

- ***Identité de polarisation.***
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2\right).$$
- ***Identité du parallélogramme.***
$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right).$$

En effet, on a :
$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\ \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + \|-\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{-}y \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

En effectuant la différence on obtient l'identité de polarisation et la somme l'identité du parallélogramme.

Définition XV.1.3

Vecteurs unitaires.

- Un vecteur $\vec{u}$ est dit unitaire lorsque $\|\vec{u}\| = 1$.
- Pour tout vecteur $\vec{v}$ non nul, le vecteur $\vec{v}' = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ est unitaire.

En effet,

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}'\| &= \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\| \\
&= \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \times \|\vec{v}\| \\
&= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \times \|\vec{v}\| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

L'action de diviser un vecteur non nul $\vec{v}$ par sa propre norme est appelée "normalisation du vecteur $\vec{v}$".

2 Espaces euclidiens et préhilbertiens classiques

Théorème XV.2.6

- L'application qui à $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ associe
$$x_1 y_1 + x_2 y_2$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ dit "usuel" ou "canonique".
- L'application qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ associe
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
- Plus généralement, l'application qui à $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associe
$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique (ou usuel) sur $\mathbb{R}^n$.
- L'application
$$(X, Y) \longmapsto X^T\, Y$$
(où X^T est la transposée de X), est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, appelé produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration 68

Remarque. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a alors

$$X^T = (x_1 \ \dots \ x_n)$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned}
X^T\, Y &= (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= x_1 y_1 + \ldots x_n y_n,
\end{aligned}$$

ce qui nous ramène complètement, en identifiant tout vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à son vecteur colonne associé $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique, au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Deux autres exemples classiques, à maîtriser:

Théorème XV.2.7 Soit a et b deux réels avec $a < b$ et E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$. Alors l'application $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ définie pour tout f, g dans E par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

est un produit scalaire sur E.

Preuve.

1. La symétrie et la bilinéarité sont évidentes:
$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x) f(x)\, dx &= \int_a^b f(x) g(x)\, dx \\
\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) h(x)\, dx &= \lambda \int_a^b f(x) h(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x) h(x)\, dx
\end{aligned}$$
par linéarité de l'intégrale.
2.
   - Pour $f \in E$, on a clairement $\langle f, f \rangle \geq 0$.
   - Ensuite, supposons $\langle f, f \rangle = 0$:
     - cela signifie que la fonction f^2, qui est *positive et continue*, a une intégrale nulle.
     - Il s'agit donc de la fonction nulle d'après la propriété de définie positivité de l'intégrale des fonctions continues (cf. chapitre "Dérivées et primitives" p.77).
     - Ainsi, $f^2(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$, c'est à dire $f(x) = 0$: on en déduit que f est la fonction nulle, ce qui prouve la définie positivité.

Théorème XV.2.8 Sur l'espace $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x) Q(x)\, dx$$

est un produit scalaire.

Remarque. Comment fonctionne ce produit scalaire? Les intégrales sont calculées à partir des fonctions polynomiales associées. Par exemple si $P = 1 + X$ et $Q = X^2$, alors

$$\begin{aligned}
\langle P, Q \rangle &= \int_{-1}^1 (1 + x) x^2\, dx = \int_{-1}^1 (x^2 + x^3)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Preuve que c'est un produit scalaire.

- La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont des cas particuliers de la situation précédente.
- Prouvons la définie positivité: si $\langle P, P \rangle = 0$,
  - c'est que la fonction $x \mapsto P^2(x)$, qui est une fonction continue et positive sur $[-1, 1]$, a une intégrale nulle sur $[-1, 1]$.
  - Ainsi P^2 est la fonction nulle sur $[-1, 1]$ d'après la propriété de définie positivité de l'intégrale, donc P est la fonction nulle sur $[-1, 1]$.
  - *Mais on doit prouver que P est le polynôme nul.* Le raisonnement suivant est classique:
    * le polynôme P possède déjà une infinité de racines, à savoir les réels de l'intervalle $[-1, 1]$;
    * seul le polynôme nul possède une infinité de racines.

* Donc P est le polynôme nul et la propriété de définie positivité est démontrée.

Application classique: inégalité de Cauchy-Schwarz entre nombres réels

Pour tous réels $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

C'est en effet l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

3 Orthogonalité de vecteurs; base orthonormée et calculs dans une telle base

3.1 Orthogonalité de vecteurs

On considère un espace préhilbertien E.

Définition XV.3.4

Orthogonalité.

- Lorsque $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- Plus généralement, on dit que la famille $(\vec{u}_i)$ de vecteurs de E est *orthogonale* lorsque $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j\rangle = 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire habituel, les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 2)$ et $\vec{v} = (2, 2, -2)$ sont orthogonaux.
- Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire habituel, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec
$$\vec{u}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{u}_2 = (-1, 1, -1, 1), \quad \vec{u}_3 = (0, 1, 0, -1)$$
est orthogonale.
- Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire habituel, la base canonique
$$\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$$
est une famille orthogonale.
- Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire habituel, la base canonique
$$\big((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1)\big)$$
est une famille orthogonale.

Proposition XV.3.9 ***Propriété des familles orthogonales.*** Une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i\in I}$ une telle famille. Montrons que toute sous-famille finie de $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r)$ une sous-famille finie de $\mathcal{F}$. Supposons que

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{x}_r = \vec{0}.$$

Effectuons alors le produit scalaire des deux membres par $\vec{x}_1$; à droite on obtient $\langle \vec{0}, \vec{x}_1\rangle = 0$ alors qu'à gauche, en utilisant la linéarité par rapport à la première variable, on obtient

$$\alpha_1\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1\rangle + \alpha_2 \underbrace{\langle \vec{x}_2, \vec{x}_1\rangle}_{=0} + \ldots + \alpha_r \underbrace{\langle \vec{x}_r, \vec{x}_1\rangle}_{=0}.$$

On obtient donc finalement $\alpha_1\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1\rangle = 0$, d'où $\alpha_1 = 0$ car $\vec{x}_1 \neq 0$ donc $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1\rangle > 0$. De la même façon, on obtient $\alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$, ce qui prouve la liberté de la sous-famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r)$ et ce, quelle que soit cette sous-famille. La famille $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ est donc par définition libre.

Théorème XV.3.10 ***Théorème de Pythagore.*** Les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Démonstration. On sait que

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2.$$

Ensuite, les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux si et seulement si , par définition, $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$ donc si et seulement si $2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ donc si et seulement si $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

3.2 Bases orthonormées

Définition XV.3.5 ***Base orthonormée.*** Dans un espace vectoriel euclidien E de dimension n, c'est une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ telle que

- la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est orthogonale,
- tous les vecteurs de cette base sont unitaires.

Exemples

- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, la base canonique
$$\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$$
est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (c'est immédiat).
- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, la base canonique
$$\big((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1)\big)$$
est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (c'est immédiat).

Proposition XV.3.11 Dans un espace euclidien E de dimension n, une famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ i.e. telle que

- la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est orthogonale,
- tous les vecteurs de cette base sont unitaires

est une base orthonormée.

En effet, la qualité "base" est due au fait que $\mathcal{B}$ comporte n vecteurs non nuls (ils sont de norme un) et libre puisque $\mathcal{B}$ est orthogonale (cf. propriété ci-dessus) et comme on le sait d'après la théorie de la dimension, une famille libre comportant n vecteurs dans un espace de dimension n est une base de cet espace.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, considérons les vecteurs

$$\vec{f_1} = \frac{1}{9}(7,-4,-4),\ \vec{f_2} = \frac{1}{9}(1,8,-4),\ \vec{f_3} = \frac{1}{9}(-4,-8,-1).$$

Alors $\mathcal{B} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est une base orthonormée, car:

- On calcule

$$\begin{aligned}
\|\vec{f_1}\| &= \frac{1}{9}\sqrt{49+16+16} \\
&= \frac{1}{9}\sqrt{81} \\
&= 1 \\
\|\vec{f_2}\| &= \frac{1}{9}\sqrt{16+1+64} \\
&= \frac{1}{9}\sqrt{81} \\
&= 1 \\
\|\vec{f_3}\| &= \frac{1}{9}\sqrt{16+64+1} \\
&= \frac{1}{9}\sqrt{81} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

- Puis

$$\begin{aligned}
\langle \vec{f_1}, \vec{f_2} \rangle &= \frac{1}{81}(-28-4+32) \\
&= 0 \\
\langle \vec{f_1}, \vec{f_3} \rangle &= \frac{1}{81}(-28+32-4) \\
&= 0 \\
\langle \vec{f_2}, \vec{f_3} \rangle &= \frac{1}{81}(16-8-8) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Définition XV.3.6 Plus généralement, soit F un sous-espace vectoriel de dimension r d'un espace préhilbertien E.
Une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r)$ de F est une base telle que la famille $\mathcal{B}$ soit orthogonale et telle que tous ses vecteurs soient unitaires.

Exemple

- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, soit

$$F = \{\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x+2y-z = 0\}.$$

Alors $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

est une base orthonormée de F car:

  – F est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (on reconnaît une équation de plan) ou très rigoureusement parce que

$$\begin{aligned}
\vec{v} = (x,y,z) \in F &\iff -x+2y-z = 0 \\
&\iff z = -x+2y \\
&\iff \vec{v} = (x,y,-x+2y) \\
&\iff \vec{v} = x(1,0,-1) + y(0,1,2) \\
&\iff \vec{v} \in \operatorname{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,2)\big),
\end{aligned}$$

  ce qui met en évidence le fait que $\big((1,0,-1),(0,1,2)\big)$ est une base de F, qui est alors de dimension 2.

  – on a bien $\vec{u}_1 \in F$ et $\vec{u}_2 \in F$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1+2\times 1-1) = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\times 1+2\times 0-(-1)) = 0.$$

  – Il est clair que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est libre. C'est donc une base de F d'après la théorie de la dimension.

  – Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux puisque

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1\times 1+1\times 0+1\times(-1)) = 0$$

  et unitaires, puisque

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}_1\| &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1+1+1} = 1 \\
\|\vec{u}_2\| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+0+1} = 1.
\end{aligned}$$

  – C'est donc bien une base orthonormée de F.

3.3 Calculs dans une base orthonormée

Théorème XV.3.12 Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes de leurs composantes dans $\mathcal{B}$. Alors:

$$x_1 = \langle \vec{e}_1, \vec{x} \rangle, \dots, x_n = \langle \vec{e}_n, \vec{x} \rangle,$$

et donc

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle \vec{e}_k, \quad \vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{e}_k, \vec{y} \rangle \vec{e}_k.$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\
&= X^T Y \\
\|\vec{x}\|^2 &= x_1^2 + \dots + x_n^2
\end{aligned}$$

où X^T est la transposée de X.

Démonstration. Remarquons que d'après les règles régissant le produit matriciel, $X^T Y$ est le produit d'une matrice $(1,n)$ par une matrice $(n,1)$ et donc une matrice $(1,1)$, c'est à dire un scalaire. D'autre part,

$$\begin{aligned} X^TY &= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \end{aligned}$$

Par définition, $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k$ et par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle &= \left\langle \vec{e}_j, \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, on a $\langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle = 0$ lorsque $k \neq j$ et tous les termes de la somme sont nuls, sauf celui correspondant à $k = j$, d'où $\langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle = x_j \langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle = x_j$ (car $\langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle = 1$), ce qui prouve bien que la composante de $\vec{x}$ suivant le vecteur $\vec{e}_j$ est bien $\langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle$.
Ensuite,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k, \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \langle \vec{e}_k, \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \langle \vec{e}_k, \vec{e}_j \rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_ky_j \\ &= X^TY \end{aligned}$$

et en prenant $y = x$, on obtient la dernière formule.

4 Existence et construction de bases orthonormées; procédé de Gram-Schmidt

C'est un algorithme permettant de fabriquer, dans un espace euclidien E, une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ d'un sous-espace vectoriel F de E. La construction de $\mathcal{B}_0$ s'effectue toujours à partir d'une base $\mathcal{B}$ de F; on parle alors aussi "d'orthonormalisation de la base $\mathcal{B}$". Dans la pratique,

- la base $\mathcal{B}$ pourra être donnée par l'énoncé (typique dans un problème écrit);
- mais il pourra parfois être nécessaire de déterminer une base de F au préalable. Par exemple: "dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ usuel, déterminer une base orthonormée du sous-espace F constitué des vecteurs $\vec{u} = (x,y,z)$ tels que $2x - y + z = 0$." Il faudra alors commencer par déterminer une base $\mathcal{B}$ de F avant de se lancer dans le processus de Gram-Schmidt.

Soit E un espace euclidien de dimension n.

Théorème XV.4.13 ***Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*** On se donne une base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ de E. Alors on peut construire une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ de E en fabriquant les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ de proche en proche de la façon suivante:

- le *premier* vecteur $\vec{e}_1$ de $\mathcal{B}_0$ est le *premier* vecteur de $\mathcal{B}$ normalisé:
$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1.$$
- le *deuxième* vecteur $\vec{e}_2$ de $\mathcal{B}_0$ est une combinaison linéaire du *deuxième* vecteur de $\mathcal{B}$ et du vecteur $\vec{e}_1$ que l'on vient de construire:
$$\vec{e}_2 = a\vec{e}_1 + b\vec{v}_2,$$
avec comme contrainte (n'oublions pas que l'on recherche une base orthonormée!) que le vecteur $\vec{e}_2$ soit de norme 1 et qu'il soit orthogonal au vecteur $\vec{e}_1$: les contraintes
$$\begin{cases} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0 \\ \|\vec{e}_2\| = 1 \end{cases}$$
conduisent à des contraintes sur a et b i.e. un système d'équations, que l'on résoudra et qui fournira un vecteur $\vec{e}_2$,
- le *troisième* vecteur $\vec{e}_3$ de $\mathcal{B}_0$ est une combinaison linéaire du *troisième* vecteur de $\mathcal{B}$ et des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ que l'on vient de construire:
$$\vec{e}_3 = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2 + c'\vec{v}_3,$$
avec comme contrainte que le vecteur $\vec{e}_3$ soit de norme 1 et qu'il soit orthogonal au vecteur $\vec{e}_1$ ainsi qu'au vecteur $\vec{e}_2$: les contraintes
$$\begin{cases} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0 \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0 \\ \|\vec{e}_3\| = 1 \end{cases}$$
conduisent à un système d'équations, que l'on résoudra, et qui fournira un vecteur $\vec{e}_3$,
- et ainsi de suite: le k*-ième* vecteur $\vec{e}_k$ de $\mathcal{B}_0$ est une combinaison linéaire du k*-ième* vecteur de $\mathcal{B}$ et des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{k-1}$ que l'on vient de construire:
$$\vec{e}_k = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{e}_{k-1} + \alpha_k\vec{v}_k,$$
avec comme contrainte que le vecteur $\vec{e}_k$ soit de norme 1 et qu'il soit orthogonal à tous les vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{k-1}$: les contraintes
$$\begin{cases} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_k \rangle = 0 \\ \quad\vdots \\ \langle \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_k \rangle = 0 \\ \|\vec{e}_k\| = 1 \end{cases}$$
conduisent à un système d'équations, que l'on résoudra, et qui fournira un vecteur $\vec{e}_k$.

Remarque. Dans la pratique, la plupart des bases à orthonormaliser comporteront 3 vecteurs, au grand maximum 4 vecteurs.

Premier exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormée du sous-espace
$$F = \{\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x + 2y - z = 0\}.$$

Réponse.

- On commence par déterminer une base $\mathcal{B}$ de F. Pour cela:

$$\begin{aligned} \vec{v}=(x,y,z)\in F &\iff -x+2y-z=0\\ &\iff z=-x+2y\\ &\iff \vec{v}=(x,y,-x+2y)\\ &\iff \vec{v}=x(1,0,-1)+y(0,1,2)\\ &\iff \vec{v}\in \operatorname{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,2)\big), \end{aligned}$$

ce qui met en évidence le fait que $\big((1,0,-1),(0,1,2)\big)$ est une base de F.

- On met en œuvre à présent le procédé de Gram-Schmidt: en notant $\vec{v}_1=(1,0,-1)$ et $\vec{v}_2=(0,1,2)$, on est à la recherche d'une base orthonormée $\mathcal{B}_0=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, que l'on obtient ainsi:
  - on prend

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1). \end{aligned}$$

  - On recherche ensuite $\vec{e}_2$ sous la forme

$$\vec{e}_2=a\vec{e}_1+b\vec{v}_2$$

de manière à ce que

$$\begin{cases} \langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=0\\ \|\vec{e}_2\|=1. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=0 &\iff \langle\vec{e}_1,a\vec{e}_1+b\vec{v}_2\rangle=0\\ &\iff a\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle+b\langle\vec{e}_1,\vec{v}_2\rangle=0\\ &\iff a\times 1+b\times\frac{1}{\sqrt{2}}(1\times 0+0\times 1-1\times 2)=0\\ &\iff a-\frac{2b}{\sqrt{2}}=0\\ &\iff a=\frac{2b}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

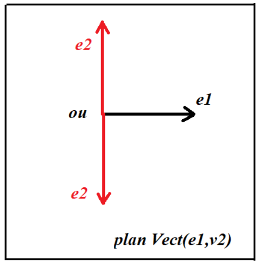
(il est à noter que le calcul de $\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle=1$ s'est effectué "les yeux fermés", puisque $\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle=\|\vec{e}_1\|^2=1$, du fait que par construction même, le vecteur $\vec{e}_1$ est unitaire) ce qui donne pour le moment $\vec{e}_2$ sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= a\vec{e}_1+b\vec{v}_2\\ &= \frac{2b}{\sqrt{2}}\vec{e}_1+b\vec{v}_2\\ &= b\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{e}_1+\vec{v}_2\right)\\ &= b\left(\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}(1,0,-1)+(0,1,2)\right)\\ &= b(1,1,1). \end{aligned}$$

On a donc ensuite

$$\begin{aligned} \|\vec{e}_2\|=1 &\iff \|b(1,1,1)\|=1\\ &\iff |b|\,\|(1,1,1)\|=1\\ &\iff |b|\times\sqrt{3}=1\\ &\iff |b|=\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Il existe deux valeurs possibles pour b et il existe donc deux vecteurs possibles pour $\vec{e}_2$, ce qui est tout à fait cohérent: le vecteur recherché $\vec{e}_2$ se trouve dans le plan engendré par $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et il est donc question de trouver, dans ce plan, un vecteur unitaire et orthogonal au vecteur $\vec{e}_1$



Prenons par exemple $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$, ce qui donne

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Notons au passage que $\vec{e}_2$ est bien de norme 1 et qu'il est orthogonal à $\vec{e}_1$:

$$\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}(1\times 1+0\times 1+1\times(-1))=0.$$

  - En conclusion, une base orthonormée de F est $\mathcal{B}_0=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ c'est à dire la base orthonormée

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right).$$

Deuxième exemple

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire habituel. On pose

$$\vec{v}_1=(1,1,0,0),\ \vec{v}_2=(1,0,1,0),\ \vec{v}_3=(1,0,0,1)$$

et $F=\operatorname{Vect}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$. Déterminer une base orthonormée de F.

Réponse. Conformément au procédé de Gram-Schmidt,

- on prend

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0). \end{aligned}$$

- On recherche ensuite $\vec{e}_2$ sous la forme

$$\vec{e}_2=a\vec{e}_1+b\vec{v}_2$$

de manière à ce que

$$\begin{cases} \langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=0\\ \|\vec{e}_2\|=1. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\langle\vec e_1,\vec e_2\rangle=0 &\iff \langle\vec e_1,a\vec e_1+b\vec v_2\rangle=0\\ &\iff a\langle\vec e_1,\vec e_1\rangle+b\langle\vec e_1,\vec v_2\rangle=0\\ &\iff a\times 1+b\times\frac{1}{\sqrt2}(1\times1+1\times0+0\times1+0\times0)=0\\ &\iff a+\frac{b}{\sqrt2}=0\\ &\iff a=-\frac{b}{\sqrt2},\end{aligned}$$

(il est à noter que le calcul de $\langle\vec e_1,\vec e_1\rangle=1$ s'est effectué "les yeux fermés", puisque $\langle\vec e_1,\vec e_1\rangle=\|\vec e_1\|^2=1$, du fait que par construction même, le vecteur $\vec e_1$ est unitaire) ce qui donne pour le moment $\vec e_2$ sous la forme

$$\begin{aligned}\vec e_2 &= a\vec e_1+b\vec v_2\\ &= -\frac{b}{\sqrt2}\vec e_1+b\vec v_2\\ &= b\left(-\frac{1}{\sqrt2}\vec e_1+\vec v_2\right)\\ &= b\left(-\frac{1}{\sqrt2\times\sqrt2}(1,1,0,1)+(1,0,1,0)\right)\\ &= b\left(\frac12,-\frac12,1,0\right).\end{aligned}$$

On a donc ensuite

$$\begin{aligned}\|\vec e_2\|=1 &\iff\\ &\iff \|b\left(\frac12,-\frac12,1,0\right)\|=1\\ &\iff |b|\left\|\left(\frac12,-\frac12,1,0\right)\right\|=1\\ &\iff |b|\times\sqrt{\frac14+\frac14+1}=1\\ &\iff |b|\times\sqrt{\frac32}=1\\ &\iff |b|=\sqrt{\frac23}.\end{aligned}$$

Prenons par exemple $b=\sqrt{\frac23}$, ce qui donne

$$\vec e_2 = \sqrt{\frac23}\left(\frac12,-\frac12,1,0\right).$$

- On recherche ensuite $\vec e_3$ sous la forme

$$\vec e_3=a\vec e_1+b\vec e_2+c\vec v_3$$

de manière à ce que

$$\begin{cases}\langle\vec e_1,\vec e_3\rangle=0\\ \langle\vec e_2,\vec e_3\rangle=0\\ \|\vec e_3\|=1.\end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\langle\vec e_1,\vec e_3\rangle=0 &\iff \langle\vec e_1,a\vec e_1+b\vec e_2+c\vec v_3\rangle=0\\ &\iff a\langle\vec e_1,\vec e_1\rangle+b\langle\vec e_1,\vec e_2\rangle+c\langle\vec e_1,\vec v_3\rangle=0\\ &\iff a\times1+b\times0+c\times\frac{1}{\sqrt2}(1\times1+1\times0+0\times0+0\times1)=0\\ &\iff a+\frac{c}{\sqrt2}=0\\ &\iff a=-\frac{c}{\sqrt2}.\end{aligned}$$

Il est à noter que le calcul de $\langle\vec e_1,\vec e_1\rangle=1$ s'est effectué "les yeux fermés", puisque $\langle\vec e_1,\vec e_1\rangle=\|\vec e_1\|^2=1$, du fait que par construction même, le vecteur $\vec e_1$ est unitaire; il en va de même pour $\langle\vec e_1,\vec e_2\rangle=0$, du fait que par construction même, les vecteurs $\vec e_1$ et $\vec e_2$ sont orthogonaux. De la même manière, et avec les mêmes remarques:

$$\begin{aligned}\langle\vec e_2,\vec e_3\rangle=0 &\iff \langle\vec e_2,a\vec e_1+b\vec e_2+c\vec v_3\rangle=0\\ &\iff a\langle\vec e_2,\vec e_1\rangle+b\langle\vec e_2,\vec e_2\rangle+c\langle\vec e_2,\vec v_3\rangle=0\\ &\iff a\times0+b\times1+c\times\sqrt{\frac23}(\frac12\times1-\frac12\times0+1\times0+0\times1)=0\\ &\iff b+\frac{c}{2}\times\sqrt{\frac23}=0\\ &\iff b=-\frac{c}{2}\times\sqrt{\frac23},\end{aligned}$$

ce qui donne pour le moment $\vec e_3$ sous la forme

$$\begin{aligned}\vec e_3 &= a\vec e_1+b\vec e_2+c\vec v_3\\ &= -\frac{c}{\sqrt2}\vec e_1-\frac{c}{2}\times\sqrt{\frac23}\vec e_2+c\vec v_3\\ &= c\left(-\frac{1}{\sqrt2}\vec e_1-\frac12\sqrt{\frac23}\vec e_2+\vec v_3\right)\\ &= c\left(-\frac{1}{\sqrt2\times\sqrt2}(1,1,0,1)-\frac12\sqrt{\frac23}\times\sqrt{\frac23}\left(\frac12,-\frac12,1,0\right)+(1,0,0,1)\right)\\ &= c\left(\left(-\frac12,\frac12,1,0\right)-\left(\frac16,-\frac16,\frac13,0\right)+(1,0,0,1)\right)\\ &= c\left(\frac13,-\frac13,-\frac13,1\right).\end{aligned}$$

On a donc ensuite

$$\begin{aligned}\|\vec e_3\|=1 &\iff\\ &\iff \|c\left(\frac13,-\frac13,-\frac13,1\right)\|=1\\ &\iff |c|\left\|\left(\frac13,-\frac13,-\frac13,1\right)\right\|=1\\ &\iff |c|\times\sqrt{\frac19+\frac19+\frac19+1}=1\\ &\iff |c|\times\sqrt{\frac{12}{9}}=1\\ &\iff |c|=\sqrt{\frac{9}{12}}\\ &\iff |c|=\sqrt{\frac34}.\end{aligned}$$

Prenons par exemple $c = \sqrt{\frac{3}{4}}$, ce qui donne

$$\vec{e}_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

- On obtient en définitive la base orthonormée de F suivante:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)\right].$$

Troisième exemple

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire suivant:

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx.$$

Construire une base orthonormée de E à partir de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

Réponse. On note $V_1 = 1$ (polynôme constant 1), $V_2 = X$ et $V_3 = X^2$.

- On prend

$$E_1 = \frac{1}{\|V_1\|}V_1$$

et puisque

$$\langle V_1, V_1\rangle = \int_0^1 1 \times 1\,dx = 1,$$

on a $\|V_1\|^2 = 1$, donc $\|V_1\| = 1$, si bien que

$$E_1 = 1$$

(polynôme constant 1).

- On recherche ensuite E_2 sous la forme

$$E_2 = aE_1 + bV_2$$

de manière à ce que

$$\begin{cases} \langle E_1, E_2\rangle = 0 \\ \|E_2\| = 1. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle E_1, E_2\rangle = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle E_1, aE_1 + bV_2\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a\langle E_1, E_1\rangle + b\langle E_1, V_2\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a \times 1 + b\langle E_1, V_2\rangle = 0 \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} \langle E_1, V_2\rangle &= \int_0^1 1 \times x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \langle E_1, E_2\rangle = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a + \frac{b}{2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a = -\frac{b}{2} \end{aligned}$$

(il est à noter que le calcul de $\langle E_1, E_1\rangle = 1$ s'est effectué "les yeux fermés", puisque $\langle E_1, E_1\rangle = \|E_1\|^2 = 1$, du fait que par construction même, le vecteur E_1 est unitaire) ce qui donne pour le moment E_2 sous la forme

$$\begin{aligned} E_2 &= aE_1 + bV_2 \\ &= -\frac{b}{2}E_1 + bV_2 \\ &= b\left(-\frac{1}{2}E_1 + V_2\right) \\ &= b\left(-\frac{1}{2} + X\right). \end{aligned}$$

On a donc ensuite

$$\begin{aligned} \|E_2\| = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\|b\left(-\frac{1}{2} + X\right)\right\| = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad |b|\left\|\left(-\frac{1}{2} + X\right)\right\| = 1 \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{2} + X, -\frac{1}{2} + X\right\rangle &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + x\right)^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \left\|-\frac{1}{2} + X\right\| &= \sqrt{\left\langle -\frac{1}{2} + X, -\frac{1}{2} + X\right\rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4 \times 3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \|E_2\| = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad |b| \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad |b| = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Prenons par exemple $b = 2\sqrt{3}$, ce qui donne

$$E_2 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + X\right)$$

- On recherche ensuite E_3 sous la forme

$$E_3 = aE_1 + bE_2 + cV_3$$

de manière à ce que

$$\begin{cases} \langle E_1, E_3\rangle = 0 \\ \langle \vec{E}_2, E_3\rangle = 0 \\ \|E_3\| = 1. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\langle E_1, E_3\rangle = 0 &\iff \langle E_1, aE_1 + bE_2 + cV_3\rangle = 0\\ &\iff a\langle E_1, E_1\rangle + b\langle E_1, E_2\rangle + c\langle E_1, V_3\rangle = 0\\ &\iff a + c\langle E_1, V_3\rangle = 0\end{aligned}$$

(il est à noter que le calcul de $\langle \vec{E}_1, \vec{E}_1\rangle = 1$ s'est effectué "les yeux fermés", puisque $\langle \vec{E}_1, \vec{E}_1\rangle = \|\vec{E}_1\|^2 = 1$, du fait que par construction même, le vecteur $\vec{E}_1$ est unitaire; il en va de même pour $\langle \vec{E}_1, \vec{E}_2\rangle = 0$, du fait que par construction même, les vecteurs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont orthogonaux) et puisque

$$\begin{aligned}\langle E_1, V_3\rangle &= \int_0^1 1\times x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\langle E_1, E_3\rangle = 0 &\iff a + \frac{c}{3} = 0\\ &\iff a = -\frac{1}{3}c\end{aligned}$$

De la même manière, et avec les mêmes remarques:

$$\begin{aligned}\langle E_2, E_3\rangle = 0 &\iff \langle E_2, aE_1 + bE_2 + cV_3\rangle = 0\\ &\iff a\langle E_2, E_1\rangle + b\langle E_2, E_2\rangle + c\langle E_2, V_3\rangle = 0\\ &\iff b + c\langle E_2, V_3\rangle = 0\end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned}\langle E_2, V_3\rangle &= \int_0^1 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + x\right)\times x^2\,dx\\ &= 2\sqrt{3}\int_0^1 -\frac{1}{2}x^2 + x^3\,dx\\ &= 2\sqrt{3}\left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1\\ &= \frac{\sqrt{3}}{6},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\langle E_2, E_3\rangle = 0 &\iff b + c\frac{\sqrt{3}}{6} = 0\\ &\iff b = -c\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

ce qui donne pour le moment E_3 sous la forme

$$\begin{aligned}E_3 &= aE_1 + bE_2 + cV_3\\ &= -\frac{1}{3}cE_1 - c\frac{\sqrt{3}}{6}E_2 + cV_3\\ &= c\left(-\frac{1}{3}E_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}E_2 + V_3\right)\\ &= c\left(-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\times 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + X\right) + X^2\right)\\ &= c\left(\frac{1}{6} - X + X^2\right).\end{aligned}$$

On a donc ensuite

$$\begin{aligned}\|E_3\| = 1 &\iff \left\|c\left(\frac{1}{6} - X + X^2\right)\right\| = 1\\ &\iff |c|\left\|\frac{1}{6} - X + X^2\right\| = 1\end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{1}{6} - x + x^2\right)^2 dx &= \int_0^1\left(\frac{1}{36} + x^2 + x^4 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - 2x^3\right)dx\\ &= \left[\frac{1}{36}x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^1\\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{6} - X + X^2\right\| &= \sqrt{\left\langle\frac{1}{6} - X + X^2, \frac{1}{6} - X + X^2\right\rangle}\\ &= \sqrt{\frac{1}{180}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{36\times 5}}\\ &= \frac{1}{6\sqrt{5}},\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\|E_3\| = 1 &\iff |c|\times\frac{1}{6\sqrt{5}} = 1\\ &\iff |c| = 6\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Prenons par exemple $c = 6\sqrt{5}$, ce qui donne

$$E_3 = 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{6} - X + X^2\right).$$

- On obtient en définitive la base orthonormée de F suivante:

$$\left[1, 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + X\right), 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{6} - X + X^2\right)\right].$$

5 Orthogonal d'un sous-espace; orthogonalité de sous-espaces

5.1 Définitions et propriétés fondamentales

Définition XV.5.7 Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace préhilbertien E.

- L'orthogonal de F, noté $F^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F:

$$F^\perp = \{\vec{y}\in E \,/\, \forall\vec{x}\in F,\ \langle\vec{x},\vec{y}\rangle = 0\}.$$

- Ainsi, un vecteur $\vec{y}$ de E appartient à $F^\perp$ si et seulement si le vecteur $\vec{y}$ est orthogonal à *tout* vecteur de F.
- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- Il est clair que $\vec{0} \in F^\perp$.
- Si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont dans $F^\perp$ et α, β sont deux scalaires, montrons que $\alpha\vec{y}+\beta\vec{z} \in F^\perp$. Pour cela, il faut montrer que $\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}$ est orthogonal à tout vecteur de F. Soit donc $\vec{x} \in F$. Alors
$$\begin{aligned} \langle \alpha\vec{y}+\beta\vec{z}, \vec{x}\rangle &= \alpha\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle + \beta\langle \vec{z}, \vec{x}\rangle \\ &= 0+0 \end{aligned}$$
car $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont orthogonaux à $\vec{x}$. Donc $\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}$ est orthogonal à $\vec{x}$.
- On a donc prouvé que $F^\perp$ est stable par combinaison linéaire et est non vide: c'est donc un sous-espace de E.

Théorème XV.5.14 Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace préhilbertien E.
Lorsque F est de dimension finie (et en particulier lorsque E est lui même de dimension finie):

- les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires: $E = F \oplus F^\perp$,
- ***Très important.*** Lorsque E est de dimension finie, la réunion d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$ constitue une base orthonormée de E, ce qui est très important dans les questions qui tournent autour des projections orthogonales,

Démonstration 69

5.2 Cas particulier important de $\mathbb{R}^3$; utilisation du produit vectoriel

Le résultat suivant est très important dans la pratique.

Théorème XV.5.15 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel.
On se donne des réels $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et on considère le plan vectoriel P défini par
$$P = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; ax + by + cz = 0\}.$$
Alors l'orthogonal du plan vectoriel P est la droite vectorielle D dirigée par le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$:
$$P^\perp = \mathrm{Vect}(a, b, c).$$

En effet, soit $\vec{v} = (x, y, z)$; en notant $\vec{n} = (a, b, c)$, on voit que
$$ax + by + cz = \langle \vec{v}, \vec{n}\rangle$$
si bien que pour tout $\vec{v} = (x, y, z) \in P$, on a
$$\langle \vec{v}, \vec{n}\rangle = 0$$
i.e. $\vec{n} \perp \vec{v}$. Cela prouve donc que $\vec{n} \in P^\perp$ et puisque l'on sait par avance que $P^\perp$ est de dimension 1 (en tant que supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$), cela démontre bien que $P^\perp$ est la droite dirigée par $\vec{n}$.

Le résultat suivant est évidemment complémentaire du précédent:

Théorème XV.5.16 On se donne des réels $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et on considère la droite vectorielle D définie par
$$D = \mathrm{Vect}(a, b, c).$$
Alors
$$D^\perp = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; ax + by + cz = 0\}$$
.

Rappels concernant le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

- Si (a, b, c) et (a', b', c') sont les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée directe, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour composantes $(bc' - cb', -(ac' - ca'), ab' - ba')$. On peut les obtenir par calcul de déterminants, en affectant au deuxième le signe $-$
$$bc' - cb' = \begin{vmatrix} \cancel{a \;\; a'} \\ b \;\; b' \\ c \;\; c' \end{vmatrix} \quad ac' - ca' = \begin{vmatrix} a \;\; a' \\ \cancel{b \;\; b'} \\ c \;\; c' \end{vmatrix} \quad ab' - ba' = \begin{vmatrix} a \;\; a' \\ b \;\; b' \\ \cancel{c \;\; c'} \end{vmatrix}.$$
- *Propriété fondamentale:* $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires,
- En posant $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$:
  - $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$,
  - $\|\vec{n}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\theta$ où θ est l'écart angulaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  - si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires (c'est à dire tous deux de norme 1), alors la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une base orthonormée directe; on a alors $\vec{v} \wedge \vec{n} = \vec{u}$ et $\vec{n} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.
- On a
$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v} \text{ (antisymétrie)}$$
$$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{u}\,') \wedge \vec{v} = \lambda\vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\vec{u}\,' \wedge \vec{v} \text{ (bilinéarité).}$$

Application à l'obtention rapide d'une base orthonormée d'un plan

Dans $\mathbb{R}^3$, soit à déterminer une base orthonormée du plan P définie par
$$P = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x - y + z = 0\}.$$
On peut procéder ainsi: en notant $D = P^\perp$,

- le vecteur $(2, -1, 1)$ dirige D donc $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$ est un vecteur unitaire dirigeant D
- on choisit un vecteur unitaire $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$, comme le vecteur
$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$
(on a l'embarras du choix: on peut toujours prendre une coordonnée nulle et "croiser" les deux autres composantes de $\vec{u}$ et en prenant l'opposé de l'une de ces deux composantes) et puisque $\vec{v} \perp \vec{u}$ et que $\vec{u}$ dirige D, on a $\vec{v} \in D^\perp$, c'est à dire $\vec{v} \in P$.
- On calcule ensuite
$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1).$$
D'après les propriétés du produit vectoriel,
  - $\vec{w} \perp \vec{v}$,
  - $\vec{w} \perp \vec{u}$ et puisque $\vec{u}$ dirige D, on a $\vec{w} \in D^\perp$, c'est à dire $\vec{w} \in P$.
  - $|\vec{w}\| = 1$.

  Ainsi, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont unitaires, orthogonaux et dans P; c'est pourquoi $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de P c'est à dire la base
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)\right)$$

5.3 Orthogonal d'un hyperplan; d'un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$

Théorème XV.5.17 ***Orthogonal d'un hyperplan.*** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et H un hyperplan de E i.e. H est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

- Alors $H^\perp$ est une droite vectorielle appelée *normale* à H.
- Tout vecteur directeur de cette normale est dit *normal* à H.

Évident, compte-tenu du fait que la relation $E = H \oplus H^\perp$ implique que $H^\perp$ est de dimension 1.

Cas d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$

Théorème XV.5.18 On se donne un entier $n \geq 2$ et des scalaires $a_1, \dots, a_n$ tels que $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ et on considère le sous-espace vectoriel

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\},$$

qui est un *hyperplan* de $\mathbb{R}^n$ i.e. un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.

- Alors
$$H^\perp = \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_n)$$
- et le vecteur $\vec{N} = (a_1, \dots, a_n)$ est dit *normal* à H.

Démonstration 70

5.4 Comment trouver une base d'un orthogonal?

Soit E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E, dont on recherche une base de l'orthogonal. Le principe suivant est très pratique:

Théorème XV.5.19 Soit $\mathcal{B}$ une base de F (quelconque, non nécessairement orthonormée). alors un vecteur $\vec{w}$ de E appartient à $F^\perp$ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à chaque vecteur de $\mathcal{B}$.

Cette condition d'othogonalité à tout vecteur de F conduira à des contraintes sur le vecteur $\vec{w}$, que l'on pourra en général en termes d'appartenance à un certain Vect.

Démonstration. Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r)$ une base de F.

- Si $\vec{y} \in F^\perp$, alors $\vec{y}$ est en particulier orthogonal à chaque vecteur $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$.
- Si $\vec{y}$ est orthogonal à chaque vecteur $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$, soit $\vec{x} \in F$. Alors $\vec{x}$ est combinaison de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$: $\vec{x} = \sum \alpha_k \vec{x}_k$ et alors
$$\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \sum \alpha_k \langle \vec{y}, \vec{x}_k \rangle = \sum \alpha_k \times 0 = 0,$$
ce qui prouve que $\vec{y}$ est orthogonal à $\vec{x}$.

Premier exemple

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,1,1,1), (1,-1,0,1), (1,0,1,-1)\big).$$

Déterminer une base de $F^\perp$.

- Soit $\vec{w} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors puisque $\mathcal{B} = \big((1,1,1,1), (1,-1,0,1), (1,0,1,-1)\big)$ est une base de F (on vérifie aisément que le rang de cette famille vaut 3), le vecteur $\vec{w}$ appartient à $F^\perp$ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à chaque vecteur de cette base, c'est à dire, en effectuant les produits scalaires de $\vec{w}$ avec ces vecteurs, si et seulement si :
$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+t=0 \\ x+z-t=0. \end{cases}$$
$L_3 - L_1$ donne $y = -2t$ et alors L_2 donne $x = y - t = -3t$ et enfin L_3 donne $z = t - x = 4t$.
- Ainsi,
$$\begin{aligned} \vec{w} \in F^\perp &\iff \vec{w} = (-3t, -2t, 4t, t) \\ &\iff \vec{w} = t(-3, -2, 4, 1), \end{aligned}$$
ce qui démontre que
$$F^\perp = \mathrm{Vect}(-3, -2, 4, 1).$$

Deuxième exemple

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx.$$

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_3[X]$ constitué des polynômes de degré ≤ 1. Déterminer une base de $F^\perp$.

- Une base de F est bien entendu $\mathcal{B} = (1, X)$.
- Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $P \in F^\perp$ si et seulement si P est orthogonal au polynôme constant 1 et au polynôme X donc si et seulement si
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 xP(x)\,dx = 0. \end{cases}$$
- En notant $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, on a
$$\begin{aligned} \int_0^1 P(x)\,dx &= \int_0^1 (a + bx + cx^2 + dx^3)\,dx = \left[ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} \\ \int_0^1 xP(x)\,dx &= \int_0^1 (ax + bx^2 + cx^3 + dx^4)\,dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{4}x^4 + \frac{d}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} \end{aligned}$$
si bien que
$$P \in F^\perp \iff \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} + \dfrac{d}{4} = 0 \\ \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{4} + \dfrac{d}{5} = 0. \end{cases}$$
C'est un système clairement de rang 2 à 4 inconnues; en prenant c et d comme paramètres, $L_1 - 2L_2$ donne
$$b = -c - \frac{9}{10}d$$
puis L_1 donne alors
$$a = \frac{1}{6}c + \frac{1}{5}d.$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned} P \in F^{\perp} &\iff P = \frac{1}{6}c + \frac{1}{5}d + \left(-c - \frac{9}{10}d\right) X + cX^2 + dX^3 \\ &\iff P = c\left(\frac{1}{6} - X + X^2\right) + d\left(\frac{1}{5} - \frac{9}{10}X + X^3\right) \\ &\iff P \in \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{6} - X + X^2, \frac{1}{5} - \frac{9}{10}X + X^3\right), \end{aligned}$$

i.e. $\left(\frac{1}{6} - X + X^2, \frac{1}{5} - \frac{9}{10}X + X^3\right)$ est une base de $F^{\perp}$ (puisqu'il est évident que cette famille est libre).

5.5 Orthogonalité de sous-espaces vectoriels

Définition XV.5.8 Soit E un espace préhilbertien. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G, ce que l'on note

$$F \perp G.$$

Ainsi, $F \perp G$ lorsque

$$\forall (x, y) \in F \times G,\ \langle x, y \rangle = 0.$$

Remarque. Les sous-espaces F et G de E sont orthogonaux lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G, donc lorsque les éléments de F *font partie* de l'ensemble des vecteurs de E qui ont la particularité d'être orthogonaux à tous les vecteurs de G; or cet ensemble est par définition $G^{\perp}$. Ainsi,

$$F \perp G \iff F \subset G^{\perp}$$

et de même

$$F \perp G \iff G \subset F^{\perp}.$$

Exemple

L'espace vectoriel E des fonctions définies et continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs réelles est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Notons F (resp. G) le sous-espace de E constitué par les fonctions paires (resp. impaires). Alors $F \perp G$. En effet, si $f \in F$, donc si f est paire, et si $g \in G$, donc si g est impaire, alors la fonction

$$x \mapsto f(x)g(x)$$

est impaire sur $[-1, 1]$ et a alors une intégrale nulle sur l'intervalle $[-1, 1]$ qui est symétrique par rapport à 0 (résultat archi-classique) i.e.

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Proposition XV.5.20 Soit E un espace préhilbertien , soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie et soit $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ des bases de F et G respectivement. Alors F et G sont orthogonaux si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{B}_1$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{B}_2$ i.e. si

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= (v_1, \ldots, v_r) \\ \mathcal{B}_2 &= (w_1, \ldots, w_\ell) \end{aligned}$$

alors $F \perp G$ si et seulement si

$$\forall (i, j) \in [\![1, r]\!] \times [\![1, \ell]\!],\ \langle v_i, w_j \rangle = 0.$$

Démonstration 71

Remarque. Ce résultat est donc en particulier valable lorsque l'espace vectoriel E est lui-même de dimension finie.

Exemple

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, soit

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Vect}\big((1, -2, 1, 0), (1, 1, -1, 1)\big) \\ G &= \operatorname{Vect}(1, 1, 1, -1). \end{aligned}$$

Alors $F \perp G$ car $\big((1, -2, 1, 0), (1, 1, -1, 1)\big)$ est une base de F, $(1, 1, 1, -1)$ est une base de G et on a

$$\begin{cases} \langle (1, -2, 1, 0), (1, 1, 1, -1) \rangle = 0 \\ \langle (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1) \rangle = 0. \end{cases}$$

6 Projection orthogonale

6.1 Rappels sur les projections

Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:

$$E = A \oplus B.$$

Tout vecteur $\vec{v}$ de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$.

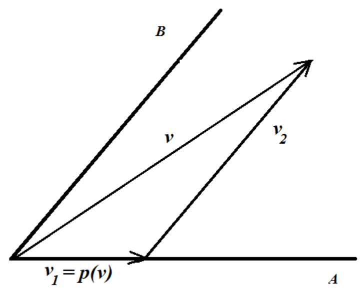
- Par définition, la projection p sur A et parallèlement à B est l'application qui à tout $\vec{v}$ de E associe le vecteur $\vec{v}_1$.
- C'est un endomorphisme de E et

$$\operatorname{Im}(p) = A, \quad \operatorname{Ker}(p) = B.$$

- Pour tout vecteur $\vec{v} \in E$,

$$p(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in A, \quad p(\vec{v}) = \vec{0} \iff \vec{v} \in B.$$

- Il vérifie la propriété $p \circ p = p$.



Remarque importante. On a donc

$$\forall \vec{v} \in E, \quad \vec{v} = p(\vec{v}) + \vec{v} - p(\vec{v})$$

avec

$$p(\vec{v}) \in A, \quad \vec{v} - p(\vec{v}) \in B$$

et rechercher le projeté $p(\vec{v})$ de $\vec{v}$ sur A et parallèlement à B, c'est déterminer l'unique vecteur $\vec{v}_1$ de E tel que

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \in A \\ \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 \in B. \end{cases}$$

Remarques.

- Pour un vecteur donné $\vec{v}$ dont on recherche le projeté $\vec{v}_1$, la relation $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ montre que l'on peut aussi se concentrer sur la recherche de $\vec{v}_2$: on aura alors $\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{v}_2$.
- Suivant le contexte (sous-espace défini par le passage d'un "test", sous-espace défini par un $\mathrm{Vect}\dots$), on sera amenés à rechercher $\vec{v}_1$ ou $\vec{v}_2$ par des conditions portant sur leurs composantes ou comme combinaisons de certains vecteurs.

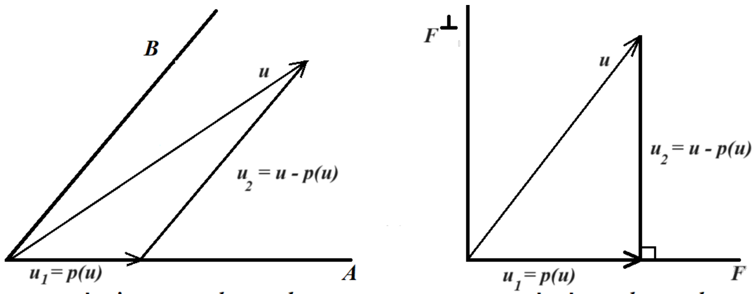
6.2 Projection orthogonale: définition et exemples fondamentaux

Définition XV.6.9 Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie, de sorte que

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

La projection sur F et parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.

Cette définition englobe en particulier le cas (le plus fréquent) d'un espace vectoriel euclidien E (donc de dimension finie).



projection non orthogonale *projection orthogonale*

Rechercher le projeté orthogonal $p(\vec{u})$ sur F d'un vecteur $\vec{u}$ de E repose toujours sur la définition: le vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F, \ \vec{u}_2 \in F^{\perp}$$

et par définition,

$$p(\vec{u}) = \vec{u}_1.$$

- Le problème réside donc dans la faculté de produire le vecteur $\vec{u}_1$ en fonction de $\vec{u}$, que celui-ci soit concret comme $\vec{u} = (1, 2, -1)$ dans $\mathbb{R}^3$ ou quelconque comme $\vec{u} = (x, y, z)$ (ou dans toute autre situation que $\mathbb{R}^3$).
- Suivant le contexte (sous-espace défini par le passage d'un "test", sous-espace défini par un $\mathrm{Vect},\dots$), on sera amenés à rechercher $\vec{u}_1$ ou $\vec{u}_2$ par des conditions portant sur leurs composantes ou comme combinaisons de certains vecteurs.
- Suivant les situations, il sera plus facile d'obtenir $\vec{u}_2$; si on trouve $\vec{u}_2$, $\vec{u}_1$ s'en déduira puisque $\vec{u}_1 = \vec{u} - \vec{u}_2$.

Premier exemple: dans $\mathbb{R}^3$

Si F est un plan défini par une équation, comme

$$F = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + z = 0\}.$$

- Puisque $P^{\perp} = \mathrm{Vect}(\vec{N})$ avec $\vec{N} = (2, -1, 1)$ et que $\vec{u}_2 \in P^{\perp}$, il existe un scalaire a tel que

  $$\vec{u}_2 = a\vec{N}.$$

  De

  $$\vec{u} = \vec{u}_1 + a\vec{N},$$

  on effectue le produit scalaire des deux membres par $\vec{N}$ (pour une généralisation de cette méthode, cf. "Cas particulier de la projection orthogonale sur un hyperplan"):

  $$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{N} \rangle &= \langle \vec{u}_1 + a\vec{N}, \vec{N} \rangle \\ &= \langle \vec{u}_1, \vec{N} \rangle + a\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle \\ &= 0 + a\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle \end{aligned}$$

  du fait fondamental que $\vec{u}_1 \in P$ et $\vec{N} \in P^{\perp}$ et de ce fait, leur produit scalaire est nul. Puisque

  $$\langle \vec{u}, \vec{N} \rangle = 2x - y + z$$

  et

  $$\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 6,$$

  c'est que

  $$a = \frac{1}{6}(2x - y + z).$$

- On a donc

  $$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{u} - \vec{u}_2 \\ &= (x, y, z) - (2a, -a, a) \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{1}{3}(2x - y + z), -\frac{1}{6}(2x - y + z), \frac{1}{6}(2x - y + z)\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{3}(2x - y + z), y + \frac{1}{6}(2x - y + z), z - \frac{1}{6}(2x - y + z)\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right) \end{aligned}$$

  et donc

  $$p(\vec{u}) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right).$$

- De là, on peut obtenir la matrice M de p dans la base canonique, en calculant

  $$\begin{aligned} p(1, 0, 0) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ p(0, 1, 0) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \\ p(0, 0, 1) &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \end{aligned}$$

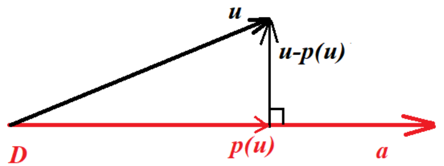
  et c'est pourquoi

  $$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Deuxième exemple: encore dans $\mathbb{R}^3$

Déterminer la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, de la projection orthogonale p sur $D = \mathrm{Vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a} = (1, 2, -1)$.

- Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Puisque $p(\vec{u}) \in D$, il existe un scalaire λ tel que
$$p(\vec{u}) = \lambda\vec{a}.$$
- Ensuite,
$$\vec{u} - p(\vec{u}) \in D^\perp$$



donc
$$\langle \vec{u} - p(\vec{u}), \vec{a}\rangle = 0,$$
c'est à dire
$$\langle \vec{u} - \lambda\vec{a}, \vec{a}\rangle = 0.$$
- Or
$$\begin{aligned} \langle \vec{u} - \lambda\vec{a}, \vec{a}\rangle = 0 &\iff \langle \vec{u}, \vec{a}\rangle - \lambda\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{a}\rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle} \\ &\iff \lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{a}\rangle}{6}. \end{aligned}$$
- Ainsi,
$$\begin{aligned} p(\vec{u}) &= \lambda\vec{a} \\ &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{a}\rangle}{6}\vec{a}. \end{aligned}$$
On calcule
$$\langle \vec{\imath}, \vec{a}\rangle = 1, \quad \langle \vec{\jmath}, \vec{a}\rangle = 2, \quad \langle \vec{k}, \vec{a}\rangle = -1$$
ce qui donne finalement
$$\begin{aligned} p(\vec{\imath}) &= \frac{1}{6}\vec{a} = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, -\frac{1}{6}\right) \\ p(\vec{\jmath}) &= \frac{2}{6}\vec{a} = \left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}, -\frac{2}{6}\right) \\ p(\vec{k}) &= -\frac{1}{6}\vec{a} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$
et au bout du compte
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathbb{R}^4$ *ou dans un espace assez concret*

Toujours dans le contexte $E = F \oplus F^\perp$, mais on n'est plus dans $\mathbb{R}^3$, mais dans $\mathbb{R}^4$ ou dans un autre espace plus ou moins concret (espace de polynômes muni d'un produit scalaire défini par une formule concrète ...). On peut alors se baser sur le principe fondamental énoncé précédemment:

Si l'on dispose d'une base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ du sous-espace vectoriel F, un vecteur $\vec{w}$ appartient à $F^\perp$ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à tout vecteur de cette base i.e.
$$\begin{cases} \langle \vec{w}, \vec{v}_1\rangle = 0 \\ \quad\vdots \\ \langle \vec{w}, \vec{v}_r\rangle = 0. \end{cases}$$

Ce principe conduit au résultat suivant:

Proposition XV.6.21 Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ une base de F, p la projection orthogonale sur F et $\vec{u}$ un vecteur de E. Alors $p(\vec{u})$ s'écrit
$$p(\vec{u}) = \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r,$$
où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ sont les uniques scalaires solution du système
$$\begin{cases} \langle \vec{u} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i, \vec{v}_1\rangle = 0 \\ \quad\vdots \\ \langle \vec{u} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i, \vec{v}_r\rangle = 0. \end{cases}$$

Le calcul de ces produits scalaires conduit alors à un système d'équations, que l'on résout, qui donne donc les λ_i et finalement $p(\vec{u})$.

Preuve. Le vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique
$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \vec{u}_1 \in F, \ \vec{u}_2 \in F^\perp$$
et par définition,
$$p(\vec{u}) = \vec{u}_1.$$
- Puisque $\mathcal{B}$ est une base de F et que $p(\vec{u}) \in F$, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que
$$\vec{u}_1 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i.$$
- Puisque
$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \vec{u} - \vec{u}_1 \\ &= \vec{u} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i \end{aligned}$$
et que $\vec{u}_2 \in F^\perp$, c'est que
$$\vec{u} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i \in F^\perp$$
et en conséquence
$$\begin{cases} \langle \vec{u} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i, \vec{v}_1\rangle = 0 \\ \quad\vdots \\ \langle \vec{u} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i, \vec{v}_r\rangle = 0. \end{cases}$$

Exemple fondamental

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire habituel, on considère le sous-espace

$$F = \{\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x + y + z + t = 0,\ x - 2y + z + t = 0.\}$$

1. Déterminer une base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de F.
2. On note p la projection orthogonale sur F. Pour tout vecteur $\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, calculer $p(\vec{u})$.
3. En déduire la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Réponse.

1. Soit $\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\vec{v} \in F \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - 2y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -z - t \\ x - 2y = -z - t. \end{cases}$$

En effectuant $L_1 - L_2$ on obtient

$$3y = 0,$$

d'où $y = 0$ et L_1 donne alors

$$x = -z - t.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{v} \in F &\iff \vec{v} = (-z - t, 0, z, t) \\ &\iff \vec{v} = z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

ce qui démontre que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de F, avec

$$\vec{v}_1 = (-1, 0, 1, 0), \quad \vec{v}_2 = (-1, 0, 0, 1).$$

2. Par définition, on peut écrire

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

avec $\vec{u}_1 \in F$, $\vec{u}_2 \in F^\perp$ et par définition,

$$p(\vec{u}) = \vec{u}_1 \in F$$

et puisque $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de F, $p(\vec{u})$ est une combinaison linéaire des vecteurs de cette base; d'où l'existence des scalaires a et b tels que

$$p(\vec{u}) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \vec{u} - p(\vec{u}) &= \vec{u} - \vec{u}_1 \\ &= \vec{u}_2 \in F^\perp. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\vec{u} - p(\vec{u})$ est orthogonal à tout vecteur de F et donc en particulier à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$, d'où la nullité des produits scalaires

$$\langle \vec{u} - p(\vec{u}), \vec{v}_1 \rangle, \quad \langle \vec{u} - p(\vec{u}), \vec{v}_2 \rangle.$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{u} - p(\vec{u}) &= \vec{u} - a\vec{v}_1 - b\vec{v}_2 \\ &= (x, y, z, t) - a(-1, 0, 1, 0) - b(-1, 0, 0, 1) \\ &= (x + a + b, y, z - a, t - b) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} - p(\vec{u}), \vec{v}_1 \rangle &= -(x + a + b) + z - a \\ &= -x + z - 2a - b \\ \langle \vec{u} - p(\vec{u}), \vec{v}_2 \rangle &= -(x + a + b) + t - b \\ &= -x + t - a - 2b. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \langle \vec{u} - p(\vec{u}), \vec{v}_1 \rangle = 0 \\ \langle \vec{u} - p(\vec{u}), \vec{v}_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + z - 2a - b = 0 \\ -x + t - a - 2b = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}t \qquad b = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}t$$

et donc

$$\begin{aligned} p(\vec{u}) &= \vec{u}_1 \\ &= a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \\ &= \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}t\right)(-1, 0, 1, 0) + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}t\right)(-1, 0, 0, 1) \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t, 0, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}t, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}t\right). \end{aligned}$$

3. Il en résulte:

$$\begin{aligned} p(1,0,0,0) &= \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ p(0,1,0,0) &= (0,0,0,0) \\ p(0,0,1,0) &= \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ p(0,0,0,1) &= \left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

et c'est pourquoi la matrice recherchée est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Autre exemple

L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx.$$

On note p la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}(1, X^2)$. Déterminer $p(X)$.

- Puisque $(1, X^2)$ est une base de F, il existe deux scalaires a et b tels que

$$p(X) = a + bX^2.$$

- Puisque $X - p(X) \in F^{\perp}$,
$$\begin{cases} \langle X - p(X), 1\rangle = 0 \\ \langle X - p(X), X^2\rangle = 0. \end{cases}$$
- On calcule
$$\begin{aligned} \langle X - p(X), 1\rangle &= \int_0^1 (x - a - bx^2) \times 1\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - ax - \frac{b}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - a - \frac{b}{3} \end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned} \langle X - p(X), X^2\rangle &= \int_0^1 (x - a - bx^2) \times x^2\, dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx^4)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{b}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{5}. \end{aligned}$$
- On a donc
$$\begin{cases} \frac{1}{2} - a - \frac{b}{3} = 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{5} \end{cases}$$
ce qui donne aisément
$$a = \frac{3}{16} \qquad b = \frac{15}{16}.$$
- Ainsi,
$$p(X) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}X^2.$$

6.3 Formules donnant la projection orthogonale

Formule donnant le projeté orthogonal dans le cas général

Théorème XV.6.22 Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E et soit p la projection orthogonale sur F. Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$ est une base orthonormée de F, alors
$$\forall \vec{u} \in E,\ p(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \cdots + \langle \vec{u}, \vec{e}_r\rangle \vec{e}_r.$$

Démonstration. Prenons $r = 2$ pour fixer les idées. Le vecteur
$$\vec{u} - \big(\langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2\big)$$
est de la forme
$$\vec{u} - \big(\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2\big).$$
D'après la proposition XV.6.21, il suffit de démontrer qu'il vérifie
$$\begin{cases} \langle \langle \vec{u} - \big(\langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2\big), \vec{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \langle \vec{u} - \big(\langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2\big), \vec{e}_2\rangle = 0. \end{cases}$$

Or, par bilinéarité du produit scalaire,
$$\begin{aligned} \Big\langle \boldsymbol{\vec{u}} - \big(\langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \boldsymbol{\vec{e}_1} + \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \boldsymbol{\vec{e}_2}\big), \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle &= \Big\langle \boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle - \Big\langle \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \boldsymbol{\vec{e}_1}, \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle - \Big\langle \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \boldsymbol{\vec{e}_2}, \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle \\ &= \Big\langle \boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle - \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \Big\langle \boldsymbol{\vec{e}_1}, \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle - \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \Big\langle \boldsymbol{\vec{e}_2}, \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle \\ &= \Big\langle \boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle - \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \times 1 - \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \times 0 \\ &= \Big\langle \boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{e}_1}\Big\rangle - \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$
et de même,
$$\langle \langle \vec{u} - \big(\langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2\big), \vec{e}_2\rangle = 0.$$

Exemple

On reprend une situation antérieure, à savoir: l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire habituel et on considère
$$P = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 2x - y + z = 0\}.$$
On note p la projection orthogonale sur P. Déterminer la matrice M de p dans la base canonique.

- On avait obtenu plus haut la base orthonormée
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)\right)$$
de P.
- En notant
$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$$
la formule ci-dessus donne:
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \quad p(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2.$$
En posant $\vec{u} = (x, y, z)$, on a
$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z) \\ \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z) \\ \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-x - y + z) \\ \langle \vec{u}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2 &= \frac{1}{2}(y + z)\big(0, 1, 1\big) + \frac{1}{3}(-x - y + z)\big(-x - y + z\big) \\ &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z\right). \end{aligned}$$
- Il en résulte:
$$\begin{aligned} p(1, 0, 0) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ p(0, 1, 0) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \\ p(0, 0, 1) &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right). \end{aligned}$$

- C'est pourquoi la matrice recherchée est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Cas particulier de la projection orthogonale sur une droite

Théorème XV.6.23 Soit D une droite vectorielle d'un espace préhilbertien E, $\vec{a}$ un vecteur unitaire qui dirige D et p la projection orthogonale sur D. Alors

$$\forall \vec{v} \in E,\ p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \vec{a}.$$

C'est en effet la formule précédente dans le cas où $r = 1$.

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire habituel, soit p la projection orthogonale sur la droite D dirigée par le vecteur $(2, -1, 1)$ et s la symétrie orthogonale par rapport à D. Déterminer la matrice M de p puis la matrice S de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Il s'agit donc de calculer $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$.
- La droite D est dirigée par le vecteur unitaire

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1).$$

  Avec la formule précédente, on a

$$\begin{aligned} p(\vec{\imath}) &= \langle \vec{\imath}, \vec{a} \rangle \vec{a} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ p(\vec{\jmath}) &= \langle \vec{\jmath}, \vec{a} \rangle \vec{a} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) \\ &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) \\ p(\vec{k}) &= \langle \vec{\jmath}, \vec{a} \rangle \vec{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

  et c'est pourquoi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

- De la relation

$$s = 2p - \mathrm{Id},$$

  on déduit

$$\begin{aligned} S &= 2M - I_3 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cas particulier de la projection orthogonale sur un hyperplan: très pratique

Rappelons qu'un hyperplan H d'un espace vectoriel E de dimension finie n est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. D'après la théorie de l'orthogonal, $H^\perp$ est alors une droite vectorielle, que l'on dit normale à H et un vecteur directeur de cette normale est dit normal à H.

Théorème XV.6.24 Soit E un espace vectoriel préhilbertien, H un hyperplan de E, $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, normal à H et p la projection orthogonale sur H. Alors

$$\forall \vec{v} \in E,\ p(\vec{v}) = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \vec{n}.$$

Démonstration. Écrivons

$$\begin{aligned} \vec{v} &= p(\vec{v}) \ + \ \vec{v} - p(\vec{v}) \\ &= \vec{v} - p(\vec{v}) \ + \ p(\vec{v}). \end{aligned}$$

Puisque $\vec{v} - p(\vec{v}) \in H^\perp$ et $p(\vec{v}) \in H$, on a là le découpage de $\vec{v}$ en un vecteur de $H^\perp$ et d'un vecteur de H si bien que par définition même, le vecteur $\vec{v} - p(\vec{v})$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $H^\perp$; puisque $H^\perp$ est la droite dirigée par $\vec{a}$, on déduit du théorème précédent que

$$\vec{v} - p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \vec{n},$$

d'où le résultat du théorème.

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire habituel, soit p la projection orthogonale sur le plan P d'équation

$$2x - y + z = 0.$$

Déterminer la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Il s'agit donc de calculer $p(\vec{\imath})$, $p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$, ce que l'on peut faire en calculant une bonne fois pour toutes $p(\vec{v})$ pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$.
- Puisque P est un "hyperplan" de $\mathbb{R}^3$, dont un vecteur normal est $(2, -1, 1)$ et dont

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$$

est un vecteur unitaire normal, on a

$$\begin{aligned}
\forall \vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ p(\vec{v}) &= \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \vec{n} \\
&= (x,y,z) - \frac{1}{\sqrt{6}}(2x - y + z) \times \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) \\
&= (x,y,z) - \frac{2x-y+z}{6}(2,-1,1) \\
&= (x,y,z) - \left(\frac{2x-y+z}{3}, -\frac{2x-y+z}{6}, \frac{2x-y+z}{6} \right) \\
&= \left(\frac{x+y-z}{3}, \frac{2x+5y+z}{6}, \frac{-2x+y+5z}{6} \right).
\end{aligned}$$

- Ainsi, en prenant $\vec{v} = \vec{\imath}$, c'est à dire $x = 1, y = 0, z = 0$, puis $\vec{v} = \vec{\jmath}$ etc., on obtient:

$$\begin{aligned}
p(\vec{\imath}) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \\
p(\vec{\jmath}) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right) \\
p(\vec{k}) &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right)
\end{aligned}$$

et c'est pourquoi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

6.4 Distance à un sous-espace vectoriel F; calcul d'inf

Soit E un espace vectoriel préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.

Définition XV.6.10 Pour tout $\vec{x}$ de E, on appelle distance de $\vec{x}$ à F le réel

$$\inf \left\{ \|\vec{x} - \vec{z}\|,\ \vec{z} \in F \right\},$$

notée $d(\vec{x}, F)$.

C'est une notion que l'on rencontre dans la vie de tous les jours:

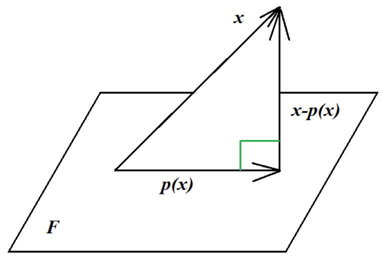
- pour aller s'approvisionner en eau de la rivière depuis son campement, l'homme de Néandertal cherchait, parmi tous les points d'accès à la rivière, le plus proche de celle-ci,
- pour traverser une rue très fréquentée, on a intérêt à viser le point juste en face pour minimiser la traversée: notons qu'il est donc question de traverser perpendiculairement au trottoir d'en face.

Il est remarquable que cette dernière observation soit vraie dans le cas général d'un espace préhilbertien abstrait:

Théorème XV.6.25 Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E et p la projection orthogonale sur F. Alors pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, on a

$$d(\vec{x}, F) = \|\vec{x} - p(\vec{x})\|$$

i.e. la distance minimale est réalisée entre le vecteur et son projeté orthogonal. De plus, le vecteur $p(\vec{x})$ est le seul vecteur de F minimisant cette distance.



Démonstration. Écrivons

$$\vec{x} = p(\vec{x}) + \vec{x} - p(\vec{x}).$$

Par définiton de la projection orthogonale, le vecteur $\vec{x} - p(\vec{x})$ appartient à $F^\perp$.

Soit alors $\vec{z} \in F$. Puisque $p(\vec{x}) \in F$, on a $p(\vec{x}) - \vec{z} \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E. . En conséquence, $p(\vec{x}) - \vec{z}$ est orthogonal à $\vec{x} - p(\vec{x})$ (un vecteur appartenant à l$F^\perp$ est par définition orthogonal à tout vecteur de F).

Notons qu'une quantité Q, que l'on sait être ≥ 0, est minimum là où son carré Q^2 est minimum (cela est dû à la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$) et qu'alors $\min(Q) = \sqrt{\min(Q^2)}$.

C'est pourquoi on va rechercher là où $\|\vec{x} - \vec{z}\|^2$ est minimum.

En écrivant $\|\vec{x} - \vec{z}\|^2$ sous la forme

$$\|\vec{x} - \vec{z}\|^2 = \|(\vec{x} - p(\vec{x})) + (p(\vec{x}) - \vec{z})\|^2$$

le théorème de Pythagore donne alors:

$$\|\vec{x} - \vec{z}\|^2 = \|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2 + \|p(\vec{x}) - \vec{z}\|^2. \tag{6.1}$$

Puisque la quantité $\|p(\vec{x}) - \vec{z}\|^2$ est ≥ 0, on voit que

$$\|\vec{x} - \vec{z}\|^2 \geq \|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2.$$

Cela prouve que

$$\min\{\|\vec{x} - \vec{z}\|^2,\ \vec{z} \in F\} = \|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2.$$

Cela prouve donc que la distance est minimale en $p(\vec{x})$. Mais est-ce le seul point de F en lequel cette distance est minimale? Autrement dit, si $\vec{z} \in F$ n'est pas $p(\vec{x})$, la quantité $\|\vec{x} - \vec{z}\|^2$ est-elle *strictement supérieure* à $\|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2$?
Oui, car si $p(\vec{x}) - \vec{z} \neq \vec{0}$, alors

$$\|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2 > 0$$

(par propriété de la norme, résultant de la définie positivité du produit scalaire) et donc

$$\|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2 + \|p(\vec{x}) - \vec{z}\|^2 > \|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2,$$

c'est à dire, d'après (6.1),

$$\|\vec{x} - \vec{z}\|^2 > \|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2.$$

Premier exemple

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la distance du vecteur $\vec{u} = (1, 1, 2)$ au sous-espace

$$F = \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + z = 0\}.$$

Réponse.

- D'après le théorème ci-dessus, la distance d recherchée est

$$d = \|\vec{u} - p(\vec{u})\|$$

  où p est la projection orthogonale sur F.

- Il est clair que F est un plan et donc un *hyperplan* de $\mathbb{R}^3$, dont un vecteur normal et unitaire est le vecteur

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1).$$

Soit E un espace vectoriel euclidien, H un hyperplan de E, $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, normal à H et p la projection orthogonale sur H. Alors

$$\forall \vec{u} \in E,\ p(\vec{u}) = \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{n}\rangle \vec{n}.$$

Ainsi, cette projection est donnée par

$$p(\vec{u}) \quad = \quad \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{n}\rangle \vec{n}$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned} d &= \|\vec{u} - p(\vec{u})\| \\ &= \|\langle \vec{u}, \vec{n}\rangle \vec{n}\| \\ &= |\langle \vec{u}, \vec{n}\rangle| \times \|\vec{n}\| \\ &= |\langle \vec{u}, \vec{n}\rangle| \times 1 \\ &= \frac{5}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Deuxième exemple

Sur l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ constitué des polynômes de degré ≤ 3, vérifier que la forme

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

définit un produit scalaire sur E. En déduire la valeur de

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t.$$

Réponse.

- La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont évidentes. Si $\langle P, P\rangle = 0$, c'est que la fonction $t \mapsto P^2(t)$, qui est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$, a une intégrale nulle sur $[0, 1]$. De la propriété de définie positivité de l'intégrale, on déduit que $t \mapsto P^2(t)$ est la fonction nulle sur $[0, 1]$; donc $t \mapsto P(t)$ aussi. Il en résulte que P est le polynôme nul, puisqu'il possède alors une infinité de racines. En définitive, $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

- Ensuite, c'est une situation classique où il faut "convertir" le problème en un problème de distance à un sous-espace. Tout d'abord, et c'est un point décisif, on voit que quels que soient les réels a et b,

$$\int_0^1 (t^3 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t = \left\|X^3 - (aX + b)\right\|^2$$

  où $\|\ \|$ est la norme associée au produit scalaire ci-dessus. Ainsi,

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t = \inf\{\left\|X^3 - (aX + b)\right\|^2,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

  Pour des raisons évidentes de positivité des quantités qui interviennent, et par croissance de la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$, on a clairement

$$\inf\{\left\|X^3 - (aX + b)\right\|^2,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \left(\inf\{\left\|X^3 - (aX + b)\right\|,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}\right)^2.$$

- Enfin, et c'est l'autre point décisif: lorsque (a, b) parcourt $\mathbb{R}^2$, le polynôme $aX + b$ parcourt l'ensemble F des polynômes de degré ≤ 1, qui est un sous-espace vectoriel de E. On a donc

$$\inf\{\left\|X^3 - (aX + b)\right\|,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \inf\{\left\|X^3 - Q\right\|,\ Q \in F\},$$

  c'est à dire

$$\inf\{\left\|X^3 - (aX + b)\right\|,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = d(X^3, F).$$

  Ainsi,

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t = d(X^3, F).$$

- D'après le théorème sur les projections orthogonales, on a

$$\inf\{\left\|X^3 - Q\right\|,\ Q \in F\} = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|,$$

  où p est la projection orthogonale sur F. On a donc

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|^2.$$

- Rappelons ce résultat:

Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ une base de F, p la projection orthogonale sur F et $\vec{u}$ un vecteur de E. Alors $p(\vec{u})$ s'écrit

$$p(\vec{u}) = \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r,$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ sont les uniques scalaires solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \langle \vec{u} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i, \vec{v}_1\rangle &=& 0 \\ &\vdots& \\ \langle \vec{u} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\vec{v}_i, \vec{v}_r\rangle &=& 0. \end{array}\right.$$

Ainsi, le vecteur $aX + b$ est le projeté orthogonal de X^3 sur F si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \langle X^3 - (aX + b), 1\rangle = 0 \\ \langle X^3 - (aX + b), X\rangle = 0 \end{array}\right.$$

ce qui se produit (après calcul des produits scalaires) si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{4} - \frac{a}{2} - b &=& 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} &=& 0 \end{array}\right.$$

et l'on obtient

$$a = \frac{9}{10}, \quad b = -\frac{1}{5}$$

d'où

$$p(X^3) = -\frac{1}{5} + \frac{9}{10} X.$$

On conclut en calculant $\left\| X^3 - (-\frac{1}{5} + \frac{9}{10} X) \right\|$. On obtient $\frac{3}{10\sqrt{7}}$.

- ***En définitive,***

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - (at+b))^2 \, \mathrm{d}t = \frac{9}{700}.$$

7 Isométries vectorielles

7.1 Définitions et premières propriétés

Définition d'une isométrie vectorielle

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Définition XV.7.11 Un endomorphisme u de E qui conserve la norme c'est à dire tel que

$$\forall \vec{v} \in E, \quad \left\| u(\vec{v}) \right\| = \left\| \vec{v} \right\|$$

est appelé une ***isométrie vectorielle***.

Premier exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, soit u l'endomorphisme défini par

$$\forall \vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; u(\vec{v}) = \left(\frac{4x-3y}{5}, \frac{3x+4y}{5} \right).$$

alors u est une isométrie vectorielle, car pour tout $\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(\vec{v})\|^2 &= \left(\frac{4x-3y}{5} \right)^2 + \left(\frac{3x+4y}{5} \right)^2 \\ &= \frac{16x^2+9y^2-24xy}{25} + \frac{9x^2+16y^2+24xy}{25} \\ &= \frac{25x^2+25y^2}{25} \\ &= x^2+y^2 \\ &= \|\vec{v}\|^2, \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \; \|u(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$$

et donc que u est une isométrie de $\mathbb{R}^2$.

Deuxième exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, soit u l'endomorphisme défini par

$$\forall \vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; u(\vec{v}) = (4x-3y, 3x+4).$$

Alors u n'est pas une isométrie vectorielle. En effet,

$$u(1,0) = (4,3)$$

et on voit que

$$\|u(1,0)\| \neq \|(1,0)\|.$$

Troisième exemple

Dans tout espace euclidien E, Id_E est une isométrie vectorielle (évident) et $-\mathrm{Id}_E$ aussi puisque

$$\begin{aligned} \forall \vec{v} \in E, \; -\mathrm{Id}_E(\vec{v}) &= -\vec{v} \\ \| -\mathrm{Id}_E(\vec{v})\| &= \|-\vec{v}\| \\ &= \|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

Première propriété des isométries vectorielles.

Théorème XV.7.26 Une isométrie vectorielle est un automorphisme de E et son application réciproque est également une isométrie vectorielle de E.

Preuve.

- Étant en dimension finie, un endomorphisme u de E est un automorphisme si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$. Or

  $$u(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \left\| u(\vec{x}) \right\| = 0$$

  mais puisque u est une isométrie vectorielle,

  $$\left\| u(\vec{x}) \right\| = \left\| \vec{x} \right\|$$

  et c'est pourquoi

  $$\left\| \vec{x} \right\| = 0,$$

  ce qui entraîne bien entendu $\vec{x} = \vec{0}$ et prouve que $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$.
- Ensuite, soit $\vec{y} \in E$; posons

  $$\vec{x} = u^{-1}(\vec{y})$$

  i.e.

  $$u(\vec{x}) = \vec{y}.$$

  alors

  $$\begin{aligned} \left\| u^{-1}(\vec{y}) \right\| &= \left\| \vec{x} \right\| \\ &= \left\| u(\vec{x}) \right\| \\ &= \left\| u(u^{-1}(\vec{y})) \right\| \\ &= \left\| (u \circ u^{-1})(\vec{y}) \right\| \\ &= \left\| \vec{y} \right\|, \end{aligned}$$

  si bien que u^{-1} conserve la norme et est bien une isométrie vectorielle de E.

Caractérisations d'une isométrie vectorielle

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Théorème XV.7.27 Soit u un endomorphisme de E. Alors:

- u est une isométrie vectorielle si et seulement si u conserve le produit scalaire i.e. si et seulement si
$$\forall (\vec{v}, \vec{v}\,') \in E^2,\ \langle u(\vec{v}), u(\vec{v}\,')\rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\,'\rangle.$$
- u est une isométrie vectorielle si et seulement si pour toute base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une base orthonormée de E.
- u est une isométrie vectorielle si et seulement s'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E telle que $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ soit une base orthonormée de E.

Démonstration 72

Illustration sur un exemple

Reprenons l'isométrie u de $\mathbb{R}^2$ définie par
$$\forall \vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ u(\vec{v}) = \left(\frac{4x-3y}{5}, \frac{3x+4y}{5}\right).$$

- Démontrons que u conserve le produit scalaire. Soit $\vec{v} = (x, y)$ et $\vec{v}' = (x', y')$. Alors
$$\begin{aligned}
u(\vec{v}) &= \left(\frac{4x-3y}{5}, \frac{3x+4y}{5}\right)\\
u(\vec{v}') &= \left(\frac{4x'-3y'}{5}, \frac{3x'+4y'}{5}\right)\\
\langle u(\vec{v}), u(\vec{v}')\rangle &= \frac{4x-3y}{5}\times\frac{4x'-3y'}{5} + \frac{3x+4y}{5}\times\frac{3x'+4y'}{5}\\
&= \frac{16xx'-12xy'-12yx'+9yy'}{25} + \frac{9xx'+12xy'+12yx'+16yy'}{25}\\
&= \frac{25xx'+25yy'}{25}\\
&= xx'+yy'\\
&= \langle \vec{v}, \vec{v}'\rangle
\end{aligned}$$
ce qui démontre que u conserve le produit scalaire.
- Démontrons que u transforme la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, qui est orthonormée, en une base orthonormée. On a
$$\begin{aligned}
u(1,0) &= \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\\
\|u(1,0)\|^2 &= \frac{16}{25}+\frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1\\
u(0,1) &= \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\\
\|u(0,1)\|^2 &= \frac{9}{25}+\frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1\\
\langle u(1,0), u(0,1)\rangle &= \frac{4}{5}\times\frac{-3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = 0,
\end{aligned}$$
ce qui démontre que $(u(\vec{\imath}), u(\vec{\jmath}))$ est une base orthonormée.

Exemple concret de l'utilité de ce résultat

Dans la pratique, c'est souvent le troisième point que l'on met en œuvre.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4\\ -4 & 1 & -8\\ -4 & -8 & 1\end{pmatrix}.$$
Démontrons que u est une isométrie vectorielle en démontrant que l'image par u de la base canonique, qui est une base orthonormée, est une base orthonormée.

- Par définition, les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:
$$\begin{aligned}
u(\vec{\imath}) &= \frac{1}{9}(7, -4, -4)\\
u(\vec{\jmath}) &= \frac{1}{9}(1, 8, -4)\\
u(\vec{k}) &= \frac{1}{9}(-4, -8, -1).
\end{aligned}$$
- On calcule
$$\begin{aligned}
\|u(\vec{\imath})\| &= \frac{1}{9}\sqrt{49+16+16}\\
&= \frac{1}{9}\sqrt{81}\\
&= 1\\
\|u(\vec{\jmath})\| &= \frac{1}{9}\sqrt{16+1+64}\\
&= \frac{1}{9}\sqrt{81}\\
&= 1\\
\|u(\vec{k})\| &= \frac{1}{9}\sqrt{16+64+1}\\
&= \frac{1}{9}\sqrt{81}\\
&= 1.
\end{aligned}$$
- Puis
$$\begin{aligned}
\langle u(\vec{\imath}), u(\vec{\jmath})\rangle &= \frac{1}{81}(-28-4+32)\\
&= 0\\
\langle u(\vec{\imath}), u(\vec{k})\rangle &= \frac{1}{81}(-28+32-4)\\
&= 0\\
\langle u(\vec{\jmath}), u(\vec{k})\rangle &= \frac{1}{81}(16-8-8)\\
&= 0.
\end{aligned}$$
- On a donc apporté la preuve que u transforme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$; ainsi, u est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Groupe orthogonal de E

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Définition XV.7.12 Le groupe orthogonal de E est l'ensemble de toutes les isométries vectorielles de E. Cet ensemble est noté $\mathcal{O}(E)$.

- $\mathcal{O}(E)$ est stable par la composition des applications: si u et v sont dans $\mathcal{O}(E)$, alors $u \circ v$ est dans $\mathcal{O}(E)$ c'est à dire: si u et v sont des isométries, alors $u \circ v$ est une isométrie.
- Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ i.e. si u est une isométrie vectorielle, alors u^{-1} est également une isométrie vectorielle.

Démonstration 73

Isométries et stabilité de l'orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Théorème XV.7.28 Soit u une isométrie vectorielle de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, c'est à dire $u(F) \subset F$ i.e. pour tout $\vec{v} \in F$, $u(\vec{v}) \in F$, alors $F^{\perp}$ est lui aussi stable par u i.e. pour tout $\vec{w} \in F^{\perp}$, $u(\vec{w}) \in F^{\perp}$.

Démonstration.

- *Remarque.* On sait que u est un automorphisme de E et en conséquence u conserve la dimension: $\dim(u(F)) = \dim(F)$; mais comme $u(F) \subset F$ par hypothèse, c'est que $u(F) = F$.
- Il s'agit donc de démontrer que pour tout $y \in F^{\perp}$, on a $u(y) \in F^{\perp}$. Soit donc $y \in F^{\perp}$. Par définition, pour démontrer qu'un vecteur appartient à $F^{\perp}$, il faut démontrer qu'il est orthogonal à tout vecteur x de F. Soit donc $x \in F$: il faut alors prouver que $\langle x, u(y)\rangle = 0$.
- Puisque $u(F) = F$, il existe $x' \in F$ tel que $u(x') = x$. On a donc
$$\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x'), u(y)\rangle = \langle x', y\rangle$$
car par hypothèse, u conserve le produit scalaire.
- Mais $x' \in F$ et $y \in F^{\perp}$: le vecteur y est donc orthogonal à x', c'est à dire $\langle x', y\rangle = 0$. Ainsi, $\langle x, u(y)\rangle = 0$, ce qui achève la démonstration.

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$
Alors u est une isométrie vectorielle car l'image de la base canonique, qui est une base orthonormée, se lit sur les trois colonnes de A: ce sont les vecteurs
$$\frac{1}{9}(7,-4,-4),\ \frac{1}{9}(-4,1,-8),\ \frac{1}{9}(-4,-8,1)$$
et il est immédiat de vérifier que ces trois vecteurs forment une famille orthonormée, donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

- Ainsi, u transforme une base orthonormée en une base orthonormée et c'est pourquoi u est une isométrie vectorielle.
- Une autre approche (qui conduirait aux mêmes calculs), consisterait à vérifier que A est une matrice orthogonale (cf. plus bas).

On considère le plan
$$P = \{\vec{v} = (x,y,z),\ x + 2y + 2z = 0\}.$$
Vérifions que P est stable par u ainsi que $P^{\perp}$.

- Déterminons une base de P. Soit un vecteur $\vec{v} = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$. Alors
$$\begin{aligned} \vec{v} \in F &\iff x = -2y - 2z \\ &\iff y = x \\ &\iff \vec{v} = (-2y-2z, y, z) \\ &\iff \vec{v} = y(-2,1,0) + z(-2,0,1) \\ &\iff \vec{v} \in \operatorname{Vect}\big((-2,1,0),(-2,0,1)\big). \end{aligned}$$
Ainsi, $\big((-2,1,0),(-2,0,1)\big)$ est une base de F.
- Notons
$$\vec{e}_1 = (-2,1,0),\ \vec{e}_2 = (-2,0,1).$$
On prouve que P est stable par u (cf. page 161) en démontrant que
$$u(\vec{e}_1) \in P,\ u(\vec{e}_2) \in P.$$
On calcule
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -18 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$
et donc
$$u(\vec{e}_1) = \frac{1}{9}(-18, 9, 0).$$
Puisque
$$\frac{1}{9} - 18 + 2 \times 9 + 2 \times 0) = 0,$$
on voit que $u(\vec{e}_1) \in P$. De même,
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$
et donc
$$u(\vec{e}_1) = \frac{1}{9}(-18, 9, 0).$$
Puisque
$$\frac{1}{9}(-18 + 2 \times 0 + 2 \times 9) = 0,$$
on voit que $u(\vec{e}_2) \in P$.
- Ainsi,
$$u(\vec{e}_1) \in F,\ u(\vec{e}_2) \in P$$
et c'est pourquoi P est stable par u.
- Passons à $P^{\perp}$. Un vecteur normal au plan
$$P = \{\vec{v} = (x,y,z),\ x + 2y + 2z = 0\}$$
est le vecteur $\vec{e}_3 = (1,2,2)$. Ainsi,
$$P^{\perp} = \operatorname{Vect}(1,2,2).$$
On prouve la stabilité de $P^{\perp}$ par u en démontrant que le vecteur $\vec{e}_3$, qui est une base de $P^{\perp}$, vérifie le critère de stabilité $u(\vec{e}_3) \in P^{\perp}$ (cf. page 161). On calcule
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -18 \end{pmatrix}$$
et donc
$$u(\vec{e}_3) = (-1,-2,-2).$$

On voit que $u(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$ et donc $u(\vec{e}_1) \in \mathrm{Vect}(\vec{e}_3)$ i.e.

$$u(\vec{e}_3) \in P^\perp$$

et c'est pourquoi $P^\perp$ est stable par u.

Valeurs propres éventuelles d'une isométrie

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Théorème XV.7.29 Si u est une isométrie et λ est une valeur propre (réelle) de u, alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ (mais u ne possède pas nécessairement de valeurs propres).

Preuve.

- Si λ est une valeur propre de u et $\vec{v}$ un vecteur propre associé, alors

$$\begin{aligned} u(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Longrightarrow \|u(\vec{v})\| &= \|\lambda\vec{v}\| \\ &= |\lambda|\,\|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

- Mais $\|u(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ car u est une isométrie , si bien que

$$\|\vec{v}\| = |\lambda|\,\|\vec{v}\|$$

et le résultat s'ensuit, puisque $\|\vec{v}\| \neq 0$ du fait qu'en sa qualité de vecteur propre, $\vec{v}$ n'est pas le vecteur nul.

Exemples.

- Reprenons l'isométrie u de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall \vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ u(\vec{v}) = \left(\frac{4x - 3y}{5}, \frac{3x + 4y}{5}\right)$$

dont la matrice M de u dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \lambda - \frac{4}{5} \end{vmatrix} \\ &= \left(\lambda - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25} \end{aligned}$$

qui n'a clairement aucune racine réelle. Donc u ne possède pas de valeurs propres réelles.

- Reprenons l'isométrie g de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall \vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(\vec{v}) = \left(\frac{4x + 3y}{5}, \frac{3x - 4y}{5}\right)$$

dont la matrice N de g dans la base canonique est

$$N = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \lambda + \frac{4}{5} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \\ &= \lambda^2 - 1, \end{aligned}$$

dont les racines sont -1 et -1. Ainsi, g possède les valeurs propres -1 et 1.

7.2 Exemple fondamental d'isométrie vectorielle: les symétries orthogonales; réflexions

Rappels sur les symétries

Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:

$$E = A \oplus B.$$

Tout vecteur $\vec{v}$ de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in A$ et $\vec{v}_2 \in B$.

- Par définition, la symétrie s sur A et parallèlement à B est l'application qui à tout $\vec{v}$ de E associe $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
- C'est un automorphisme de E i.e. une application linéraire bijective de E dans e, avec

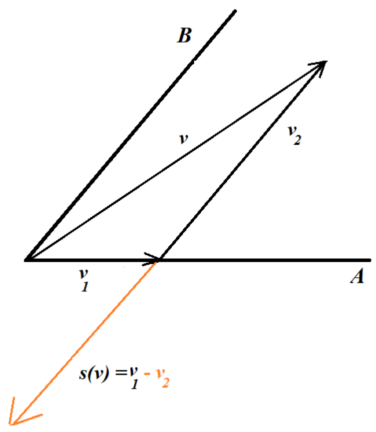
$$s^{-1} = s,$$

ce qui résulte du fait que

$$s \circ s = \mathrm{Id}_E.$$

- Pour tout vecteur $\vec{v} \in E$,

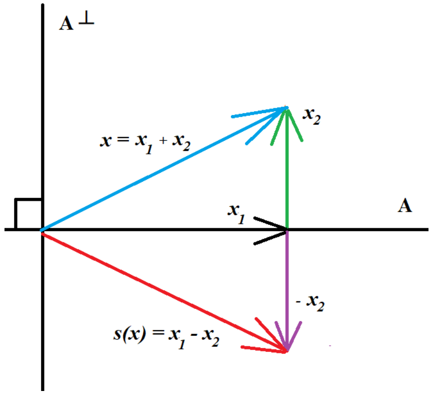
$$s(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in A, \quad s(\vec{v}) = -\vec{v} \iff \vec{v} \in B.$$



Définition d'une symétrie orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien et A un sous-espace vectoriel de E.

Définition XV.7.13 La symétrie orthogonale s par rapport à A est la symétrie par rapport au sous-espace A et parallèlement à son orthogonal $A^{\perp}$.
C'est une isométrie vectorielle.



Preuve. Soit $\vec{x} \in E$, que l'on écrit $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, avec $\vec{x}_1 \in A$ et $\vec{x}_2 \in A^{\perp}$.

- Puisque $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne
$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 &= \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2\|^2 \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2. \end{aligned}$$
- Par définition, $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$.
- Puisque $\vec{x}_1$ et $-\vec{x}_2$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne
$$\begin{aligned} \|s(\vec{x})\|^2 &= \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^2 \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + \|-\vec{x}_2\|^2 \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2. \end{aligned}$$
- On a $\|s(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2$ et donc $\|s(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x}$ de E.

Autre preuve. Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ une base orthonormée de A et $(\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de $A^{\perp}$.

- On sait alors que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée de E (cf. page 267).
- Puisque
$$s(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \ldots, s(\vec{e}_r) = \vec{e}_r, s(\vec{e}_{r+1}) = -\vec{e}_{r+1}, \ldots, s(\vec{e}_n) = -\vec{e}_n,$$
l'image de $\mathcal{B}$ par s est la famille
$$\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, -\vec{e}_{r+1}, \ldots, -\vec{e}_n).$$
- Il est clair que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E puisque les signes $-$ n'affectent ni la valeur de la norme ni l'orthogonalité; par exemple
$$\begin{aligned} \|-\vec{e}_{r+1}\| &= \|\vec{e}_{r+1}\| \\ &= 1 \\ \langle \vec{e}_1, -\vec{e}_{r+1} \rangle &= -\langle \vec{e}_1, \vec{e}_{r+1} \rangle \\ &= -0 \\ &= 0. \end{aligned}$$
- On a donc trouvé une base orthonormée dont l'image par s est une base orthonormée: c'est la preuve que s est une isométrie vectorielle.

Réflexions

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Définition XV.7.14 Soit H un hyperplan de E.
La symétrie orthogonale par rapport à H est appelée réflexion d'hyperplan H.

7.3 Caractérisation matricielle des isométries vectorielles: matrices orthogonales

Soit E un espace vectoriel euclidien. Le théorème suivant est central dans toute la théorie des isométries vectorielles.

Théorème XV.7.30 Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, u un endomorphisme de E et M la matrice de u dans $\mathcal{B}$.
Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si
$$M^T M = I_n,$$
c'est à dire si et seulement si
$$M^{-1} = M^T.$$
Une telle matrice s'appelle une matrice orthogonale.
L'ensemble des matrices orthogonales s'appelle le *groupe orthogonal d'ordre* n et se note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$.
Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, l'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale et I_n est une matrice orthogonale.

Démonstration 74

Ce théorème est extrêmement important dans la pratique:

Théorème XV.7.31 Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes sont toutes de norme un et deux à deux orthogonales.

Démonstration 75

Pour appliquer ce théorème, il est donc entendu que les colonnes de M sont considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, auxquelles on applique alors les règles habituelles concernant le calcul des normes et des produits scalaires.

Exemple fondamental

La matrice
$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$
est orthogonale car:

- les normes de ses trois vecteurs colonnes sont égales à 1:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{7}(-2,6,-3)\right\| &= \frac{1}{7}\|(-2,6,-3)\| \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{4+36+9} \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{49} \\
&= 1 \\
\left\|\frac{1}{7}(6,3,2)\right\| &= \frac{1}{7}\|(6,3,2)\| \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{36+9+4} \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{49} \\
&= 1 \\
\left\|\frac{1}{7}(3,-2,-6)\right\| &= \frac{1}{7}\|(3,-2,-3)\| \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{9+4+36} \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{49} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

- Ses vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux:

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{1}{7}(-2,6,-3),\frac{1}{7}(6,3,2)\right\rangle &= \frac{1}{49}(-2\times 6+6\times 3-3\times 2) \\
&= 0 \\
\left\langle\frac{1}{7}(-2,6,-3),\frac{1}{7}(3,-2,-6)\right\rangle &= \frac{1}{49}(-2\times 3+6\times(-2)-3\times(-6)) \\
&= 0 \\
\left\langle\frac{1}{7}(6,3,2),\frac{1}{7}(3,-2,-6)\right\rangle &= \frac{1}{49}(6\times 3+3\times(-2)+2\times(-6)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- ***Conséquence importante.*** L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire habituel, associé à la matrice A dans la base canonique, qui est une base orthonormée, est donc une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Matrice de passage et bases orthonormées

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Théorème XV.7.32 Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormée de E et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormée si et seulement si la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale.

Démonstration 76

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, posons

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\quad \vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\quad \begin{aligned}\vec{e}_3 &= \vec{e}_1\wedge\vec{e}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1).\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{e}_1$ est de norme 1, tout comme le vecteur $\vec{e}_2$ (calculs immédiats) et il lui est de plus orthogonal puisque

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\langle(1,1,1),(-1,0,1)\rangle=0.$$

- Des propriétés du produit vectoriel, on déduit que
$$\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$$
est une base orthonormée (directe).
- La matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est donc une matrice orthogonale.
- Ceci pouvait se vérifier aussi directement:
$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$
est effectivement orthogonale puisque les vecteurs colonnes de P sont précisément les vecteurs $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, qui sont bien de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

Déterminant d'une matrice orthogonale

Théorème XV.7.33 Soit M une matrice carrée orthogonale.
Alors $\det(M)=1$ ou $\det(M)=-1$.

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est noté $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et appelé groupe spécial orthogonal.

Démonstration. Dans l'égalité $M^{-1}={}^tM$, prenons le déterminant: sachant qu'une matrice et sa transposée ont même déterminant et que le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant, on obtient

$$\frac{1}{\text{dét}\,(M)}=\text{dét}\,(M)$$

i.e.

$$(\text{dét}\,(M))^2=1.$$

Ainsi, $\text{dét}\,(M)=\pm 1$.

Évidemment, une matrice peut avoir un déterminant égal à 1 sans être pour autant orthog-onale!

C'est le cas par exemple pour la matrice

$$M=\begin{pmatrix}8 & 7\\ 9 & 8\end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut 1, mais qui n'est manifestement pas orthogonale (les colonnes ne sont même pas de norme 1).

Déterminant d'une isométrie; isométries positives, négatives

Remarque. Étant donné l'égalité des déterminants d'un endomorphisme et d'une matrice représentant cet endomorphisme, on en déduit le résultat suivant:

Théorème XV.7.34 Soit E un espace vectoriel euclidien et soit u une isométrie vectorielle de E. Alors

- ou bien $\det(u) = 1$, et on dit que u est une isométrie vectorielle *directe*
- ou bien $\det(u) = -1$, et on dit que u est une isométrie vectorielle *indirecte*.

L'ensemble des isométries vectorielles de E de déterminant 1 est noté $\mathrm{SO}(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal de E.

Exemples

- Reprenons l'isométrie u de $\mathbb{R}^2$ définie par
$$\forall \vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ u(\vec{v}) = \left(\frac{4x - 3y}{5}, \frac{3x + 4y}{5}\right).$$
Puisque
$$u(1, 0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad u(0, 1) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$
la matrice M de u dans la base canonique est
$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$
et dont le déterminant vaut
$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1.$$
Ainsi, u est une isométrie vectorielle positive.
- Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par
$$\forall \vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(\vec{v}) = \left(\frac{4x + 3y}{5}, \frac{3x - 4y}{5}\right).$$
On démontre aisément comme on l'a fait pour u que g est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Puisque
$$g(1, 0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad g(0, 1) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right),$$
la matrice N de g dans la base canonique est
$$N = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$
et dont le déterminant vaut
$$-\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = -\frac{16}{25} - \frac{9}{25} = -1.$$
Ainsi, g est une isométrie vectorielle négative.

8 Orientation d'un espace vectoriel, produit mixte

Soit E un espace vectoriel de dimension finie (typiquement, $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$).

Définition XV.8.15 Orienter E, c'est choisir une base de référence $\mathcal{B}_0$.
On dit alors qu'une base $\mathcal{B}$ de E est *directe*, resp. *indirecte*, lorsque le déterminant de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ est *positif*, resp. *négatif*.

Dans toute la suite de ce chapitre, les espaces vectoriels euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ seront orientés en choisissant comme base de référence la base canonique, qui sera alors directe.

Rappel.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté.
Le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ de ces trois vecteurs est le scalaire défini par
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle (\vec{u} \wedge \vec{v}), \vec{w} \rangle.$$
Si (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') sont les composantes respectives de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans une base orthonormée directe, alors
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$
qui est donc un déterminant dont la valeur est indépendante du choix de la base orthonormée directe dans laquelle sont exprimées les coordonnées de ces vecteurs. C'est en particulier le déterminant de la matrice des composantes de ces vecteurs exprimées dans la base canonique.

Démonstration 77

Remarque. La définition du produit mixte de trois vecteurs s'étend évidemment dans tout espace vectoriel E euclidien et orienté de dimension 3, le produit vectoriel étant défini et calculé dans une base orthonormée directe de E par les mêmes formules que celles donnant le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

On en déduit:

Proposition XV.8.35 Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (ou de tout espace vectoriel euclidien et orienté de dimension 3). Alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$ et une base indirecte si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$.

En effet, la matrice de passage de la base canonique à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ a son déterminant égal au produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ d'où, par définition de l'orientation, le résultat.

Exemple fondamental de base directe

Proposition XV.8.36 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ orienté (ou dans tout espace vectoriel euclidien et orienté de dimension 3):

- si $\vec{u}, \vec{v}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants, alors
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$$
est une base directe.
- En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires, alors
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$$
est une base orthonormée directe et c'est la seule base orthonormée directe dont les deux premiers vecteurs sont $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En effet, du fait que la base canonique est orthonormée directe, la matrice de passage de la base canonique à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ a son déterminant égal au produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}]$ et en conséquence:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}] &= \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

car $\vec{u}, \vec{v}$ étant linéairement indépendants, on a $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$. Enfin, il existe deux vecteurs unitaires normaux au plan dirigé par $(\vec{u}, \vec{v})$: le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et son opposé et des propriétés du produit mixte/déterminant, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{u} \wedge \vec{v}) &= -\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

et la base $(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{u} \wedge \vec{v})$ est donc indirecte.

Deux propositions conformes avec l'idée que l'on peut se faire de la notion d'orientation:

Proposition XV.8.37 Soit E un espace vectoriel orienté, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

- Si $\det P > 0$, alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation (i.e. elles sout toutes deux directes ou toutes deux indirectes).
- Si $\det P < 0$, alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont des orientations opposées.

Démonstration 78

Proposition XV.8.38 Soit E un espace vectoriel orienté de dimension n, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base directe de E, f un endomorphisme de E et $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B}) = (f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$.

- Si $\det(f) > 0$, alors $\mathcal{B}'$ est une base directe.
- Si $\det(f) < 0$, alors $\mathcal{B}'$ est une base indirecte.

Démonstration 79

Proposition XV.8.39 *Orientation d'une droite et d'un plan de l'espace.* On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est orienté (ou tout espace vectoriel euclidien et orienté de dimension 3).

- Soit D une droite vectorielle. Orienter D, c'est choisir un vecteur unitaire $\vec{n}$ dirigeant cette droite, ce qui donne deux choix d'orientations.
- Soit P un plan de l'espace et $D = P^\perp$ la normale à ce plan; on oriente D en choisissant un vecteur directeur unitaire $\vec{n}$ de D. On définit alors une orientation de P en disant que:
  - une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de P est directe si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$,
  - une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de P est indirecte si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ est une base indirecte de $\mathbb{R}^3$.

  On dit alors que l'on a orienté P suivant le vecteur $\vec{n}$.
- Cette orientation du plan suivant un vecteur qui lui est normal lui confère une orientation au sens classique: deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de P ont la même orientation au sens de cette nouvelle orientation si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ a un déterminant > 0.

Démonstration 80

Remarquons que des propriétés du produit mixte, on déduit que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est directe si et seulement si $(\vec{n}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est directe.

9 Matrices orthogonales 2×2 et isométries vectorielles en dimension 2

Comme mentionné plus haut, une matrice orthogonale a un déterminant égal à 1 ou à -1. Cette distinction permet de dresser le listing de tous les matrices orthogonales 2×2.

Théorème XV.9.40 Soit $M \in \mathcal{O}(2)$.

- Si $\det(M) = 1$, alors il existe un réel θ tel que
$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
- Si $\det(M) = -1$, alors il existe un réel θ tel que
$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration 81

Exemples

- Soit
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
On voit bien que M est une matrice orthogonale: ses deux vecteurs colonnes sont effectivement orthogonaux et chacun de norme 1; de plus, $\det(M) = 1$ et on a clairement
$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
avec $\theta = \frac{\pi}{3}$.

- Soit
$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$
On voit bien que M est une matrice orthogonale: ses deux vecteurs colonnes sont effectivement orthogonaux et chacun de norme 1; de plus, $\det(M) = -1$. Recherchons θ tel que
$$\cos\theta = \frac{3}{5}, \quad \sin\theta = -\frac{4}{5}.$$
Puisque l'angle que l'on recherche a un $\cos > 0$ et un $\sin < 0$, il faut le rechercher entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0.
  - Or la fonction $\sin$ établit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
  - Posons alors
$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= -\arcsin\left(\frac{4}{5}\right). \end{aligned}$$
Par définition, on a donc déjà $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin\theta = -\frac{4}{5}$.
  - On a
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$
et donc
$$\cos\theta = \frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \cos\theta = -\frac{3}{5}.$$
Mais comme on sait que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on e n déduit que $\cos\theta \geq 0$, et c'est pourquoi
$$\cos\theta = \frac{3}{5}.$$
  - Ainsi,
$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$
avec $\theta = -\arcsin\frac{4}{5}$.

Théorème XV.9.41 Pour tout réel θ, on note
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
Alors
- $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta = R_{\theta+\theta'}$,
- $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Démonstration 82

Et maintenant la version endomorphique de ces théorèmes:

Définition XV.9.16 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2.
Une *rotation* est une isométrie vectorielle directe de E i.e. une isométrie vectorielle de déterminant 1.

Théorème XV.9.42 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 et f une rotation de E.

Alors il existe un réel θ (unique modulo 2π) tel que dans *toute* base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E, f soit représenté par la matrice
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
On dit alors que f est la *rotation d'angle* θ.

Démonstration 83

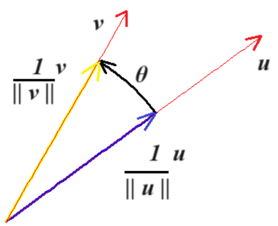
Ce théorème permet alors de définir la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs:

Théorème XV.9.43 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 et soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E.

Alors il existe un réel θ (unique modulo 2π) tel que
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \\ \sin\theta = \dfrac{\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \end{cases}$$
où $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ est le produit mixte de $(\vec{u}, \vec{v})$ (valeur du déterminant de ces vecteurs dans n'importe quelle base orthonormée directe).

Ce réel θ est appelé *une mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs* $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note alors
$$(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \ [2\pi].$$
Ce réel θ est l'angle de l'unique rotation transformant le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ en le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$.

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on a
$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{u}) &= -(\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi] \\ (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{u}, \vec{w}) \ [2\pi] \text{ (relation de Chasles).} \end{aligned}$$



Démonstration 84

Remarques

- Ce résultat est en particulier valable lorsque $E = \mathbb{R}^2$, orienté de façon que la base canonique soit directe, et lorsque f est donnée par sa matrice M dans la base canonique, M étant une matrice orthogonale de déterminant 1.
- Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$ pour simplifier, soit f la rotation d'angle θ; l'image du vecteur $\vec{\imath}$ par la rotation d'angle θ est donc le vecteur

$$f(\vec{\imath}) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

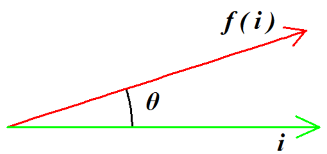
Puisque

$$\langle \vec{\imath}, \vec{f}(\imath)\rangle = \cos\theta$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\vec{\imath}, f(\vec{\imath}) &= \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} \\ &= \sin\theta, \end{aligned}$$

on déduit du théorème ci-dessus qu'une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \vec{f}(\imath))$ est θ:



- L'originalité de ce résultat, c'est que *quelle que soit* la base orthonormée directe dans laquelle on représente une rotation, la matrice sera toujours *la même*, ce qui a pour effet que pour tout vecteur (non nul) du plan, son image fera un angle de θ avec lui. En effet, soit $\vec{u}$ un vecteur non nul que l'on normalise:

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

et soit $\vec{v}_0$ un vecteur unitaire tel que la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ soit orthonormée directe, si bien que d'après le Théorème XV.9.42, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On a alors (protocole!)

$$f(\vec{u}_0) = \cos\theta\, \vec{u}_0 \;+\; \sin\theta\, \vec{v}_0$$

et dans la mesure où les composantes de $\vec{u}_0$ dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 0)$ et celles de $f(\vec{u}_0)$ dans $\mathcal{B}$ sont $(\cos\theta, \sin\theta)$, on a (cf. Théorème XV.3.12 "calcul dans une base orthonormée")

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_0, f(\vec{u}_0)\rangle &= 1 \times \cos\theta + 0 \times \sin\theta \\ &= \cos\theta, \end{aligned}$$

puis, $\mathcal{B}$ étant orthonormée directe, ce qui autorise le calcul du produit mixte dans cette base:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\vec{u}_0, f(\vec{u}_0)) &= \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} \\ &= \sin\theta, \end{aligned}$$

et on déduit du rappel ci-dessus qu'une mesure de l'angle $(\vec{u}_0, f(\vec{u}_0))$ est θ; on a

$$\vec{u} = \|\vec{u}\|\vec{u}_0$$

et par linéarité

$$f(\vec{u}) = \|\vec{u}\| f(\vec{u}_0).$$

Des propriétés de bilinéarité du produit scalaire et du produit mixte, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\langle \vec{u}, f(\vec{u})\rangle}{\|\vec{u}\|\ \|f(\vec{u})\|} &= \frac{\langle \|\vec{u}\|\vec{u}_0, \|\vec{u}\| f(\vec{u}_0)\rangle}{\|\vec{u}\|\ \|f(\vec{u})\|} \\ &= \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|\ \|f(\vec{u})\|}\langle \vec{u}_0, f(\vec{u}_0)\rangle \\ &= \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{u}\|}\langle \vec{u}_0, f(\vec{u}_0)\rangle \text{ (car } f \text{ est une isométrie: } \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|) \\ &= \langle \vec{u}_0, f(\vec{u}_0)\rangle \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

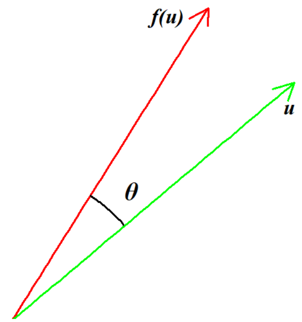
puis

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\vec{u}, f(\vec{u})) &= \mathrm{Det}(\|\vec{u}\|\vec{u}_0, \|\vec{u}\| f(\vec{u}_0)) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \mathrm{Det}(\vec{u}_0, f(\vec{u}_0)) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \sin\theta \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{Det}(\vec{u}, f(\vec{u}))}{\|\vec{u}\|\ \|f(\vec{u})\|} &= \frac{\|\vec{u}\|^2 \sin\theta}{\|\vec{u}\|^2} \\ &= \sin\theta \end{aligned}$$

et on déduit du rappel ci-dessus qu'une mesure de l'angle $(\vec{u}_0, f(\vec{u}_0))$ est θ:



> **Proposition XV.9.44**
>
> - La composée de deux rotations d'angles respectifs θ et θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$; en particulier, deux rotations commutent.
> - L'application réciproque de la rotation d'angle θ et la rotation d'angle $-\theta$.

Cela résulte des deux théorèmes précédents.

Remarque. Notons la grande cohérence de ces deux résultats avec l'idée que l'on se fait des rotations dans le plan.

Deuxième catégorie d'isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 2:

> **Théorème XV.9.45** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 orienté et f une isométrie vectorielle indirecte de E i.e. une isométrie vectorielle de déterminant -1.
>
> Alors $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ est une droite vectorielle D (autrement dit, 1 est une valeur propre de f) et f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.

Démonstration 85

Exemple

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right).$$

- La matrice de f dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  C'est une clairement matrice orthogonale de déterminant -1. Ainsi, f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D.

- D'après les propriétés des symétries, une symétrie s'effectue toujours par rapport au sous-espace vectoriel constitué par ses vecteurs invariants et donc

$$D = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$$

  (car $f(\vec{v}) = \vec{v} \iff (f - \operatorname{Id})(\vec{v}) = \vec{0}$). Après calculs, on trouve

$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}(\sqrt{3}, 1).$$

  Ainsi, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \operatorname{Vect}(\sqrt{3}, 1)$.

Et pour terminer cette étude, une autre classification, plutôt théorique, des isométries vectorielles en dimension 2:

Proposition XV.9.46 *Classification des isométries du plan par leurs invariants.* Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et f une isométrie vectorielle de E, autre que Id.

- Si $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \{\vec{0}\}$, alors f est une rotation.
- Si $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ est une droite vectorielle, alors f est une symétrie orthogonale.

Remarque. Un vecteur $\vec{v}$ appartenant à $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ est un vecteur vérifiant $f(\vec{v}) - \vec{v} = \vec{0}$ i.e. $f(\vec{v}) = \vec{v}$, qu'on appelle alors vecteur invariant par f. Une rotation se caractérise donc par son absence de vecteur invariant (mis à part bien entendu le vecteur nul) et une symétrie orthogonale, dans le plan, par le fait que ces vecteurs invariants constituent une droite, ce qui est tout à fait cohérent dans les deux cas.

Démonstration 86

10 Matrices orthogonales 3×3 et isométries vectorielles en dimension 3: aspects pratiques

On ne peut pas en dresser la liste exhaustive, mais on pourra en donner une forme générale à un changement de base près. L'objet de cette section est de proposer une classification de ces matrices en fonction de la dimension du sous-espace formé par leurs invariants: un invariant d'un endomorphisme f est un vecteur $\vec{u}$ tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$, c'est à dire un vecteur de $\operatorname{Ker}(f - I_3)$.

10.1 Matrices orthogonales 3×3: réflexions

L'énoncé suivant concerne une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3: typiquement $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à une matrice *orthogonale*.

Théorème XV.10.47 Soit f une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3.

On suppose que le sous-espace $P = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ est un plan.

Alors f est la réflexion par rapport à P i.e. la symétrie orthogonale par rapport au plan P et f est représenté par la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée adaptée à $E = P \oplus P^{\perp}$.

Démonstration 87

Remarque. Le dernier point est archi-classique: soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée de P et $\vec{e}_3$ un vecteur unitaire normal à P, de sorte que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée adaptée à $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^{\perp}$. Puisque

$$\begin{array}{rcll} f(\vec{e}_1) & = & \vec{e}_1 & \text{(du fait que } \vec{e}_1 \in P) \\ f(\vec{e}_2) & = & \vec{e}_2 & \text{(du fait que } \vec{e}_2 \in P) \\ f(\vec{e}_3) & = & -\vec{e}_3 & \text{(du fait que } \vec{e}_3 \in P^{\perp}) \end{array}$$

la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est bien la matrice D d'après la théorie de la représentation matricielle/codage.

Exemple

Soit

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -4 & -7 & -4 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé. Démontrer que f est une réflexion.

- À noter la présence du facteur $\frac{1}{9}$ et rappelons que $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$ et donc la première colonne de M a pour norme

$$\frac{1}{9}\sqrt{64 + 16 + 1} = \frac{1}{9}\sqrt{81} = 1$$

  et la norme du deuxième comme celle troisième vecteur colonne est

$$\frac{1}{9}\sqrt{16 + 49 + 16} = \frac{1}{9}\sqrt{81} = 1.$$

  On calcule à présent le produit scalaire entre vecteurs colonnes de M: en observant que l'on a $\langle \lambda\vec{u}, \mu\vec{v}\rangle = \lambda\mu\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$, le produit scalaire entre les première et deuxième colonne de M vaut par exemple

$$\frac{1}{9} \times \frac{1}{9}(-32 + 28 + 4) = 0$$

  et on vérifie aussi immédiatement la nullité des deux autres produits scalaires. Ainsi, la matrice M est orthogonale et f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

- Déterminons $P = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ (i.e. le sous-espace vectoriel constitué des vecteurs invariants par f). Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonnne de $\vec{u}$ dans la base canonique. Alors $\vec{u} \in P$ i.e. $f(\vec{u}) = \vec{u}$ si et seulement si $MX = X$ et

$$
\begin{aligned}
MX = X \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 8x - 4y - z = 9x \\ -4x - 7y - 4z = 9y \\ -x - 4y + 8z = 9z \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -x - 4y - z = 0 \\ -4x - 16y - 4z = 0 \\ -x - 4y - z = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad -x - 4y - z = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad z = -x - 4y \\
& \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -4),
\end{aligned}
$$

ce qui démontre que $P = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ est le plan dont une base est $((1, 0, -1), (0, 1, -4))$ (et dont une équation est $x + 4y + z = 0$).

- Ainsi, f est la réflexion par rapport au plan P.

10.2 Matrices orthogonales 3×3: rotations

Le contexte et le champ d'application typique sont les mêmes que dans le théorème précédent. Ce théorème est fondamental:

Théorème XV.10.48 Soit f une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E de dimension 3. On suppose que le sous-espace $D = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ est une droite vectorielle.

- En fixant un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ de D, il existe un réel θ (unique modulo 2π), tel que dans toute base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, c'est à dire dans toute base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$, la matrice de f soit

$$
M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.
$$

- On dit alors que f est la rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{u}$ et d'angle θ.

Démonstration 88

Remarques.

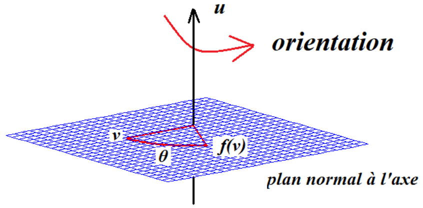
- Le plan $P = D^{\perp}$, dirigé par $(\vec{v}, \vec{w})$ est *stable* par f, puisque

$$
\begin{aligned}
f(\vec{v}) &= \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{w} \in P \\
f(\vec{w}) &= -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{w} \in P.
\end{aligned}
$$

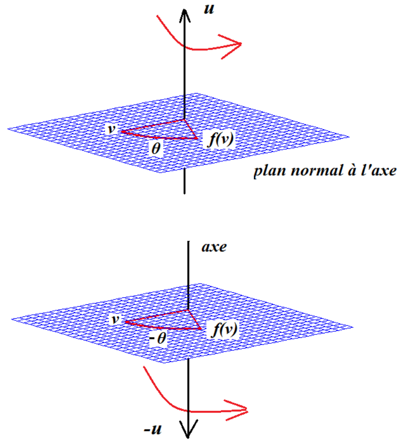
Soit f' l'endomorphisme de P induit par f sur P; orientons alors P suivant le vecteur $\vec{u}$, de sorte que la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de P. La matrice de f' dans la base $\mathcal{B}'$ est alors (protocole!)

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

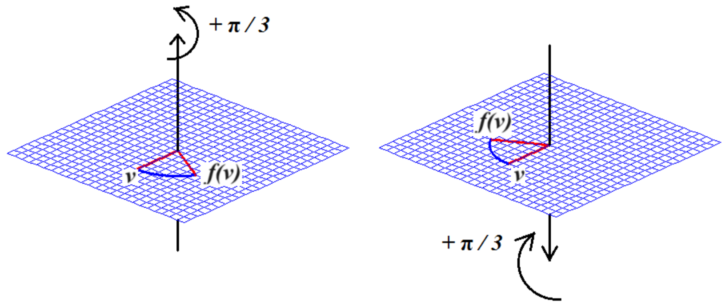
si bien que f' est la rotation d'angle θ dans le plan P.



- Ayant choisi le vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ et obtenu l'angle de rotation θ, le choix du vecteur $\vec{u}' = -\vec{u}$ aurait conduit à l'obtention de l'angle $-\theta$.



- On notera la nécessité de bien définir l'orientation de l'axe: si l'on ne précise pas l'orientation, une rotation de même angle pourrait désigner deux applications différentes:



Exemple de rotation

Soit

$$
A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 4 & -8 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \end{pmatrix}
$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Démontrer que f est une rotation et préciser son axe.

- Vérifions que A est orthogonale:

– à noter la présence du facteur $\frac{1}{9}$ et rappelons que $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$ et donc la première colonne de A a pour norme
$$\frac{1}{9}\sqrt{49+16+16} = \frac{1}{9}\sqrt{81} = 1$$
et on vérifie sans peine qu'il en est de même pour les deux autres colonnes.

– En observant que l'on a $\langle \lambda\vec{u}, \mu\vec{v}\rangle = \lambda\mu\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$, le produit scalaire entre les première et deuxième colonne de A vaut
$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\big(-7.(-4)+4.(-8)+(-4).(-1)\big) = 0$$
et de même entre la première et la troisième puis entre la deuxième et troisième.

– Ainsi, A est orthogonale et f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

- Déterminons $D = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ (i.e. le sous-espace vectoriel constitué des vecteurs invariants par f). Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonnne de $\vec{u}$ dans la base canonique. Alors $\vec{u} \in D$ i.e. $f(\vec{u}) = \vec{u}$ si et seulement si $AX = X$ et
$$AX = X \iff \left\{\begin{array}{l} -7x-4y-4z = 9x \\ 4x-8y+z = 9y \\ -4x-y+8z = 9z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} -16x-4y-4z = 0 \\ 4x-17y+z = 0 \\ -4x-y-z = 0. \end{array}\right.$$
$L_1 + 4L_2$ conduit à $y = 0$ puis L_1 comme L_3 donnent $z = -4x$ si bien que
$$f(\vec{u}) = \vec{u} \iff \vec{u} = (x, 0, -4x) = x(1, 0, -4)$$
ce qui démontre que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(1, 0, -4)$.
- Ainsi, f est une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(1, 0, -4)$.

Obtention pratique de l'angle d'une rotation

Le contexte est le suivant: f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à une matrice A *orthogonale*, si bien que f est une isométrie vectorielle; on suppose que l'on a prouvé que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ est une droite vectorielle et donc que f est une rotation. Le problème est alors de déterminer son angle θ; notons que θ est entièrement déterminé dès lors que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont connus.

Théorème XV.10.49 Soit f une rotation vectorielle d'axe D dirigé et orienté par le vecteur $\vec{u}$, soit θ son angle et A la matrice de f dans la base canonique. Alors
- $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}$ (où Tr est la trace),
- pour tout vecteur $\vec{t}$ non colinéaire à $\vec{u}$, $\sin\theta$ est du même signe que $[\vec{u}, \vec{t}, f(\vec{t})]$ (produit mixte).

Rappel:

Si (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') sont les composantes respectives de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans une base orthonormée directe, alors
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$
qui est donc un déterminant dont la valeur est indépendante du choix de la base orthonormée directe dans laquelle sont exprimées les coordonnées de ces vecteurs.

Démonstration du théorème.

- Les matrices A et $M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ représentent toutes deux f (Théorème XV.10.48) et ont donc même trace:
$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos\theta,$$
ce qui conduit au premier résultat.
- Soit (a, b, c) les composantes de $\vec{t}$ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. D'après le Théorème XV.10.48, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est
$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
si bien que
$$M(\theta) \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b\cos\theta - c\sin\theta \\ b\sin\theta + c\cos\theta \end{pmatrix}$$
qui sont donc les composantes de $f(\vec{t})$ dans $\mathcal{B}$. Ainsi, en jouant sur l'invariance de la valeur du déterminant d'une famille de vecteurs dans n'importe quelle base orthonormée directe, valeur qui est précisément celle du produit mixte (cf. rappel):
$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{t}, f(\vec{t})] &= \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b\cos\theta - c\sin\theta \\ 0 & c & b\sin\theta + c\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= (b^2 + c^2)\sin\theta \end{aligned}$$
(développement suivant la première colonne). Enfin, la non colinéarité de $\vec{t}$ avec $\vec{u}$ équivaut au fait que (b, c) ne vaut pas $(0, 0)$ et donc $b^2 + c^2 \neq 0$; en conséquence, $b^2 + c^2 > 0$ et le résultat s'ensuit.

Exemple fondamental

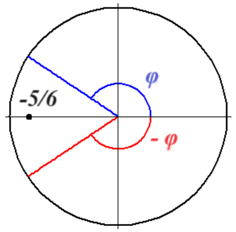
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que f est une rotation et en déterminer les éléments caractéristiques.
- On vérifie aisément que A est une matrice orthogonale et en conséquence f est une isométrie vectorielle.
- En résolvant $AX = X$, on trouve que
$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(3, 1, 1).$$
Ce sous-espace étant de dimension 1, on en conclut que f est une rotation. Orientons son axe dans la direction du vecteur
$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, 1),$$
vecteur unitaire dirigeant l'axe de f et notons θ son angle.
- On a
$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2} \\ &= \frac{-\frac{2}{3} - 1}{2} \\ &= -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Posons
$$\varphi = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right),$$
si bien que
$$\varphi \in [0,\pi], \quad \cos\varphi = -\frac{5}{6}$$
car:

L'application $\cos$ établit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ dont l'application réciproque est la fonction $\arccos$, établissant donc une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.
Concrètement, $\arccos$ renvoie un angle compris entre 0 et π dont le cosinus est donné.

On a donc
$$\cos\theta = \cos\varphi$$
mais on ne peut pas affirmer que θ et φ sont égaux pour autant:



car (modulo un multiple de 2π), deux angles ayant même $\cos$ sont égaux ou opposés; autrement dit,
$$\begin{cases} \theta = \varphi \\ \text{ou} \\ \theta = -\varphi. \end{cases}$$
C'est le signe de $\sin\theta$ qui va faire la différence.

- Le vecteur $\vec{\imath}$ est non colinéaire à $\vec{u}$; le produit mixte
$$[\vec{u}, \vec{\imath}, f(\vec{\imath})]$$
est alors de même signe que $\sin\theta$. En utilisant A, on a
$$f(\vec{\imath}) = \frac{1}{3}(2,1,2)$$
et comme la base canonique est orthonormée directe, ce produit mixte est égal (cf. rappel) au déterminant de cette famille de vecteurs dans la base canonique et en jouant sur cette propriété:

Le calcul d'un déterminant est multilinéaire par rapport aux colonnes et donc notamment:
$$\det(\alpha\vec{u}, \beta\vec{v}, \gamma\vec{w}) = \alpha\beta\gamma\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

on a
$$\frac{1}{\sqrt{11}} \times \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3\sqrt{11}}.$$
Ainsi, $\sin\theta < 0$ et c'est pourquoi (modulo un multiple de 2π)
$$\theta \in [-\pi, 0]$$

- Pour résumer, on a
$$\begin{cases} \theta = \varphi \\ \text{ou} \\ \theta = -\varphi \\ \varphi \in [0,\pi] \\ \theta \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$
C'est pourquoi
$$\theta = -\varphi$$
i.e.
$$\theta = -\arccos\left(-\frac{5}{6}\right).$$

Autre manière d'obtenir l'angle d'une rotation

Théorème XV.10.50 Soit f une rotation vectorielle d'axe D dirigé et orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}$, soit θ son angle et A la matrice de f dans la base canonique. Alors
- $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}$ (où Tr est la trace),
- $\sin\theta = [\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{v})]$ (produit mixte), où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$.

Démonstration.
- Le résultat concernant $\cos$ a déjà été établi.
- Ensuite, soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$. Alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe, de sorte que (Théorème XV.10.48) la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice
$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
d'où il ressort en particulier que $f(\vec{v})$ (d'après la 2-ème colonne de $M(\theta)$ qui représente le codage dans cette base du deuxième de cette base, i.e. de $\vec{v}$) a pour composantes $(0, \cos\theta, \sin\theta)$ dans $\mathcal{B}$. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour composantes $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ dans cette base orthonormée directe et en jouant sur l'invariance de la valeur du déterminant d'une famille de vecteurs dans n'importe quelle base orthonormée directe, valeur qui est précisément celle du produit mixte,
$$[\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{v})] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix}$$
c'est à dire $\sin\theta$ (développement suivant la première colonne).

Exemple

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- On démontre sans peine que M est une matrice orthogonale. L'endomorphisme f est donc une isométrie vectorielle de l'espace.
- Le calcul de $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})$ donne facilement
$$\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1,-1,1).$$
Puisque c'est une droite, on en déduit que f est une rotation vectorielle.
- Orientons l'axe D de cette rotation dans la direction du vecteur directeur unitaire
$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$
et notons θ son angle.
- On a déjà
$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{Tr}(A)-1}{2}\\ &= \frac{2-1}{2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
- Ensuite, le vecteur
$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$
est unitaire et orthogonal à $\vec{u}$ et on calcule
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$
si bien que
$$f(\vec{v}) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$
- On calcule le produit mixte $[\vec{u},\vec{v},f(\vec{v})]$:

Le calcul d'un produit mixte est multilinéaire par rapport aux colonnes et donc notamment:
$$[\alpha\vec{u},\beta\vec{v},\gamma\vec{w}] = \alpha\beta\gamma[\vec{u},\vec{v},\vec{w}].$$

$$\begin{aligned}[\vec{u},\vec{v},f(\vec{v})] &= \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (L_2 \longleftarrow L_2 - L_3 \text{ puis dév. } /C_3).\end{aligned}$$

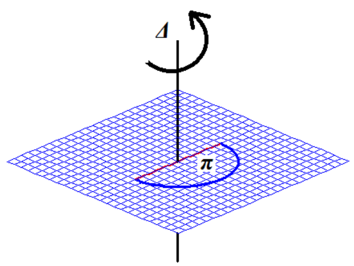
Ainsi, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- De
$$\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
on en déduit $\theta = \frac{\pi}{3}$ et f est donc la rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Une remarque pas anodine

Restons dans le contexte du théorème: dans toute base orthonormée directe $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, f est représenté par la matrice
$$M(\theta) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}. \tag{10.2}$$
Il en résulte que dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{v},\vec{w},\vec{u})$, qui est également une base orthonormée directe, f est représenté par la matrice
$$M'(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
car de (10.2) et du protocole/codage, on déduit que
$$\begin{aligned}f(\vec{u}) &= \vec{u}\\ f(\vec{v}) &= \cos\theta\vec{v} + \sin\vec{w}\\ f(\vec{w}) &= -\sin\theta\vec{v} + \cos\theta\vec{w},\end{aligned}$$
ce que l'on peut réécrire
$$\begin{aligned}f(\vec{v}) &= \cos\theta\vec{v} + \sin\vec{w} + 0\times\vec{u}\\ f(\vec{w}) &= -\sin\theta\vec{v} + \cos\theta\vec{w} + 0\times\vec{u}\\ f(\vec{u}) &= 0\times\vec{v} + 0\times\vec{w} + 1\times\vec{u},\end{aligned}$$
ce qui explique la matrice $M'(\theta)$.

Retournement

Définition XV.10.17 Soit f une rotation vectorielle et D son axe. Si f a pour angle π, f est la symétrie orthogonale par rapport à D et est appelé ***retournement*** d'axe D.



Démonstration 89

Composée de rotations coaxiales

Proposition XV.10.51 Soit f et g deux rotations de même axe orienté D et d'angles respectifs θ et θ'.
- Alors $g\circ f$ est la rotation d'axe orienté D et d'angle $\theta+\theta'$ et $g\circ f = f\circ g$.
- L'application réciproque f^{-1} de f est la rotation de même axe orienté D et d'angle $-\theta$.

En effet, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe dont le premier vecteur dirige et oriente l'axe commun à f et à g. Dans cette base, d'après le Théorème XV.10.48, les matrices de f et g sont respectivement

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad M(\theta') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta' & -\sin\theta' \\ 0 & \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}.$$

D'après la théorie de la représentation matricielle, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont resp. représentés par

$$M(\theta) \times M(\theta'), \quad M(\theta') \times M(\theta).$$

Or on calcule

$$\begin{aligned} M(\theta) \times M(\theta') &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ 0 & \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ 0 & \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation d'angle $\theta+\theta'$ et c'est pourquoi $f \circ g$ est la rotation d'axe orienté D et d'angle $\theta+\theta'$. Même conclusion évidemment concernant $g \circ f$ puisqu'il suffit d'échanger θ et θ'.
Dans le cas particulier où $\theta' = -\theta$, on voit que $f \circ g$ est la rotation d'angle 0, autrement dit l'application identique. D'où le deuxième résultat.

Caractérisation d'une rotation par le déterminant

Théorème XV.10.52 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et f une isométrie de E. Alors f est une rotation si et seulement si $\det(f) = 1$ (avec la convention que Id est une rotation).

En conséquence, soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors A est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si A est orthogonale et $\det(A) = 1$.

Démonstration 90

Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une rotation, car :

- l'aspect "colonnes orthonormées" est clair
- on voit que $\det(A) = 1$.

À titre d'exercice, on pourra démontrer que A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par le vecteur $(1, 1, -1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Théorème XV.10.53 ***Autre point de vue pour reconnaître une rotation.*** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, A sa matrice dans la base canonique et $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$ les vecteurs colonnes de A.
Alors f est une rotation si et seulement si $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_2$ sont unitaires et orthogonaux et $\vec{C}_3 = \vec{C}_1 \wedge \vec{C}_2$ (même conclusion par permutation circulaire des colonnes).

Démonstration 91

Exemple

Pour quelles valeurs des réels a, b, c, la matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & a \\ -4 & -8 & b \\ -4 & 1 & c \end{pmatrix}$$

est-elle la matrice d'une rotation?

- Posons $\vec{u}_1 = \frac{1}{9}(7, -4, -4)$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{9}(-4, -8, 1)$ et $\vec{u}_3 = \frac{1}{9}(a, b, c)$.
- On voit que
$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$$
et
$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$$
donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont unitaires et orthogonaux.
- Ainsi, A est la matrice d'une rotation si et seulement si
$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2.$$
On calcule
$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \frac{1}{9}(-4, 1, -8)$$
si bien que A est la matrice d'une rotation si et seulement si
$$a = -4,\ b = 1,\ c = -8,$$
c'est à dire si et seulement si
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & 1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

10.3 Troisième catégorie de matrices orthogonales 3×3: composée d'une rotation et d'une réflexion

Cette catégorie d'isométrie n'est pas explicitement au programme; on pourra donc réserver ce paragraphe à une seconde lecture.

Théorème XV.10.54 Soit f une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ autre que $-\mathrm{Id}$ telle que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \{\vec{0}\}$ (i.e. f ne possède pas de vecteurs invariants autres que le vecteur nul).

Alors f est la composée commutative d'une rotation r et d'une réflexion s par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation i.e $f = r \circ s = s \circ r$.

Il existe alors un réel θ non multiple de π tel que dans toute base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u}$ dirige et oriente l'axe de r, f soit représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est l'angle de r.

Démonstration 92

Remarques.

- Si $f = -\mathrm{Id}$, il n'y pas besoin d'un théorème pour décrire ce cas!
- Si θ était un multiple de π, on aurait $\sin\theta = 0$ et $\cos\theta = \pm 1$.
- Si $\cos\theta = -1$, $M(\theta) = -I_3$ et alors $f = -\mathrm{Id}$, ce qui est exclu
- et si $\cos\theta = 1$, la deuxième et troisième colonne de $M(\theta)$ attesteraient que $f(\vec{v}) = \vec{v}$, $f(\vec{w}) = \vec{w}$ et donc on aurait $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \neq \{\vec{0}\}$. Or on n'est pas dans cette situation.

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- On démontre sans peine que M est une matrice orthogonale. L'endomorphisme f est donc une isométrie vectorielle de l'espace.
- Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonnne de $\vec{u}$ dans la base canonique. Alors $\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ i.e. $f(\vec{u}) = \vec{u}$ si et seulement si $MX = X$ et

$$\begin{aligned} MX = X &\iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 2y - z = 3x \\ x - 2y - 2z = 3y \\ 2x - y + 2z = 3z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - 5y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

$L_1 + L_2$ conduit à $z = -y$ si bien que L_1 donne $x = 3y$. Reporté dans L_3 : $2x - y - z = 0$, on obtient

$$-6z + z - z = 0,$$

d'où $z = 0$, puis $y = x = 0$ et donc $\vec{v} = (0, 0, 0)$.

- Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

Obtention pratique

Proposition XV.10.55 Soit f une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \{\vec{0}\}$.

- On pose $g = -f$.
- g est une rotation; on en détermine l'axe orienté D et l'angle θ.
- Alors $f = r \circ s$, où r est la rotation d'axe orienté D et d'angle $\theta + \pi$ et s est la réflexion par rapport au plan orthogonal à D.

Exemple

On reprend l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- On a vu que f est une isométrie vectorielle et que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \{\vec{0}\}$.
- Posons $g = -f$, qui est alors représenté dans la base canonique par la matrice

$$-M = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est clairement une matrice orthogonale, et c'est pourquoi g est une isométrie vectorielle.

- Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonnne de $\vec{u}$ dans la base canonique. Alors $\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{Id})$ i.e. $g(\vec{u}) = \vec{u}$ si et seulement si $-MX = X$ et

$$\begin{aligned} -MX = X &\iff -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ 3z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 2y - z = -3x \\ x - 2y - 2z = -3y \\ 2x - y + 2z = -3z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

$L_1 + 2L_2 + L_3$ conduit à $y = -3x$ et alors L_1 donne $z = -x$ puis on vérifie que L_2 et L_3 donnent $0 = 0$. Ainsi,

$$\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{Id}) \iff \vec{u} = (x, -3x, -x),$$

ce qui démontre que

$$\mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1, -3, -1).$$

- Puisque $\mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{Id})$ est une droite, c'est la preuve que g est une rotation. Orientons l'axe D de cette rotation dans la direction du vecteur unitaire

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -3, -1)$$

et notons α son angle.

- On a déjà
$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\mathrm{Tr}(-M)-1}{2}\\ &= \frac{-\frac{2}{3}-1}{2}\\ &= -\frac{5}{6}.\end{aligned}$$
- Ensuite, le vecteur
$$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$
est unitaire et orthogonal à $\vec{u}$ et on calcule
$$-M\times\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -4\end{pmatrix}$$
si bien que
$$g(\vec{v})=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(-1,1,-4\right).$$
- On calcule le produit mixte $[\vec{u},\vec{v},g(\vec{v})]$:
$$[\vec{u},\vec{v},g(\vec{v})]=\frac{1}{\sqrt{11}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & 0 & 1\\ -1 & 1- & 4\end{vmatrix}$$
et on obtient
$$[\vec{u},\vec{v},g(\vec{v})]=-\frac{11}{6\sqrt{11}}.$$
Ainsi, $\sin\alpha=-\frac{11}{6\sqrt{11}}$. (On calculera α plus tard).
- Du théorème fondamental sur les rotations, on déduit que dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, g est représenté par la matrice
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$
et celle de f dans une telle base $\mathcal{B}$ est donc
$$N=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix},$$
que l'on écrit aussi
$$\begin{aligned}N &= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha+\pi) & -\sin(\alpha+\pi)\\ 0 & \sin(\alpha+\pi) & \cos(\alpha+\pi)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$
où on a posé $\theta=\alpha+\pi$.
- Il est immédiat de vérifier que
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Notons
$$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha+\pi) & -\sin(\alpha+\pi)\\ 0 & \sin(\alpha+\pi) & \cos(\alpha+\pi)\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
r l'endomorphisme associé à la matrice R dans la base $\mathcal{B}$ et s l'endomorphisme associé à la matrice D dans la base $\mathcal{B}$.

  - Il est clair r est la rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{u}$ et d'angle θ.
  - Ensuite, par définition de la représentation matricielle, on a
  $$s(\vec{u})=-\vec{u},\ s(\vec{v})=\vec{v},\ s(\vec{w})=\vec{w}$$
  et on en déduit que s est la réflexion de plan $P=\mathrm{Vect}(\vec{v},\vec{w})$, plan qui est orthogonal à l'axe $D=\mathrm{Vect}(\vec{u})$.
  - L'égalité
  $$R\times D=N$$
  mise en évidence ci-dessus se traduit en termes d'endomorphismes par
  $$r\circ s=f,$$
  ce qu'il fallait démontrer.
  - Enfin, de
  $$\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{5}{6}\\ \sin\alpha=-\frac{11}{6\sqrt{11}}\end{cases}$$
  et de $\theta=\alpha+\pi$, on déduit
  $$\begin{cases}\cos\theta=\frac{5}{6}\\ \sin\theta=\frac{11}{6\sqrt{11}}.\end{cases}$$
  ceci met en évidence le fait que $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel on peut faire agir aussi bien $\arcsin$ que $\arccos$. Ainsi, par exemple,
  $$\theta=\arcsin\left(\frac{11}{6\sqrt{11}}\right).$$

11 Détermination de la matrice d'une projection orthogonale, rotation ou symétrie orthogonale dans la base canonique

Le principe est simple: il consiste à écrire dans un premier le temps la matrice de l'endomorphisme en jeu dans une "bonne" base puis d'appliquer les formules de changement de base. Les calculs seront allégés grâce au rappel ci-dessous:

La matrice de passage P d'une base orthonormée à une autre base orthonormée est une matrice orthogonale.
Ainsi, $P^{-1}=P^T$.

Du coup, $P^{-1}MP$ devient ${}^tPMP$.

Exemple de détermination de la matrice d'une rotation

Déterminer la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation f d'axe Δ dirigé et orienté par le vecteur $\vec{u}=(1,1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- L'idée est la suivante: en posant $\vec{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, vecteur directeur unitaire qui dirige et oriente Δ, on sait que la matrice de f dans une base orthonormée directe $(\vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{w}_0)$ est
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$
- Il suffit alors de construire une telle base orthonormée directe et d'appliquer les formules de changement de base.
- On commence par choisir un vecteur $\vec{v}_0$ orthogonal à $\vec{u}_0$ et unitaire; par exemple $\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$.
- On calcule le vecteur $\vec{w}_0 = \vec{u}_0 \wedge \vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ et des propriétés du produit vectoriel il résulte que $\mathcal{B} = (\vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{w}_0)$ est une base orthonormée directe. La matrice de passage P de la base canonique à cette base $\mathcal{B}$ est par définition constituée des composantes de $\vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{w}_0$ dans la base canonique, c'est à dire
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$
- D'après les formules de changement de base, on a
$$M = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PMP^{-1}$$
et comme P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée, on a $P^{-1} = {}^tP$. On a alors et on calcule:
$$A = P \times M \times {}^tP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3}+1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}.$$

Exemple de détermination de la matrice d'une projection orthogonale

Déterminer la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale p sur le plan Π dont une équation cartésienne est $x + 2y - z = 0$.

- Comme dans la situation précédente, l'idée est d'écrire la matrice de p dans une base convenable et d'appliquer les formules de changement de base: dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de Π et donc $\vec{w}$ est une base orthonormée de $\Pi^\perp$, la matrice M de s dans $\mathcal{B}$ est, du fait que $p(\vec{u}) = \vec{u}$, $p(\vec{v}) = \vec{v}$ (car ces deux vecteurs appartiennent à Π) et $p(\vec{w}) = \vec{0}$ (car $\vec{w} \in \Pi^\perp$):
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Pour déterminer une base orthonormée de Π, il est inutile de passer par le processus de Gram-Schmidt. Il suffit de:
  - choisir un vecteur unitaire $\vec{u}$ appartenant à Π; par exemple $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.
  - Choisir un vecteur $\vec{w}$ unitaire orthogonal à $\vec{u}$, et ce vecteur appartiendra à $\Pi^\perp$ et en constituera donc une base orthonormée; par exemple $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.
  - Enfin, le vecteur $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u}$ est, de par les propriétés du produit vectoriel, orthogonal à $\vec{w}$ et donc dans $(\Pi^\perp)^\perp = \Pi$, orthogonal à $\vec{u}$ et unitaire; ainsi, $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de Π. On calcule donc $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$, si bien que
  $$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right)$$
  est une base orthonormée de l'espace, les deux premiers formant une base orthonormée de Π et le troisième une base orthonormée de $\Pi^\perp$.

- *Ce point est essentiel:* la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisque:
  - par définition de la théorie de la représentation matricielle, on doit calculer $p(\vec{u})$, $p(\vec{v})$, $p(\vec{w})$ et exprimer ces images dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: la mise en colonne des coordonnées de ces images fourniront les trois colonnes de M.
  - Puisque $\vec{u} \in \Pi$, on a $p(\vec{u}) = \vec{u}$ et donc
  $$p(\vec{u}) = 1 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} + 0 \times \vec{w},$$
  ce qui explique la première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - Puisque $\vec{v} \in \Pi$, on a $p(\vec{v}) = \vec{v}$ et donc
  $$p(\vec{v}) = 0 \times \vec{u} + 1 \times \vec{v} + 0 \times \vec{w},$$
  ce qui explique la deuxième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  - Puisque $\vec{w} \in \Pi^\perp$, on a $p(\vec{w}) = \vec{0}$ et donc
  $$p(\vec{w}) = 0 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} + 0 \times \vec{w},$$
  ce qui explique la troisième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Des formules de changement de base, on déduit
$$M = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PMP^{-1}$$
et comme P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée, on a $P^{-1} = {}^tP$. On a alors et on calcule:
$$A = P \times M \times {}^tP = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Exemple de détermination de la matrice d'une réflexion

Déterminer la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion s de plan Π dont une équation cartésienne est $x + 2y - z = 0$.

- C'est exactement la même démarche que dans la situation précédente, l'idée est d'écrire la matrice de s dans une base convenable et d'appliquer les formules de changement de base: dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de Π et donc $\vec{w}$ est une base orthonormée de $\Pi^\perp$, la matrice M de s dans $\mathcal{B}$ est, du fait que $s(\vec{u}) = \vec{u}$, $s(\vec{v}) = \vec{v}$ (car ces deux vecteurs appartiennent à Π) et $s(\vec{w}) = -\vec{w}$ (car $\vec{w} \in \Pi^\perp$):
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Pour déterminer une base orthonormée de Π, il est inutile de passer par le processus de Gram-Schmidt. Il suffit de:
  - choisir un vecteur unitaire $\vec{u}$ appartenant à Π; par exemple $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.
  - Choisir un vecteur $\vec{w}$ unitaire orthogonal à $\vec{u}$, et ce vecteur appartiendra à $\Pi^\perp$ et en constituera donc une base orthonormée; par exemple $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

– Enfin, le vecteur $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u}$ est, de par les propriétés du produit vectoriel, orthogonal à $\vec{w}$ et donc dans $(\Pi^{\perp})^{\perp} = \Pi$, orthogonal à $\vec{u}$ et unitaire; ainsi, $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de Π. On calcule donc $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$, si bien que

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right)$$

est une base orthonormée de l'espace, les deux premiers formant une base orthonormée de Π et le troisième une base orthonormée de $\Pi^{\perp}$.

- *Ce point est essentiel:* la matrice de s dans $\mathcal{B}$ est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ puisque:
  – par définition de la théorie de la représentation matricielle, on doit calculer $p(\vec{u})$, $p(\vec{v})$, $p(\vec{w})$ et exprimer ces images dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: la mise en colonne des coordonnées de ces images fourniront les trois colonnes de M.
  – Puisque $\vec{u} \in \Pi$, on a $s(\vec{u}) = \vec{u}$ et donc
  $$s(\vec{u}) = 1 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} + 0 \times \vec{w},$$
  ce qui explique la première colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  – Puisque $\vec{v} \in \Pi$, on a $s(\vec{v}) = \vec{v}$ et donc
  $$s(\vec{v}) = 0 \times \vec{u} + 1 \times \vec{v} + 0 \times \vec{w},$$
  ce qui explique la deuxième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  – Puisque $\vec{w} \in \Pi^{\perp}$, on a $s(\vec{w}) = -\vec{w}$ et donc
  $$s(\vec{w}) = 0 \times \vec{u} + 0 \times \vec{v} - 1 \times \vec{w},$$
  ce qui explique la troisième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- et des formules de changement de base, on déduit
$$M = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PMP^{-1}$$
et comme P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée, on a $P^{-1} = {}^tP$. On a alors et on calcule:
$$A = P \times M \times {}^tP = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

12 Diagonalisation des matrices symétriques à coefficients réels (théorème spectral)

Soit un entier $n \geq 1$. Rappelons que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices colonnes de tailles $n \times 1$ est muni du produit scalaire canonique i.e. pour tous vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\langle X, Y \rangle$ est défini par

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= X^T Y \\ &= (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + \dots x_n y_n \end{aligned}$$

ce qui nous ramène complètement, en identifiant tout vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à son vecteur colonne associé $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique, au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème XV.12.56 ***Théorème spectral (pour les matrices).*** Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n, c'est à dire $A^T = A$, à coefficients réels.

- Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- Ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
- Il existe donc une matrice orthogonale P, matrice dans la base canonique d'une base orthonormée de vecteurs colonnes propres pour A, et une matrice diagonale D, constituée des valeurs propres correspondantes, telles que
$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= P^T AP. \end{aligned}$$
On dit alors que A est orthogonalement diagonalisable.

Démonstration 93

Le théorème suivant concernant les endomorphismes est une conséquence immédiate du précédent. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel.

Théorème XV.12.57 ***Théorème spectral (pour les endomorphismes).*** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice M dans la base canonique est symétrique.
Alors f est diagonalisable et il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres pour f.
Dans cette base orthonormée, la matrice de f est donc diagonale.

Exemple

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Justifier que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Justifier l'existence et déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = P^T AP$.

- La matrice A est symétrique à coefficients réels, donc la diagonalisation, l'existence de D et P sont assurées par le théorème spectral.
- Après calcul de χ_A, on trouve les valeurs propres: 4 (simple) et 1 (double).
- Déterminons $\operatorname{Ker}(A - I_3)$, sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors
$$\begin{aligned} A \times X &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y + z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(A - I_3) &\iff AX - X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y + z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff x - y - z = 0 \end{aligned}$$

si bien que $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ est le plan d'équation $x - y - z = 0$.

- *La méthode qui suit est premium.* La matrice A étant symétrique, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux i.e. $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ et $\operatorname{Ker}(A - 4I_3)$ sont orthogonaux.
  - Puisque $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ est le plan d'équation $x - y - z = 0$ et que $\operatorname{Ker}(A - 4I_3)$ est orthogonal à ce plan, $\operatorname{Ker}(A - 4I_3)$ est la droite vectorielle dirigée par
  $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
  et l'on va donc poser
  $$E_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
  qui est donc un vecteur unitaire dirigeant le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 4. Il reste à déterminer une base orthonormée du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 i.e. du plan d'équation $x - y - z = 0$.
  - Prenons un vecteur de notre choix unitaire et orthogonal à E_3, comme
  $$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
  En sa qualité de vecteur orthogonal à E_3, le vecteur E_2 appartient donc au plan $x - y - z = 0$ i.e. E_2 est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 1.
  - Posons enfin,
  $$E_1 = E_2 \wedge E_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
  En sa qualité de vecteur orthogonal à E_3, le vecteur E_3 appartient au plan $x - y - z = 0$ i.e. E_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et des propriétés du produit vectoriel, E_1 est unitaire et orthogonal à E_2 si bien que (E_1, E_2) est une base orthonormée du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
- En conclusion,
$$\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3)$$
est une base orthonomrée de vecteurs (colonnes) propres de A et on a
$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= P^T AP \end{aligned}$$
avec
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Version endomorphique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A ci-dessus. Alors f est diagonalisable et

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1) \right)$$

est une base orthonormée de vecteurs propres pour f et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Application aux projections orthogonales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale si et seulement si

$$M^2 = I_n \qquad \text{et} \quad M^T = M.$$

Solution.

- *Remarque:* une symétrie n'est pas nécessairement orthogonale; elle peut être "oblique" i.e. le sous-espace par rapport auquel on effectue la symétrie et celui parallèlement auquel on l'effectue peuvent ne pas être orthogonaux.
- La clé de la démonstration réside dans le fait que ces deux sous-espaces sont les sous-espaces propres de la symétrie, respectivement associés à 1 et -1. Notons s l'endomorphisme canoniquement associé à M.
  - Supposons que M soit la matrice d'une symétrie orthogonale. Alors
  $$s \circ s = \mathrm{Id}$$
  (comme pour toute symétrie) donc $M^2 = I_n$, c'est à dire $M^{-1} = M$.
  - De plus, s est une isométrie vectorielle (cf. définiton XV.7.13) donc M est une matrice orthogonale, i.e. $M^{-1} = M^T$. On en déduit $M^T = M$.
  - Supposons réciproquement que $M^2 = I_n$ et $M^T = M$. De $M^2 = I_n$, on déduit $s \circ s = \mathrm{Id}$, donc s est déjà une symétrie. Il existe donc deux sous-espaces A et B de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n = A \oplus B$ et tels que s soit la symétrie par rapport à A et parallèlement à B. La question est donc maintenant de savoir si B est l'orthogonal de A. Mais de $M^T = M$, on déduit du théorème spectral que ses sous-espaces propres sont orthogonaux.
  - Mais les sous-espaces propres de la symétrie sont justement A (associé à 1) et B (associé à -1). Ainsi, $B = A^\perp$ et s est la symétrie orthogonale par rapport à A.

Application aux projections orthogonales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que M est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si

$$M^2 = M \qquad \text{et} \quad M^T = M.$$

Solution.

- *Remarque:* une projection n'est pas nécessairement orthogonale; elle peut être "oblique" i.e. le sous-espace sur lequel on effectue la projection et celui parallèlement auquel on l'effectue peuvent ne pas être orthogonaux.
- La clé de la démonstration réside dans le fait que ces deux sous-espaces sont les sous-espaces propres de la projection, respectivement associés à 1 et 0. Notons p l'endomorphisme canoniquement associé à M.

– Supposons que M soit la matrice d'une projection orthogonale, disons sur un sous-espace vectoriel f. . Alors

$$p \circ p = p$$

(comme pour toute projection) donc $M^2 = M$.

– Considérons une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ adaptée à la relation de supplémentarité

$$E = F \oplus F^\perp,$$

où $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ est une base orthonormée de F et $(\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$. Puisque par définition même de la projection, on a

$$\begin{array}{rcl} p(\vec{e}_1) & = & \vec{e}_1 \\ & \vdots & \\ p(\vec{e}_r) & = & \vec{e}_r \\ p(\vec{e}_{r+1}) & = & \vec{0} \\ & \vdots & \\ p(\vec{e}_n) & = & \vec{0} \end{array}$$

p est alors représentée, d'après le protocole / codage, par la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathcal{B}$. Puisque ces deux bases sont orthonormées, on déduit du théorème XV.7.32. que P est orthogonale, i.e. $P^T = P$ et des formules de changement de base, on déduit

$$D = P^{-1} M P$$

et donc

$$M = P D P^{-1}.$$

Mais alors

$$\begin{array}{rcl} M^T & = & \left(PDP^{-1}\right)^T \\ & = & (P^{-1})^T D^T P^T \\ & = & (P^T)^T \times D \times P^{-1} \quad \text{(car } P \text{ est orthogonale et } D \text{ est évidemment symétrique)} \\ & = & PDP^{-1} \\ & = & M, \end{array}$$

ce qui prouve que M est symétrique.

– Supposons réciproquement que $M^2 = M$ et $M^T = M$. De $M^2 = M$, on déduit $p \circ p = p$, donc p est déjà une projection. Il existe donc deux sous-espaces A et B de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n = A \oplus B$ et tels que p soit sur A et parallèlement à B. La question est donc maintenant de savoir si B est l'orthogonal de A. Mais de $M^T = M$, on déduit du théorème spectral que ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

– Mais les sous-espaces propres de la projection sont justement A (associé à 0) et B (associé à 0). Ainsi, $B = A^\perp$ et p est la projection orthogonale sur à A.

Chapitre XVI

Éléments métriques d'une courbe. Enveloppes (deuxième année)

1 Éléments métriques

Même si les aspects théoriques sont assez délicats (et repoussés à la fin de ce chapitre), il sera question de définir rigoureusement les notions très intuitives:

- de longueur d'une courbe
- de courbure locale.

Toutes les paramétrisations seront données dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan et dans toutes les situations théoriques rencontrées, les fonctions seront supposées de classe C^∞.

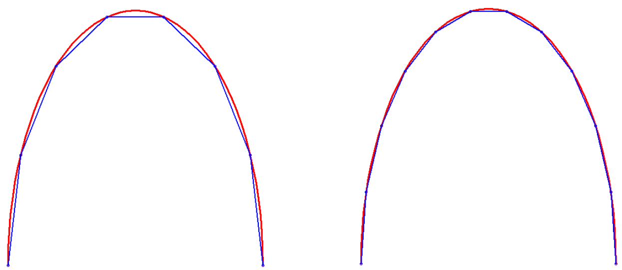
1.1 Longueur, abscisse curviligne

Définition XVI.1.1 On se donne une courbe γ de paramétrisation $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$. Alors :

- *La longueur de γ entre le point $M(t_1)$ et le point $M(t_2)$, $t_1 < t_2$* est le réel
$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\,\mathrm{d}u,$$
c'est à dire $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \|f'(u)\|\,\mathrm{d}u$.
- Si $I = [a, b]$, $a < b$, *la longueur de γ* est le réel
$$\int_a^b \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\,\mathrm{d}u,$$
c'est à dire $\displaystyle\int_a^b \|f'(u)\|\,\mathrm{d}u$.
- *L'abscisse curviligne d'origine t_0* est l'application S définie sur I par
$$\forall t \in I,\ S(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\,\mathrm{d}u.$$
- On a alors
$$\forall t \in I,\ S'(t) = \|f'(t)\|.$$

Démonstration.

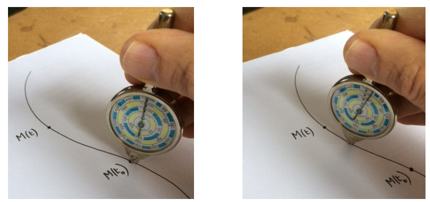
- Les points concernant la distance sont admis : on peut démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\,du$ est la limite de la longueur des lignes polygonales inscrites dans la courbe:



- La fonction
$$u \mapsto \|f'(u)\| = \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}$$
est continue car f est supposée de classe C^1. C'est pourquoi, d'après le théorème fondamental de l'analyse, l'application
$$S : t \longmapsto \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\,\mathrm{d}u$$
est de classe C^1 sur I et de dérivée
$$t \mapsto \|f'(t)\|.$$

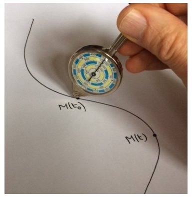
Remarques.

- Avec ce choix d'abscisse curviligne, on dit que la courbe γ est orientée dans la sens des t croissants.[1]
- L'abscisse curviligne d'origine t_0 est une grandeur *algébrique* qui mesure la distance algébrique
  - positive si $M(t)$ est après $M(t_0)$



[1] Le choix de l'abscisse curviligne
$$\int_t^{t_0} \|f'(u)\|\,du$$
aurait conduit à une orientation dans le sens des t décroissants.

– négative s'il est avant.

Exemple

On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \longmapsto \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

1. Exprimer l'abscisse curviligne d'origine $t = 0$ et la calculer explicitement pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer la longueur de γ.

Réponse.

1. On a
$$f'(u) = (-3\cos^2 u \sin u, 3\sin^2 u \cos u).$$
On a ensuite
$$\begin{array}{rcl} f'(u) & = & 3\cos u \sin u(-\cos u, \sin u) \\ \|f'(u)\| & = & |3\cos u \sin u| \, \|(-\cos u, \sin u)\| \\ & = & |3\cos u \sin u| \end{array}$$
car il ne faut surtout pas oublier que pour tout réel X,
$$\sqrt{X^2} = |X|.$$
Pour tout $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos u \geq 0$ et $\sin u \geq 0$, si bien que
$$|\cos u \sin u| = \cos u \sin u.$$
Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pour tout $u \in [0, t]$, on a alors $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en conséquence
$$\begin{array}{rcl} S(t) & = & \displaystyle\int_0^t \|f'(u)\| \, \mathrm{d}u \\ & = & \displaystyle\int_0^t \cos u \sin u \, \mathrm{d}u \\ & = & \displaystyle\left[\frac{1}{2}\sin^2 u\right]_0^t \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\sin^2 t. \end{array}$$
2. La longueur L de γ est donnée par
$$\begin{array}{rcl} L & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \|f'(u)\| \, \mathrm{d}u \\ & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos u \sin u| \, \mathrm{d}u \end{array}$$
mais on notera bien qu'il n'existe aucune formule donnant une primitive de la valeur absolue d'une fonction.[2] Dans un contexte de recherche de primitive d'une fonction avec valeur absolue, il faut chercher à s'en débarrasser; autrement dit, il faut étudier le signe de la fonction sous la valeur absolue.
   - ***Première approche, un peu lourde.*** Compte-tenu des signes respectifs de $\sin$ et $\cos$, on a assez facilement
$$\cos u \sin u = \begin{cases} \geq 0 & \text{pour tout } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \leq 0 & \text{pour tout } u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \geq 0 & \text{pour tout } u \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \\ \leq 0 & \text{pour tout } u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$$
et en conséquence
$$|\cos u \sin u| = \begin{cases} \cos u \sin u & \text{pour tout } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos u \sin u & \text{pour tout } u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \cos u \sin u & \text{pour tout } u \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \\ -\cos u \sin u & \text{pour tout } u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]. \end{cases}$$
Il en résulte:
$$\begin{array}{rcl} L & = & 3\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos u \sin u| \, \mathrm{d}u \\ & = & 3\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sin u \, \mathrm{d}u - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos u \sin u \, \mathrm{d}u + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos u \sin u \, \mathrm{d}u - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos u \sin u \, \mathrm{d}u\right) \\ & = & \displaystyle\frac{3}{2}\left([\sin^2 u]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin^2 u]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + [\sin^2 u]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - [\sin^2 u]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right) \\ & = & \displaystyle\frac{3}{2}(1+1+1+1) \\ & = & 6. \end{array}$$
   - ***Deuxième approche, plus élégante.*** La fonction
$$\varphi : u \mapsto 3|\cos u \sin u|$$
est $\frac{\pi}{2}$-périodique, puisque
$$\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin u, \quad \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos u$$
et en conséquence
$$\begin{array}{rcl} \varphi\left(u + \frac{\pi}{2}\right) & = & 3|-\sin u \cos u| \\ & = & 3|\sin u \cos u| \\ & = & \varphi(u). \end{array}$$
Puisque $[0, 2\pi]$ a sa longueur égale à 4 fois la période $\frac{\pi}{2}$ de la fonction φ et que sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$\varphi(u) = 3\cos u \sin u,$$

[2] On se gardera donc bien d'écrire que
$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos u \sin u| \, \mathrm{d}u & = & \displaystyle\frac{1}{2}\left[|\sin^2 u|\right]_0^{2\pi} \\ & = & |\sin^2(2\pi)| - |\sin^2 0| \\ & = & 0 - 0 \\ & = & 0, \end{array}$$
et la courbe aurait une longueur nulle!!

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\,|\cos u \sin u|\,\mathrm{d}u \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sin u\,\mathrm{d}u \\
&= 12\left[\frac{1}{2}\sin^2 u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 12 \times \frac{1}{2} \\
&= 6.
\end{aligned}
$$

1.2 Repère de Frenet en un point régulier $M(t)$

Rappelons qu'un point régulier $M(t)$ d'une courbe γ de paramétrisation (I, f) est tel que $f'(t) \neq \vec{0}$.

Des propriétés d'une norme, il découle que

$$f'(t) \neq \vec{0} \iff \|f'(t)\| \neq 0$$

et donc le point $M(t)$ de γ est régulier si et seulement si $\|f'(t)\| \neq 0$.

On se donne une courbe γ de paramétrisation $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$.

Définition XVI.1.2 En un point *régulier* $M(t)$ de γ, le repère de Frenet est le repère $(M(t); \vec{T}(t), \vec{N}(t))$, avec

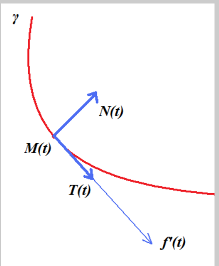
- $\vec{T}(t) = \dfrac{1}{\|f'(t)\|} f'(t)$ appelé vecteur unitaire tangent,
- $\vec{N}(t)$, vecteur unitaire normal, déduit de $\vec{T}(t)$ d'une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ et obtenu ainsi: si

  $$\vec{T}(t) = (a(t), b(t)),$$

  alors

  $$\vec{N}(t) = (-b(t), a(t)).$$

- C'est un repère orthonormé direct.



Exemple

Soit γ la courbe de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

  $$f'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$$

  donc tout point de γ est régulier.
- On a

  $$\|f'(t)\| = \sqrt{1+4t^2} \quad \Longrightarrow \quad \vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(1, 2t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

  et donc

  $$\vec{N}(t) = \left(-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right).$$

1.3 Courbure, formules de Frenet

On se donne une courbe γ de paramétrisation $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$, ainsi qu'une abscisse curviligne S, d'origine quelconque, orientée dans le sens des t croissants. On a vu que l'on a alors $S'(t) = \|f'(t)\|$.

Théorème XVI.1.1 ***Formules de Frenet.*** En un point régulier $M(t)$ de γ, on considère le repère de Frenet $(M(t); \vec{T}(t), \vec{N}(t))$.

Les vecteurs $\vec{T}'(t)$ et $\vec{N}(t)$ sont colinéaires et on définit alors la courbure $c(t)$ par la formule de Frenet:

$$\vec{T}'(t) = S'(t)c(t)\vec{N}(t),$$

c'est à dire

$$\vec{T}'(t) = \|f'(t)\|c(t)\vec{N}(t).$$

C'est la *première formule de Frenet*.

Enfin, on a

$$\vec{N}'(t) = -\|f'(t)\|c(t)\vec{T}(t),$$

qui est la *deuxième formule de Frenet*.

Démonstration 94

Remarque. L'écriture $\vec{T}'(t) = S'(t)c(t)\vec{N}(t)$ est conservée, au moins pour des raisons historiques.

Très important dans la pratique

Ainsi, pour déterminer $c(t)$:

Proposition XVI.1.2

- on calculera $\vec{T}(t)$ et $\vec{N}(t)$,
- on calculera $\vec{T}'(t)$,
- on citera la formule de Frenet $\vec{T}'(t) = S'(t)c(t)\vec{N}(t)$.

De cette égalité, on déduira alors la valeur de $S'(t)c(t)$ puis celle de $c(t)$.

Exemple

Calculer la courbure en tout point régulier de la courbe γ de paramétrisation $f : t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$ avec $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

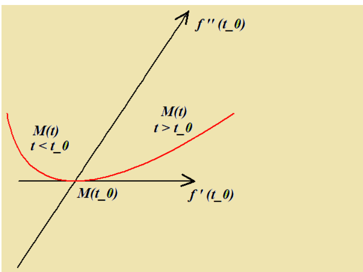
- $f'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$ et comme $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin t \neq 0$ et $\cos t \neq 0$ si bien que $f'(t)$ n'est jamais le vecteur nul et γ est donc régulière.
- On a ensuite
$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t) \\ \|f'(t)\| &= |3\cos t \sin t| \, \|(-\cos t, \sin t)\| \\ &= |3\cos t \sin t| \\ &= 3\cos t \sin t \end{aligned}$$
car $\cos t > 0$ et $\sin t > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- On en déduit
$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{1}{3\cos t \sin t} 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t) \\ &= (-\cos t, \sin t) \\ \vec{N}(t) &= (-\sin t, -\cos t). \end{aligned}$$
- On a $\vec{T}'(t) = (\sin t, \cos t)$ et on voit que $\vec{T}'(t) = -\vec{N}(t)$ alors que la formule de Frenet prévoit
$$\vec{T}'(t) = S'(t)c(t)\vec{N}(t).$$
- On en déduit:
$$\begin{aligned} S'(t)c(t) &= -1 \\ \implies c(t) &= -\frac{1}{S'(t)} = -\frac{1}{\|f'(t)\|} = -\frac{1}{3\cos t \sin t}. \end{aligned}$$

1.4 Rayon, centre et cercle de courbure; développée, premier point de vue

On se donne une courbe γ de paramétrisation $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$. Faisons ce rappel:

Un point $M(t)$ de γ est dit ***birégulier*** si les vecteurs $(f'(t), f''(t))$ sont linéairement indépendants. On dit que γ est une courbe birégulière si tous ses points sont biréguliers.

En un point birégulier, une courbe γ présente la disposition ordinaire:



Définition XVI.1.3 Soit γ une courbe de paramétrisation $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$. On se donne un point *régulier* $M(t)$ de γ, on considère le repère de Frenet $(M(t); \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ et on note $c(t)$ la courbure de γ en ce point.

Alors $M(t)$ est *birégulier* si et seulement si $c(t) \neq 0$.

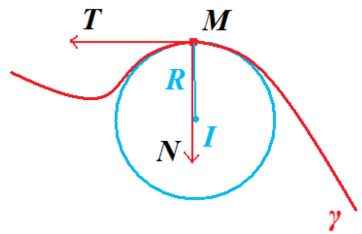
En un tel point, on définit alors:

- le rayon de courbure $R(t)$ par $R(t) = \frac{1}{c(t)}$,
- le centre de courbure $I(t)$ par $\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\vec{N}(t)$ (donc les coordonnées de $I(t)$ sont celles de $M(t)$ plus $R(t)$ fois celles de $\vec{N}(t)$),
- le cercle de courbure comme étant le cercle de centre $I(t)$ et de rayon $|R(t)|$.

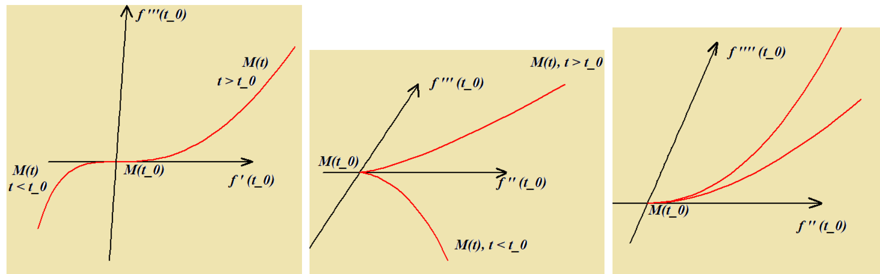
Démonstration 95

Remarques.

- Le cercle de courbure est, d'une certaine manière, le meilleur cercle approximant la courbe localement.



- La théorie prévoit la non nullité de la courbure $c(t)$, et donc l'existence du rayon et du cercle de courbure, si et seulement si le point $M(t)$ est birégulier. Cela semble tout à fait naturel: en un point d'inflexion ou de rebroussement, il n'existe naturellement pas de cercle approximant la courbe localement (aussi bien un peu avant le paramètre qu'un peu après):



Définition XVI.1.4 ***Développée d'une courbe birégulière.*** Pour une courbe birégulière (où tous les points sont biréguliers), le centre de courbure $I(t)$ est donc défini en tout point.

La courbe décrite par le point $I(t)$, t parcourant I, s'appelle alors la *développée* de γ.

Exemple

On considère la courbe γ de paramétrisation

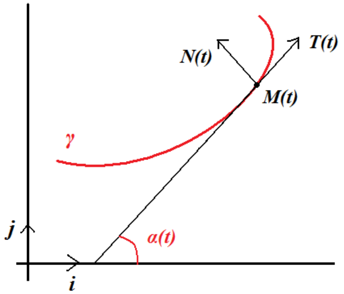
$$f : t \mapsto \begin{cases} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{cases} \qquad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Vérifier que la courbure est non nulle en tout point de γ et déterminer une paramétrisation de sa dévelopée.

- On a vu plus haut que
$$c(t) = -\frac{1}{3\cos t \sin t},$$
réel non nul pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La courbe γ est donc birégulière et admet en conséquence une développée.
- Le centre de courbure $I(t)$ est défini par
$$\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\vec{N}(t),$$
et les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de $I(t)$ sont donc
$$\begin{aligned} X(t) &= \cos^3 t - 3\cos t \sin t(-\sin t) = \cos^3 t + 3\cos t \sin^2 t \\ Y(t) &= \sin^3 t - 3\cos t \sin t(-\cos t) = \sin^3 t + 3\cos^2 t \sin t \end{aligned}$$
si bien que
$$t \mapsto \begin{cases} \cos^3 t + 3\cos t \sin^2 t \\ \sin^3 t + 3\cos^2 t \sin t \end{cases}$$
est une paramétrisation de la développée de γ.

1.5 Détermination angulaire

Dans cette section, il sera question de mettre en relation la courbure d'une courbe avec l'angle que font les tangentes avec une direction de référence (l'axe des abscisses) :



Proposition XVI.1.3 ***Thèorème de relèvement.*** Soit $\gamma = (I, f)$ une courbe régulière et pour tout $t \in I$, $\vec{T}(t)$ le vecteur unitaire tangent.

Il existe alors une fonction α de classe C^1 sur I telle que

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad \vec{T}(t) &= (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t)) \\ &= \cos\alpha(t)\,\vec{\imath} + \sin\alpha(t)\,\vec{\jmath} \end{aligned}$$

et pour tout $t \in I$, $\alpha(t)$ est une mesure de l'angle entre l'axe Ox et la tangente à γ en $M(t)$.

Remarque. Ce résultat (admis) est cohérent:

- lorsque deux réels X et Y satisfont $X^2 + Y^2 = 1$, on sait qu'il existe un réel α (unique à un multiple de 2π près) tel que $X = \cos\alpha$ et $Y = \sin\alpha$.
- Puisque $\|\vec{T}(t)\|^2 = 1$, les composantes $(X(t), Y(t))$ de $\vec{T}(t)$ satisfont $X^2(t) + Y^2(t) = 1$ et il existe donc bien un réel $\alpha(t)$ tel que $X(t) = \cos\alpha(t)$ et $Y(t) = \sin\alpha(t)$.
- Le théorème affirme qu'il existe une fonction de classe C^1 déterminant $\alpha(t)$.

Exemples

- Déterminer une telle fonction α lorsque $\vec{T}(t) = (\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2})$.
  - Il est clair que l'on a aussi
$$\vec{T}(t) = \left(\cos\left(-\frac{t}{2}\right), \sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right)$$
si bien que l'on peut prendre $\alpha(t) = -\frac{t}{2}$ ("on peut" car on pourrait prendre aussi $\alpha(t) = -\frac{t}{2} + 2\pi$).
- Déterminer une telle fonction α lorsque $\vec{T}(t) = (\sin\frac{t}{3}, \cos\frac{t}{3})$.
  - Compte-tenu des relations
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$
on a
$$\vec{T}(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{3}\right)\right)$$
si bien que l'on peut prendre $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{3}$.

Et maintenant le lien entre fonction angulaire et courbure :

Théorème XVI.1.4 Soit γ une courbe de paramétrisation $f : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$. On se donne un point *régulier* $M(t)$ de γ, on considère le repère de Frenet $M(t); \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ et on note $c(t)$ la courbure de γ en ce point.
Si l'on peut écrire le vecteur unitaire tangent $\vec{T}(t)$ sous la forme

$$\vec{T}(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t)),$$

alors la courbure $c(t)$ est donnée par

$$c(t) = \frac{\alpha'(t)}{S'(t)},$$

c'est à dire $c(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|f'(t)\|}$.

Démonstration 96

Exemple

On considère la courbe $\gamma = (I, f)$, avec $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t. \end{cases}$$

- $f'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$ et comme $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin t \neq 0$ et $\cos t \neq 0$ si bien que $f'(t)$ n'est jamais le vecteur nul et γ est donc régulière.
- On a ensuite

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t) \\ \|f'(t)\| &= |3\cos t \sin t|\, \|(-\cos t, \sin t)\| \\ &= |3\cos t \sin t| \\ &= 3\cos t \sin t \end{aligned}$$

car $\cos t > 0$ et $\sin t > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- On en déduit

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{1}{3\cos t \sin t} 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t) \\ &= (-\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

- À partir des relations

$$-\cos t = \cos(\pi - t) \qquad \sin t = \sin(\pi - t),$$

on voit qu'en posant

$$\alpha(t) = \pi - t,$$

on a

$$\vec{T}(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t)).$$

- On a donc $\alpha'(t) = -1$ et alors

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{\|f'(t)\|}\alpha'(t) \\ &= \frac{-1}{3\cos t \sin t}. \end{aligned}$$

2 Enveloppe d'une famille de droites. Développée, deuxième point de vue

On se donne une famille de droites. Par exemple:

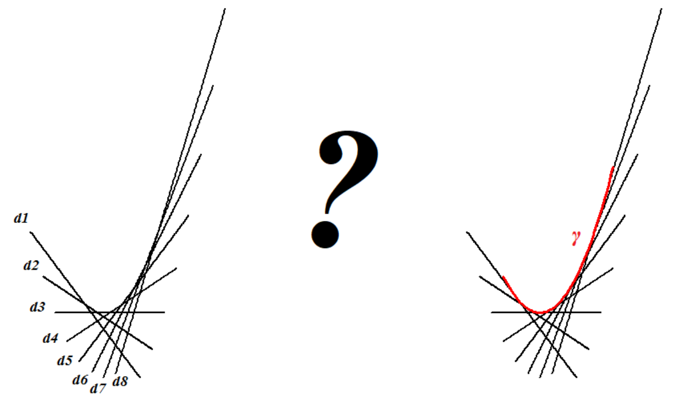
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la droite D_t passant par le point $A(t)$ de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = (\sin(2t), \cos(2t))$. On dispose ainsi de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
- En tout point M de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$, on considère les points d'intersection respectifs P_M et Q_M de la tangente à $\mathcal{H}$ en M avec l'axe Ox et l'axe Oy. On dispose ainsi de la famille de droites $(D_M)_{M\in\mathcal{H}}$.

Dans le développement de la théorie qui va suivre, on supposera qu'on s'est donné une famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ (I étant un certain domaine).

Définition XVI.2.5 Soit I un intervalle (ou une réunion d'intervalles) et, pour tout $t \in I$, D_t une droite du plan.
On dispose ainsi d'une famille $(D_t)_{t\in I}$ de droites du plan.

Une courbe paramétrée $\gamma = (I, F)$ est une ***enveloppe*** de la famille $(D_t)_{t\in I}$ si pour tout $t \in I$, la droite D_t est la tangente à γ au point de paramètre t.

Ainsi, déterminer l'enveloppe d'une famille de droites $(D_t)_{t\in I}$, c'est trouver une courbe paramétrée γ de paramétrisation (I, F) telle que pour tout $t \in I$, la tangente à γ au point $M(t)$ soit précisément la droite D_t.



Protocole de calcul d'une enveloppe

On conserve les notations de la définition ci-dessus.

Théorème XVI.2.5 On considère une famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ du plan; pour tout $t \in I$, on suppose connus:
- un point de passage $A(t)$,
- un vecteur directeur $\vec{u}(t)$.

On suppose que pour tout $t \in I$,

$$\det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)) \neq 0.$$

Alors la famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ possède une enveloppe γ de paramétrisation (I, F) avec

$$F : t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$$

et

$$\lambda(t) = -\frac{\det(A'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t))}.$$

Démonstration 97

Remarques.

- L'enveloppe γ admet donc la paramétrisation

$$F : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= a(t) + \lambda(t)\alpha(t) \\ y(t) &= b(t) + \lambda(t)\beta(t) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A(t) &= (a(t), b(t)) \\ \vec{u}(t) &= (\alpha(t), \beta(t)) \\ \lambda(t) &= -\frac{\det(A'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t))}. \end{aligned}$$

- Les déterminants sont évalués dans une base quelconque (souvent la base canonique),
- les fonctions $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ sont supposées suffisamment dérivables pour que ce théorème ait un sens.

Exemple

Pour tout $t \in I =]0, +\infty[$, on considère la droite D_t passant par le point $A(t)$ de coordonnées $(t, \ln t)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = (-\frac{1}{t}, 1)$. Démontrer que la famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ possède une enveloppe γ que l'on paramétrera.

- On a $\vec{u}\,'(t) = \left(\frac{1}{t^2}, 0\right)$ et

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{t^2} \neq 0. \end{aligned}$$

- D'après la théorie, cette famille de normales possède une enveloppe γ admettant la paramétrisation

$$F : t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t),$$

avec

$$A(t) = (t, \ln t) \quad \Longrightarrow \quad A'(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -\frac{\det(A'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))} \\ &= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{1}{t^2}} \\ &= -t^2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \\ &= -(t^2 + 1). \end{aligned}$$

- On obtient donc la paramétrisation suivante de γ:

$$F : t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = \begin{cases} 2t + \frac{1}{t} \\ \ln t - t^2 - 1. \end{cases}$$

2.1 Développée: deuxième point de vue

Rappel:

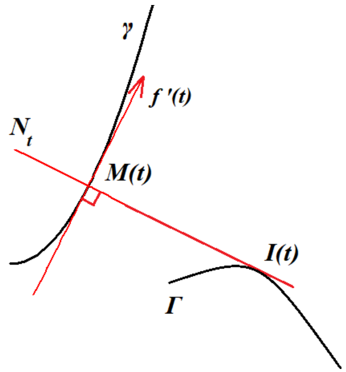
Soit $\gamma = (I, f)$ une courbe birégulière.
Le centre de courbure $I(t)$ est alors défini en tout point.
La courbe décrite par le point $I(t)$, t parcourant I, s'appelle alors la *développée* de γ.

Le théorème suivant permet la détermination de la courbure d'une toute autre manière.

Théorème XVI.2.6 Soit $\gamma = (I, f)$ une courbe birégulière.
Pour tout $t \in I$, on note N_t la normale à γ en $M(t)$, c'est à dire la droite passant par $M(t)$ et normale à la tangente à γ en $M(t)$.
Alors la développée Γ de γ est l'enveloppe de la famille de droites $(N_t)_{t\in I}$.

Démonstration 98

Dans la figure ci-dessous, en notant $t \mapsto I(t)$ la paramétrisation de l'enveloppe Γ de l'enveloppe de la famille de droites $(N_t)_{t\in I}$ et par définition même de la notion d'enveloppe, la normale N_t à γ au point $M(t)$ est la tangente à Γ au point $I(t)$:



Obtention concrète

Supposons γ paramétrée par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

- Pour tout $t \in I$, la normale à γ passe par $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$,
- cette normale est dirigée par $\vec{u}(t) = (-y'(t), x'(t))$ (car ce vecteur est bien orthogonal au vecteur $f'(t) = (x'(t), y'(t))$ qui est un vecteur directeur de la tangente à γ en $M(t)$).
- On dispose ainsi des coordonnées d'un point de passage et d'un vecteur directeur de N_t: on peut lancer le protocole.

Exemple

Déterminer la développée de la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln t \end{cases} \qquad t \in I =]0, +\infty[.$$

- La tangente à γ en $M(t)$ est dirigée par $f'(t) = (1, \frac{1}{t})$ et la normale à γ en $M(t)$ est dirigée par $\vec{u}(t) = (-\frac{1}{t}, 1)$.
- On a
$$\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{t^2}$$
la théorie prévoit alors l'existence d'une enveloppe dont une paramétrisation est donnée par
$$F : t \mapsto M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$$
avec
$$\lambda(t) = -\frac{\det(\vec{M}'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{1}{t^2}} = -\frac{1 + \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = -t^2 - 1.$$
- On a donc
$$F(t) = \begin{cases} x(t) = t + (t^2 - 1) \times \frac{1}{t} = 2t + 1 \\ y(t) = \ln t - (t^2 + 1) = \ln t - t^2 - 1. \end{cases}$$

2.2 Paramétrisation par une abscisse curviligne

Cette section a surtout une portée théorique et est en fait à la base de toutes les concepts (longueur, courbure) définis précédemment.

Une propriété de l'abscisse curviligne

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 sur I.

Proposition XVI.2.7 On considère la courbe paramétrée $\gamma = (I, f)$, que l'on suppose *régulière*.
Soit $t_0 \in I$ et S l'abscisse curviligne d'origine t_0, orientée dans le sens des t croissants.
Alors S est strictement croissante sur I, de classe C^1 sur I, avec
$$\forall t \in I,\ S'(t) = \|f'(t)\|$$
et réalise alors une bijection de I sur son intervalle image $J = S(I)$.

Démonstration.
- La première partie de cette proposition a déjà été établie en début de chapitre.
- Puisque γ est régulière, on a $f'(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in I$ et donc $\|f'(t)\| > 0$ pour tout $t \in I$. Il en résulte que S est strictement croissante sur I.
- La suite est une conséquence du théorème de la bijection.

Remarque concernant la notion de paramétrisation

Considérons une courbe γ de paramétrisation (I, f). Cela signifie que γ est constituée de tous les points $M(t)$, t parcourant l'intervalle I.
- Si par exemple $I = [0, 1]$, la courbe γ est également constituée de tous les points $M(2s)$, s parcourant l'intervalle $J = [0, \frac{1}{2}]$ puisque lorsque s parcourt $[0, \frac{1}{2}]$, $2s$ parcourt $[0, 1]$.
- Si par exemple $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la courbe γ est également constituée de tous les points $M(\arctan s)$, s parcourant l'intervalle $J = \mathbb{R}$ puisque lorsque s parcourt $\mathbb{R}$, $\arctan$ parcourt $\left]-\frac{\pi}{2}\right[$.

Le point commun à ces deux exemples est le fait suivant: l'existence d'une bijection entre ancien et nouveau paramètre:
- l'application $\varphi : s \longmapsto 2s$, bijection de l'intervalle $J = [0, \frac{1}{2}]$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$,
- l'application $\varphi : s \longmapsto \arctan s$, bijection de l'intervalle $J = \mathbb{R}$ sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \right[$.

Plus généralement :

Proposition XVI.2.8 On considère une courbe paramétrée $\gamma = (I, f)$.
Si J est un intervalle et φ une bijection de J dans I, alors γ admet la paramétrisation (J, g) où
$$g = f \circ \varphi.$$

En effet, lorsque s parcourt J, $\varphi(s)$ parcourt I et dès lors, $f(\varphi(s))$ parcourt γ.

Paramétrisation par une abscisse curviligne

Le résultat suivant est naturel en soi : un circuit, une route, pourvu que leur forme ne soit pas trop accidentée (on rejoint le concept de courbe régulière!) peuvent être parcourus à vitesse constante.

Proposition XVI.2.9 On considère la courbe paramétrée $\gamma = (I, f)$, que l'on suppose *régulière*.
Alors il existe une paramétrisation (J, g) de γ telle que
$$\forall s \in J,\ \|g'(s)\| = 1.$$
On dit alors que γ est *paramétrée par une abscisse curviligne*.

Démonstration 99

Proposition XVI.2.10 Soit γ une courbe paramétrée par une abscisse curviligne (J, g).
- Soit $M(s_1)$, $M(s_2)$ avec $s_1 < s_2$ deux points de γ. La longueur de γ entre le point $M(s_1)$ et le point $M(s_2)$, $s_1 < s_2$ est le réel
$$s_2 - s_1.$$
- Si $J = [\alpha, \beta]$, la longueur de γ est le réel
$$\beta - \alpha.$$

Remarque. C'est logique: si un mobile se déplace à $1km/h$, la distance qu'il parcourt entre la date $s_1 = 15h$ et la date $s_2 = 18h$ est
$$(18 - 15)h \times 1km/h = 3km.$$

Démonstration. Par définition, la longueur de γ entre $M(S_1)$ et $M(s_2)$ est le réel
$$\int_{s_1}^{s_2} \|g'(s)\|\, ds$$
et puisque
$$\|g'(s)\| = 1,$$

on a

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s_2} \|g'(s)\|\, ds &= \int_{s_1}^{s_2} ds \\ &= s_2 - s_1.\end{aligned}$$

Le fait concernant la longueur de γ est juste un cas particulier de ce résultat.

Proposition XVI.2.11 Soit γ une courbe paramétrée par une abscisse curviligne (J, g).

- Le vecteur unitaire tangent $\vec{T}(s)$ est alors le vecteur $g'(s)$.
- Il existe une fonction $\alpha : s \mapsto \alpha(s)$ de classe C^1 sur J telle que

$$\forall s \in J, \quad \vec{T}(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)).$$

- Le réel $\alpha'(s)$ est alors la courbure $c(s)$ de γ en $M(s)$.
- Les formules de Frenet s'écrivent :

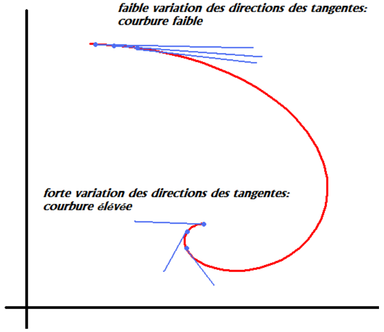
$$\vec{T}'(s) = c(s)\vec{N}(s),\ \vec{N}'(s) = -c(s)\vec{T}(s)$$

que l'on écrit aussi

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c\vec{N}, \qquad \frac{d\vec{N}}{ds} = -c\vec{T}.$$

Tout cela tombe sous le sens:

- $\vec{T}(s) = \frac{1}{\|g'(s)\|} g'(s)$.
- Le deuxième point est la conséquence du théorème de relèvement. Rappelons que $\alpha(s)$ est une mesure de l'angle entre l'axe Ox et la tangente à γ en $M(s)$.
- Le troisième point est en fait la *définition officielle* de la notion de courbure, motivée par l'observation suivante :
  - lorsque $\alpha'(s)$ est numériquement élevé, c'est que la fonction α subit une forte variation
  - i.e. l'angle $(\vec{\imath}, \vec{T}(s))$ subit une forte variation;
  - ainsi, la direction des tangentes subit une forte variation, ce qui donne cette sensation de forte courbure:



- De $\vec{T}(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$, on déduit par dérivation

$$\begin{aligned}\vec{T}'(s) &= (-\alpha'(s) \sin \alpha(s), \alpha'(s) \cos \alpha(s)) \\ &= \alpha'(s)(-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)) \\ &= \alpha'(s)\vec{N}(s) \\ &= c(s)\vec{N}(s).\end{aligned}$$

De même, on a

$$\vec{N}(s) = (-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)),$$

ce qui donne bien

$$\vec{N}'(s) = -c(s)\vec{T}(s)$$

par dérivation.

Chapitre XVII

Fonctions de plusieurs variables (deuxième année)

1 Continuité, définitions formelles des dérivées partielles et des fonctions de classe C^1; formule de Taylor à l'ordre 1

1.1 Continuité

On considère une fonction f définie sur un domaine U de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) et à valeurs réelles. La définition suivante se base sur une vision intuitive des choses. Pour une définition rigoureuse, on se reportera au dernier paragraphe; elle est en tout cas naturelle et prolonge de façon évidente la définition de la continuité d'une fonction d'une variable.

Définition XVII.1.1 On dit que f est continue au point (x_0, y_0) de U lorsque $f(x, y)$ tend vers $f(x_0, y_0)$ lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0).

On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point de U.

On définit de même, bien entendu, la notion de continuité pour une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$.

Ces théorèmes généraux sont également très naturels:

Proposition XVII.1.1 Soit f et g des fonctions définies et continues sur un domaine U de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) et à valeurs réelles et λ, μ des scalaires. Alors

$$\lambda f + \mu g, \quad fg$$

et, si g ne s'annule pas sur U, $\frac{f}{g}$ sont continue sur U.

Si φ est une fonction définie et continue sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si f est à valeurs dans I, alors $\varphi \circ f$ est continue sur U.

Ainsi, les fonctions de deux ou trois variables construites à partir des fonctions usuelles sont généralemennt continues sur leur domaine de définition:

$$f : (x, y) \longmapsto e^{xy} \sin(x^2 + y^2) + x^2 - y^3$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme somme, produit, composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

Remarques.

- Ainsi, l'ensemble des fonctions définies et continues sur un domaine donné U de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) est un espace vectoriel.
- On verra en fin de ce chapitre des situations où la continuité est plus délicate à étudier (mais dans la pratique, ces situations sont marginales).

1.2 Dérivées partielles premières, gradient et fonctions de classe C^1

La définition suivante est des plus naturelles et sa mise en œuvre ne pose pas de problème dans la majeure partie des situations pratiques. Elle joue néanmoins un rôle décisif dans les situations plus théoriques. Pour une définition d'un ensemble ouvert, on pourra se reporter au paragraphe "Topologie de $\mathbb{R}^n$.

Définition XVII.1.2 On considère une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (ou sur un domaine U de $\mathbb{R}^3$), à valeurs réelles.
On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à sa première variable en un point x_0, y_0 de U lorsque la fonction φ_1 d'une variable définie par

$$\varphi_1(x) = f(x, y_0)$$

est dérivable au point x_0. La valeur de cette dérivée partielle est alors la valeur du nombre dérivé de φ_1 en x_0 et cette dérivée partielle est notée $\partial_1 f(x_0, y_0)$:

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \varphi_1'(x_0).$$

On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable en un point x_0, y_0 de U lorsque la fonction φ_2 d'une variable définie par

$$\varphi_2(y) = f(x_0, y)$$

est dérivable au point y_0. La valeur de cette dérivée partielle est alors la valeur du nombre dérivé de φ_2 en y_0 et cette dérivée partielle est notée $\partial_2 f(x_0, y_0)$:

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = \varphi_2'(y_0).$$

Lorsque f possède des dérivées partielles $\partial_1 f(x_0, y_0)$ et $\partial_2 f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0), le gradient de f au point (x_0, y_0) est le vecteur

$$\big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0)\big).$$

Il est noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)$ ou $\nabla f(x_0, y_0)$.

Remarques.

- Pour une fonction de trois variables, on définit bien entendu la dérivée partielle $\partial_3 f(x_0, y_0, z_0)$ par rapport à sa troisième variable à partir de la dérivée de la fonction $z \mapsto f(x_0, y_0, z)$ et le gradient

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \big(\partial_1 f(x_0, y_0, z_0), \partial_2 f(x_0, y_0, z_0), \partial_3 f(x_0, y_0, z_0)\big).$$

- Si f possède une dérivée partielle $\partial_1 f(x, y)$ en tout point (x, y) de U, les applications

$$\partial_1 f : (x, y) \mapsto \partial_1 f(x, y)$$
$$\partial_2 f : (x, y) \mapsto \partial_2 f(x, y)$$

(et $\partial_3 f : (x, y, z) \mapsto \partial_1 f(x, y, z)$ dans le cas de trois variables) sont alors définies sur U. La définition suivante est ainsi naturelle:

Définition XVII.1.3 On considère une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (ou sur un domaine U de $\mathbb{R}^3$), à valeurs réelles.

On dit que f est de classe C^1 sur U

- lorsque f possède une dérivée partielle $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$ en tout point (x,y) de U,
- et lorsque les applications

$$\partial_1 f : (x,y) \mapsto \partial_1 f(x,y)$$
$$\partial_2 f : (x,y) \mapsto \partial_2 f(x,y)$$

(et $\partial_3 f : (x,y,z) \mapsto \partial_1 f(x,y,z)$ dans le cas de trois variables) sont continues sur U.

Comme pour les fonctions d'une variable, on dispose de théorèmes généraux:

Proposition XVII.1.2 Soit f et g des fonctions définies et de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) et à valeurs réelles et a, b des scalaires. Alors

$$af + bg, \quad fg$$

et, si g ne s'annule pas sur U, $\frac{f}{g}$ sont de classe C^1 sur U.

Remarque. Ainsi, l'ensemble des fonctions définies et continues sur un domaine donné U de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) est un espace vectoriel.

1.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition XVII.1.4 On considère une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$), à valeurs réelles. On suppose que f possède une dérivée partielle $\partial_1 f(x,y)$ en tout point (x,y) de U, on considère alors l'application $\partial_1 f : (x,y) \mapsto \partial_1 f(x,y)$ définie sur U.

Si la fonction $\partial_1 f$ possède une dérivée partielle par rapport à sa première variable, resp. deuxième, en un point (x_0, y_0) de U, celle-ci est notée

$$\partial_1 \partial_1 f(x_0, y_0),$$

resp. $\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$. On note de même $\partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0)$ et $\partial_2 \partial_2 f(x_0, y_0)$.

Ces dérivées partielles sont appelées dérivées partielles secondes de f.

On dit que f est de classe C^2 sur U lorsque f est de classe C^1 sur U et que chacune des applications

$$\partial_1 f, \quad \partial_2 f$$

est de classe C^1 sur U.

Remarques.

- On note évidemment de même les dérivées partielles $\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0, z_0)$, $\partial_3 \partial_2 f(x_0, y_0, z_0)$ etc. pour une fonction de trois variables.
- Dans un premier temps, on notera $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ (le cas échéant $\partial_3 f$), $\partial_1 \partial_1 f$ etc. les dérivées partielles par rapport à la première et deuxième variable (ou troisième) des fonctions qui sont en jeu. Ces notations sont très pratiques car indépendantes des noms des variables utilisées dans la définition des fonctions: qu'une fonction soit définie par

$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

ou par

$$(u,v) \longmapsto f(u,v),$$

sa dérivée partielle par rapport à sa première variable est dans les deux cas notée

$$\partial_1 f.$$

Ces dérivées partielles pourront être notées ultérieurement

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}$$

lorsque l'énoncé l'exige par exemple.

Théorème XVII.1.3 ***Théorème de Schwarz.*** Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur un ouvert U.

On a alors égalité des "dérivées partielles croisées", c'est à dire, pour une fonction de deux variables:

$$\forall (x,y) \in U, \quad \partial_1 \partial_2 f(x,y) = \partial_2 \partial_1 f(x,y)$$

et pour une fonction de trois variables:

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in U, \quad \partial_1 \partial_2 f(x,y,z) &= \partial_2 \partial_1 f(x,y,z) \\ \partial_1 \partial_3 f(x,y,z) &= \partial_3 \partial_1 f(x,y,z) \\ \partial_2 \partial_3 f(x,y,z) &= \partial_3 \partial_2 f(x,y,z). \end{aligned}$$

La démonstration est admise.

Remarque. En notation plus adaptée au choix des variables, comme pour une fonction définie par $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ le théorème de Schwarz s'écrit

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

et pour une fonction de trois variables $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$,

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z). \end{aligned}$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Théorème XVII.1.4 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U.

Alors lorsque $h = (h_1, h_2)$ tend vers $(0,0)$,

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \partial_1 f(a) + h_2 \partial_2 f(a) + o(\|h\|).$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et a un point de U.

Alors lorsque $h = (h_1, h_2, h_3)$ tend vers $(0,0,0)$,

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \partial_1 f(a) + h_2 \partial_2 f(a) + h_3 \partial_3 f(a) + o(\|h\|).$$

Dans les deux cas, cette formule s'écrit aussi

$$f(a+h) - f(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|).$$

La démonstration est admise.

Exemple

Sur $U = \left]-\frac{1}{e^2}, +\infty\right[\times]-1, +\infty[$, soit

$$f : (x, y) \mapsto \ln(x + e^{2y})$$

(f est bien définie sur U car pour tout $(x, y) \in U$, on a $x > -\frac{1}{e^2}$, $2y > -2$, donc $e^{-2y} > e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ donc $x + e^{2y} > 0$). alors

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{x + e^{2y}}, \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{2e^{2y}}{x + e^{2y}}.$$

Prenons $a = (0, 0)$; on a

$$f(0, 0) = 0, \quad \partial_1 f(0, 0) = 1 \quad \partial_2 f(0, 0) = 2$$

et la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne donc, lorsque $h = (h_1, h_2) \to (0, 0)$:

$$\ln(h_1 + e^{2h_2}) = h_1 + 2h_2 + o(\|h\|),$$

ce qui signifie que

$$\frac{\ln(h_1 + e^{2h_2}) - (h_1 + 2h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

2 Calcul des dérivées partielles

2.1 Situations concrètes

Pas d'ambiguïté particulière; c'est avant tout une situation de calcul de dérivée, au sens habituel où une seule variable est en jeu. On aura donc bien présentes à l'esprit les règles usuelles de dérivation, en particulier la formule de composition.

- Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de deux variables.
- Pour calculer $\partial_1 f$, imaginer que y est une constante C et dériver la fonction de la variable x obtenue avec C à la place de y.

Premier exemple

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2y^3$. Calculer $\partial_2 f$.

$$f(x, y) = x^2y^3 \rightleftharpoons y \mapsto C^2 \times y^3 \overset{\text{dériv.}}{\hookrightarrow} C^2 \times 3y^2 \Rightarrow \partial_2 f(x, y) = 3x^2y^2.$$

Deuxième exemple

Soit $f : (u, v) \mapsto \sin\left(\frac{v}{u}\right)$.

$$f(u, v) = \sin\left(\frac{v}{u}\right) \rightleftharpoons u \mapsto \sin\left(\frac{C}{u}\right) \overset{\text{dériv.}}{\hookrightarrow} -\frac{C}{u^2}\cos\left(\frac{C}{u}\right) \Rightarrow \partial_1 f(u, v) = -\frac{v}{u^2}\cos\left(\frac{v}{u}\right).$$

Troisième exemple

Soit $f : (x, y) \mapsto e^{x^2y^3}$. Calculer $\partial_2\partial_1 f$ et $\partial_1\partial_1 f$.

- On a

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x, y) &= 2xy^3e^{x^2y^3} \\
\partial_2\partial_1 f(x, y) &= 2x \times 3y^2e^{x^2y^3} + 2xy^3 \times 3x^2y^2e^{x^2y^3} \\
\partial_1\partial_1 f(x, y) &= 2y^3e^{x^2y^3} + 2xy^3 \times 2xy^3e^{x^2y^3}.
\end{aligned}$$

Quatrième exemple

Soit $f : (x, y, z) \mapsto \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$. Calculer $\partial_3 f$.

- On a

$$\begin{aligned}
\partial_3 f(x, y, z) &= \frac{3z^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^3 + y^3 + z^3)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\
&= \frac{3z^2x^2 + 3z^2y^2 + z^4 - 2zx^3 - 2zy^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.
\end{aligned}$$

2.2 Situations plus "abstraites"

Une situation très fréquente

On se donne une fonction d'une variable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on considère la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

définie sur $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. *Il est vraiment à noter que φ est au départ une fonction d'une variable.* Par exemple, si $\varphi : t \mapsto \sin t$, alors $f : (x, y) \mapsto \sin\left(\frac{y}{x}\right)$.

- Le calcul de $\partial_1 f$ se fait en accord avec la définition: en considérant y comme une constante C, la dérivée de l'application

$$x \mapsto \varphi\left(\frac{C}{x}\right)$$

est, d'après la formule de dérivation des fonctions composées

$$x \mapsto -\frac{C}{x^2}\varphi'\left(\frac{C}{x}\right).$$

En revenant à y, on obtient donc

$$\partial_1 f(x, y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Toute expression qui ferait intervenir un symbole de dérivée partielle n'aurait aucun sens pour φ, fonction d'une variable.

- Même principe pour le calcul de $\partial_1\partial_1 f$, à ceci près que $\partial_1 f$ se présentant comme un produit de fonctions de la variable x, on appliquera la formule de dérivation d'un produit:

  1. $\dfrac{2y}{x^3}$ est la dérivée de $x \mapsto -\dfrac{C}{x^2}$ avec $C = y$,
  2. la dérivée de
  $$x \mapsto \varphi'\left(\frac{C}{x}\right),$$
  avec $C = y$, est
  $$x \mapsto -\frac{C}{x^2}\varphi''\left(\frac{C}{x}\right).$$
  3. En revenant à y, on a donc
  $$\begin{aligned}\partial_1\partial_1 f(x,y) &= \frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \times \left(-\frac{y}{x^2}\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

2.3 Dérivée selon un vecteur, règle de la chaîne; dérivées partielles d'une composée de fonctions

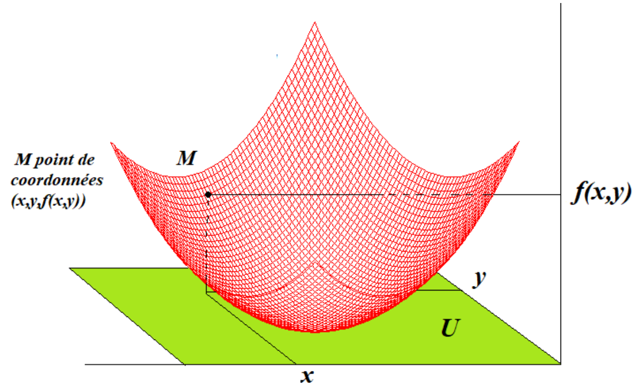
Dérivée suivant un vecteur

Théorème XVII.2.5 ***Dérivée suivant un vecteur.*** Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, a un point de U et $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors l'application
$$g : t \longmapsto f(a + t\vec{v})$$
est dérivable en $t = 0$ et
$$g'(0) = \langle \nabla f(a), \vec{v} \rangle.$$
Le réel $g'(0)$ s'appelle la dérivée de f en a suivant $\vec{v}$, ou dérivée de f en a dans la direction du vecteur $\vec{v}$.

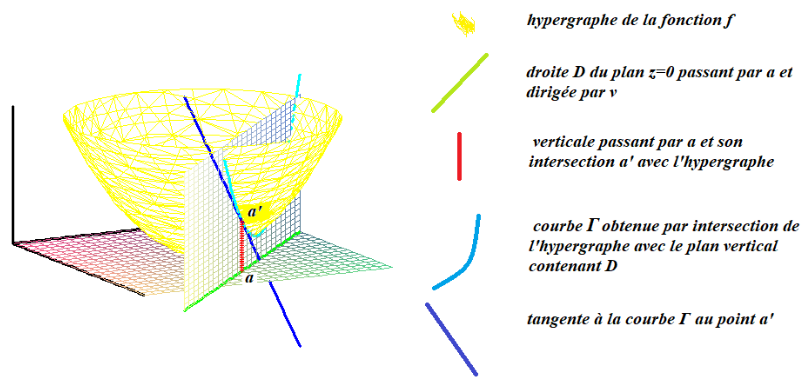
Remarque. Si a est le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_0, y_0) et $\vec{v} = (\alpha, \beta)$, la fonction g est évidemment définie par
$$g(t) = f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$$
et dans la mesure où les points de coordonnées
$$(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta),\ t \in \mathbb{R}$$
décrivent la droite D passant par a et dirigée par $\vec{v}$, l'étude de g consiste donc à étudier la fonction f en se limitant aux points de la droite; on dit aussi "le long de D". Remarque similaire dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration 100

Interprétation. Considérons *l'hypergraphe* de f, qui est la surface d'équation cartésienne
$$z = f(x,y),$$
constituée des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x,y))$ où (x,y) décrit U:



- Soit D la droite du plan $z = 0$ passant par le point a et dirigée par le vecteur $\vec{v}$, que l'on supposera unitaire.
- L'intersection du plan vertical contenant D avec l'hypergraphe forme une courbe Γ (dite *courbe gauche*, que l'on étudiera plus tard).
- La verticale passant par a rencontre γ en un point a'.
- La tangente à Γ au point a' est alors la droite passant par a' et dirigée par le vecteur
$$(\alpha, \beta, \langle \nabla f(a), \vec{v} \rangle)$$
(cf. théorie des courbes gauches) dont la pente (angle avec l'horizontale) est donc $\langle \nabla f(a), \vec{v} \rangle$.



Règle de la chaîne

Cette première formule concerne le calcul de la dérivée d'une fonction d'une variable, mais fabriquée par l'intermédiaire d'une fonction de deux variables.

Théorème XVII.2.6 ***Règle de la chaîne.*** Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, φ_1, φ_2 deux fonctions de classe C^1 d'une variable définies sur un intervalle I et à valeurs réelles et telles que pour tout $t \in I$, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in U$, de sorte que la fonction

$$\begin{aligned} F : t &\mapsto f(\varphi(t)) \\ &= f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{aligned}$$

est définie sur I.

Alors F est de classe C^1 sur I et pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \varphi_1'(t) \times \partial_1 f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t) \times \partial_2 f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ &= \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une fonction f définie et de classe C^1 sur un domaine U de $\mathbb{R}^3$, à valeurs réelles et sous les hypothèses appropriées, la fonction

$$\begin{aligned} F : t &\mapsto f(\varphi(t)) \\ &= f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)), \end{aligned}$$

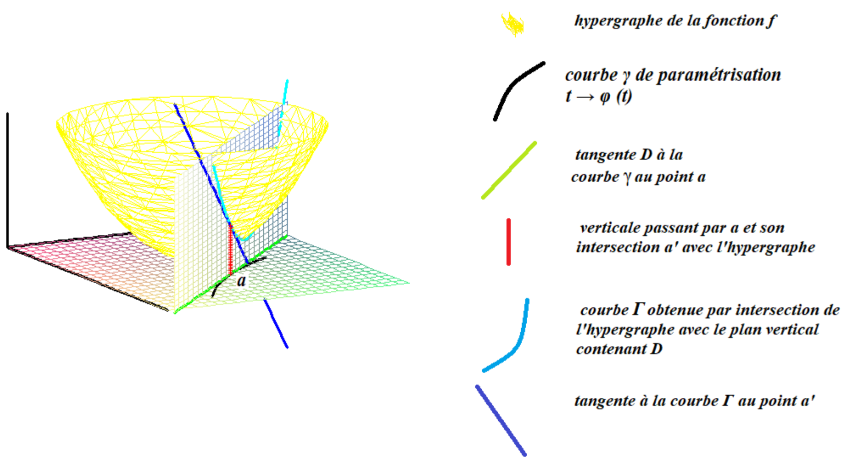
est de classe C^1 et

$$\begin{aligned} F'(t) &= \varphi_1'(t) \times \partial_1 f(\varphi(t)) + \varphi_2'(t) \times \partial_2 f(\varphi(t)) + \varphi_3'(t) \times \partial_3 f(\varphi_(t)) \\ &= \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Remarque. Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, les points de coordonnées

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t)),\ t \in I$$

décrivent une courbe paramétrée γ (plane dans $\mathbb{R}^2$, gauche dans $\mathbb{R}^3$) et étudier F consiste donc à étudier la fonction f le long de la courbe γ. Moyennant la considération de la tangente D à γ au point a, on se retrouve, localement, dans la situation antérieure d'étude de f le long d'une droite:



Par exemple, si

$$\varphi : t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

qui est une paramétrisation du cercle $\mathcal{C}(0,1)$, l'étude de F consiste à étudier f le long de ce cercle.

Démonstration 101

Remarques. Selon le contexte, on pourra écrire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles de f; cette formule devient alors

$$F'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

$\partial_2 f$ est le nom d'une fonction, ce n'est pas une action à mener: par exemple,

$$\partial_2 f\,(t^2, t^3)$$

ne signifie pas "dériver $f\,(t^2, t^3)$ par rapport à sa "deuxième" variable" (il n'y a ni première, ni deuxième variable dans la fonction $t \mapsto f(t^2, t^3)$); c'est juste la valeur en un certain point d'une certaine fonction, en l'occurrence, c'est la valeur au point (t^2, t^3) de la fonction $\partial_2 f$. Par exemple,

$$\begin{aligned} f(u,v) = u^4v^3 \quad &\Longrightarrow \quad \partial_2 f(u,v) = 3u^4v^2 \\ &\Longrightarrow \quad \partial_2 f\,(t^2, t^3) = 3 \times (t^2)^4 \times (t^3)^2. \end{aligned}$$

! Pour exactement les mêmes raisons (seules les notations changent), $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est le nom d'une fonction, ce n'est pas une action à mener: par exemple,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\sin t, \cos t)$$

est la valeur au point $(\sin t, \cos t)$ de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ce n'est pas "dériver par rapport à y la fonction $t \longmapsto f(\sin t, \cos t)$, ce qui n'aurait aucun sens. Par exemple,

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{x^4}{y^2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x^4}{y^3} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\sin t, \cos t) = -\frac{2\sin^4 t}{\cos^3 t}. \end{aligned}$$

Exemple

On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée première et seconde de la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$F : t \mapsto f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right).$$

- On est dans le cadre de la formule ci-dessus avec $\varphi_1(t) = \frac{1}{t}$ et $\varphi_2(t) = e^{2t}$. Alors

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2}\partial_1 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right) + 2e^{2t}\partial_2 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right).$$

- Pour le calcul de $F''(t)$, on observe que F' est une somme, chaque terme étant un produit.
  1. La dérivée de $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ est $t \mapsto \frac{2}{t^3}$.
  2. ***Ce point est capital:*** pour dériver

$$t \mapsto \partial_1 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right),$$

on observe que l'on est dans le cadre de la règle ci-dessus puisqu'en posant $g = \partial_1 f$, on est amenés à dériver

$$t \mapsto g\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right),$$

dont la dérivée est alors

$$t \mapsto -\frac{1}{t^2}\partial_1 g\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right) + 2e^{2t}\partial_2 g\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right),$$

c'est à dire

$$t \mapsto -\frac{1}{t^2}\partial_1\partial_1 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right) + e^{2t}\partial_2\partial_1 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right).$$

3. En procédant de même avec le deuxième terme, on a finalement

$$F''(t) = \frac{2}{t^3} \times \partial_1 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right) - \frac{1}{t^2} \times \left(-\frac{1}{t^2}\partial_1\partial_1 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right) + 2e^{2t}\partial_2\partial_1 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right)\right)$$
$$+ 4e^{2t} \times \partial_2 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right) + 2e^{2t} \times \left(-\frac{1}{t^2}\partial_1\partial_2 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right) + 2e^{2t}\partial_2\partial_2 f\left(\frac{1}{t}, e^{2t}\right)\right).$$

Composition de fonctions de plusieurs variables

On se donne une fonction f de deux variables et de classe C^1 et on va créer cette fois une autre fonction de deux variables à partir de f; il sera question de la fonction

$$h : (u, v) \mapsto f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$$

où g_1 et g_2 sont à leur tour des fonctions de deux variables de classe C^1, comme par exemple

$$h : (u, v) \mapsto f\big(u \cos v, u \sin v\big).$$

Avant de donner la formule générale, voyons pas à pas comment calculer $\partial_2 h$ dans cet exemple:

- La première variable u est donc fixée; écrivons-la C. Il s'agit donc de déterminer la dérivée de l'application
$$v \mapsto f\big(C \cos v, C \sin v\big).$$
- Puisque C est "fixé", il n'y a qu'une seule variable en jeu et on note alors
$$\varphi_1 : v \mapsto C \cos v, \quad \varphi_2 : v \mapsto C \sin v.$$
- Il est donc question de déterminer la dérivée de l'application F suivante:
$$F : v \mapsto f\big(\varphi_1(v), \varphi_2(v)\big),$$
dont le calcul relève alors de la règle de la chaîne:
$$\begin{aligned} F'(v) &= \varphi_1'(v)\partial_1 f\big(\varphi_1(v), \varphi_2(v)\big) + \varphi_2'(v)\partial_2 f\big(\varphi_1(v), \varphi_2(v)\big) \\ &= -C \sin v \partial_1 f\big(\cos v, \sin v\big) + C \cos v \partial_2 f\big(\cos v, \sin v\big) \\ &= -u \sin v\, \partial_1 f\big(\cos v, \sin v\big) + u \cos v\, \partial_2 f\big(\cos v, \sin v\big). \end{aligned}$$
- Ainsi,
$$\partial_2 h(u, v) = -u \sin v\, \partial_1 f\big(\cos v, \sin v\big) + u \cos v\, \partial_2 f\big(\cos v, \sin v\big).$$

La formule générale est la suivante :

Théorème XVII.2.7 On considère une application f définie et de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ainsi que deux applications g_1 et g_2, définies et de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

On suppose que pour tout $(u, v) \in V$, on a $\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) \in U$, de sorte que

$$h : (u, v) \mapsto f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$$

est définie sur V.

Alors h est de classe C^1 sur V et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\begin{cases} \partial_1 h(u, v) &= \partial_1 g_1(u, v) \cdot \partial_1 f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) + \partial_1 g_2(u, v) \cdot \partial_2 f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) \\ \partial_2 h(u, v) &= \partial_2 g_1(u, v) \cdot \partial_1 f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) + \partial_2 g_2(u, v) \cdot \partial_2 f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) \end{cases}$$

Démonstration 102

- Bien entendu, si l'on note $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles par rapport à la première et deuxième variable de la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et $\frac{\partial g_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial g_1}{\partial v}$ celles de g_1, etc., puis $\frac{\partial h}{\partial u}$, $\frac{\partial h}{\partial v}$ celles de h, la formule ci-dessus, en posant $g(u, v) = \big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$ s'écrit

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial u}(u, v) &= \dfrac{\partial g_1}{\partial u}(u, v) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(g(u, v)\Big) + \dfrac{\partial g_2}{\partial u}(u, v) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(g(u, v)\Big) \\ \dfrac{\partial h}{\partial v}(u, v) &= \dfrac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(g(u, v)\Big) + \dfrac{\partial g_2}{\partial v}(u, v) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(g(u, v)\Big) \end{cases}}$$

Remarque importante. Ces formules ne sont en fait pas nouvelles, car dans le calcul de ces dérivées partielles, on est dans l'univers de la règle de la chaîne: par exemple, calculons $\partial_1 h$. Le réel v étant fixé, il s'agit de calculer la dérivée de

$$\psi : u \mapsto f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big).$$

On voit que ψ est une application de la forme

$$\psi : t \mapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

avec

$$\varphi_1(t) = g_1(t, v), \qquad \varphi_2(t) = g_2(t, v)$$

qui sont chacune, par définition même du fait que g_1 et g_2 sont des fonctions de classe C^1, de classe C^1. On peut donc appliquer la règle de la chaîne (et en revenant à la variable u plutôt que t):

$$\psi'(u) = \varphi_1'(u) \times \partial_1 f(\varphi_1(u), \varphi_2(u)) + \varphi_2'(u) \times \partial_2 f(\varphi_1(u), \varphi_2(u)).$$

Dans la mesure où, par définition même du concept de dérivée partielle

$$\varphi_1(u) = g_1(u, v) \implies \varphi_1'(u) = \partial_1 g_1(u, v)$$

et de même

$$\varphi_2(u) = g_2(u, v) \implies \varphi_2'(u) = \partial_1 g_2(u, v),$$

on a

$$\psi'(u) = \partial_1 g_1(u, v) \times \partial_1 f(\varphi_1(u), \varphi_2(u)) + \partial_1 g_2(u, v) \times \partial_2 f(\varphi_1(u), \varphi_2(u)).$$

Cela prouve donc l'existence de la dérivée partielle $\partial_1 h$ avec

$$\partial_1 h(u, v) = \partial_1 g_1(u, v) \times \partial_1 f(\varphi_1(u), \varphi_2(u)) + \partial_1 g_2(u, v) \times \partial_2 f(\varphi_1(u), \varphi_2(u)).$$

On raisonnerait de la même façon pour $\partial_2 h$.

Exemple

Soit f une fonction de deux variables et de classe C^1 et

$$h : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right).$$

On est dans le cadre de cette formule, avec

$$g_1(u,v) = \frac{u^2+v^2}{2}, \quad g_2(u,v) = \frac{u^2-v^2}{2},$$

et alors

$$\begin{cases} \partial_1 h(u,v) &= u\,\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + u\,\partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) \\ \partial_2 h(u,v) &= v\,\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) - v\,\partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right). \end{cases}$$

La suite de cet exemple est très importante. Voyons comment calculer une dérivée partielle seconde de h, comme $\partial_1\partial_1 h$ i.e. comment calculer $\partial_1(\partial_1 h)$. Pour ce faire, on considère que v est une constante dans $\partial_1 h$; on est donc amenés, par définition, à dériver

$$u \mapsto u\,\partial_1 f\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right) + u\,\partial_2 f\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right).$$

- On doit dériver une somme, chaque somme se présentant comme un produit de fonctions de la variable u. Considérons

$$A : u \mapsto u\,\partial_1 f\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right).$$

- Puisque A est un produit, le premier terme de la dérivée de ce produit est bien entendu

$$1 \times \partial_1 f\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right) = \partial_1 f\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right)$$

et le deuxième terme est

$$u \times \text{dérivée de } u \mapsto \partial_1 f\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right).$$

! Rappelons que $\partial_1 f$ est le nom d'une fonction (et non une action à mener). Pour y voir plus clair, notons B cette fonction: $B = \partial_1 f$ (avec la pratique, ce changement de notation ne sera plus nécessaire) si bien que l'on est amenés à dériver la fonction

$$E : u \mapsto B\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right).$$

- *On est à nouveau dans un contexte de règle de la chaîne*, puisque E est de la forme

$$E : u \mapsto B\big(\varphi_1(u), \varphi_2(u)\big),$$

avec

$$\varphi_1(u) = \frac{u^2+C^2}{2}, \quad \varphi_2(u) = \frac{u^2-C^2}{2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} E'(u) &= \varphi_1'(u)\partial_1 B\big(\varphi_1(u), \varphi_2(u)\big) + \varphi_2'(u)\partial_2 B\big(\varphi_1(u), \varphi_2(u)\big) \\ &= u\,\partial_1 B\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right) + u\,\partial_2 B\left(\frac{u^2+C^2}{2}, \frac{u^2-C^2}{2}\right) \end{aligned}$$

- Dans la mesure où $B = \partial_1 f$, on a

$$\partial_1 B = \partial_1\partial_1 f, \quad \partial_2 B = \partial_2\partial_1 f$$

et en revenant à v à la place de C, on obtient finalement

$$E'(u) = u\partial_1\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + u\partial_2\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned} A'(u) = \partial_1 f&\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) \\ &+ u\left(\partial_1\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + u\partial_2\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

qui est le premier terme de $\partial_1\partial_1 h$. Rappelons-le, une expression comme

$$\partial_1\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)$$

signifie: la valeur prise au point $\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)$ de la fonction $\partial_1\partial_1 f$.

- La dérivée partielle par rapport à u de $u\,\partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)$ (deuxième terme de $\partial_1 h$) s'obtient en suivant les mêmes principes. On obtient tous calculs faits

$$\begin{aligned} &\partial_1\partial_1 h(u,v) = \partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + u\left(\partial_1\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + u\partial_2\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)\right) \\ &+\partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + u\left(\partial_1\partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + u\partial_2\partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)\right) \\ &= \partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + \partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) \\ &+u^2\left(\partial_1\partial_1 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + \partial_2\partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right) + 2\partial_1\partial_2 f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

en ayant tenu compte du théorème de Schwarz: $\partial_2\partial_1 f = \partial_1\partial_2 f$.

3 Extrémums

3.1 Définitions et exemples fondamentaux

Définition XVII.3.5 Soit f une fonction f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles.
On dit que f présente un minimum *local* au point (x_0, y_0) lorsqu'il existe un voisinage V de (x_0, y_0) tel que

$$\forall (x,y) \in V,\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0).$$

On dit que f présente un minimum *global* au point (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0).$$

On dit que f présente un maximum *local* au point (x_0, y_0) lorsqu'il existe un voisinage V de (x_0, y_0) tel que

$$\forall (x,y) \in V,\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0).$$

On dit que f présente un maximum *global* au point (x_0, y_0) lorsque

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0).$$

Remarques.

- On appelle voisinage d'un point (x_0, y_0) un disque centré en ce point (de même qu'un voisinage d'un nombre réel est un intervalle centré en ce nombre). Pour en savoir plus sur cette notion, on lira le paragraphe "Topologie de $\mathbb{R}^n$".
- La distinction entre maximum local et maximum global est tout à fait naturelle: la température maximale atteinte en Islande au cours de l'année 2021 (maximum local) n'est certainement pas un maximum global de température sur toute la Terre!

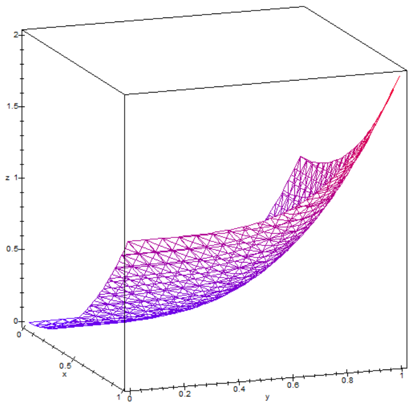
Définition XVII.3.6 Un point en lequel une fonction présente un minimum local ou un maximum local est appelé un *extrémum* de la fonction.

Exemples

- La fonction
$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$
présente clairement un minimum global en $(0, 0)$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque $f(0, 0) = 0$ et que l'on a $x^2 + y^2 \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ce minimum est dit *strict*, dans le sens où pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $f(x, y) > f(0, 0)$.

- La fonction
$$f : (x, y) \mapsto x^2y^2$$
présente un minimum global en tout point situé sur l'un des deux axes car:
  - $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
  - $f(x, y) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$.

- La fonction
$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^4$$
définie sur le carré $D = [0, 1] \times [0, 1]$ présente un maximum strict en $(1, 1)$. En effet:
$$0 \leq x \leq 1 \implies x^2 \leq 1$$
et
$$0 \leq y \leq 1 \implies y^4 \leq 1$$
si bien que
$$\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) \leq 1 + 1 = 2,$$
c'est à dire
$$\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) \leq f(1, 1),$$
ce qui prove que f présente un maximum sur D en $(1, 1)$. D'autre part,
$$0 \leq x < 1 \implies x^2 < 1$$
et
$$0 \leq y < 1 \implies y^4 < 1$$
si bien que pour tout point de D autre que $(1, 1)$, on a $f(x, y) < 2$: le maximum en $(1, 1)$ sur D est donc strict.



Remarquons que sur le domaine $D' = [0, 2] \times [0, 1]$ (par exemple), f ne présente pas de maximum en $(1, 1)$ puisque
$$f(2, 1) = 5 > f(1, 1).$$
Le domaine sur lequel on recherche les extrémums joue un rôle capital.

- La fonction
$$f : (x, y) \mapsto x^2 + x + y^4$$
présente un minimum global au point $(-\frac{1}{2}, 0)$, puisque $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ et
$$f(x, y) - f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = x^2 + x + y^4 + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} + y^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^4,$$
qui est une quantité manifestement ≥ 0 pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; c'est pourquoi
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq f\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$
i.e. f présente un minimum global en $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- La fonction
$$f : (x, y) \mapsto 2x^2 - x^4 + y^2 - y^4$$
présente un minimum local au point $(0, 0)$. En effet, $f(0, 0) = 0$ et
$$f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = x^2\left(2 - x^2\right) + y^2\left(1 - y^2\right).$$
Or on a $2 - x^2 \geq 0$ lorsque $x^2 \leq 2$ c'est à dire lorsque $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ et $1 - y^2 \geq 0$ lorsque $y^2 \leq 1$ c'est à dire lorsque $-1 \leq y \leq 1$. Ainsi,
$$\forall (x, y) \in V = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \times [-1, 1], \quad 2 - x^2 \geq 0,\ 1 - y^2 \geq 0$$
$$\implies x^2\left(2 - x^2\right) \geq 0,\ y^2\left(1 - y^2\right) \geq 0 \implies f(x, y) \geq 0 \implies f(x, y) \geq f(0, 0).$$
Le rectangle V est un voisinage de $(0, 0)$ et il a été prouvé ci-dessus que pour tout point (x, y) de ce voisinage,
$$f(x, y) \geq f(0, 0).$$
Cela prouve que f présente un minimum local en $(0, 0)$.

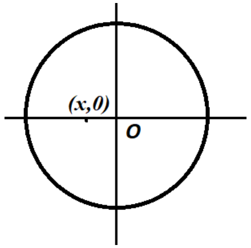
Comment prouver l'absence de minimum, de maximum, d'extrémum?

Par exemple, soit

$$f:(x,y)\mapsto x^3+y^3.$$

Pour démontrer que f ne présente pas de minimum local en $(0,0)$, il ne suffit pas de trouver un point en lequel f est inférieure à $f(0,0)$ comme $f(-1,0)$: cela prouverait seulement que f ne présente pas de minimum *global* en $(0,0)$.

- Il faut prouver que *tout* voisinage V de $(0,0)$ contient au moins un point en lequel f est inférieure à $f(0,0)$.
- Soit donc V un voisinage de $(0,0)$. Un tel voisinage contient des points $(x,0)$ avec $x<0$:



En un tel point,

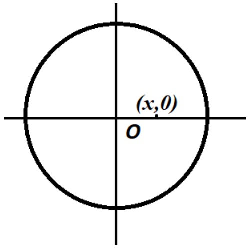
$$f(x,0)=x^3<0,$$

c'est à dire

$$f(x,0)<f(0,0).$$

Ainsi, f ne présente pas de minimum local en $(0,0)$.

- De même, f ne présente pas de maximum local en $(0,0)$ puisque tout voisinage de $(0,0)$ contient des points $(x,0)$ avec $x>0$:



et en un tel point,

$$f(x,0)=x^3>0,$$

c'est à dire

$$f(x,0)>f(0,0).$$

- Ainsi, f ne présente ni minimum local en $(0,0)$ ni maximum local, ce qui démontre que f ne présente pas d'extrémum en $(0,0)$.

3.2 Points critiques, formule de Taylor-Young à l'ordre 2 et protocole principal

Définition XVII.3.7 ***Point critique.*** Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur un domaine U, à valeurs réelles.
Un point (x_0,y_0) de U est un *point critique* de f lorsque

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

Le résultat suivant est important, mais il ne devra pas être mal interprété! Il donne une condition *nécessaire* mais non suffisante, c'est à dire une implication et non une équivalence.

Théorème XVII.3.8 Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur un domaine *ouvert* U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.
Si la fonction f présente un extrémum en un point (x_0,y_0) de U, alors (x_0,y_0) est un point critique de f, autrement dit,

$$\nabla f(x_0,y_0)=(0,0).$$

Démonstration 103

Remarque. Pour une définition précise de la notion d'ensemble ouvert, on pourra se reporter au paragraphe "Topologie de $\mathbb{R}^n$". On s'en tiendra largement à notre intuition; notamment: un domaine *ouvert* sera soit $\mathbb{R}^2$ tout entier, soit un domaine défini par des inégalités strictes.

La réciproque est grossièrement fausse! Par exemple, il a été vu plus haut que la fonction

$$f:(x,y)\mapsto x^3+y^3$$

ne présente pas d'extrémum en $(0,0)$. Cependant, il est clair que $(0,0)$ est un point critique de f, puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2.$$

Définition XVII.3.8 Soit $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U. La *matrice hessienne* de f en a est la matrice

$$H_f(a)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\[3mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}.$$

Voici un résultat qui jouera un rôle décisif dans la démonstration du protocole principal :

Théorème XVII.3.9 *Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.* Soit $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U.
Alors lorsque $h=(h_1,h_2)\to(0,0)$:

$$\begin{aligned}f(a+h)&=f(a)+h_1\partial_1 f(a)+h_2\partial_2 f(a)\\&+\frac{1}{2}\left(rh_1^2+th_2^2+2sh_1h_2\right)+o\left(\|h\|^2\right)\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$r=\partial_1\partial_1 f(a),\quad t=\partial_2\partial_2 f(a),\quad s=\partial_1\partial_2 f(a).$$

Cette formule s'écrit aussi: lorsque $h=(h_1,h_2)\to(0,0)$,

$$f(a+h)=f(a)+\langle\nabla f(a),h\rangle+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h_1 & h_2\end{pmatrix}H_f(a)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}+o(\|h\|^2)$$

où $H_f(a)$ est la matrice hessienne de f au point a.

La démonstration est admise. Il est en tout cas clair que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(A), h\rangle &= \langle (\partial_1 f(A), \partial_2 f(a)), (h_1, h_2)\rangle \\ &= h_1\partial_1 f(a) + h_2\partial_2 f(a)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} h_1 & h_2\end{pmatrix} H(a)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \\ s & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} rh_1 + sh_2 \\ sh_1 + th_2\end{pmatrix} \\ &= h_1(rh_1 + sh_2) + h_2(sh_1 + th_2) \\ &= rh_1^2 2sh_1h_2 + th_2^2,\end{aligned}$$

ce qui justifie la deuxième écriture.

Exemple

On reprend la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \ln(x + e^{2y})$$

sur $U = \left]-\frac{1}{e^2}, +\infty\right[\times]-1, +\infty[$. On a calculé

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x + e^{2y}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2e^{2y}}{x + e^{2y}}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-1}{(x + e^{2y})^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2\frac{2e^{2y}(x + e^{2y}) - 2e^{4y}}{(x + e^{2y})^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) &= \frac{-2e^{2y}}{(x + e^{2y})^2}.\end{aligned}$$

On a donc en $a = (0, 0)$

$$r = -1, \quad t = 0, \quad s = -2$$

et comme $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2$, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(0, 0)$ donne

$$\ln(x + e^{2y}) \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{=} h_1 + 2h_2 + \frac{1}{2}(-h_1^2 - 4h_1h_2) + o(\|h\|^2),$$

et en conséquence

$$\frac{\ln(h_1 + e^{2h_2}) - (h_1 + 2h_2 - \frac{1}{2}h_1^2 - 2h_1h_2))}{h_1^2 + h_2^2} \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Le résultat principal est le suivant (Tr est la trace):

Théorème XVII.3.10 Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur un domaine *ouvert* U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles et $a = (x_0, y_0) \in U$ un *point critique* de f.
On considère la *matrice hessienne*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\end{pmatrix}$$

de f en a. Alors:

- si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$, f présente un minimum local en (x_0, y_0);
- si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) < 0$, f présente un maximum local en (x_0, y_0);
- si $\det(H_f(a)) < 0$, f ne présente pas d'extrémum local en (x_0, y_0) et on dit que (x_0, y_0) est un point col de f.

Démonstration 104

Remarques.

- En un point critique (x_0, y_0) en lequel la matrice hessienne a un déterminant nul, i.e. lorqu'elle est non inversible, ce théorème ne permet pas de conclure (cf. exemple).
- Il est donc possible d'affirmer qu'une fonction va posséder, ou non, un extrémum local en l'un de ses points critiques que lorsque sa matrice hessienne a un déterminant non nul i.e. lorsqu'elle est inversible.

Protocole à appliquer en pratique

Pour déterminer les extrémums locaux d'une fonction f sur un domaine ouvert U de $\mathbb{R}^2$:

- on s'assurera du caractère C^2 de la fonction f sur U,
- on recherchera ses points critiques,
- en chacun de ses points critiques, on calculera les valeurs propres de la matrice hessienne et on appliquera si possible le théorème.

Premier exemple

Déterminer les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{4}x^3 + x^2 + xy + y^2.$$

- La fonction f est de classe C^2 et le domaine $\mathbb{R}^2$ est ouvert (tout point de $\mathbb{R}^2$ est évidemment intérieur à $\mathbb{R}^2$); on peut donc envisager de mettre en pratique le protocole principal.
- On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{3}{4}x^2 + 2x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x + 2y\end{aligned}$$

et la recherche des points critiques donne

$$\left\{\begin{aligned}\tfrac{3}{4}x^2 + 2x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0\end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned}3y^2 - 3y &= 0 \\ x &= -2y\end{aligned}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}\right. \text{ ou } \left\{\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= -2.\end{aligned}\right.$$

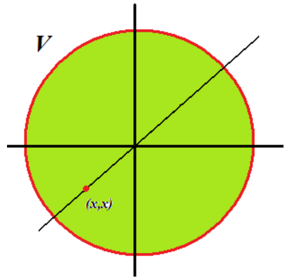
Ainsi, f possède deux points critiques: les points $(0, 0)$ et $(-2, 1)$.

- On calcule
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{3}{2}x + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$
si bien que
  - On a
$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
et dans la mesure où
$$\det(H(0,0)) = 3, \quad \mathrm{Tr}(H(0,0)) = 4,$$
on en conclut que f présente un minimum local en $a_1 = (0,0)$.
  - On a
$$H(-2,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
et dans la mesure où
$$\det(H(-2,1)) = -4,$$
on en conclut que f ne présente pas d'extrémum local en $a_2 = (-2,1)$.
- ***Conclusion:*** f présente un minimum local en $(0,0)$, qui vaut 0, et pas de maximum local.
- ***Remarque:*** ce minimum local en $(0,0)$ est-il global?
  - La théorie ne permet pas de répondre à cette question.
  - Il faut raisonner "à l'ancienne". Peut-on oui ou non trouver (x,y) tel que $f(x,y) < f(0,0) = 0$? Clairement oui, en prenant par exemple $y = 0$ et x suffisamment négatif, puisque
$$f(x,0) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{1}{4}x^3 < 0.$$
Par exemple,
$$f(-10,0) = -150 < f(0,0).$$
- Ainsi f présente un minimum local non global en $(0,0)$.

Deuxième exemple

Déterminer les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction
$$f : (x,y) \mapsto x^3 + (x-y)^2.$$

- La fonction f est de classe C^2 et le domaine $\mathbb{R}^2$ est ouvert; on peut donc envisager de mettre en pratique le protocole ci-dessus.
- On a
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 + 2(x-y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2(x-y) \end{aligned}$$
et la recherche des points critiques donne
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 + 2(x-y) &=& 0 \\ -2(x-y) &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 + 2(x-y) &=& 0 \\ 3x^2 &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0. \end{array} \right.$$
Ainsi, $(0,0)$ est le seul point critique de f.
- On calcule
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2$$
si bien que
$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Cette matrice a un déterminant nul et le théorème ci-dessus ne s'applique pas.
- ***Que faire en un point critique*** (x_0,y_0) ***où la matrice hessienne a un déterminant nul?*** Travailler "à l'ancienne" en étudiant le signe de
$$f(x,y) - f(x_0,y_0)$$
et chercher à voir si ce signe est constant sur *un certain* voisinage de (x_0,y_0) ou au contraire s'il change dans *tout* voisinage de (x_0,y_0).
- Ici, il s'agit donc d'étudier le signe de
$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= f(x,y) - 0 \\ &= x^3 + (x-y)^2. \end{aligned}$$
  - Notre intuition peut nous guider: la présence de x^3, qui change de signe dans tout voisinage de 0, nous incite à penser qu'il y a changement de signe au voisinage de $(0,0)$. Plus précisément, soit V un voisinage de $(0,0)$; alors:
    1. V contient des points (x,y) avec $x > 0$. En un tel point, on a $x^3 > 0$ et alors
    $$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + (x-y)^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$
    ce qui prouve que f n'est pas maximale en $(0,0)$.
    2. V contient des points (x,y) avec $x < 0$ et $y = x$. En un tel point, on a $x^3 < 0$ et $(x-y)^2 = 0$, d'où
    $$f(x,y) = x^3 < 0$$
    ce qui prouve que f n'est pas minimale en $(0,0)$.



- ***En conclusion,*** f ne présente pas d'extrémum local; le point $(0,0)$ est un point col de f.

Troisième exemple

Déterminer les extrémums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction
$$f : (x,y) \mapsto x^3 + x - y^2.$$

- La fonction f est de classe C^2 et le domaine $\mathbb{R}^2$ est ouvert; on peut donc envisager de mettre en pratique le protocole ci-dessus.
- On a
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2y. \end{aligned}$$
Ce système, vu sa première équation, ne possède aucune solution. Autrement dit, f ne possède pas de point critique sur $\mathbb{R}^2$ et ne présente donc pas d'extrémum local.

Quatrième exemple

Déterminer les extrémums locaux sur
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<1\}$$
de la fonction
$$f:(x,y)\mapsto \frac{1}{3}x^3-x^2+x+y^4.$$

- La fonction f est de classe C^2 et le domaine U, qui est ouvert; on peut donc envisager de mettre en pratique le protocole ci-dessus.
- On a
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x^2-2x+1=(x-1)^2\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y^3.\end{aligned}$$
Ce système admet l'unique solution $(1,0)$ mais ce point n'est pas un point de U.
- Ainsi, f ne possède pas de point critique sur U et ne présente donc pas d'extrémum local sur U.

3.3 Existence d'extrémums sur un domaine fermé borné; exemples de leur recherche

Le théorème suivant (admis) sera important tant en théorie qu'en pratique.

Théorème XVII.3.11 *Théorème des bornes atteintes.* Soit f une fonction définie et *continue* sur un domaine *fermé* et *borné* A de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles.

- Alors f présente un maximum et un minimum sur A i.e. il existe des points (x_0,y_0) et (x_1,y_1) de A tels que
$$\forall (x,y)\in A,\ f(x_1,y_1)\le f(x,y)\le f(x_0,y_0);$$
- Ainsi, f est minorée et majorée sur A et atteint ses bornes.

Remarques.

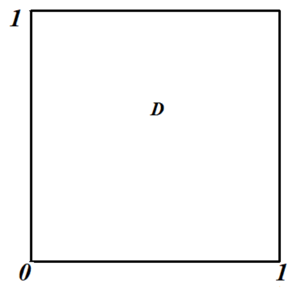
- Ce théorème prolonge tout à fait naturellement le théorème selon lequel toute fonction d'une variable définie et *continue* sur un *segment* est bornée et atteint ses bornes.
- Lorsque ce théorème sera employé, on citera absolument dans la rédaction les qualités : *continue, fermé, borné* car en l'absence de l'une de ces qualités, ce théorème tombe en défaut.
- Il existe bien entendu une version de ce théorème pour les fonctions de 3 variables.
- Pour plus de détails sur la notion de domaine fermé et borné, cf. "Topologie de $\mathbb{R}^n$" mais assez naturellement, un domaine défini par des inégalités larges est fermé.

Exemple

Justifier l'existence et déterminer les extrémums globaux de la fonction f définie par
$$f(x,y)=\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$
sur $D=[0,1]\times[0,1]$.

- La fonction f est continue sur le domaine D qui est fermé et borné ; elle présente donc un maximum et un minimum global sur ce domaine. Analysons par exemple la situation du maximum.
  - Soit il est situé à l'intérieur du domaine de D; comme cet intérieur est un domaine ouvert, ce maximum est un point critique de f d'après la théorie.
  - Soit il est situé sur la frontière de D, mais alors la théorie des points critiques n'a pas permis de le détecter puisque cette théorie ne s'y applique pas. Mais comme la valeur de f en ce point est supérieure à toute autre valeur prise sur le domaine D, cette valeur est en particulier supérieure à toute valeur prise sur la frontière de D; en d'autres termes, ce maximum est le maximum de f sur la frontière (c'est à dire en se limitant aux valeurs prises par f aux points de la frontière).

  Ainsi, les seuls candidats au titre de maximum de f sur D sont: le maximum de f sur la frontière de D et les points critiques situés à l'intérieur de D; il suffira de comparer les valeurs prises par f en ces points pour conclure. Méthode analogue pour déterminer le minimum.
- *Recherche du maximum de f parmi les points de la frontière.*
  - La frontière de D est constituée des points de la forme $(t,0)$, des points $(0,t)$, des points $(t,1)$ et des points $(1,t)$ avec dans les quatre cas $t\in[0,1]$.



  - On a
$$\begin{aligned}f(t,0)=f(0,t) &= \frac{t}{1+t^2}\\ f(t,1)=f(1,t) &= \frac{1+t}{2(1+t^2)}.\end{aligned}$$
  - Posons
$$\varphi(t)=\frac{t}{1+t^2}.$$
  Alors
$$\varphi'(t)=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$
  et puisque $t^2\le 1$ pour tout $t\in(0,1]$, on a $\varphi'(t)\ge 0$ pour tout $t\in[0,1]$. Ainsi, φ est croissante sur $[0,1]$ et alors
$$\min_{t\in[0,1]}\varphi(t)=\varphi(0)=0,\quad \max_{t\in[0,1]}\varphi(t)=\varphi(1)=\frac{1}{2}.$$
  - Posons $\psi(t)=\frac{1+t}{2(1+t^2)}$. On calcule
$$\psi'(t)=\frac{1-2t-t^2}{2(1+t^2)^2}.$$
  Le numérateur est un trinôme dont les racines sont $\sqrt{2}-1\in[0,1]$ et $-\sqrt{2}-1\notin[0,1]$. D'où les variations

t	0		$\sqrt{2}-1$		1
$\psi'(t)$		$+$	0	$-$	
ψ	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\psi\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Ainsi,

$$\min_{t\in[0,1]} \psi(t) = \psi(0) = \psi(1) = \frac{1}{2} \qquad \max_{t\in[0,1]} \psi(t) = \psi(\sqrt{2}-1) \approx 0,60.$$

– En notant γ la frontière de D, on a donc

$$\begin{aligned} \min_{\gamma} f = f(0,0) &= 0 \\ \max_{\gamma} f = f\left(\sqrt{2}-1,1\right) = f\left(1,\sqrt{2}-1\right) &\approx 0,60. \end{aligned}$$

- Ensuite, la fonction f est de classe C^1 sur l'intérieur de D et on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-2xy-x^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1-2xy-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2}$$

donc (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 1-2xy-x^2 &= 0 \\ 1-2xy-y^2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= x \\ 1-3x^2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

On trouve donc l'unique point critique $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et on calcule

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,65.$$

- ***Bilan.***
  – Comme on l'a vu plus haut dans l'analyse, f atteint son maximum sur D:
    * soit en un point où elle atteint son maximum sur sa frontière i.e. en $\left(\sqrt{2}-1,1\right)$ (ou $\left(1,\sqrt{2}-1,1\right)$,
    * soit en un point critique situé en son intérieur, donc nécessairement ici en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

  Puisque

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,65 > 0,60 \approx f\left(\sqrt{2}-1,1\right)$$

  le maximum de f sur D est atteint en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et vaut

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

  – De même, f atteint son minimum sur D:
    * soit en un point où elle atteint son minimum sur sa frontière i.e. en $(0,0)$,
    * soit en un point critique situé en son intérieur, donc nécessairement ici en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

  Puisque

$$f(0,0) = 0 < 0,65 \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

  le minimum de f sur D est atteint en $(0,0)$ et vaut

$$f(0,0) = 0.$$

  – *Remarques.*
    * Après avoir obtenu que le maximum était atteint en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, on aurait pu évidemment se douter (dans la mesure où f n'est clairement pas une fonction constante) que le minimum n'allait pas être atteint en ce même point! La comparaison entre $f(0,0)$ et $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ était donc superflue.
    * Ce minimum en $(0,0)$ était d'emblée visible puisqu'il est clair que

$$\forall (x,y) \in [0,1]\times[0,1],\ f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \geq 0$$

    et que

$$f(x,y) = 0 \iff x+y = 0 \iff x = y = 0.$$

  – Ainsi,

$$\min_D f = f(0,0) = 0, \quad \max_D f = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

4 Équations aux dérivées partielles

4.1 Principe de base

Une équation aux dérivées partielles du premier, resp. second ordre est une équation dont l'inconnue est une fonction f de plusieurs variables de classe C^1 sur un certain domaine U, resp. C^2 et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées partielles, comme

$$\forall (x,y) \in U, \quad y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

pour une équation du premier ordre et

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

pour une équation du deuxième ordre.

Le principe suivant est fondamental:

Proposition XVII.4.12 Toute équation aux dérivées partielles (E) du premier ordre ne faisant intervenir que la fonction f et une seule de ses dérivées partielles, disons $\frac{\partial f}{\partial x}$, se résout de la manière suivante:
- on fixe y et on considère $u : x \mapsto f(x,y)$, si bien que $u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$,
- l'équation (E) se transforme en une équation différentielle en u,
- on résout cette équation différentielle mais en remplaçant la constante par une fonction arbitraire de classe C^1 de la variable y.

Remarque. Bien entendu, les rôles de x et y sont interchangeables.

Exemple

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un domaine U telle que

$$(E): \quad \forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Alors il existe une fonction d'une seule variable φ de classe C^1 sur un intervalle convenable de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \varphi(y).$$

Preuve. On fixe y et on considère

$$u : x \mapsto f(x,y).$$

- Par définition même de la notion de dérivée partielle,

  $$u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

  si bien que f est solution de (E) si et seulement si

  $$u'(x) = 0,$$

  donc si et seulement s'il existe une constante C telle que $u(x) = C$.
- Revenant à f, la constante doit être remplacée par une fonction de classe C^1 arbitraire φ de la variable qui a été fixée, en l'occurrence y, d'où

  $$f(x,y) = \varphi(y).$$

  Remarque. Ce résultat est cohérent: il est clair que si $f(x,y) = \varphi(y)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$.

On retiendra ce résultat fondamental:

Théorème XVII.4.13 Si f est une fonction définie et de classe C^1 sur un domaine U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles et a une dérivée partielle nulle par rapport à une variable sur tout U, alors f est une fonction qui ne dépend que de l'autre variable.

Remarque. En réalité, ce résultat n'est vrai que sur une certaine catégorie de domaines[1] et on admettra que dans la pratique, on ne rencontrera que cette catégorie de domaines.

Autres exemples

- Soit l'équation aux dérivées partielles

  $$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - f(x,y) = 0,$$

  où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.
  - On fixe le réel y et on considère l'application

    $$u : x \mapsto f(x,y).$$

  - Par définition même de la notion de dérivée partielle,

    $$u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

  - La résolution de (E) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

    $$(F) \quad u'(x) - u(x) = 0$$

    dont les solutions sont les fonctions

    $$u(x) = Ce^x,\ C \in \mathbb{R}.$$

  - Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E) sont les fonctions

    $$f(x,y) = C(y)e^x$$

    où C est une fonction quelconque définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; la classe C^1 se justifie par le fait que les solutions de (E) sont des fonctions de classe C^1.

- Soit l'équation aux dérivées partielles

  $$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

  où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.
  - On fixe le réel x et on considère l'application

    $$u : y \mapsto f(x,y).$$

  - Par définition même de la notion de dérivée partielle,

    $$u'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

  - La résolution de (E) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

    $$(F) \quad u'(y) = 0$$

    dont les solutions sont les fonctions

    $$u(y) = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

  - Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E) sont les fonctions

    $$f(x,y) = C(x)$$

    où C est une fonction quelconque définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- Soit l'équation aux dérivées partielles

  $$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + xyf(x,y) = 0,$$

  où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.
  - On fixe le réel y et on considère l'application

    $$u : x \mapsto f(x,y).$$

  - Par définition même de la notion de dérivée partielle,

    $$u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

  - La résolution de (E) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

    $$(F) \quad u'(x) + xyu(x) = 0$$

    dont les solutions sont les fonctions

    $$u(x) = Ce^{-\int xy\,dx} = Ce^{-y\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}.$$

[1] De même, une fonction d'une seule variable dont la dérivée est nulle sur un domaine n'est pas nécessairement constante sur ce domaine! Par exemple, la fonction f définie sur le domaine $D =]0,1[\cup]2,3[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1[\\ 2 & \text{si } x \in]2,3[\end{cases}$$

vérifie $f'(x) = 0$ pour tout $x \in D$ mais f n'est pas constante sur D!

– Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E) sont les fonctions

$$f(x,y) = C(y)e^{-y\frac{x^2}{2}}$$

où C est une fonction quelconque définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + xyzf(x,y,z) = 0,$$

où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, à valeurs réelles.

– On fixe les réels x et z et on considère l'application

$$u : y \mapsto f(x,y,z).$$

– Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$u'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z).$$

– La résolution de (E) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F) \quad u'(y) + xyzu(y) = 0$$

dont les solutions sont les fonctions

$$u(y) = Ce^{-\int xyz\,dy} = Ce^{-xz\frac{y^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}.$$

– Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires des variables n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E) sont les fonctions

$$f(x,y,z) = C(x,z)e^{-xz\frac{y^2}{2}}$$

où C est une fonction quelconque définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

4.2 Extension aux équations du deuxième ordre

Certaines équations du deuxième ordre peuvent se ramener à ce principe:

- soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2f(x,y) = 0,$$

où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

– On fixe le réel y et on considère l'application

$$u : x \mapsto f(x,y)$$

– Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad u''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

et la résolution de (E) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F) \quad u''(x) - u'(x) - 2u(x) = 0$$

dont les solutions (obtenues par résolution de l'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ dont les racines sont -1 et 2) sont les fonctions

$$u(x) = Ce^{-x} + De^{2x},\ (C,D) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

– Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E) sont les fonctions

$$f(x,y) = C(y)e^{-x} + D(y)e^{2x}$$

où C et D sont des fonctions quelconques définies sur $\mathbb{R}$ et pour que f soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions C et D doivent être des fonctions définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

- Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = x,$$

où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

– On pose $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ si bien que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

et l'on est ramené à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(F) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = x.$$

– On fixe alors le réel y et on considère l'application

$$u : x \mapsto g(x,y)$$

– Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$u'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

et la résolution de (F) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F) \quad u'(x) = x$$

dont les solutions sont les fonctions

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

– Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (F) sont les fonctions

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y)$$

où C est une fonction quelconque définie, dont la classe sera définie ultérieurement. Ainsi, la résolution de (E) se ramène à la résolution de

$$(E') \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y).$$

– On fixe à nouveau le réel y et on considère l'application

$$v : x \mapsto f(x,y)$$

– Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$v'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

– La résolution de (E') se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F') \quad v'(x) = \frac{x^2}{2} + C(y)$$

dont les solutions sont les fonctions

$$v(x) = \frac{x^3}{6} + xC(y) + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

– Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E'), et donc de (E), sont les fonctions

$$f(x,y) = \frac{x^3}{6} + xC(y) + K(y)$$

où K est une fonction quelconque et pour que f soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions C et K doivent être des fonctions définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

- Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x,$$

où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

  – On pose $g = \frac{\partial f}{\partial y}$ si bien que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

  et l'on est ramené à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(F) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x.$$

  – On fixe alors le réel x et on considère l'application

$$u : y \mapsto g(x,y)$$

  – Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$u'(y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

  et la résolution de (F) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F) \quad u'(y) = x$$

  dont les solutions sont les fonctions

$$u(y) = xy + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

  – Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (F) sont les fonctions

$$g(x,y) = xy + C(x)$$

  où C est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la résolution de (E) se ramène à la résolution de

$$(E') \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy + C(x).$$

  – On fixe à nouveau le réel x et on considère l'application

$$v : y \mapsto f(x,y)$$

  – Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$v'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

  – La résolution de (E') se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F') \quad v'(y) = xy + C(x)$$

  dont les solutions sont les fonctions

$$v(y) = x\frac{y^2}{2} + yC(x) + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

  – Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E'), et donc de (E), sont les fonctions

$$f(x,y) = x\frac{y^2}{2} + yC(x) + K(x)$$

  où K est une fonction quelconque et pour que f soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions C et K doivent être des fonctions définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

- Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x,$$

où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

  – On pose $g = \frac{\partial f}{\partial y}$ si bien que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

  et l'on est ramené à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(F) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = x.$$

  – On fixe alors le réel y et on considère l'application

$$u : x \mapsto g(x,y)$$

  – Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$u'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

  et la résolution de (F) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F) \quad u'(x) = x$$

  dont les solutions sont les fonctions

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

  – Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (F) sont les fonctions

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y)$$

  où C est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la résolution de (E) se ramène à la résolution de

$$(E') \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{2} + C(y).$$

  – On fixe le réel x et on considère l'application

$$v : y \mapsto f(x,y)$$

  – Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$v'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

– La résolution de (E') se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F') \quad v'(y) = \frac{x^2}{2} + C(y)$$

dont les solutions sont les fonctions

$$v(y) = y\frac{x^2}{2} + J(y) + K,\ K \in \mathbb{R},$$

où J est une primitive de C sur $\mathbb{R}$.

– Puisque C est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$, J est également une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$.

– Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires de la variable n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E'), et donc de (E), sont les fonctions

$$f(x,y) = y\frac{x^2}{2} + J(y) + K(x)$$

où K est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$ et pour que f soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions J et K doivent être des fonctions définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

• Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = x^2 z,$$

où la fonction inconnue f est une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$, à valeurs réelles.

– On pose $g = \frac{\partial f}{\partial y}$ si bien que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

et l'on est ramené à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(F) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = x^2 z.$$

– On fixe alors les réels x et z et on considère l'application

$$u : y \mapsto g(x,y,z)$$

– Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$u'(y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)$$

et la résolution de (F) se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F) \quad u'(y) = x^2 z$$

dont les solutions sont les fonctions

$$u(y) = x^2 zy + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

– Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires des variables n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (F) sont les fonctions

$$g(x,y,z) = x^2 zy + C(x,z)$$

où C est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, la résolution de (E) se ramène à la résolution de

$$(E') \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 zy + C(x,z).$$

– On fixe à nouveau les réels x et z et on considère l'application

$$v : y \mapsto f(x,y,z)$$

– Par définition même de la notion de dérivée partielle,

$$v'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z).$$

– La résolution de (E') se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle

$$(F') \quad v'(y) = x^2 yz + C(x,z)$$

dont les solutions sont les fonctions

$$v(y) = x^2 z\frac{y^2}{2} + yC(x,z) + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

– Suivant le principe selon lequel les constantes doivent être remplacées par des fonctions arbitraires des variables n'intervenant pas dans la dérivée partielle, les solutions de (E'), et donc de (E), sont les fonctions

$$f(x,y) = x^2 z\frac{y^2}{2} + yC(x,z) + K(x,z)$$

où K est une fonction quelconque de deux variables et pour que f soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$, les fonctions C et K doivent être des fonctions définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

4.3 Autre situation: utilisation d'un changement de variables

On se laissera guider par l'énoncé: effectuer un changement de variable consiste à considérer une nouvelle fonction inconnue, définie à partir de la fonction inconnue de départ par l'intermédiaire d'une composition. Une nouvelle équation aux dérivées partielles est alors produite.

Proposition XVII.4.14 Soit (E) une équation aux dérivées partielles de fonction inconnue f.

• Effectuer le changement de variables

$$(u,v) = \psi(x,y),$$

c'est considérer la fonction F définie par la relation

$$f = F \circ \psi.$$

Le calcul des dérivées partielles de f en fonction de celles de F conduira à la transformation de l'équation (E) en une équation (E') d'inconnue F, que l'on résoudra et dont la forme des solutions conduira à la forme générale des solutions f de (E).

• Effectuer le changement de variables

$$(x,y) = \phi(u,v),$$

c'est considérer la fonction F définie par la relation

$$F = f \circ \phi.$$

Le calcul des dérivées partielles de F en fonction de celles de f conduira à la transformation de l'équation (E) en une équation (E') d'inconnue F, que l'on résoudra et dont la forme des solutions conduira à la forme générale des solutions f de (E).

Remarque. Le passage de f à F ou de F à f, dans les deux cas, nécessite des propriétés de bijectivité de ψ et de ϕ qui feront en général l'objet d'une étude spécifique.

Premier exemple

- Démontrer que l'application
$$\varphi : (x,y) \mapsto (x-y, x+y)$$
établit une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- Soit f une application définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose $F = f \circ \varphi^{-1}$.
  - Justifier que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ puis exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de F.
  - Démontrer que la fonction f, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, est solution de l'équation aux dérivées partielles
  $$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$
  si et seulement si la fonction F est solution d'une équation aux dérivées partielles (E') sur $\mathbb{R}^2$, que l'on résoudra. En déduire toutes les solutions de (E).

Réponse.

- Deux points de vue:
  - L'application φ établit une bijection de $\mathbb{R}^2$ dnas $\mathbb{R}^2$ dès lors que tout élément de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$ admet un unique antédant dans l'espace de départ $\mathbb{R}^2$. Or, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:
  $$(u,v) = \varphi(x,y) \iff \begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2}. \end{cases}$$
  Donc tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par φ, ce qui prouve que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et on a alors
  $$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$
  - L'application φ est clairement linéaire. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et dont le déterminant vaut 2. Il est non nul, ce qui caractérise les automorphismes i.e. φ est bien une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- Puisque φ^{-1} est définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et puisque f est définie sur $\mathbb{R}^2$,
$$F = f \circ \varphi^{-1}$$
est bien définie sur $\mathbb{R}^2$. L'expression obtenue pour φ^{-1} permet immédiatement d'affirmer que φ^{-1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$: en effet, chaque composante l'est en tant que somme de fonctions de classe C^1. Ainsi, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par théorème de composition des fonctions de classe C^1. Ensuite, on a $f = F \circ \varphi$ i.e.
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = F(x-y, x+y)$$
et on calcule par la formule de composition des dérivées partielles:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 1 \times \partial_1 F(x-y,x+y) + 1 \times \partial_2 F(x-y,x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -1 \times \partial_1 F(x-y,x+y) + 1 \times \partial_2 F(x-y,x+y). \end{aligned}$$
On peut aussi utiliser des notations plus traditionnelles: en notant $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ les dérivées partielles de F par rapport à la première et deuxième variable respectivement:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(x-y,x+y) + \frac{\partial F}{\partial v}(x-y,x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial F}{\partial u}(x-y,x+y) + \frac{\partial F}{\partial v}(x-y,x+y). \end{aligned}$$

$\frac{\partial F}{\partial u}$ est le nom d'une fonction, ce n'est pas une action à mener:
$$\frac{\partial F}{\partial u}(x-y,x+y)$$
ne signifie pas "dériver $F(x-y,x+y)$ par rapport à u"; c'est juste la valeur en un certain point d'une certaine fonction, en l'occurrence, c'est la valeur au point $(x-y,x+y)$ de la fonction $\frac{\partial F}{\partial u}$.
Par exemple,
$$F(u,v) = u^3 v^4 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 3u^2 v^4 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial u}(x-y,x+y) = 3 \times (x-y)^2 \times (x+y)^4.$$

- En effectuant la différence $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on voit donc que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2\frac{\partial F}{\partial u}(x-y,x+y) = 0$$
donc si et seulement si
$$(E') : \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0.$$
- Les solutions de (E') sont les fonctions qui ne dépendent que de la variable v: F est solution de (E') sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe une fonction G de la seule variable v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u,v) = G(v).$$
- On a donc
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x-y,x+y) = G(x+y).$$
Autrement dit, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f est de la forme
$$f(x,y) = G(x+y),$$
où $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque de classe C^1.
- Un exemple d'une telle solution est par exemple
$$f(x,y) = e^{(x+y)^2} - \sin(x+y),$$
en ayant pris $G : v \mapsto e^{v^2} - \sin v$.

Deuxième exemple

- Démontrer que l'application
$$\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$
établit une bijection de $D =]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $U =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ et que φ^{-1} est définie sur U par
$$\forall (x,y) \in U,\ \varphi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right).$$
Justifier que φ et φ^{-1} sont de classe C^1 sur leur domaine de définition.
- Soit f une application définie et de classe C^1 sur U. On pose
$$F = f \circ \varphi.$$
  - Justifier que F est définie et de classe C^1 sur D puis exprimer les dérivées partielles de F en fonction des dérivées partielles de f.

– Démontrer que la fonction f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x,y)\in U,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x$$

si et seulement si la fonction F est solution d'une équation aux dérivées partielles (E') sur D, que l'on résoudra. En déduire toutes les solutions de (E).

Réponse.

- Tout d'abord, φ est bien à valeurs dans U puisque pour tout $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

$$r>0,\quad \cos\theta>0$$

et donc $(r\cos\theta, r\sin\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Pour démontrer ensuite que φ établit une bijection de D dans U, il faut démontrer que tout élément $(x,y)\in U$ possède un unique antécédent (r,θ) par φ appartenant à D.
Soit donc $(x,y)\in U$; alors $(r,\theta)\in U$ est un antécédent de (x,y) par φ si et seulement si

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ r>0\\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

– *Analyse:* $L_1^2+L_2^2$ donne $r^2=x^2+y^2$ et puisque r doit être >0, on a nécéssairement

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ensuite, $\frac{L_2}{L_1}$ (qui est permis puisque recherchant $r>0$ et $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a $\cos\theta>0$ donne

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

et puisque $\tan$ établit une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ dont l'application réciproque est $\arctan$,

$$\theta=\arctan\frac{y}{x}.$$

Ainsi, si r et θ existent, alors nécessairement

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arctan\frac{y}{x}.$$

– *Synthèse:* posons

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arctan\frac{y}{x},$$

si bien que $r>0$ (car $x>0$) et $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (par définition de la fonction $\arctan$). Alors de

$$\begin{aligned}\tan^2\theta &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\ &=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\\ &=\frac{1}{\cos^2\theta}-1,\end{aligned}$$

on déduit

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

et puisque

$$\theta=\arctan\frac{y}{x}\implies \tan\theta=\frac{y}{x},$$

on a

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \frac{1}{1+\tan^2\theta}\\ &=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\\ &=\frac{x^2}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

et puisque $\cos\theta>0$ (car $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$) et $x>0$,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}}\\ &=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

et en conséquence

$$\begin{aligned}r\cos\theta &= \sqrt{x^2+y^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= x\end{aligned}$$

et de

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

i.e.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x},$$

on déduit

$$\begin{aligned}r\sin\theta &= r\times\cos\theta\times\frac{y}{x}\\ &= x\times\frac{y}{x}\\ &= y.\end{aligned}$$

– *En définitive,* pour tout $(x,y)\in U$,

$$\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x}\right)$$

est l'unique antécédent de (x,y) par φ appartenant à D. On a donc bien prouvé l'existence et l'unicité d'un couple $(r,\theta)\in D$ tel que $\varphi(r,\theta)=(x,y)$, ce qui prouve φ est une bijection de D sur U avec

$$\forall (x,y)\in U,\ \varphi^{-1}(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x}\right).$$

Ensuite, il est clair que

$$\varphi:(r,\theta)\longmapsto\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

est de classe C^1 sur D. Par ailleurs,

– la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$,

– la fonction $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est définie et de classe C^1 sur D *et à valeurs dans* $]0,+\infty[$ (du fait que $x>0$).

– Il résulte du théorème de composition des fonctions de classe C^1 que

$$(x,y)\mapsto\sqrt{x^+y^2}$$

est définie et de classe C^1 sur U.

Ensuite,

– la fonction $t\mapsto\arctan t$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,

– la fonction $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$ est définie et de classe C^1 sur D (du fait que $x>0$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

– Il résulte du théorème de composition des fonctions de classe C^1 que

$$(x,y) \mapsto \arctan \frac{y}{x}$$

est définie et de classe C^1 sur U.

De tous ces éléments, il résulte que

$$\varphi^{-1} : (x,y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right)$$

est de classe C^1 sur D.

- Puisque φ est définie sur D et puisque pour tout $(r,\theta) \in D$, $\varphi(r,\theta) \in U$, on en déduit que $F = f \circ \varphi$ est définie sur D. Ensuite, F est de classe C^1 sur D par théorème de composition des fonctions de classe C^1.

– Par la formule de composition des dérivées partielles, on calcule:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est le nom d'une fonction, ce n'est pas une action à mener:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ne signifie pas "dériver $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ par rapport à x"; c'est juste la valeur en un certain point d'une certaine fonction, en l'occurrence, c'est la valeur au point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$. Par exemple,

$$f(x,y) = x^3y^4 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^4 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3 \times (r\cos\theta)^2 \times (r\sin\theta)^4.$$

– D'après l'étude de φ, tout $(x,y) \in U$ s'écrit de manière

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

avec $(r,\theta) \in D$ et lorsque (x,y) décrit U, (r,θ) décrit D. En conséquence,

$$\begin{aligned}&\forall (x,y) \in U,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\\ \Longleftrightarrow\ &\forall (r,\theta) \in V,\ r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta\\ \Longleftrightarrow\ & r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta.\end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de (E) sur U si et seulement si $F = f\circ\varphi$ est solution de

$$(E') : \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta$$

sur D.

Soit θ fixé et $h : r \mapsto F(r,\theta)$, qui est une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ car F est de classe C^1 sur D; alors

$$\forall r \in]0,+\infty[\,,\ h'(r) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$$

ce qui se produit si et seulement s'il existe une fonction C d'une variable telle que

$$h(r) = r\cos\theta + C(\theta).$$

Ainsi, F est solution de (E') sur D si et seulement s'il existe une fonction $C : \theta \mapsto C(\theta)$ telle que

$$\forall (r,\theta) \in D,\ F(r,\theta) = r\cos\theta + C(\theta)$$

et il est clair que C doit être de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ pour que F soit de classe C^1 sur D.

Enfin, de

$$F = f\circ\varphi,$$

on déduit

$$f = F\circ\varphi^{-1},$$

et alors, puisque $r\cos\theta = x$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$:

$$\begin{aligned}f(x,y) &=\\ &= F(\varphi^{-1}(x,y))\end{aligned}$$

et en posant

$$\varphi^{-1}(x,y) = (r,\theta)$$

si bien que

$$r\cos\theta = x,\ \theta = \arctan\frac{y}{x},$$

on a

$$\begin{aligned}f(x,y) &=\\ &= F(\varphi^{-1}(x,y))\\ &= F(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ &= r\cos\theta + C(\theta)\\ &= x + C\left(\arctan\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

Une telle solution est par exemple

$$f(x,y) = x + e^{\arctan\frac{y}{x}}$$

en ayant pris $C : \theta \mapsto e^{\theta}$.

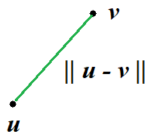
5 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Il sera toujours question dans ce paragraphe de fonctions de plusieurs variables (n variables avec $n \le 3$ dans la pratique), plus nécessairement à valeurs réelles mais à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (dans la pratique, $p \le 3$). Dans les définitions qui vont suivre, la lettre X désignera un point de $\mathbb{R}^n$ (et donc $X = (x,y)$ pour $n=2$ et $X = (x,y,z)$ pour $n=3$).

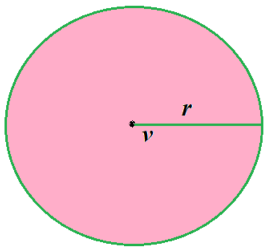
Pour bien comprendre la définition qui va suivre, il faut avoir présent à l'esprit la définition formelle de la continuité en un point x_0 d'une fonction f d'une variable définie sur un intervalle I: f est continue en x_0 lorsque $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0, c'est à dire lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel qu'en tout point x de I vérifiant $|x - x_0|$, on ait

$$|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, l'instrument de mesure de la distance entre points est la norme usuelle[2]: la distance entre le point u et le point v est la quantité $\|u-v\|$:



$$\|u-v\| \leq r \iff \text{ les points } u \text{ et } v \text{ se trouvent à moins de } r \text{ l'un de l'autre.}$$



La définition suivante est alors naturelle:

Définition XVII.5.9 Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et X_0 un point de U. On dit que f est continue au point x_0 lorsque $f(X)$ tend vers $f(X_0)$ quand X tend vers X_0, c'est à dire lorsque pour tout $\varepsilon 0$, il existe $\alpha > 0$ tel qu'en tout point X de U tel que

$$\|X-X_0\| \leq \alpha,$$

on ait

$$\|f(X)-f(X_0)\| \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur U lorsque f est continue en tout point X de U.

Le théorème suivant ramène la question de la continuité à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ à celle de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$:

Théorème XVII.5.15 Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$; on note $(f_1,\ldots,f_p)$ les coordonnées de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, c'est à dire

$$\forall X \in U,\ \ f(X) = (f_1(X),\ldots,f_p(X)).$$

Alors f est continue en X_0 (resp. sur U) si et seulement si $f_1,\ldots,f_p$ sont des applications (numériques) continues en X_0 (resp. sur U).

Démonstration 105

[2]Cette définition de la distance est tout à fait conforme à celle utilisée en géométrie usuelle du plan ou de l'espace: la distance AB du point A et point B est la longueur, c'est à dire la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

ce qui algébriquement consiste à calculer la norme du vecteur obtenu par différence entre les coordonnées de A et celles de B et donc $\|A-B\|$.

Tout aussi naturelle est cette définition :

Définition XVII.5.10 Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, dont on considère les fonctions coordonnées:

$$\forall X \in U,\ f(X) = (f_1(X), f_2(X),\ldots,f_p(X)).$$

On dit que f est de classe C^1 sur U si chacune des applications $f_1,\ldots,f_p$ est de classe C^1 sur U.

Pour tout $X \in U$, on note alors

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(X) &= (\partial_1 f_1(X), \partial_1 f_2(X),\ldots,\partial_1 f_p(X))\\
&\ \vdots\\
\partial_n f(X) &= (\partial_n f_1(X), \partial_n f_2(X),\ldots,\partial_n f_p(X)).
\end{aligned}$$

Exemple

La fonction

$$f : (x,y) \mapsto \left(\sin(xy^2), e^{x+y}, \frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

est de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, car pour chacune des fonctions

$$\begin{aligned}
f_1 : (x,y) &\longmapsto \sin(xy^2)\\
f_2 : (x,y) &\longmapsto e^{x+y}\\
f_3 : (x,y) &\longmapsto \frac{1}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

on peut citer les résultats généraux concernant la somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions de classe C^1 sur U et on a par exemple

$$\partial_2 f(x,y) = \left(2xy\cos(xy^2), e^{x+y}, -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Et enfin (contexte précédent) :

Définition XVII.5.11 On dit que f est de classe C^2 sur U si chacune des applications $f_1,\ldots,f_p$ est de classe C^2 sur U.

Pour tout $X \in U$, on note alors par exemple

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_1 f(X) &= (\partial_1\partial_1 f_1(X), \partial_1\partial_1 f_2(X),\ldots,\partial_1\partial_1 f_p(X))\\
&\ \vdots\\
\partial_1\partial_n f(X) &= (\partial_1\partial_n f_1(X), \partial_1\partial_n f_2(X),\ldots,\partial_1\partial_n f_p(X)).
\end{aligned}$$

6 Continuité et caractère C^1 des fonctions définies par une formule et une valeur en un point particulier

Les situations rencontrées dans ce paragraphe ne sont pas véritablement dans l'esprit du programme; on pourra donc le réserver à une seconde lecture.

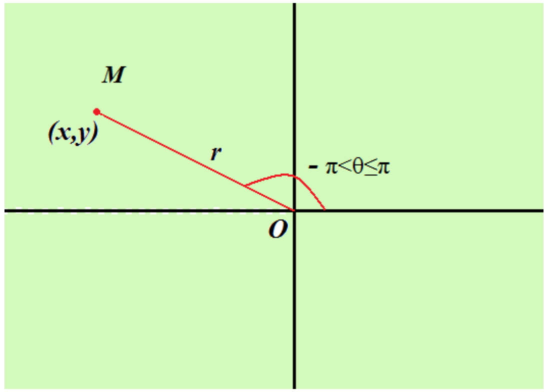
Rappel concernant les coordonnées polaires.

Pour tout point $M(x,y)$ du plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, il existe un couple (r,θ) de réels, appelé coordonnées polaires du point M tel que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r \geq 0,\ \theta \in [-\pi,\pi]\,.$$

On a

$$r = OM = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = (\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OM}}).$$



Preuve de la continuité en passant en coordonnées polaires

Pour prouver la continuité en $(0,0)$ d'une fonction f définie par morceaux, on peut chercher à démontrer que $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ tend vers $f(0,0)$ lorsque r tend vers 0. car de façon évidente, et c'est le tout l'intérêt:

$$(x,y) \longrightarrow (0,0) \iff r \longrightarrow 0$$

et on se ramène à un problème comportant une seule variable.

Exemple

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors f est continue en $(0,0)$:

- on considère des coordonées polaires (r,θ) d'un point $M(x,y)$. Alors pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$f(x,y) = \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} = r^2\cos^2\theta\sin^2\theta.$$
- On a donc
$$|f(x,y)| \leq r^2 = x^2+y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$
ce qui prouve par théorème d'encadrement que $f(x,y)$ tend vers $0 = f(0,0)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.
- Autrement dit, f est continue en $(0,0)$.

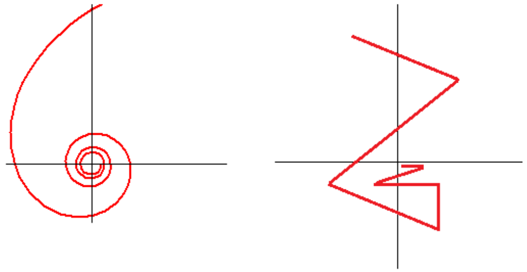
Preuve de la non continuité en passant en coordonnées polaires

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

- On considère des coordonées polaires (r,θ) d'un point $M(x,y)$. Alors pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$f(x,y) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta.$$
- Il faut bien comprendre le sens de:
$$(x,y) \longrightarrow (0,0) \iff r \longrightarrow 0.$$
Aucune contrainte n'est imposée à θ: θ qui, ne l'oublions pas, représente l'angle polaire i.e. l'angle entre l'axe des abscisses et le rayon $OM(x,y)$, peut prendre n'importe quelle valeur, tendre vers quelque chose, ne tendre vers rien du tout, ce qui est évident d'un point de vue géométrique: un point du plan qui tend vers l'origine peut le faire en tournoyant, en zigzagant ...



Bref, $\cos\theta\sin\theta$ ne possède pas de limite lorsque (x,y) tend vers 0.
- Ainsi, $f(x,y)$ ne possède pas de limite lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ et f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

Preuve de la non continuité en empruntant un chemin

- Pour prouver la non continuité en $(0,0)$ d'une fonction f définie par morceaux, on peut envisager de démontrer que $f(t,0)$ ou $f(0,t)$ ou $f(t,t)$... ne tend pas vers $f(0,0)$ lorsque t tend vers 0.

Mais cela ne fonctionne que pour prouver la non continuité; cela ne fonctionne pas pour prouver la continuité.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors f n'est pas continue en $a = (0,0)$:

– soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (t,t)$ qui est bien sûr continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $t_0 = 0$.

– Soit $h = f \circ g$; cette application est définie par

$$h(t) = \begin{cases} f(t,t) = \frac{t^2}{t^2+t^4} = \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ f(0,0) = 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

– Elle n'est pas continue en 0 puisque $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$ tend vers $1 \neq h(0)$ lorsque t tend vers 0.

– Donc f n'est pas continue en $(0,0)$ car si elle l'était, $h = f \circ g$ le serait aussi par composition de fonctions continues, ce qui n'est pas le cas.

Étude du caractère C^1 d'une fonction définie par morceaux

Exemple fondamental. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

- Il faut bien saisir que l'on ne peut pas invoquer les théorèmes généraux pour f, étant donnée la façon dont f est définie par morceaux.
- Il serait ridicule de dire "f est de classe C^1 en $(0,0)$ puisque la fonction $f : (x,y) \mapsto 0$ est de classe C^1". On ne juge pas de l'existence de dérivées partielles ou de la continuité d'une fonction en un point par la seule considération de la valeur qu'elle prend en ce point!
- Pour ce genre de fonctions, l'existence des dérivées partielles, leur continuité, devra toujours s'opérer en deux temps bien distincts:

  – En $(0,0)$ où aucun théorème général n'est appliquable et où il faudra se ramener à la définitoin même de dérivée partielle,

  – sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ où des théorèmes généraux peuvent être invoqués.

- Étudions donc l'existence d'une dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0,0)$. Il s'agit donc de considérer l'application $\phi_1 : x \mapsto f(x,0)$, qui est donc définie par

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \frac{x^4+0^4}{x^2+0^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\phi_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et d'en étudier sa dérivabilité en 0.

  – *Première méthode.* On constate que $\phi_1(x) = x^2$ pour tout x, même en $x = 0$. Il est alors clair que ϕ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\phi_1'(x) = 2x$; en particulier, ϕ_1 est dérivable en 0 et $\phi_1'(0) = 0$. Ceci prouve que $\partial_1 f$ existe en $(0,0)$ et

$$\partial_1 f(0,0) = 0.$$

  – *Deuxième méthode.* On ne constate rien du tout et on se ramène à la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point, par étude du taux d'accroissement. On a

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1(x) - \phi_1(0)}{x-0} &= \frac{x^2}{x} \\ &= x \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve par définition que ϕ_1 est dérivable en 0 et que $\phi_1'(0) = 0$, etc.

- Étudions l'existence d'une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en $(0,0)$. L'application $\phi_2 : y \mapsto f(0,y)$ est définie par

$$\phi_2(y) = \begin{cases} \frac{0^4+y^4}{0^2+y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\phi_2(y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}.$$

On prouve d'une manière ou d'une autre comme ci-dessus que ϕ_2 est dérivable en 0 avec $\phi_2'(0) = 0$. Ainsi, $\partial_2 f$ existe en $(0,0)$ et

$$\partial_2 f(0,0) = 0.$$

- Étudions à présent l'existence de dérivées partielles par rapport à la première et par rapport à la deuxième variable en tout point de $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

  Le domaine U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et la fonction

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

est clairement de classe C^1 sur U d'après les théorèmes généraux: somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas sur un domaine) de fonctions de classe C^1 est de classe C^1 sur ce domaine et on calcule aisément:

$$\forall (x,y) \in U,\ \partial_1 f(x,y) = 2\,\frac{x\left(x^4 + 2\,x^2y^2 - y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad \partial_2 f(x,y) = 2\,\frac{y\left(y^4 + 2\,y^2x^2 - x^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

- On a donc prouvé l'existence de dérivées partielles pour f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
- Reste à présent à étudier leur continuité. De ce qui précède, on a

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} 2\,\frac{x(x^4+2\,x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

  – On a déjà signalé le caractère C^1 de f sur U: inutile de revenir sur la continuité des dérivées partielles sur ce domaine.

  – Étudions la continuité de $\partial_1 f$ en $(0,0)$. Dans ce but, on va passer en coordonnées polaires.

  Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et alors

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 2\frac{r^5\cos\theta(\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta)}{r^4} \\ &= 2r\cos\theta(\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta - \sin^4\theta). \end{aligned}$$

  En utilisant le fait que $|\cos\theta| \leq 1$ et $|\sin\theta| \leq 1$ et donc

$$\left|\cos^4\theta\right| \leq 1,\ \left|\sin^4\theta\right| \leq 1,\ \left|\cos^2\theta\sin^2\theta\right| \leq 1$$

  (même si les valeurs absolues sont superflues dans ce cas ci) et l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned} \left|\cos^4\theta + 2\cos^2\sin^2\theta - \sin^4\theta\right| &\leq \left|\cos^4\theta\right| + \left|2\cos^2\theta\sin^2\theta\right| + \left|\sin^4\theta\right| \\ &\leq 1+2+1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

  et le fait que $|\cos\theta| \leq 1$, on voit que

$$|\partial_1 f(x,y)| \leq 2r(1+2+1) = 8r.$$

  Or on sait que

$$(x,y) \longrightarrow (0,0) \iff r \longrightarrow 0.$$

Il en résulte:
$$\partial_1 f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$
et comme $\partial_1 f(0,0) = 0$, on a donc prouvé
$$\partial_1 f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} \partial_1 f(0,0),$$
ce qui prouve que $\partial_1 f$ est continue en $(0,0)$.

– On prouverait exactement de la même manière ou même mieux: en invoquant les rôles symétriques joués par x et y dans la définition de $f(x,y)$ que $\partial_2 f$ est continue en $(0,0)$.

- *En conclusion:*
  1. f possède des dérivées partielles par rapport à la première et par rapport à la deuxième variable en tout point de $\mathbb{R}^2$
  2. les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (car on sait que f y est de classe C^1) et en $(0,0)$ donc sont continues sur tout $\mathbb{R}^2$.
  3. f est donc, par définition, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

7 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Ce paragraphe n'est pas essentiel: il a juste pour but de chercher à définir de façon quelque peu rigoureuse les notions de continuité, d'ensemble ouvert, fermé, borné, de frontière et de voisinage d'un point. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$, est muni de son produit scalaire canonique et d'un repère orthonormé dans lequel toutes les coordonnées seront données.

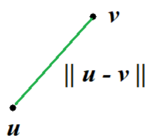
7.1 Continuité

Rappels concernant une fonction d'une variable. La valeur absolue est l'instrument de mesure de la distance entre points de l'axe réel:

$|u - v| \leq r \iff$ les points u et v se trouvent à moins de r l'un de l'autre.

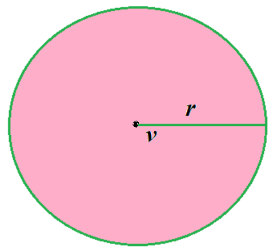
La fontion f est continue au point a lorsque $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a, c'est à dire lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, x \in D \text{ et } |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, l'instrument de mesure de la distance entre points est la norme usuelle[3]: la distance entre le point u et le point v est la quantité $\|u - v\|$:



[3] Cette définition de la distance est tout à fait conforme à celle utilisée en géométrie usuelle du plan ou de l'espace: la distance AB du point A et point B est la longueur, c'est à dire la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$
ce qui algébriquement consiste à calculer la norme du vecteur obtenu par différence entre les coordonnées de A et celles de B et donc $\|A - B\|$.

$\|u - v\| \leq r \iff$ les points u et v se trouvent à moins de r l'un de l'autre.



Définition XVII.7.12 Soit f une fonction définie sur un domaine U de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) et u un point de U.
On dit que f est continue au point u lorsque $f(v)$ tend vers $f(u)$ quand v tend vers u, c'est à dire lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, v \in U \text{ et } \|v - u\| \leq \alpha \implies |f(v) - f(u)| \leq \varepsilon$$
et donc pour une fonction de deux variables, f est continue en (x_0, y_0) lorsque
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \,/\, (x,y) \in U \text{ et } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \alpha \implies |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$$

7.2 Disques, boules, voisinage, intérieur

Disques, boules

Soit M un point du plan, resp. de l'espace, et $r > 0$. Le disque fermé, resp. boule fermée, de centre M et de rayon r est constitué des points N tels que $MN \leq r$, c'est à dire
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2,$$
resp. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$.

Par la suite, on dira "disque" et "boule" pour "disque fermé" et "boule fermée".

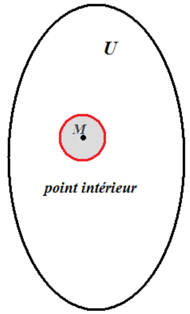
Voisinage

Soit M un point du plan, resp. de l'espace. Un voisinage de M est un disque[4], resp. une boule, centré(e) en M.

Point intérieur à un ensemble

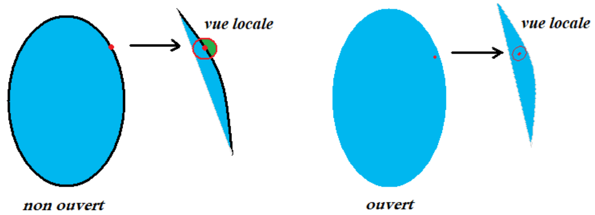
Un point M d'un ensemble D est dit *intérieur* à D s'il existe un voisinage de M entièrement inclus dans D.

[4] Ce n'est qu'une définition allégée. En réalité, un voisinage est une partie *contenant* un disque, resp. boule, centré(e) en M.



7.3 Ensembles ouverts

Un ensemble U est dit *ouvert* lorsque tout point de U est intérieur à U.

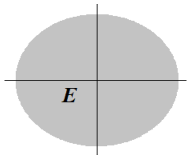


L'intérêt, en analyse, d'être en présence d'une fonction définie sur un *ouvert* U, c'est de disposer de la possibilité , en tout point donné M de U, de pouvoir tendre vers ce point dans toutes les directions[5], tout en restant dans U, possibilité qui est offerte dans une boule centrée en M.

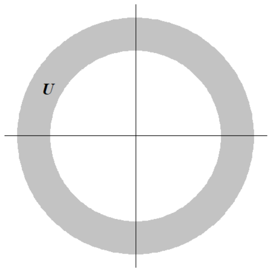
Exemples typiques d'ensembles ouverts. Le plan est muni d'une repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- Le demi-plan
$$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0\}$$
est un ensemble ouvert:
  - Soit M_0 un point de P et (x_0,y_0) ses coordonnées, si bien que $x_0>0$. Posons alors $r=\frac{1}{2}x_0$ (ou tout autre réel >0 mais $<x_0$) et soit Δ le disque centré en M_0 et de rayon r:
  $$\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq r^2.$$
  Démontrons que $\Delta\subset P$:
    * Soit $M(x,y)$ un point de Δ.
    * On a donc
    $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq r^2$$
    mais puisque
    $$(x-x_0)^2\leq(x-x_0)^2+(y-y_0)^2,$$
    on a
    $$(x-x_0)^2\leq r^2,$$
    c'est à dire
    $$|x-x_0|\leq r,$$
    c'est à dire encore
    $$-r\leq x-x_0\leq r.$$
    Ainsi,
    $$\begin{aligned} x-x_0 &\geq -r\\ \implies x &\geq x_0-r\\ \implies x &\geq x_0-\frac{1}{2}x_0\\ &\geq \frac{1}{2}x_0\\ &> 0, \end{aligned}$$
    ce qui démontre que $M\in P$.

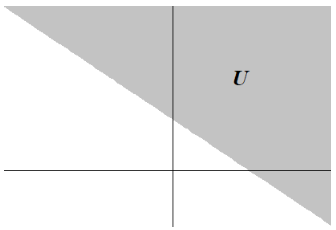
    Tout point de Δ est donc un point de P, ce qui est la preuve que $\Delta\subset P$.
  - On a donc prouvé que pour tout point M_0 de P, il existe un disque centré en ce point entièrement inclus dans P.
  - C'est la preuve que P est un ensemble ouvert.
- On admet plus généralement que tout ensemble défini par une ou plusieurs inégalités strictes est un ensemble ouvert. Ainsi:
- Le domaine
$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x^2+3y^2<1\}$$
(intérieur d'une ellipse) est un ensemble ouvert.



- La couronne circulaire U de centre O:
$$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{3}{4}<x^2+y^2<1\}$$
est un ensemble ouvert.



- Le demi-plan strict
$$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x+3y>1\}$$
est un ensemble ouvert.



[5]Par comparaison, cette possibilité n'est pas offerte au point 0 pour une fonction définie sur $[0,1]$: on a alors juste la possibilité de tendre vers 0 *à droite*.

- De façon évidente, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Et enfin on a le résultat suivant (admis):

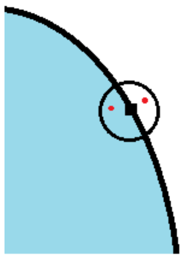
Proposition XVII.7.16 Soit f une fonction définie et continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. Alors les ensembles
$$\begin{aligned} U &= \{(x,y) \in D,\ f(x,y) > 0\} \\ V &= \{(x,y) \in D,\ f(x,y) < 0\} \end{aligned}$$
sont ouverts.

Remarque. On a un résultat analogue pour une fonction de trois variables.

Ainsi, l'ensemble
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^x - y^2 > 0\}$$
est ouvert, puisque la fonction
$$f : (x,y) \longmapsto e^x - y^2$$
est manifestement définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

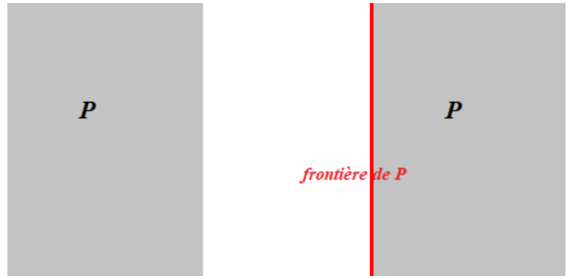
7.4 Frontière

Un point M appartient à la *frontière* d'un ensemble D lorsque tout voisinage de M contient au moins un point appartenant à D et au moins un point n'appartenant pas à D (i.e. un point du complémentaire de D).



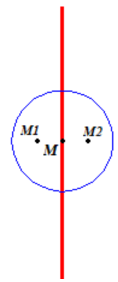
Exemples.

- La frontière du demi-plan
$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\},$$
(dit "ouvert") est
$$\gamma = \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$$
i.e. l'axe Oy.



En voici la preuve (par double inclusion):

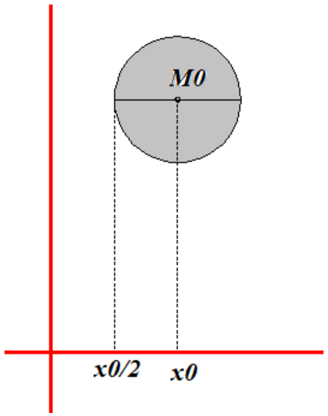
- Soit M_0 un point de γ et $(0, y_0)$ ses coordonnées; il s'agit de démontrer que tout voisinage de M_0 contient un point de P et point n'appartenant pas à P.
  - On considère donc un voisinage de M_0, c'est à dire un disque Δ de centre M_0 et de rayon $r > 0$.
  - Soit M_2 le point de coordonnées $(\frac{r}{2}, y_0)$. Puisque $\frac{r}{2} > 0$, le point $M_2 \in P$ et
$$\begin{aligned} M_0M_2 &= \left(\frac{r}{2} - 0\right)^2 + (y_0 - y_0)^2 \\ &= \frac{r^2}{4} \\ &\leq r^2, \end{aligned}$$
ce qui prouve que $M_2 \in \Delta$.
  - Soit M_1 le point de coordonnées $(-\frac{r}{2}, y_0)$. Puisque $-\frac{r}{2} > 0$, le point M_2 n'appartient pas à P et
$$\begin{aligned} M_0M_1 &= \left(-\frac{r}{2} - 0\right)^2 + (y_0 - y_0)^2 \\ &= \frac{r^2}{4} \\ &\leq r^2, \end{aligned}$$
ce qui prouve que $M_1 \in \Delta$.



  - Tout voisinage de M_0 contient un point de P et point n'appartenant pas à P, ce qui prouve que M_0 appartient à la frontière de P.
  - C'est la preuve que γ est inclus dans la frontière de P.
- Soit M_0 un point de la frontière de P: *tout* disque Δ centré en M_0 est donc censé posséder un point de P et un point n'appartenant pas à P. Démontrons alors que M_0 est un point de γ i.e., en notant (x_0, y_0) ses coordonnées, démontrons que $x_0 = 0$. Raisonnons par l'absurde: on va donc supposer $x_0 \neq 0$ et aboutir à une contradiction en produisant un disque Δ centré en M_0 et entièrement inclus dans P lorsque $x_0 > 0$ et alors la condition "Δ possède un point n'appartenant pas à P" tombe en défaut, et entièrement inclus dans le complémentaire de P lorsque $x_0 < 0$ et alors la condition "Δ possède un point appartenant à P" tombe en défaut.

∗ Supposons $x_0 > 0$. Posons alors $r = \frac{1}{2}x_0$ (ou tout autre réel > 0 mais $< x_0$) et soit Δ le disque centré en M_0 et de rayon r:

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2.$$



Démontrons que $\Delta \subset P$:

· Soit $M(x, y)$ un point de Δ.

· On a donc

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

mais puisque

$$(x - x_0)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

on a

$$(x - x_0)^2 \leq r^2,$$

c'est à dire

$$|x - x_0| \leq r,$$

c'est à dire encore

$$-r \leq x - x_0 \leq r.$$

Ainsi,

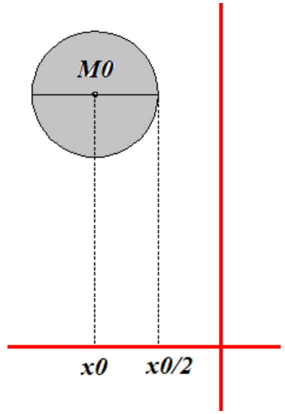
$$\begin{array}{rcl} x - x_0 & \geq & -r \\ \Longrightarrow x & \geq & x_0 - r \\ \Longrightarrow x & \geq & x_0 - \dfrac{1}{2}x_0 \\ & \geq & \dfrac{1}{2}x_0 \\ & > & 0, \end{array}$$

ce qui démontre que $M \in P$.

Tout point de Δ est donc un point de P, ce qui est la preuve que $\Delta \subset P$: il y a contradiction.

∗ Supposons $x_0 < 0$. Posons alors $r = -\frac{1}{2}x_0$ et soit Δ le disque centré en M_0 et de rayon r:

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2.$$



Démontrons qu'aucun point de Δ n'appartient à P:

· Soit $M(x, y)$ un point de Δ.

· On a donc

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

mais puisque

$$(x - x_0)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

on a

$$(x - x_0)^2 \leq r^2,$$

c'est à dire

$$|x - x_0| \leq r,$$

c'est à dire encore

$$-r \leq x - x_0 \leq r.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} x - x_0 & \leq & r \\ \Longrightarrow x & \leq & x_0 + r \\ \Longrightarrow x & \leq & x_0 - \dfrac{1}{2}x_0 \\ & \leq & -\dfrac{1}{2}x_0 \\ & < & 0, \end{array}$$

ce qui démontre que M n'appartient pas à P.

Aucun point de Δ n'est donc un point de P: il y a contradiction.

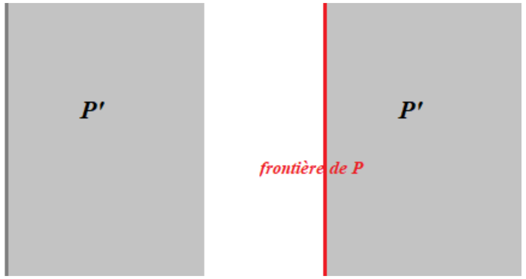
• La frontière du demi-plan

$$P' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0\},$$

(dit "fermé"), est

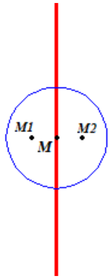
$$\gamma = \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$$

i.e. l'axe Oy.

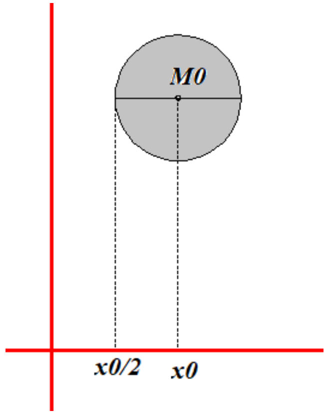


En voici la preuve (par double inclusion):

- Soit M_0 un point de γ et $(0, y_0)$ ses coordonnées; il s'agit de démontrer que tout voisinage de M_0 contient un point de P' et point n'appartenant pas à P'.
  * On considère donc un voisinage de M_0, c'est à dire un disque Δ de centre M_0 et de rayon $r > 0$.
  * Soit M_2 le point de coordonnées $(\frac{r}{2}, y_0)$. Puisque $\frac{r}{2} > 0$, le point $M_2 \in P'$ et
$$\begin{aligned} M_0M_2 &= \left(\frac{r}{2} - 0\right)^2 + (y_0 - y_0)^2 \\ &= \frac{r^2}{4} \\ &\leq r^2, \end{aligned}$$
ce qui prouve que $M_2 \in \Delta$.
  * Soit M_1 le point de coordonnées $(-\frac{r}{2}, y_0)$. Puisque $-\frac{r}{2} > 0$, le point M_2 n'appartient pas à P' et
$$\begin{aligned} M_0M_1 &= \left(-\frac{r}{2} - 0\right)^2 + (y_0 - y_0)^2 \\ &= \frac{r^2}{4} \\ &\leq r^2, \end{aligned}$$
ce qui prouve que $M_1 \in \Delta$.

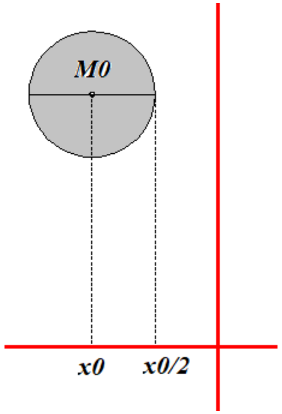


  * Tout voisinage de M_0 contient un point de P' et point n'appartenant pas à P', ce qui prouve que M_0 appartient à la frontière de P'.
  * C'est la preuve que γ est inclus dans la frontière de P'.
- Soit M_0 un point de la frontière de P': *tout* disque Δ centré en M_0 est donc censé posséder un point de P' et un point n'appartenant pas à P'. Démontrons alors que M_0 est un point de γ i.e., en notant (x_0, y_0) ses coordonnées, démontrons que $x_0 = 0$. Raisonnons par l'absurde: on va donc supposer $x_0 \neq 0$ et aboutir à une contradiction en produisant un disque Δ centré en M_0 et entièrement inclus dans P' lorsque $x_0 > 0$ et alors la condition "Δ possède un point n'appartenant pas à P'" tombe en défaut, et entièrement inclus dans le complémentaire de P' lorsque $x_0 < 0$ et alors la condition "Δ possède un point appartenant à P' -" tombe en défaut.
  * Supposons $x_0 > 0$. Posons alors $r = \frac{1}{2}x_0$ (ou tout autre réel > 0 mais $< x_0$) et soit Δ le disque centré en M_0 et de rayon r:
$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2.$$



Démontrons que $\Delta \subset P'$:
    · Soit $M(x, y)$ un point de Δ.
    · On a donc
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$
mais puisque
$$(x - x_0)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$
on a
$$(x - x_0)^2 \leq r^2,$$
c'est à dire
$$|x - x_0| \leq r,$$
c'est à dire encore
$$-r \leq x - x_0 \leq r.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} x - x_0 &\geq -r \\ \Longrightarrow x &\geq x_0 - r \\ \Longrightarrow x &\geq x_0 - \frac{1}{2}x_0 \\ &\geq \frac{1}{2}x_0 \\ &> 0, \end{aligned}$$
ce qui démontre que $M \in P'$.

Tout point de Δ est donc un point de P', ce qui est la preuve que $\Delta \subset P'$: il y a contradiction.
  * Supposons $x_0 < 0$. Posons alors $r = -\frac{1}{2}x_0$ et soit Δ le disque centré en M_0 et de rayon r:
$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2.$$



Démontrons qu'aucun point de Δ n'appartient à P':

· Soit $M(x,y)$ un point de Δ.

· On a donc

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq r^2$$

mais puisque

$$(x-x_0)^2 \leq (x-x_0)^2+(y-y_0)^2,$$

on a

$$(x-x_0)^2 \leq r^2,$$

c'est à dire

$$|x-x_0| \leq r,$$

c'est à dire encore

$$-r \leq x-x_0 \leq r.$$

Ainsi,

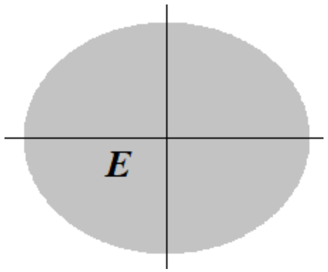
$$\begin{array}{rcl} x-x_0 & \leq & r \\ \Longrightarrow x & \leq & x_0+r \\ \Longrightarrow x & \leq & x_0-\dfrac{1}{2}x_0 \\ & \leq & -\dfrac{1}{2}x_0 \\ & < & 0, \end{array}$$

ce qui démontre que M n'appartient pas à P'.

Aucun point de Δ n'est donc un point de P': il y a contradiction.

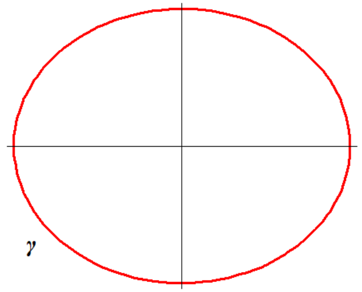
- ***Exemples importants de frontières.*** On admettra plus généralement que la frontière d'un ensemble défini par une ou plusieurs inégalités (larges ou strictes) est l'ensemble obtenu en remplaçant les inégalités par des égalités. Ainsi:
- La frontière du domaine

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x^2+3y^2 \leq 1\}$$



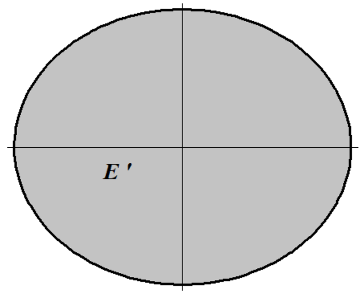
est l'ellipse

$$\gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x^2+3y^2=1\}$$



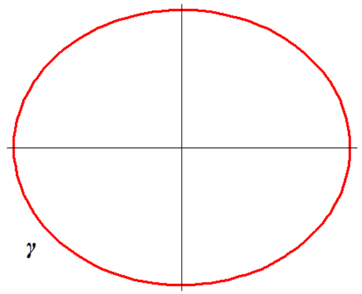
- La frontière du domaine

$$E'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x^2+3y^2<1\}$$



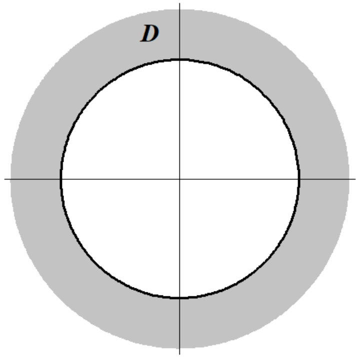
est donc aussi l'ellipse

$$\gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x^2+3y^2=1\}$$



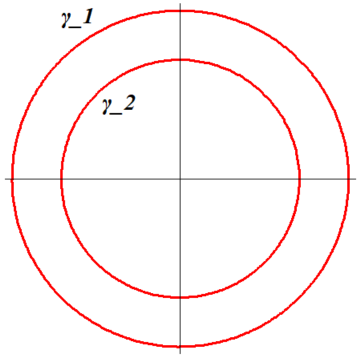
- La frontière de la couronne circulaire

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{3}{4} \leq x^2+y^2<1\}$$



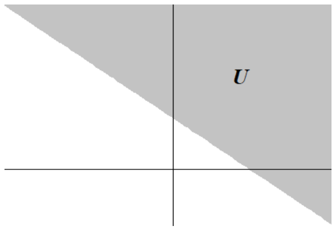
est la réunion $\gamma_1 \cup \gamma_2$ des cercles

$$\gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$$
$$\gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=\frac{3}{4}\right\}.$$



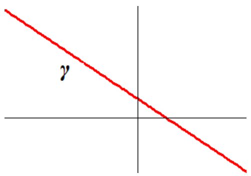
- La frontière du demi-plan

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+3y>1\}$$



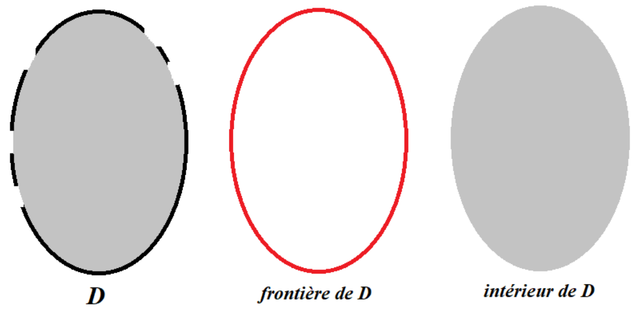
est la droite

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+3y=1\}$$



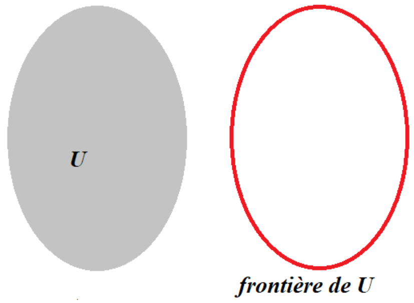
Intérieur d'un ensemble

C'est l'ensemble obtenu en lui retirant sa frontière.



Ensemble ouvert et frontière

Un ensemble est U est ouvert lorsqu'il ne contient aucun point de sa frontière, donc s'il coïncide avec son intérieur.



Exemple. Le demi-plan

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x>0\}$$

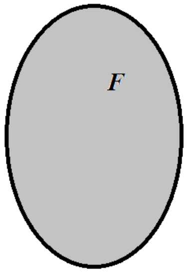
est ouvert car il a été établi que sa frontière est est

$$\gamma = \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\},$$

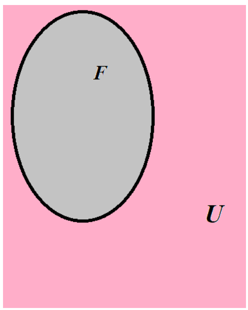
i.e. l'axe Oy, et on voit que P ne contient aucun point de sa frontière.

7.5 Ensembles fermés, points adhérents

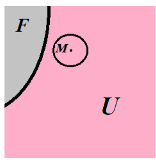
Un ensemble est F est dit *fermé* lorsqu'il contient sa frontière.



Un ensemble F est fermé lorsque son complémentaire U est un ensemble ouvert.

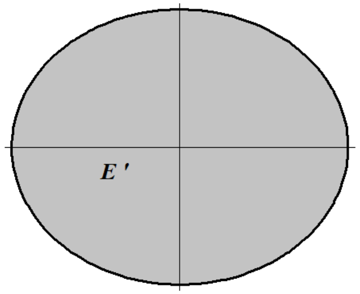


focus sur un point $M \in U$:

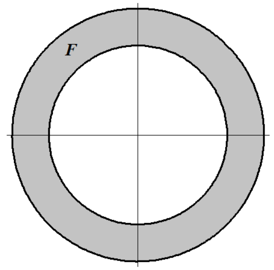


Exemples typiques d'ensembles fermés.

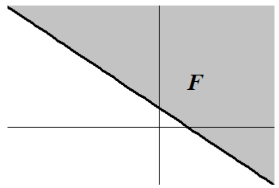
- Le demi-plan
$$P' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0\}$$
est un ensemble fermé. En effet, sa frontière est
$$\gamma = \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$$
(l'axe Oy), qui est manifestement contenue dans P'. Ou encore, parce que son complémentaire
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0\}$$
en tant qu'ensemble défini par une inégalité stricte, est un ensemble ouvert.
- On admet plus généralement que tout ensemble défini par une ou plusieurs inégalités larges est un ensemble fermé. Ainsi:
- Le domaine
$$E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$$
est un ensemble fermé.



- La couronne circulaire F de centre O:
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$
est un ensemble fermé.



- Le demi-plan
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y \geq 1\}$$
est un ensemble fermé.



- On conviendra que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est fermé (ce qui est logique: il contient sa frontière, qui est l'ensemble vide).

Et enfin on a le résultat suivant (admis):

Proposition XVII.7.17 Soit f une fonction définie et continue sur sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. Alors les ensembles suivants
$$\begin{aligned} F &= \{(x,y) \in D,\ f(x,y) = 0\} \\ G &= \{(x,y) \in D,\ f(x,y) \geq 0\} \\ H &= \{(x,y) \in D,\ f(x,y) \leq 0\} \end{aligned}$$
sont fermés.

Remarque. On a un résultat analogue pour une fonction de trois variables.

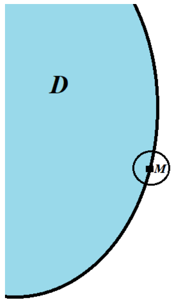
Ainsi, les ensembles
$$\begin{aligned} F &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^x - y^2 = 0\} \\ G &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^x - y^2 \geq 0\} \end{aligned}$$
sont fermés, puisque la fonction
$$f : (x,y) \longmapsto e^x - y^2$$
est manifestement définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

Point adhérent

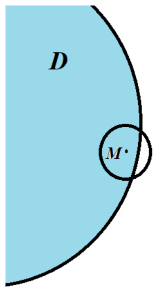
Un point M est dit *adhérent* à un ensemble D lorsque tout voisinage de M contient au moins un point de D.
Concrètement, cela signifie que l'on peut approcher, avec une précision arbitraire, le point M par un point de D et donc rigoureusement lorsque pour tout $\alpha > 0$, il existe un point N de D tel que

$$MN \leq \alpha.$$

C'est le cas, par définition, lorsque M est un point de la frontière de D:



ou lorsque M est un point de D, puisqu'alors tout voisinage de M contient déjà le point M, qui est un point de D:

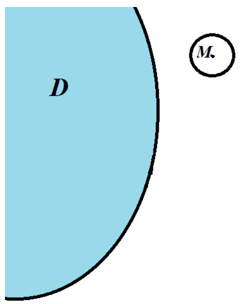


On peut alors naturellement parler de limite d'une fonction définie sur un domaine en un point adhérent à ce domaine:

> Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et M un point adhérent à D. On dit que f tend vers le réel ℓ au point M, ce que l'on écrit $\lim\limits_{N \to M} f(N) = \ell$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout point $N \in D$ tel que $MN \leq \alpha$, on a
> $$|f(N) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On notera la grande analogie avec la notion de limite d'une fonction d'une variable.

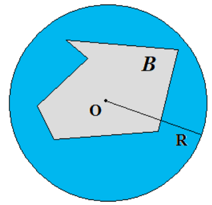
Un point M non adhérent à D est dit *extérieur* à D, ce qui se produit lorsqu'il existe un voisinage de M ne rencontrant aucun point de D:



Évidemment, le concept de limite en M d'une fonction définie sur D n'a aucun sens lorsque M n'est pas adhérent à D i.e. lorsque M est "loin" de D.

Ensemble borné

Un ensemble B du plan, resp. de l'espace, est borné lorsque B est inclus dans un disque, resp. une boule, centré(e) en O, donc s'il existe un réel M tel que $OM \leq R$ pour tout point M de B.



Exemple. L'ensemble

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 3x^2 + y^2 \leq 4\}$$

est borné. En effet, pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 & \leq & 3x^2 + y^4 \\ y^2 & \leq & 3x^2 + y^4 \end{array}$$

si bien que pour tout point $(x, y) \in F$

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 & \leq & 4 \Longrightarrow x^2 \leq \dfrac{4}{3} \\ y^2 & \leq & 4 \end{array}$$

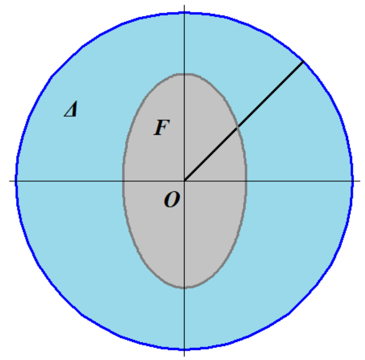
et en conséquence

$$x^2 + y^2 \leq \frac{4}{3} + 4,$$

ce qui démontre que tout point $(x, y) \in F$ appartient au disque Δ de centre O et de rayon

$$R = \sqrt{\frac{4}{3} + 4}$$

i.e. $F \subset \Delta$:



Chapitre XVIII

Courbes planes définies par une équation cartésienne; coniques (deuxième année)

Il sera question de courbes définies par une équation cartésienne et non une paramétrisation, telles les coniques (objet du paragraphe suivant):

- $3x^2 - 4xy + y^2 = 2$,
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, etc.

1 Tangente à une courbe plane définie par une équation cartésienne

On rencontre fréquemment des parties du plan définies par une équation:

- la droite d'équation cartésienne $x + 3y - 1 = 0$,
- le cercle de centre O et de rayon 1, défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

On notera que cette droite admet également la paramétrisation (en prenant $t = y$ comme paramètre):

$$t \longmapsto \begin{cases} 1 - 3t \\ t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

et le cercle admet la paramétrisation

$$t \longmapsto \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

On se donne un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. La définition suivante est naturelle (et pour ne pas alourdir cette définition, il est sous-entendu que "équation" et "coordonnées" signifient équation et coordonnées dans $\mathcal{R}$) :

Définition XVIII.1.1 Soit F une fonction définie sur une partie $U \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.

La courbe Γ d'équation

$$F(x, y) = 0$$

est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont $F(x, y) = 0$.

Remarque. Ce cours n'est pas orienté vers des considérations abstraites profondes : on admettra que l'on rencontrera toujours des "courbes" au sens intuitif du terme. À ce titre, on admet le résultat suivant :

Proposition XVIII.1.1 Soit F une fonction définie sur une partie $U \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles et de classe C^1 sur U et soit Γ la courbe d'équation

$$F(x, y) = 0$$

(que l'on suppose non vide). On considère un point $M(x_0, y_0)$ de Γ tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0) \neq \vec{0}.$$

Alors il existe un voisinage V de M tel que $\Gamma \cap V$ admette une paramétrisation

$$f : t \longmapsto (x(t), y(t))$$

où f est une fonction définie et de classe C^1 sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et le point M est alors un point régulier de cette courbe.

Le résultat suivant est alors fondamental:

Théorème XVIII.1.2 Soit $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit Γ la courbe d'équation

$$F(x, y) = 0$$

(que l'on suppose non vide). On considère un point $M(x_0, y_0)$ de Γ tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0) \neq \vec{0}.$$

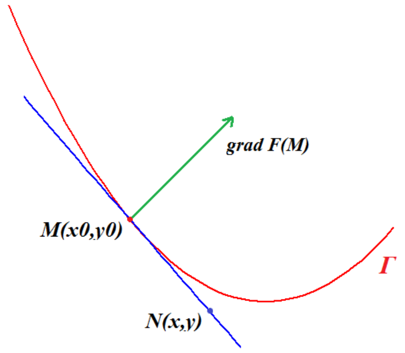
Alors:

- la tangente à Γ au point $M(x_0, y_0)$ est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0)$.
- Un point $N(x, y)$ appartient donc à cette tangente si et seulement si $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0)$ donc si et seulement si $\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0) \rangle = 0$.
- Une équation de la tangente à Γ en $M(x_0, y_0)$ est donc

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Démonstration 106

Remarque. Tous ces résultats sont résumés dans la figure suivante:



Exemple

Considérons la courbe Γ définie par l'équation cartésienne

$$x^2 + 3y^2 - 1 = 0$$

(on verra qu'il s'agit d'une ellipse) et l'un de ses points $M(x_0, y_0)$. Posons

$$F : (x, y) \mapsto x^2 + 3y^2 - 1.$$

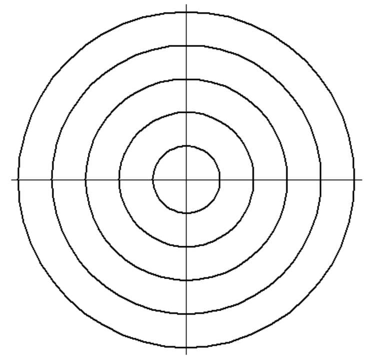
- Alors
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_0, y_0) = (2x_0, 6y_0) \neq (0, 0)$$
car ce vecteur ne s'annule que pour $x_0 = y_0 = 0$ mais $(0, 0)$ n'est pas un point de Γ.
- La tangente à Γ en $M(x_0, y_0)$ admet donc l'équation cartésienne
$$(x - x_0) \times 2x_0 + (y - y_0) \times 6y_0 = 0$$
et donc
$$2x_0 x + 6y_0 y - 2x_0^2 - 6y_0^2 = 0$$
et comme $x_0^2 + 3y_0^2 - 1 = 0$, on a
$$-2x_0^2 - 6y_0 = -2$$
si bien qu'une équation de la tangente à Γ en $M(x_0, y_0)$ est :
$$2x_0 x + 6y_0 y - 2 = 0$$
ou encore
$$x_0 x + 3y_0 y = 1.$$

2 Lignes de niveau

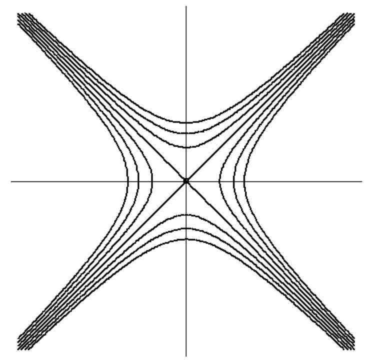
Définition XVIII.2.2 ***Lignes de niveau.*** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On appelle *ligne de niveau* λ de la fonction f l'ensemble des points (x, y) de U tels que $f(x, y) = \lambda$.

Exemples

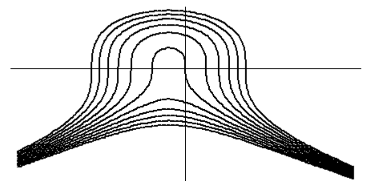
- Soit
$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$
La ligne de niveau $\lambda > 0$ de f est le cercle centré en O et de rayon $\sqrt{\lambda}$; les lignes de niveau de f sont donc des cercles concentriques (en ne prenant que des niveaux > 0):



- Soit
$$f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2.$$
La ligne de niveau $\lambda \neq 0$ est une hyperbole; la ligne de niveau 0 est définie par $x^2 = y^2$ i.e. $x = y$ ou $x = -y$: c'est la réunion de deux droites:



- Ci-dessous quelques lignes de niveau de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + x + y^3$.



Proposition XVIII.2.3 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
On considère un point $M(x_0, y_0)$ de U tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) \neq \vec{0}$, on pose $\lambda = f(x_0, y_0)$ et on note Γ_λ la ligne de niveau λ de f; ainsi, M appartient à Γ_λ.

- Alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)$ est orthogonal à Γ_λ au point M, c'est à dire à la tangente à Γ_λ au point M.
- De plus, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

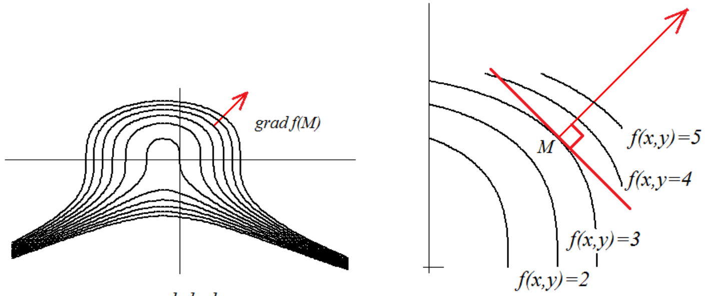
Démonstration 107

Exemple

On reprend la fonction

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + x + y^3.$$

- On a $f(1,1) = 3$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,1) = (3,3)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,1) = (3,3)$ est orienté vers les lignes de niveau 4 et 5.



vue globale *vue locale en M(1,1)*

3 Coniques: foyer, directrice et excentricité

3.1 Formules de changement d'origine, de changement d'axes

Le plan est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Théorème XVIII.3.4 ***Changement d'origine.*** Soit Ω un point du plan de coordonnées (a, b) dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_\Omega$ le repère $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Si M est un point du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, ses coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}_\Omega$ sont données par

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \end{cases}$$

En effet, dire que M a pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, c'est dire que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

et puisque par définition

$$\overrightarrow{O\Omega} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2,$$

on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M} &= \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM} \\ &= -\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OM} \\ &= -a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \\ &= (x-a)\vec{e}_1 + (y-b)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

et c'est pourquoi, par définition, le point a pour coordonnées

$$(x - a, y - b)$$

dans le repère $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Exemple

Dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe γ d'équation

$$-2x^2 - 3xy - y^2 + 2x + y + 2 = 0.$$

Déterminer une équation de γ dans le repère $\mathcal{R}_\Omega = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où Ω est le point de coordonnées $(-1, 2)$ dans $\mathcal{R}$.

- On pose
$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2, \end{cases}$$
formules donnant les coordonnés (x', y') dans $\mathcal{R}_\Omega$ d'un point M du plan dont les coordonnées sont (x, y) dans $\mathcal{R}$.
- On a alors
$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2, \end{cases}$$
si bien que
$$\begin{aligned} -2x^2 &= -2(x'-1)^2 \\ &= -2x'^2 + 4x' - 2 \\ -3xy &= -3(x'-1)(y'+2) \\ &= -3x'y' - 6x' + 3y' + 6 \\ -y^2 &= -(y'+2)^2 \\ &= -y'^2 - 4y' - 4 \\ 2x + y + 2 &= 2(x'-1) + y' - 2 + 2 \\ &= 2x' + y' - 2. \end{aligned}$$
- On a alors
$$\begin{aligned} -2x^2 - 3xy - y^2 + 2x + y + 2 &= -2x'^2 + 4x' - 2 - 3x'y' - 6x' + 3y' + 6 - y'^2 - 4y' - 4 + 2x' + y' - 2 \\ &= -2x'^2 - 3x'y' - y'^2 - 2 \end{aligned}$$
et en conséquence
$$-2x^2 - 3xy - y^2 + 2x + y + 2 = 0 \iff -2x'^2 - 3x'y' - y'^2 - 2 = 0.$$
- Ainsi, un point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ appartient à γ si et seulement si ses coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}_\Omega$ satisfont
$$-2x'^2 - 3x'y' - y'^2 - 2 = 0$$
et c'est pourquoi une équation de γ dans $\mathcal{R}_\Omega$ est
$$-2x'^2 - 3x'y' - y'^2 - 2 = 0.$$

Théorème XVIII.3.5 ***Changement d'axes.*** Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$, (a, b), (a', b') les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On note $P = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On considère le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$ et un point M du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$; alors les coordonnées (x', y') de M dans $\mathcal{R}'$ sont reliées à (x, y) par la formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Cas particuliers.

- Si le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé, alors le repère $\mathcal{R}'$ est orthonormé si et seulement si la matrice P est orthogonale.
- Si le plan est orienté et $\mathcal{R}$ est direct, alors $\mathcal{R}'$ est direct si et seulement si $\det(P) > 0$.

En effet, rappelons ce résultat d'algèbre linéaire :

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E, P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $\vec{w}$ un vecteur de E, X et X' les matrices colonnes de $\vec{w}$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$; alors

$$X' = P^{-1}X.$$

Posons $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$ si bien que par définition,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est sa matrice colonne dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Du rappel, on déduit que $P^{-1}X$ est sa matrice colonne dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$. En notant

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

on a donc par définition

$$\vec{w} = x'\vec{u} + y'\vec{v},$$

c'est à dire

$$\overrightarrow{OM} = x'\vec{u} + y'\vec{v},$$

si bien que (x', y') sont bien les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$.

Remarques.

- La détermination explicite de (x', y') en fonction de (x, y) nécessite donc la connaissance de P^{-1}:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Mais lorsque les repères en jeu sont orthonormés, on a alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{T} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3.2 Définition des coniques

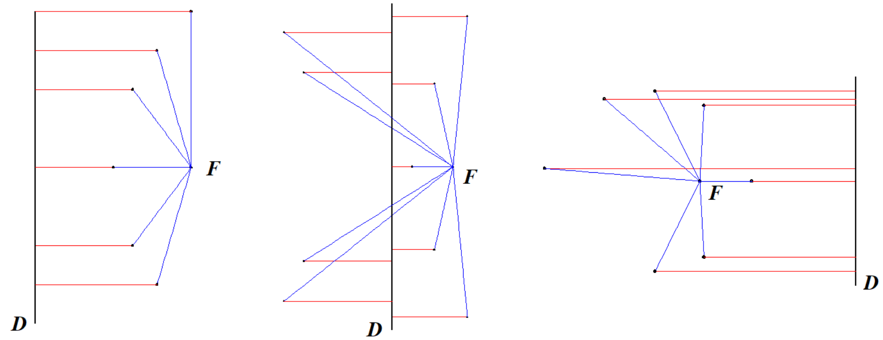
Le plan est muni de sa structure euclidienne habituelle.

Définition XVIII.3.3 On se donne un point F du plan, une droite D ne passant pas par F ainsi qu'un réel $e > 0$.

La conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e est l'ensemble γ des points M du plan tels que

$$MF = e \times d(M, D).$$

Ci-dessous, quelques points (matérialisés en noir) satisfaisant la contrainte $MF = ed(M, D)$ pour trois valeurs de e.



e = 1 *Les longueurs bleues sont égales aux longueurs rouges*

e = 2 *Les longueurs bleues sont les doubles des longueurs rouges*

e = 1/2 *Les longueurs bleues sont les moitiés des longueurs rouges*

3.3 Ellipses

Théorème XVIII.3.6 Si $e < 1$, la conique $\mathcal{C}$ de directrice D, de foyer F et d'excentricité e est appelée *ellipse*. Il existe alors un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et des réels $a > 0, b > 0$ tels que $\mathcal{C}$ ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

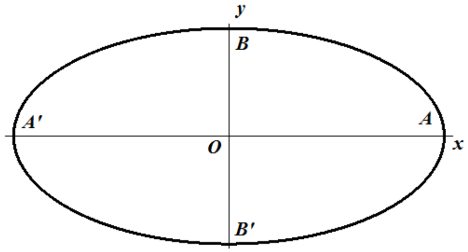
dans ce repère.

- C'est une courbe admettant Ox et Oy comme axes de symétrie et le point O comme centre de symétrie, appelé aussi *centre* de l'ellipse.
- Les points $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$ de γ sont appelés les sommets de l'ellipse.
- Si $a > b$, on dit que a est la longueur du demi grand axe et b la longueur du demi petit axe.
- La tangente à $\mathcal{C}$ en son point de coordonnées (x_0, y_0) a pour équation cartésienne

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

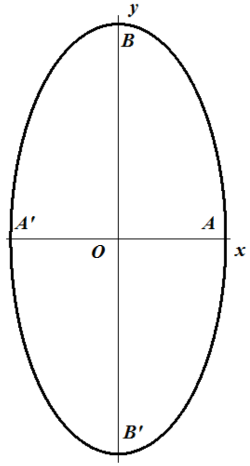
- Une paramétrisation de γ est

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi] \text{ (ou } t \in [0, 2\pi]).$$



$a > b$

grand axe porté par (Ox)



$a < b$

grand axe porté par (Oy)

Démonstration 108

Proposition XVIII.3.7 Soit deux réels a et b avec

$$a > b > 0$$

et, dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{E}$ la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posons

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Alors $\mathcal{E}$ est l'ellipse dont:

- la directrice D a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$,
- le foyer F a pour coordonnées $(c, 0)$,
- et dont l'excentricité est $e = \frac{c}{a}$.

Démonstration 109

Exemple

Soit γ la courbe d'équation

$$x^2 + 2y^2 = 3.$$

- C'est une ellipse de centre O, puisque

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 = 3 &\iff \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$

  avec

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

- Puisque l'on a $\sqrt{3} > \sqrt{\frac{3}{2}}$, le grand axe, de longueur $\sqrt{3}$ est porté par l'axe (Ox); le petit axe, de longueur $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est porté par l'axe (Oy).
- On calcule

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

  si bien que sa directrice D a pour équation

$$\begin{aligned} y &= \frac{a^2}{c} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

  son foyer F a pour coordonnées

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$$

  et son excentricité est

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

- Une paramétrisation de γ est

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \sqrt{3}\cos t \\ y(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

La proposition suivante est complètement évidente et se déduit de la proposition précédente en échangeant x et y:

Proposition XVIII.3.8 Dans un repère orthonormé , soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec

$$b > a > 0.$$

Posons

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Alors

- Sa directrice D a pour équation $y = \frac{b^2}{c}$.
- Son foyer F a pour coordonnées $(0, c)$.
- Son excentricité est $e = \frac{c}{b}$.

Exemple

Soit γ la courbe d'équation

$$5x^2 + 3y^2 = 4.$$

- C'est une ellipse de centre O, puisque

$$\begin{aligned} 5x^2 + 3y^2 = 4 &\iff \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{\frac{4}{5}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$

  avec

$$a = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad b = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

- Puisque l'on a $\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$, le grand axe, de longueur $\frac{2}{\sqrt{3}}$ est porté par l'axe (Oy); le petit axe, de longueur $\frac{2}{\sqrt{5}}$ est porté par l'axe (Ox).
- On calcule

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{b^2 - a^2} \\ &= \sqrt{\frac{8}{15}} \end{aligned}$$

  si bien que sa directrice D a pour équation

$$\begin{aligned} y &= \frac{b^2}{c} \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{3\sqrt{8}}, \end{aligned}$$

  son foyer F a pour coordonnées

$$\left(0, \sqrt{\frac{8}{15}}\right)$$

  et son excentricité est

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{b} \\ &= \sqrt{\frac{6}{15}}. \end{aligned}$$

- Une paramétrisation de γ est

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos t \\ y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

Remarque. Le cercle de centre O et de rayon $R > 0$, d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

peut être considéré comme un cas particulier d'ellipse, puisque

$$x^2 + y^2 = R^2 \iff \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Mais au sens strict du terme, ce n'est pas une conique, puisque

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{R^2 - R^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui n'est pas une valeur admissible pour une excentricité. À la rigueur, pour satisfaire l'égalité

$$MF = ed(M, D)$$

avec $e = 0$, on peut considérer une droite D située à l'infini . . .

3.4 Hyperboles

Théorème XVIII.3.9 Si $e > 1$, la conique $\mathcal{C}$ de directrice D, de foyer F et d'excentricité e est appelée *hyperbole*. Il existe alors un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et des réels $a > 0, b > 0$ tels que $\mathcal{C}$ ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dans ce repère.

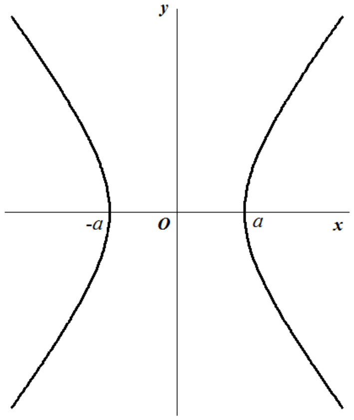
- C'est une courbe admettant Ox et Oy comme axes de symétrie et le point O comme centre de symétrie, appelé aussi *centre* de l'hyperbole.
- Les points de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ sont appelés les sommets de l'hyperbole.
- La courbe γ est constituée de deux branches symétriques par rapport à l'axe Oy; l'une est située dans le demi-plan d'équation $x \geq a$ et l'autre dans le demi-plan $x \leq -a$.
- La tangente à $\mathcal{C}$ en son point de coordonnées (x_0, y_0) a pour équation cartésienne

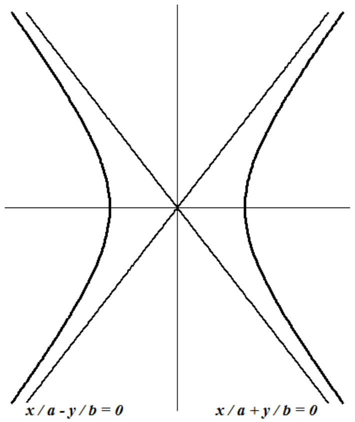
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- La branche de γ située dans le demi plan $x \geq a$ admet la paramétrisation

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = a \operatorname{ch} t \\ y(t) = b \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Les droites d'équation cartésienne $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ sont des asymptotes de γ.
- L'hyperbole est dite équilatère lorsque $b = a$; ses asymptotes sont alors les droites $y = x$ et $y = -x$ et elles sont orthogonales.





Démonstration 110

> **Proposition XVIII.3.10** Soit deux réels $a > 0$ et $b > 0$ et, dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation
> $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
> Posons
> $$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
> Alors $\mathcal{H}$ est l'hyperbole dont
> - la directrice D a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$,
> - le foyer F a pour coordonnées $(c, 0)$,
> - et dont l'excentricité est $e = \frac{c}{a}$.

Démonstration 111

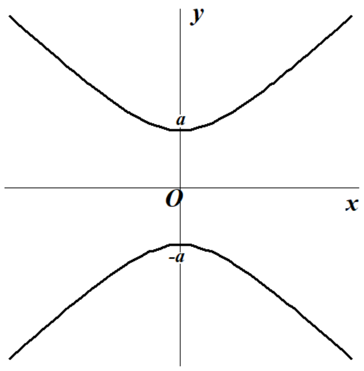
Exemple

Soit γ la courbe d'équation
$$4x^2 - 3y^2 = \frac{1}{3}.$$

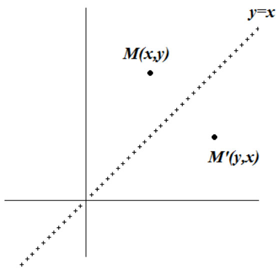
- C'est une hyperbole de centre O, puisque
$$\begin{aligned} 4x^2 - 3y^2 = \frac{1}{3} &\iff 12x^2 - 9y^2 = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{\frac{1}{12}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$
avec
$$a = \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad b = \frac{1}{3}.$$
- Puisque
$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{6}, \end{aligned}$$
son foyer est le point F de coordonnées
$$\left(\frac{\sqrt{7}}{6}, 0\right),$$
sa directrice D est la droite d'équation
$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2}{c} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{7}} \end{aligned}$$
et son excentricité est
$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= \sqrt{\frac{84}{6}}. \end{aligned}$$
- Ses asymptotes sont les droites d'équation
$$y = \frac{3}{\sqrt{12}} x, \qquad y = -\frac{3}{\sqrt{12}} x.$$
- Ses sommets sont les points de coordonnées
$$\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right) \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, 0\right).$$
- Une paramétrisation de la partie de γ située dans le demi-plan $x \geq 0$ est
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{12}} \operatorname{ch} t \\ y(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

> **Proposition XVIII.3.11** La conique γ d'équation
> $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
> est également une hyperbole.

En effet, elle se déduit de l'hyperbole
$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
par la symétrie par rapport à la droite Δ d'équation $x = y$ (dite "première bissectrice")



car rappelons que la transformation qui échange x et y i.e. l'application qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (y, x), est la symétrie par rapport à Δ:



Théorème XVIII.3.12 Dans un repère orthonormé, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dans un repère dont les axes sont portés par les asymptotes, une équation de γ est $XY = 1$.

- Une hyperbole équilatère admet donc l'équation $XY = 1$ dans un repère orthonormé
- et si une hyperbole est définie par l'équation $XY = 1$ dans un repère orthonormé, il s'agit d'une hyperbole équilatère.

Démonstration 112

3.5 Paraboles

Théorème XVIII.3.13 La conique $\mathcal{C}$ de directrice D, de foyer F et d'excentricité $e = 1$ est appelée *parabole*. Il existe alors un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et un réel $p \neq 0$ tels que $\mathcal{C}$ ait pour équation

$$y^2 = 2px$$

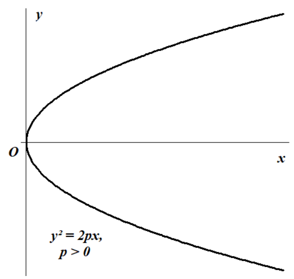
dans ce repère.

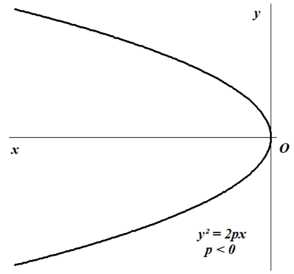
- C'est une courbe admettant Ox comme axe de symétrie, que l'on appelle axe de la parabole.
- Le point O est appelé sommet de la parabole et p son paramètre.
- La tangente à γ en son point (x_0, y_0) admet l'équation

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

- Elle possède la paramétrisation

$$t \mapsto \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \frac{1}{2p}t^2 \\ y(t) & = & t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$





Démonstration 113

Proposition XVIII.3.14 Soit $p \neq 0$ un réel et soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation

$$y^2 = 2px$$

dans un repère orthonormé. Alors $\mathcal{P}$ est la parabole dont

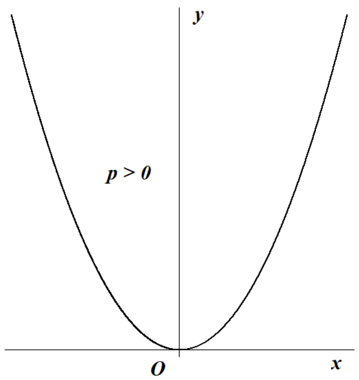
- la directrice D a pour équation $x = -\frac{p}{2}$,
- et dont le foyer F a pour coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$.

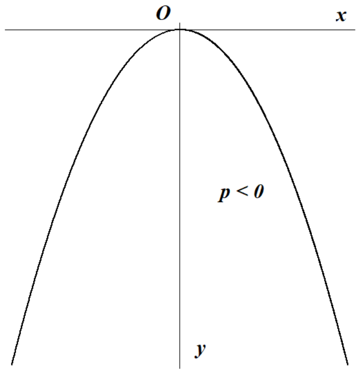
Démonstration 114

Remarque. De façon évidente, la conique d'équation

$$x^2 = 2py$$

est également une parabole:





4 Coniques: courbes définies par une équation du second degré

Le but de ce paragraphe est de démontrer que toute courbe du plan définie par une équation du second degré du type

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est une conique, éventuellement dégénérée (cf. plus bas). On pourra démontrer par exemple que:

- $2x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 2 = 0$ est une hyperbole,
- $2\,x^2 + xy - 4\,x - y + 2 = 0$ est la réunion de deux droites,
- $x - 4\,x^2 - 4\,xy - y^2 + 1 = 0$ est une parabole,
- $5\,x^2 + 4\,xy + y^2 - 3 = 0$ est une ellipse.

Ceci sera prouvé en utilisant l'importante technique de réduction qui consiste à effectuer un changement d'origine et/ou un changement d'axes.

4.1 Cas de "dégénérescence"

Avant de se lancer dans toute aventure de réduction, on prendra garde de ne pas passer à côté d'une situation triviale comme celles-ci:

- la conique γ d'équation
$$2x^2 + 3y^2 + 4 = 0$$
est vide puisque le membre de gauche est toujours > 0,
- la conique γ d'équation
$$3x^2 + 7y^2 = 0$$
est réduite au point O puisque seul $(0, 0)$ vérifie cette équation; en effet, si l'un des deux réels x, y est non nul, $3x^2 + 7y^2 > 0$,
- la conique γ d'équation
$$5x^2 = 0$$
est constituée de l'axe Oy puisque $M(x, y) \in \gamma \iff x^2 = 0 \iff x = 0$ avec aucune contrainte sur y,
- la conique γ d'équation
$$3x^2 = 1$$
est constituée de deux droites: la droite d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et la droite d'équation $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, puisque
$$M(x, y) \in \gamma \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
avec aucune contrainte sur y,
- la conique γ d'équation
$$xy = 0$$
est constituée de la réunion de l'axe Ox avec l'axe Oy,
- la conique γ d'équation
$$4x^2 - 3y^2 = 0$$
dont l'équation est équivalente à $4x^2 = 3y^2$, c'est à dire à
$$2x = \sqrt{3}y \text{ ou } 2x = -\sqrt{3}y,$$
est constituée de la réunion de deux droites: la droite d'équation $2x = \sqrt{3}y$ et la droite d'équation $2x = -\sqrt{3}y$.

4.2 Protocole d'obtention d'une équation réduite

Cette section est l'apogée de ce chapitre et est consacrée à la description de méthodes permettant de déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une courbe du plan définie par une équation du second degré du type

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (si l'on avait $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, l'étude serait triviale). Par la suite, on appellera $2bxy$ le *terme croisé* de l'équation. On travaillera toujours dans un repère orthonormé donné $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Le cas particulier ci-dessous est très important.

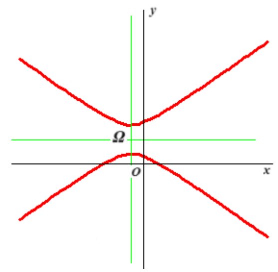
Protocole de mise sous forme réduite en l'absence de terme croisé. On considère la courbe γ d'équation cartésienne
$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

- Lorsque $a \neq 0$ et $c \neq 0$,
  - on écrit sous forme canonique $ax^2 + dx$ et $cy^2 + ey$:
$$\begin{aligned} ax^2 + dx &= a\left(x^2 + \frac{d}{a}x\right) \\ &= a\left(\left[x + \frac{d}{2a}\right]^2 - \frac{d^2}{4a^2}\right) \\ cy^2 + ey &= c\left(y^2 + \frac{e}{c}y\right) \\ &= c\left(\left[y + \frac{e}{2c}\right]^2 - \frac{e^2}{4c^2}\right) \end{aligned}$$
  - on écrit les formules de changement d'origine
$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + \frac{d}{2a} \\ y' = y + \frac{e}{2c} \end{array}\right.$$
    permettant de passer dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où Ω est le point de coordonnées $\left(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c}\right)$ et alors γ admet, après développement, une équation de la forme
$$ax'^2 + cy'^2 + f' = 0.$$
    On reconnaîtra alors une ellipse, une hyperbole ou un cas de dégénérescence.
- Lorsque $a = 0$ et $c \neq 0$,
  - on écrit sous forme canonique $cy^2 + ey$:
$$cy^2 + ey = c\left(\left[y + \frac{e}{2c}\right]^2 - \frac{e^2}{4c^2}\right)$$
  - on écrit les formules de changement d'origine
$$\left\{\begin{array}{l} x' = x \\ y' = y + \frac{e}{2c} \end{array}\right.$$
    permettant de passer dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où Ω est le point de coordonnées $(0, -\frac{e}{2c})$ et alors γ admet, après développement, une équation de la forme
$$dx' + cy'^2 + f' = 0.$$
  - Si $d \neq 0$, on écrit
$$dx' + f = d\left(x' + \frac{f}{d}\right)$$
    et dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où Ω est le point de coordonnées $\left(-\frac{d}{a}, 0\right)$, γ admet l'équation
$$dx'' + cy''^2 = 0$$
    et on reconnaît alors une parabole.
  - Lorsque $d = 0$, c'est un cas de dégénérescence.

Premier exemple

Reconnaître la nature de la courbe γ d'équation cartésienne
$$-x^2 - x + 2y^2 - 4y + 1 = 0$$
dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

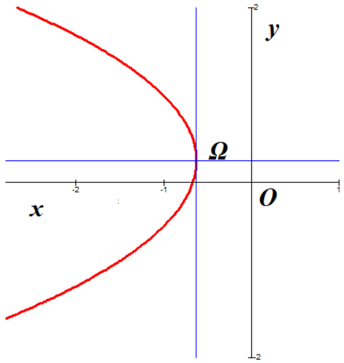
- On écrit
$$\begin{aligned} -x^2 - x &= -(x^2 + x) \\ &= -\left(\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$
  et
$$\begin{aligned} 2y^2 - 4y &= 2(y^2 - 2y) \\ &= 2\big([y-1]^2 - 1\big). \end{aligned}$$
- On considère le point Ω de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ dans $\mathcal{R}$ et le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Si M est un point du plan, si (x, y) sont ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$, alors
$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + \frac{1}{2} \\ y' = y - 1. \end{array}\right.$$
- Ainsi, un point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ appartient à γ si et seulement si ses coordonnées (x, y') dans $\mathcal{R}'$ satisfont
$$\begin{aligned} -x^2 - x + 2y^2 - 4y - 4 = 0 &\iff -\left(\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}\right) + 2\big([y-1]^2 - 1\big) + 1 = 0 \\ &\iff -\left(x'^2 - \frac{1}{4}\right) + 2\big(y'^2 - 1\big) + 1 = 0 \\ &\iff -x'^2 + \frac{1}{4} + 2y'^2 - 2 + 1 = 0 \\ &\iff -x'^2 + 2y'^2 = \frac{3}{4} \\ &\iff -\frac{x'^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{3}{8}} = 1 \\ &\iff -\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$
  où on a posé
$$a = \sqrt{\frac{3}{4}} \qquad b = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$
- Ainsi, une équation de γ dans $\mathcal{R}'$ est
$$-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$
  est une hyperbole centrée en Ω, d'axe de symétrie $(\Omega; \vec{\imath})$ et $(\Omega; \vec{\jmath})$ et dont l'allure, compte-tenu des signes des coefficients affectant x'^2 et y'^2 est la suivante:



Deuxième exemple

Démontrer que la courbe γ d'équation
$$2y^2 - y + 3x + 2 = 0$$
est une parabole. En préciser les caractéristiques.

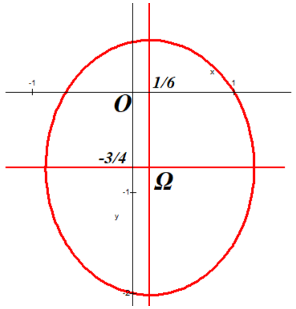
- On écrit
$$\begin{aligned} 2y^2 - y &= 2\left(y^2 - \frac{1}{2}y\right) \\ &= 2\left(\left[y - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{1}{16}\right) \\ &= 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned} 2y^2 - y + 3x + 2 &= 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + 3x - \frac{1}{8} + 2 \\ &= 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + 3x + \frac{15}{8} \\ &= 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(x + \frac{15}{24}\right). \end{aligned}$$
- On considère le point Ω de coordonnées $(-\frac{15}{24}, \frac{1}{4})$ dans $\mathcal{R}$ et le repère $\mathcal{R}' = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Si M est un point du plan, si (x, y) sont ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$, alors
$$\begin{cases} x' = x + \frac{15}{24} \\ y' = y - \frac{1}{4}. \end{cases}$$
- Ainsi, un point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ appartient à γ si et seulement si ses coordonnées (x, y') dans $\mathcal{R}'$ satisfont
$$2y'^2 + 3x' = 0,$$
c'est à dire
$$y'^2 = -\frac{3}{2}x'$$
qui est bien l'équation d'une parabole. Son axe est $(\Omega, \vec{\imath})$ et son sommet est le point Ω.



Troisième exemple

Déterminer la nature de la courbe γ d'équation
$$3x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$$
dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- On écrit
$$\begin{aligned} 3x^2 - x &= 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) \\ &= 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] \\ &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} \end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned} 2y^2 + 3y &= 2\left(y^2 + \frac{3}{2}y\right) \\ &= 2\left(\left[y + \frac{3}{4}\right]^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) \\ &= 2\left(\left[y + \frac{3}{4}\right]^2 - \frac{9}{16}\right) \\ &= 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}. \end{aligned}$$
- Ainsi,
$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 1 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{24}. \end{aligned}$$
- Soit Ω le point du plan de coordonnées $(\frac{1}{6}, -\frac{3}{4})$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Un point M du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ a alors pour coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}'$ avec
$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{6} \\ y' = y + \frac{3}{4} \end{cases}$$
et on voit donc que $M \in \gamma$ si et seulement si
$$3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{24} = 0$$
et donc si et seulement si
$$3x'^2 + 2y'^2 - \frac{5}{24} = 0,$$
qui est donc une équation de γ dans le repère $\mathcal{R}'$.
- Puisque
$$3x'^2 + 2y'^2 = \frac{5}{24} \iff \frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3\times 24}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2\times 24}}\right)^2} = 1,$$
on voit que γ est une ellipse, dont le centre est le centre du repère $\mathcal{R}'$, c'est à dire le point Ω. Puisque
$$\frac{5}{3 \times 24} < \frac{5}{2 \times 24},$$
son grand axe est l'axe des ordonnées du repère $\mathcal{R}'$, c'est à dire l'axe $(\Omega; \vec{\jmath})$.



Quatrième exemple

Déterminer la nature de la courbe γ d'équation

$$3x^2 + 2y^2 - x + 3y + 2 = 0$$

dans le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

L'équation est la même que la précédente, à la constante près. Avec évidemment les mêmes mises sous forme canonique et dans le même nouveau repère, le nouveau terme constant devient

$$-\frac{1}{12} - \frac{9}{8} + 2 = \frac{19}{24}$$

si bien que l'équation de γ dans $\mathcal{R}'$ est

$$3x'^2 + 2y'^2 + \frac{19}{24} = 0$$

et il est clair que l'on est dans un cas de dégénérescence: γ est vide.

Passons à présent au cas général, qui traite en particulier d'une équation avec terme croisé. Le théorème suivant est très important et sa démonstration l'est aussi car elle fournit un protocole qu'on utilisera très souvent:

Théorème XVIII.4.15 Soit a, b, c, d, e, f des réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. La courbe γ d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

est une conique, éventuellement dégénérée.

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

(dite associée à la partie quadratique de l'équation). Alors:

- si dét $M > 0$, γ est une ellipse
- si dét $M < 0$, γ est une hyperbole
- si dét $M = 0$, γ est une parabole,

(γ pouvant être dégénérée dans les trois cas) et en cas de non dégénérescence,

- si γ est une ellipse ou une hyperbole, ses axes de symétrie sont portés par les directions propres de M.
- si γ est une parabole, son axe de symétrie est porté par la direction propre associée à la valeur propre nulle de M.

Remarques.

- "Direction propre" est une autre façon de dire vecteur propre.
- La matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

a sur sa diagonale les coefficients affectant les termes au carré et pour les deux autres, la moitié du coefficient affectant le terme en xy, dit "terme croisé".

Démonstration. La première étape consiste à réduire la "partie quadratique"

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

de l'équation, réduction qui va consister à déterminer un repère dans lequel les "termes croisés".

- On pose $X = \binom{x}{y}$ et on a alors

$$\begin{aligned} X^T M X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2. \end{aligned}$$

- La matrice M étant symétrique à coefficients réels, M est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux (cf. théorème spectral).
- En notant λ_1, λ_2 les valeurs propres de M et $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée de vecteurs propres respectivement associés (on assimile des vecteurs colonnes qui, techniquement, sont écrits verticalement, à des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui, techniquement, sont écrits horizontalement), on a alors

$$D = P^T M P$$

(normalement, c'est $D = P^{-1}MP$ mais $P^{-1} = P^T$ puisque P est orthogonale) avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

P étant la matrice de passage de la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la base $\mathcal{B}_0$.

- Considérons le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; soit A un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$. En notant $X = \binom{x}{y}$ et $X' = \binom{x'}{y'}$, on a alors

$$X = PX'$$

d'après les formules de changement de base.

- D'autre part,

$$M = (P^T)^{-1} D P^{-1} = PD\,P^T$$

car P est orthogonale.

Pour toutes matrices A et B dont la taille est compatible avec le produit AB,

$$(AB)^T = B^T \times A^T.$$

On a donc

$$\begin{aligned} X^T M X &= (PX')^T M (PX') \\ &= X'^T \times P^T \times M \times P \times X' \\ &= X'^T \times D \times X'. \end{aligned}$$

- Or

$$\begin{aligned} X'^T D X' &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x' \\ \lambda_2 y' \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2. \end{aligned}$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned} X^T M X &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ X^T M X &= X'^T D X' \\ &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \end{aligned}$$

et c'est pourquoi

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

et c'est la fin de la première étape: la partie quadratique initiale s'exprime sans terme croisé.

La deuxième étape consiste à gérer la "partie affine"

$$dx + ey + f$$

de l'équation.

- On applique les formules de changement de base

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

pour transformer la partie linéaire $dx + ey$, ce qui donne une expression de la forme

$$Kx' + Ly'.$$

- Compte-tenu de la gestion des parties quadratique et affine, si A est un point de coordonnées (x, y) dans le repère initial et si (x', y') sont ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$, on a

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + Kx' + Ly' + f.$$

En conséquence,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \iff \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + Kx' + Ly' + f = 0$$

si bien que l'équation de γ dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + Kx' + Ly' + f = 0.$$

Nous sommes arrivés à ce stade à une équation du second degré sans terme croisé, ce qui nous ramène à utiliser le protocole du début de ce paragraphe, consacré à de telles équations.

- Lorsque $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, on a vu alors, avec des notations différentes, qu'il existe un repère $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dans lequel γ admet une équation de la forme

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \mu.$$

  - Si $\mu = 0$, on a un cas de dégénérescence (singleton ou réunion de deux droites suivant que λ_1 et λ_2 ont le même signe ou non).
  - Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ et si $\mu < 0$, alors γ est évidemment vide; on supposera donc $\mu > 0$ et on écrit l'équation de γ sous la forme

  $$\frac{\lambda_1}{\mu} x^2 + \frac{\lambda_2}{\mu} y^2 = 1.$$

  En posant $a = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_2}}$, l'équation de γ devient

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

  et c'est donc une ellipse.
  - Remarquons que les axes du repère dans lequel l'équation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est réduite sont ses axes de symétrie. Ici, ces axes sont dirigés par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, vecteurs propres de M.
  - Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ et si $\mu > 0$, alors γ est évidemment vide; en supposant $\mu < 0$ et en multipliant les deux membres de l'équation par -1, on se ramène à la situation ci-dessus.
  - Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ (ou si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$), on supposera $\mu > 0$ (la situation est totalement symétrique si $\mu < 0$ en échangeant x et y) et on écrit l'équation de γ sous la forme

  $$\frac{\lambda_1}{\mu} x^2 + \frac{\lambda_2}{\mu} y^2 = 1.$$

  En posant $a = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{-\mu}{\lambda_2}}$, on a $b^2 = -\frac{\mu}{\lambda^2}$ et l'équation de γ devient

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

  et c'est donc une hyperbole.
  - Là aussi, les vecteurs propres de M dirigent les axes de symétrie de γ.

- Lorsque $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, l'équation

$$\lambda_1 x'^2 + Kx' + Ly' + f = 0.$$

est, lorsque $L \neq 0$, celle d'une parabole, comme on l'a vu plus haut dans ce chapitre (en échangeant bien entendu x' et y') dont l'axe est l'axe des ordonnées, qui est dirigé par $\vec{e}_2$, vecteur propre associé à la valeur propre nulle.

  - Lorsque $L = 0$, c'est un cas de dégénérescence: par exemple

  $$4x'^2 - 20x' + 9 = (2x' - 5)^2 - 16$$

  si bien que

  $$\begin{aligned} 4x'^2 - 20x' + 9 = 0 &\iff (2x' - 5)^2 = 16 \\ &\iff 2x' - 5 = 4 \text{ ou } 2x' - 5 = -4 \\ &\iff x' = \frac{9}{2} \text{ ou } x' = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  et on voit que γ est la réunion des deux droites d'équations respectives

  $$x' = \frac{9}{2} \qquad x' = \frac{1}{2}$$

  alors que

  $$4x'^2 - 20x' + 26 = (2x' - 5)^2 + 1$$

  et en conséquence

  $$4x'^2 - 20x' + 26 = 0 \iff (2x' - 5)^2 = -1$$

  et on voit donc clairement que γ est vide; ou encore

  $$4x'^2 - 20x' + 25 = (2x' - 5)^2$$

  si bien que

  $$\begin{aligned} 4x'^2 - 20x' + 26 = 0 &\iff (2x' - 5)^2 = 0 \\ &\iff 2x' - 5 = 0 \\ &\iff x' = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

  et on voit que γ est une droite.

- Même discussion lorsque $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$.
- Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, c'est évidemment un cas de dégénérescence.

Et pour terminer, la synthèse.

- La nature de γ est donc donnée par les signes de λ_1 et λ_2, qui sont les valeurs propres de la matrice
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$
  - Son polynôme caractéristique est
$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2.$$
  - L'une de ses racines est nulle si et seulement si le produit des racines est nul.
  - Or le produit des racines de $P(\lambda)$ est $ac - b^2$ (la somme étant $a+c$).
  - Donc on a affaire a une parabole si et seulement si $ac - b^2 = 0$.
  - Deux nombres sont non nuls et de même signe si et seulement si leur produit est > 0. Donc les valeurs propres sont non nulles et de même signe si et seulement si $ac - b^2 > 0$: on a affaire à une ellipse dans ce cas.
  - Deux nombres sont non nuls et de signes opposés si et seulement si leur produit est < 0. Donc les valeurs propres sont non nulles et de signes opposés si et seulement si $ac - b^2 < 0$: on a affaire à une hyperbole dans ce cas.
  - Remarquons que $ac - b^2$ est précisément le déterminant de M, ce qui achève la démonstration du théorème.

La démarche développée ci-dessus de réduction doit être maîtrisée et est résumée ci-dessous:

- écriture de la matrice M,
- écriture de $ax^2 + 2bxy + cy^2$ sous la forme $X^T MX$,
- recherche d'une matrice diagonale D et d'une matrice orthogonale P telles que $P^T MP = D$ et donc d'un repère orthonormé porté par les vecteurs propres,
- transformation de $X^T MX$ en $X'^T DX'$ et donc en $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ puis de $dx + ey$ à l'aide des formules de changement de base.
- mises sous forme canonique, changement d'origine, conclusion.

Premier exemple

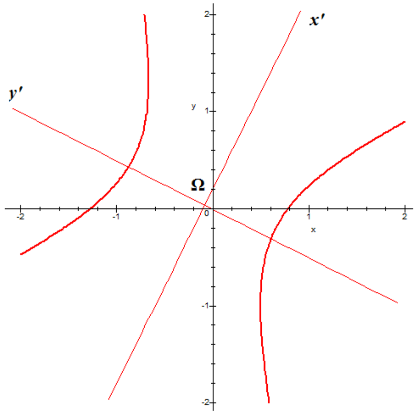
Déterminer la nature et les éléments de symétrie de la conique γ d'équation
$$2x^2 - y^2 - 4xy + x = 2.$$

Réponse.

- On considère la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
  En posant $X = \binom{x}{y}$, on a
$$\begin{aligned} X^T MX &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ -2x - y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 - 4xy - y^2. \end{aligned}$$
- Les valeurs propres de M sont -2 et 3 et les sous-espaces propres associés sont les droites dirigées respectivement par les vecteurs
$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$
  et
$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$$
  et on a
$$D = P^T MP$$
  avec
$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Soit A un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}' = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. En posant $X' = \binom{x'}{y'}$, on a $X = PX'$ d'après les formules de changement de base et alors (comme dans le cas général)
$$\begin{aligned} 2x^2 - 4xy - y^2 &= X^T MX \\ &= X'^T DX' \\ &= -2x'^2 + 3y'^2 \end{aligned}$$
  et comme $X = PX'$ donne
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \end{cases}$$
  si bien que l'équation de γ dans $\mathcal{R}'$ est
$$-2x'^2 + 3y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' = 2.$$
- On écrit ensuite
$$\begin{aligned} -2x'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}x' &= -2\left(x'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}x'\right) \\ &= -2\left(\left[x' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{1}{80}\right) \\ 3y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y' &= 3\left(y'^2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \\ &= 3\left(\left[y' + \frac{1}{3\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{1}{45}\right) \\ -2x'^2 + 3y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' &= -2\left[x' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right]^2 + \frac{1}{40} + 3\left[y' + \frac{1}{3\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{1}{15} \\ &= -2\left[x' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right]^2 + 3\left[y' + \frac{1}{3\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{1}{24} \end{aligned}$$
  donc l'équation de γ dans le repère $\mathcal{R}'$ est
$$-2\left[x' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right]^2 + 3\left[y' + \frac{1}{3\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{1}{24} = 2$$
  i.e.
$$-2\left[x' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right]^2 + 3\left[y' + \frac{1}{3\sqrt{5}}\right]^2 = \frac{49}{24}.$$
- Considérons le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{4\sqrt{5}}, -\frac{1}{3\sqrt{5}}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}'$. Alors l'équation de γ dans le repère $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \mathcal{B}')$ est
$$-2X^2 + 3Y^2 = \frac{49}{24}$$
  ou encore (après calculs)
$$\frac{Y^2}{\left(\frac{7}{4\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{X^2}{\left(\frac{7}{6\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

C'est une hyperbole, centrée en Ω dont les coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{12}\\ \frac{1}{30}\end{pmatrix}$$



et dont les axes de symétrie sont les axes de ce repère, qui sont dirigés par les vecteurs $\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et $\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$.

Deuxième exemple

Déterminer la nature et les éléments de symétrie de la conique γ d'équation

$$2x^2-y^2-4xy=2.$$

Remarque. La grande différence avec l'exemple précédent, c'est l'absence de partie affine dans l'équation de γ; il suffira donc de réduire $2x^2-y^2-4xy$: pas de deuxième étape.

- On considère la matrice

$$M=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

En posant $X=\binom{x}{y}$, on a

$$\begin{aligned}X^TMX &= \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x-2y\\ -2x-y\end{pmatrix}\\ &= 2x^2-4xy-y^2.\end{aligned}$$

- Les valeurs propres de M sont -2 et 3 et les sous-espaces propres associés sont les droites dirigées par les vecteurs $\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et $\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ respectivement et on a $D=P^TMP$ avec

$$D=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\quad P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

- Soit A un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (x',y') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'=(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. En posant $X'=\binom{x'}{y'}$, on a $X=PX'$ d'après les formules de changement de base et alors (comme dans le cas général)

$$\begin{aligned}2x^2-4xy-y^2 &= X^TMX\\ &= X'^TDX'\\ &= -2x'^2+3y'^2\end{aligned}$$

si bien qu'une équation de γ dans le repère $\mathcal{R}'$ est

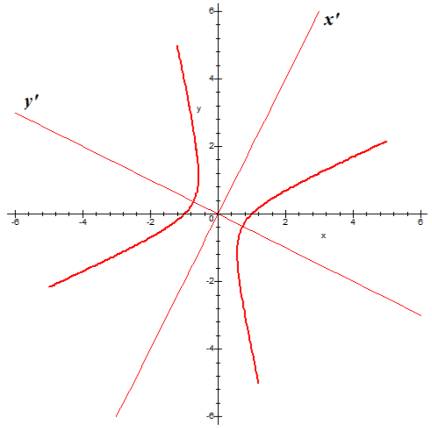
$$-2x'^2+3y'^2=2.$$

- En écrivant cette équation sous la forme

$$\frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}-x'^2=1,$$

on en déduit que γ est l'hyperbole centrée en O et d'axes de symétrie dirigés par les vecteurs

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\quad\text{et}\quad\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1).$$



Remarque importante. Dans certaines situations, un changement d'origine peut être indiqué dans le but de simplifier l'équation initiale. Par exemple :

on considère la conique γ d'équation cartésienne

$$3x^2+4xy-3x-2y-\frac{5}{4}=0$$

dans le repère $\mathcal{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et le point Ω de coordonnées cartésiennes $\left(\frac{1}{2},0\right)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer une équation cartésienne de γ dans le repère $\mathcal{R}'=(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Un point M du plan de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ a alors pour coordonnées (x',y') dans $\mathcal{R}'$ avec

$$\begin{cases}x'=x-\frac{1}{2}\\ y'=y\end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases}x=x+\frac{1}{2}\\ y=y'\end{cases}$$

si bien que

$$\begin{aligned}M\in\gamma &\iff 3x^2+4xy-3x-2y-\frac{5}{4}=0\\ &\iff 3\left(x'+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(x'+\frac{1}{2}\right)y'-3\left(x'+\frac{1}{2}\right)-2y'-\frac{5}{4}=0\\ &\iff 3\left(x'^2+x'+\frac{1}{4}\right)+4x'y'+2y'-3x'-\frac{3}{2}-2y'-\frac{5}{4}=0\\ &\iff 3x'^2+3x'+\frac{3}{4}+4x'y'+2y'-3x'-\frac{3}{2}-2y'-\frac{5}{4}=0\\ &\iff 3x'^2+4x'y'-2=0\end{aligned}$$

et c'est pourquoi

$$3x'^2 + 4x'y' - 2 = 0$$

est une équation de γ dans $\mathcal{R}'$.

Chapitre XIX

Surfaces (deuxième année)

1 Courbes de l'espace (courbes gauches)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et toutes les coordonnées seront données dans ce repère.

Définition XIX.1.1 ***Définition d'une courbe gauche.*** On se donne une application f à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ par

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t). \end{cases}$$

L'ensemble γ des points du plan de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ dans $\mathcal{R}$, t parcourant D est appelé une courbe paramétrée et on dit que f est un paramétrage de γ ou une représentation paramétrique de γ.

La définition et le vocabulaire suivants prolongent celles en vigueur concernant les courbes planes:

Définition XIX.1.2 ***Tangente à une courbe gauche.*** Un point $M(t_0)$ de γ de paramétrisation (I, f) est dit régulier si $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0,0,0)$.

- Alors γ possède une tangente au point $M(t_0)$.
- Cette tangente est alors dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.
- Une paramétrisation de cette tangente est donc donnée par

$$\lambda \mapsto \begin{cases} x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y(t_0) + \lambda y'(t_0) \\ z(t_0) + \lambda z'(t_0). \end{cases}$$

- La courbe γ est dite régulière lorsque tous ses points sont réguliers, donc lorsque $f'(t) \neq (0,0,0)$ pour tout $t \in D$.

Exemple

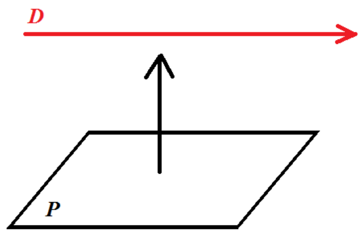
On considère la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^2 \\ z(t) &= -t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer ses points réguliers.
- Déterminer les points réguliers de γ en lesquels la tangente est parallèle au plan P d'équation $x + y + z = 0$.

Réponse.

- On a $f'(t) = (1, 2t, -3t^2)$, qui n'est jamais le vecteur nul. Tous les points de γ sont donc réguliers.
- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est dirigée par un vecteur qui est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.



Un vecteur directeur de la tangente à γ au point $M(t)$ est le vecteur $f'(t) = (1, 2t, -3t^2)$ et un vecteur normal au plan P est le vecteur $\vec{N} = (1,1,1)$. Ces vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\langle f'(t), \vec{N} \rangle = 0$, donc si et seulement si

$$1 + 2t - 3t^2 = 0.$$

- La résolution de cette équation donne $t = 1$ ou $t = -\frac{1}{3}$ et donc les points $M(1)$ et $M(-\frac{1}{3})$.
Autre point de vue: une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est dirigée par un vecteur qui est une combinaison linéaire de deux vecteurs formant une base de ce plan. On obtient une base de P ainsi:

$$\begin{aligned} \vec{u} = (x, y, z) \in P \quad &\iff \quad z = -x - y \iff \vec{u} = (x, y, -x-y) \\ &\iff \quad \vec{u} = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \end{aligned}$$

et on voit donc que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est une base de P.

- On doit donc rechercher les valeurs de t telles que $\det(f'(t), \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$; on a

$$\det(f'(t), \vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2t & -1 & 1 \\ -3t^2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2t+1 & -1 & 0 \\ -3t^2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3t^2 - 2t - 1$$

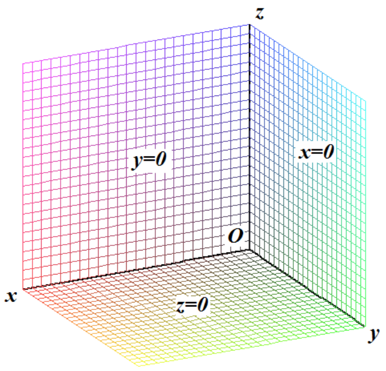
(on a effectué $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2$ puis développé suivant C_2). On retrouve évidemment les mêmes valeurs de t.

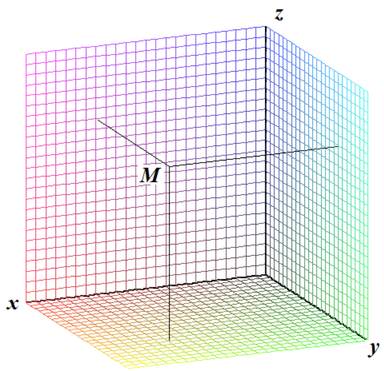
Projections planes d'une courbe gauche

On appelle *plans de coordonnées* les trois plans d'équations cartésiennes respectives

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Par exemple, le projeté d'un point $M(x, y, z)$ de l'espace sur le plan $z = 0$ est le point de coordonnées $(x, y, 0)$, etc.





Proposition XIX.1.1 ***Projetés d'une courbe sur les plans de coordonnées.*** Soit γ une courbe de l'espace de paramétrisation

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)).$$

Ses projetés sur les plans de coordonnées sont donc les courbes

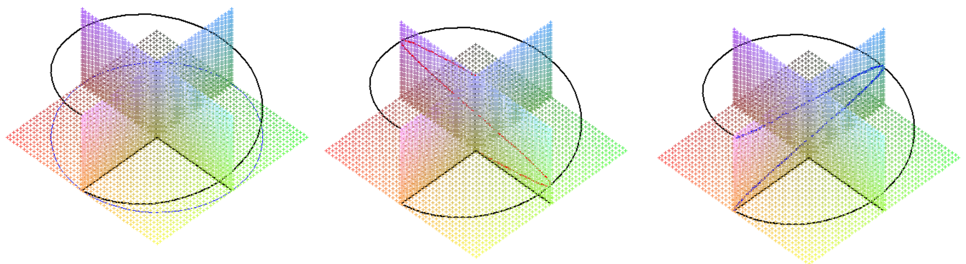
$$t \mapsto (x(t), y(t), 0), \quad t \mapsto (x(t), 0, z(t)), \quad t \mapsto (0, y(t), z(t)).$$

Exemple. Soit γ la courbe de paramétrisation

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$$

(en noir sur les figures ci-dessous) Ses projetés sur les plans de coordonnées sont donc:

- un cercle (bleu) sur le plan $z = 0$,
- une sinusoïde sur le plan $y = 0$ (rouge) et sur le plan $x = 0$ (bleu).



Planitude de certaines courbes gauches

Premier exemple

La courbe γ de paramétrisation

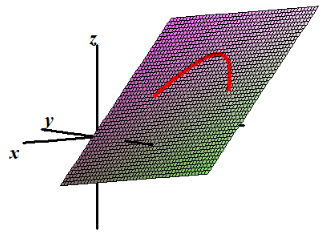
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 2\cos t + 1 \\ y(t) = 3 - t \\ z(t) = 2\cos t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

est plane, incluse dans le plan P d'équation cartésienne $x - z = 1$.

- En effet, pour tout réel t, les coordonnées du point de γ de paramètre t, qui sont

  $$(2\cos t, 3 - t, 2\cos t),$$

  satisfont l'équation de P.



Deuxième exemple

Soit la courbe γ de paramétrisation

$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = t - t^3 + 1 \\ y(t) = t + 2t^3 \\ z(t) = 2t - 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer quatre réels $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ ax(t) + by(t) + cz(t) = d.$$

En déduire que la courbe γ est plane.

- Il s'agit donc de déterminer quatre réels $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ tels que

  $$\forall t \in \mathbb{R},\ a(t - t^3) + b(t + 2t^3) + c(2t - 1) - d = 0$$
  $$\iff \forall t \in \mathbb{R}(-a + 2b)t^3 + (a + b + 2c)t - c - d = 0.$$

- On est donc ramené à exprimer la nullité d'un polynôme; on sait que ce phénomène se produit si et seulement si tous ses coefficients sont nuls donc si et seulement si

  $$\begin{cases} -a + 2b = 0 \\ a + b + 2c = 0 \\ -c - d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ c = -\frac{3}{2}b \\ d = \frac{3}{2}b. \end{cases}$$

- On obtient une infinité de solutions (toutes proportionnelles entre elles; ce qui est logique puisque l'on peut toujours multiplier une équation de plan par un scalaire). Une solution correspond par exemple au choix $b = 2$, ce qui donne

  $$a = 4, \quad c = -3, \quad d = 3$$

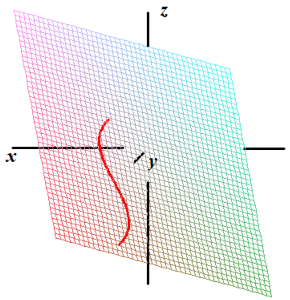
  si bien que

  $$\forall t \in \mathbb{R},\ 4x(t) + y(t) - 3z(t) = 3.$$

- Soit P le plan d'équation cartésienne

  $$4x + y - 3z = 3.$$

  Alors γ est contenue dans P, et donc plane, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées du point de paramètre t satisfont l'équation de P.



2 Changements de repère (rappels); rotation d'axe Oz

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

2.1 Changement d'origine

Soit Ω un point de coordonnées (a, b, c) dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_\Omega = (\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Si M est un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, ses coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}_\Omega$ sont données par

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - c. \end{cases}$$

2.2 Changement d'axes

Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de l'espace, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$; soit le repère $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ et de coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

2.3 Rotation d'axe Oz, Ox et Oy

Proposition XIX.2.2 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- L'image d'un point $M(x, y, z)$ par la rotation r_θ d'angle θ et d'axe $(O; \vec{k})$ et orienté par $\vec{k}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = R_\theta(\overrightarrow{OM})$, où

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  donc le point M' a pour coordonnées

$$(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z).$$

- L'image d'un point $M(x, y, z)$ par la rotation r_θ d'angle θ et d'axe $(O; \vec{\imath})$ et orienté par $\vec{\imath}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = R_\theta(\overrightarrow{OM})$, où

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  donc le point M' a pour coordonnées

$$(x, y\cos\theta - z\sin\theta, y\sin\theta + z\cos\theta).$$

- L'image d'un point $M(x, y, z)$ par la rotation r_θ d'angle θ et d'axe $(O; \vec{\jmath})$ et orienté par $\vec{\jmath}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = R_\theta(\overrightarrow{OM})$, où

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  donc le point M' a pour coordonnées

$$(x\cos\theta - z\sin\theta, y, x\sin\theta + z\cos\theta).$$

3 Surfaces paramétrées

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et toutes les coordonnées seront données dans ce repère.

Définition XIX.3.3 Étant donnée une application f à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ par

$$f(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big),$$

l'ensemble S des points de l'espace de coordonnées $\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ dans $\mathcal{R}$, (u, v) parcourant D, est appelé surface de paramétrisation (D, f). Le point de S de paramètres (u, v) est parfois noté "point $M(u, v)$".

Remarque. La donnée d'une paramétrisation de surface, c'est la donnée d'une application qui permet d'engendrer les coordonnées de tous les points de cette surface; c'est donc se donner la possibilité de construire "point par point" cette surface, comme on le fait pour une courbe paramétrée: une étude de la courbe plus quelques points permettent d'en obtenir le tracé avec précision. Le dessin en 3D et le fait qu'il y ait deux paramètres en jeu rendent la tâche de représentation point par point beaucoup plus complexe, et pour cette raison jamais abordée pour une surface paramétrée; la représentation, lorsque celle-ci sera abordée, le sera plutôt par des considérations géométriques (comme les surfaces de révolution et les surfaces réglées abordées plus loin dans ce chapitre).

Le tracé s'obtient en principe en traçant tous les points de coordonnées $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, (u,v) parcourant D, ce que l'on peut faire a priori ainsi:

- on fixe une valeur de v et on trace tous les points $u \mapsto f(u,v)$ (et on trace donc une courbe de l'espace)
- et on répète ce processus pour toutes les valeurs de v.
- Ou inversement, on fixe une valeur de u et on trace tous les points $v \mapsto f(u,v)$ (et on trace donc une courbe de l'espace)
- et on répète ce processus pour toutes les valeurs de u.

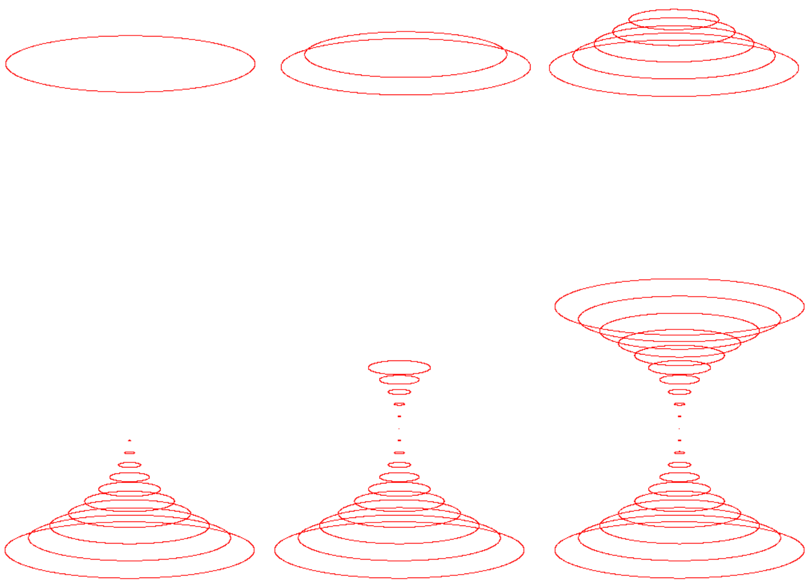
Exemple

Soit S la surface de paramétrisation

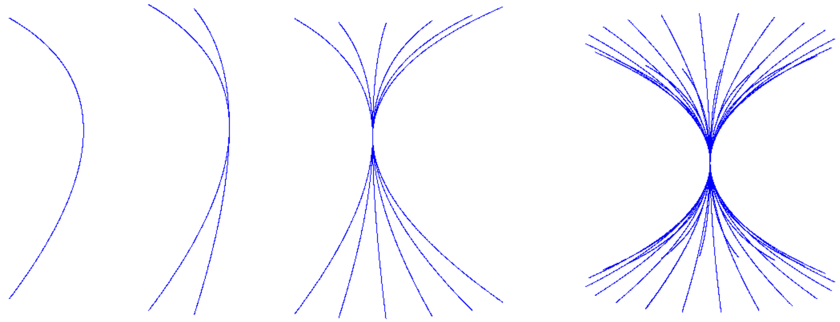
$$f : (u,v) \mapsto \begin{cases} x(u,v) &= v^2 \cos u \\ y(u,v) &= v^2 \sin u \\ z(u,v) &= v \end{cases}$$

avec $(u,v) \in D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

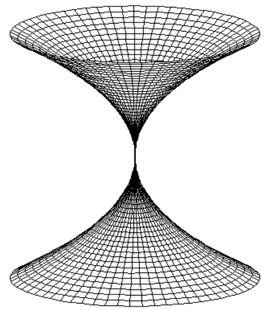
- Dans cette série de figures, on a pris 1, puis $2 \dots$, et enfin 20 valeurs pour v (dans l'intervalle $[-1,1]$), et pour chacune de ces valeurs, on a tracé la courbe $u \mapsto f(u,v)$:



- Dans cette série de figures, on a pris 1, puis $2 \dots$, et enfin 20 valeurs pour v (dans l'intervalle $[0, 2\pi]$), et pour chacune de ces valeurs, on a tracé la courbe $v \mapsto f(u,v)$:



- En affinant l'un quelconque de ces tracés, la surface obtenue a l'allure suivante:



3.1 Courbes coordonnées

Définition XIX.3.4 On se donne la surface S de paramétrisation

$$f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big), \quad (u,v) \in D.$$

Pour chaque valeur fixée de u, la courbe de l'espace

$$C_u : v \mapsto f(u,v)$$

est appelée une courbe coordonnée. De même, pour chaque valeur fixée de v, la courbe de l'espace

$$D_v : u \mapsto f(u,v)$$

est une courbe coordonnée.
D'un point de vue ensembliste, la surface S est la réunion aussi bien:

- de ses courbes coordonnées (C_u),
- que de ses courbes coordonnées (D_v).

Exemple

Considérons la surface S de paramétrisation

$$f : (u,v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, v), \quad (u,v) \in D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

- Prenons $u=\frac{\pi}{3}$ (on a alors $\cos u=\frac{1}{2}$, $\sin u=\frac{\sqrt{3}}{2}$); la courbe coordonnée de paramétrisation

$$v\mapsto\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}v\\ \frac{\sqrt{3}}{2}v\\ v\end{array}\right.$$

est la droite dirigée par le vecteur $\vec{w}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ et passant par le point O.

- Plus généralement, fixons le paramètre u; la courbe coordonnée de paramétrisation

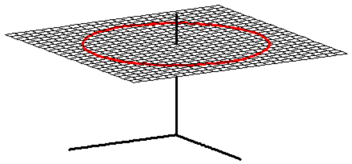
$$C_u : v\mapsto\left\{\begin{array}{c}v\cos u\\ v\sin u\\ v\end{array}\right.$$

est une droite: c'est la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{w}(u)=(\cos u,\sin u,1)$.

- Prenons $v=3$; la courbe coordonnée de paramétrisation

$$u\mapsto\left\{\begin{array}{c}3\cos u\\ 3\sin u\\ 3\end{array}\right.$$

est plane, tracée dans le plan de cote $z=3$; dans ce plan, on reconnaît une paramétrisation du cercle de rayon 3 et centré en $(0,0,3)$.



- Plus généralement, fixons le paramètre v; la courbe coordonnée de paramétrisation

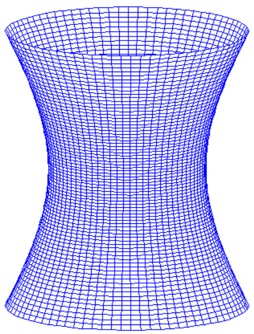
$$u\mapsto\left\{\begin{array}{c}v\cos u\\ v\sin u\\ v\end{array}\right.$$

est un cercle centré en $(0,0,v)$ et de rayon $|v|$.

Exemple de visualisation d'une surface à l'aide des courbes coordonnées

Soit S la surface de paramétrisation

$$f:(u,v)\mapsto\left\{\begin{array}{l}\operatorname{ch} u\ \cos v\\ \operatorname{ch} u\ \sin v\\ \operatorname{sh} u\end{array}\right.\qquad u\in\mathbb{R},\ v\in[0,2\pi].$$



La surface S est la réunion:

- de ses lignes coordonnées $(C_u)_{u\in\mathbb{R}}$ où C_u est la courbe de paramétrisation

$$v\mapsto\left\{\begin{array}{l}\operatorname{ch} u\ \cos v\\ \operatorname{ch} u\ \sin v\\ \operatorname{sh} u\end{array}\right.\qquad v\in[0,2\pi].$$

Notons que pour u fixé, disons $u=2$ pour fixer les idées, la courbe coordonnée

$$v\mapsto\left\{\begin{array}{l}\operatorname{ch} 2\ \cos v\\ \operatorname{ch} 2\ \sin v\\ \operatorname{sh} 2\end{array}\right.\qquad v\in[0,2\pi]$$

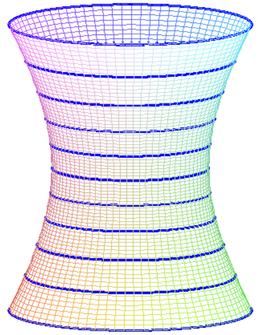
est plane, car incluse dans le plan d'équation cartésienne

$$z=\operatorname{sh} 2$$

et dans ce plan,

$$v\mapsto\left\{\begin{array}{l}\operatorname{ch} 2\ \cos v\\ \operatorname{ch} 2\ \sin v\end{array}\right.\qquad v\in[0,2\pi]$$

est une paramétrisation du cercle de centre $(0,0,\operatorname{sh} 2)$ et de rayon $\operatorname{ch} 2$. Ceci est évidemment valable pour toute valeur de u et notons qu'à mesure que $u\geq 0$ croît, $\operatorname{sh} u$ croît, donc ce cercle "prend de l'altitude" et son rayon $\operatorname{ch} u$ croît également (même phénomène pour $u\leq 0$: plus u descend, plus le rayon est grand en valeur absolue), ce qui donne l'allure suivante:

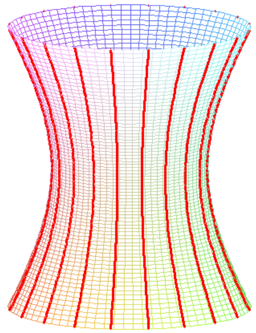


- de ses lignes coordonnées $(D_v)_{v\in[0,2\pi]}$ où D_v est la courbe de paramétrisation

$$u\mapsto\left\{\begin{array}{l}\operatorname{ch} u\ \cos v\\ \operatorname{ch} u\ \sin v\\ \operatorname{sh} u\end{array}\right.\qquad u\in\mathbb{R}.$$

Sans rentrer dans les détails techniques, ces lignes coordonnées sont des hyperboles car rappelons qu'une paramétrisation d'une branche d'hyperbole dans le plan est quelque chose comme

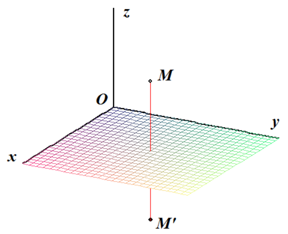
$$t\longmapsto\left\{\begin{array}{l}a\operatorname{ch} t\\ b\operatorname{sh} t.\end{array}\right.$$

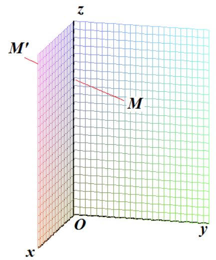


3.2 Symétries

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et toutes les coordonnées seront données dans ce repère.

Quelques symétries orthogonales dans l'espace

- La symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $z = 0$ s'exprime par
$$M(x, y, z) \mapsto M'(x, y, -z).$$


Ainsi, deux points de l'espace de coordonnées respectives (x, y, z) et $(x, y, -z)$ sont symétriques par rapport au plan $z = 0$.
- La symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $y = 0$ s'exprime par
$$M(x, y, z) \mapsto M'(x, -y, z).$$
- La symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x = 0$ s'exprime par
$$M(x, y, z) \mapsto M'(-x, y, z).$$
- La symétrie orthogonale par rapport à l'axe Oz s'exprime par
$$M(x, y, z) \mapsto M'(-x, -y, z).$$


Ainsi, deux points de l'espace de coordonnées respectives (x, y, z) et $(-x, -y, z)$ sont symétriques par rapport à l'axe Oz.
- La symétrie orthogonale par rapport à l'axe Oy s'exprime par
$$M(x, y, z) \mapsto M'(-x, y, -z).$$
- La symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox s'exprime par
$$M(x, y, z) \mapsto M'(x, -y, -z).$$
- La symétrie par rapport au point O s'exprime par
$$M(x, y, z) \mapsto M'(-x, -y, -z).$$

Comment reconnaître analytiquement une symétrie. En gros, j'ai une symétrie; mais par rapport à quoi?

Le centre, l'axe ou le plan par rapport auquel s'effectue la symétrie s'obtient, comme pour toute symétrie, en recherchant ses invariants (points inchangés avant et après la symétrie).

Exemples

- $M(x, y, z) \mapsto M'(-x, y, z)$ admet comme invariants les points où $x = -x$, $y = y$, $z = z$ i.e. tous les points où $x = 0$, c'est à dire les points du plan yOz,
- $M(x, y, z) \mapsto M'(-x, y, -z)$ admet comme invariants les points où $x = -x$, $y = y$, $z = -z$ i.e. tous les points où $x = 0$ et $z = 0$, c'est à dire les points de l'axe Oy,
- $M(x, y, z) \mapsto M'(x, z, y)$ admet comme invariants les points où $x = x$, $y = z$, $z = y$ i.e. tous les points où $y = z$, c'est à dire les points du plan d'équation $y = z$.

Proposition XIX.3.3 Soit S une surface paramétrée et Γ un plan, une droite ou un point de l'espace.
Alors S est symétrique par rapport à Γ si pour tout point M de S, son symétrique par rapport à Γ est également un point de S.

Remarque. Dans la pratique, on constate très souvent que le symétrique du point $M(u, v)$ par rapport à l'élément Γ en question est le point de S de paramètres $(\pm u, \pm v)$.

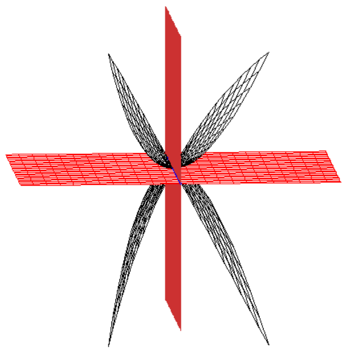
Exemples de mise en évidence de symétries sur une surface

On considère la surface S de paramétrisation
$$f : (u, v) \mapsto (uv, u^2v^2, u^2v)$$
avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

- On a $M(u, v) = (uv, u^2v^2, u^2v)$ et $M(u, -v) = (-uv, u^2v^2, -u^2v)$: ces points sont symétriques par rapport à l'axe Oy car les points de coordonnées
$$(x, y, z), \quad (-x, y, -z)$$
sont symétriques par rapport à Oy. En effet, conformément à la méthode exposée ci-dessus, les points invariants par la transformation
$$(x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$$
sont les points qui vérifient
$$\begin{cases} -x = x \\ -z = z \end{cases}$$
i.e. les points tels que $x = z = 0$, autrement dit les points $(0, y, 0)$, qui constituent l'axe Oy.
- Pour tout point de S, son symétrique par rapport à l'axe Oy est donc encore un point de S: la surface S est donc symétrique par rapport à l'axe Oy; on dit aussi qu'elle est invariante dans la symétrie orthogonale s_1 d'axe Oy: $s_1(S) = S$.
- On a $M(-u, v) = (-uv, u^2v^2, u^2v)$, qui est le symétrique du point $M(u, v)$ dans la symétrie par rapport au plan $x = 0$. Comme ci-dessus, on en déduit que S est symétrique par rapport au plan $x = 0$; elle est donc invariante dans la symétrie orthogonale s_2 par rapport au plan $x = 0$: $s_2(S) = S$.

- On a $M(-u,-v)=(uv,u^2v^2,-u^2v)$, qui est le symétrique du point $M(u,v)$ dans la symétrie par rapport au plan $z=0$. Comme ci-dessus, on en déduit que S est symétrique par rapport au plan $z=0$; elle est donc invariante dans la symétrie orthogonale s_3 par rapport au plan $z=0$: $s_3(S)=S$.

Pour information, S a l'allure suivante:



3.3 Plan tangent

Définition XIX.3.5 ***Point régulier.*** Un point $M(u,v)$ d'une surface S de paramétrisation (D,f) est dit *régulier* lorsque

- $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre: c'est la définition formelle,
- donc lorsque le vecteur $\vec{n}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ est non nul: c'est le critère à appliquer.

Concrètement, on recherchera les points ***non réguliers***, donc on recherchera les réels u et v pour lesquels les trois composantes de $\vec{n}(u,v)$ sont nulles: cela conduira à un système (pas difficile à résoudre, mais à gérer rigoureusement en distinguant tous les cas, comme "$u=0$ ou $v=0\dots$").

Exemple

Déterminer les points réguliers de la surface S de paramétrisation

$$f:(u,v)\left\{\begin{array}{c} uv\\ u^2+v^2\\ u^2-v^2.\end{array}\right.$$

- On calcule le vecteur $\vec{n}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ et on trouve
$$\vec{n}(u,v)=(-8uv,2(u^2+v^2),2(v^2-u^2))$$
et on voit que
$$\vec{n}(u,v)=(0,0,0)\iff\left\{\begin{array}{l} u=0 \text{ ou } v=0\\ u=0 \text{ et } v=0\\ u=v \text{ ou } u=-v\end{array}\right.$$
donc si et seulement si $u=v=0$.
- Donc tous les points de S sont réguliers, sauf le point de paramètres $(0,0)$.

Autre exemple

Déterminer les points réguliers de la surface S de paramétrisation

$$f:(u,v)\mapsto\left\{\begin{array}{l} u\cos v\\ u\sin v\\ u.\end{array}\right.$$

.

- On calcule
$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=(\cos v,\sin v,1),\quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=(-u\sin v,u\cos v,0).$$
- On a donc
$$\vec{n}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=(-u\cos v,-u\sin v,u)$$
et on voit donc que
$$\vec{n}(u,v)=(0,0,0)\iff u=0.$$
- Donc tous les points de S sont réguliers, sauf les points de paramètres $(0,v)$ (avec v quelconque); à noter que tous ces paramètres donnent l'origine.

Plan tangent: très très important

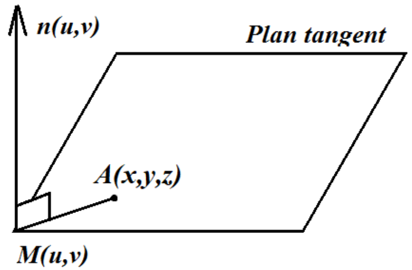
La définition suivante est très importante:

Définition XIX.3.6 Soit S une surface de paramétrisation (D,f) et $M(u,v)$ un point *régulier* de S.

- Le plan tangent à S au point $M(u,v)$ est le plan passant par $M(u,v)$ et dirigé par les vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$.
- Le vecteur
$$\vec{n}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$
étant alors normal à ce plan tangent, un point $A(x,y,z)$ appartient à ce plan si et seulement si
$$\langle\overrightarrow{M(u,v)A},\vec{n}(u,v)\rangle=0,$$
égalité qui en fournit une équation cartésienne.
- Le vecteur $\vec{n}(u,v)$ est dit normal à S au point $M(u,v)$ et la droite passant par $M(u,v)$ et dirigée par $\vec{n}(u,v)$ est appelée normale à S en $M(u,v)$.

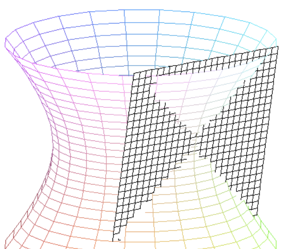
Remarques.

- Le plan tangent n'est donc défini qu'en un point *régulier* et on aura toujours présente à l'esprit cette configuration:

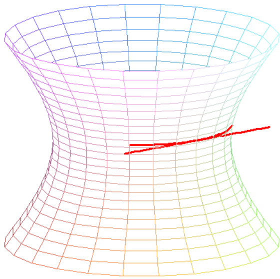


- Fixons un point régulier $M(u_0, v_0)$ de S. Ce point est à la croisée:
  - de la courbe coordonnée C_{u_0} de paramétrisation
  $$v \longmapsto f(u_0, v)$$
  et il en est le point de paramètre v_0,
  - et de la courbe coordonnée Γ_{v_0} de paramétrisation
  $$u \longmapsto f(u, v_0)$$
  et il en est le point de paramètre u_0.

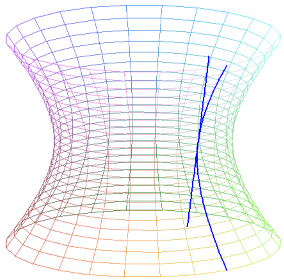
  La tangente à la courbe C_{u_0} au point M, d'après la théorie des courbes gauches, est donc dirigée par le vecteur dérivé de cette paramétrisation en v_0, s'il est non nul. Par définition d'une dérivée première, cette dérivée est le vecteur
  $$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$$
  qui est effectivement non nul puisque par hypothèse la famille $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est libre. De même, la tangente à la courbe Γ_{v_0} au point M est dirigée par le vecteur
  $$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0).$$
  Ainsi, le plan tangent à la surface S en M est dirigé par les vecteurs tangents aux courbes coordonnées passant par ce point.



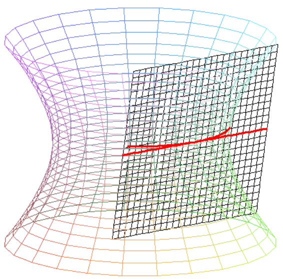
Le plan tangent à la surface en un point



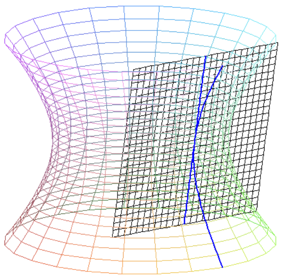
Une des courbes coordonnées passant par ce point et sa tangente



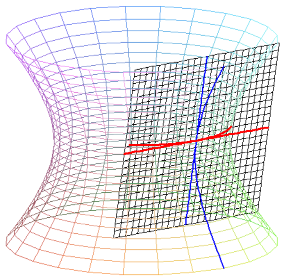
La deuxième courbe coordonnée passant par ce point et sa tangente



La première courbe coordonnée, sa tangente et le plan tangent en ce point



La deuxième courbe coordonnée, sa tangente, le plan tangent en ce point



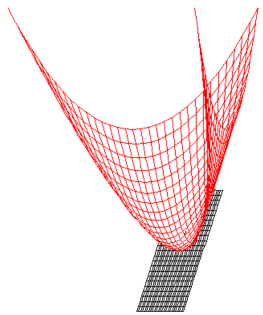
Le plan tangent est bien engendré par les vecteurs tangents aux courbes coordonnées

Exemple fondamental

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère la surface S de paramétrisation
$$f : (u, v) \mapsto \begin{cases} u - v \\ uv \\ u^2 + v^2. \end{cases}$$
Déterminer ses points réguliers, puis écrire une équation cartésienne du plan tangent à S:

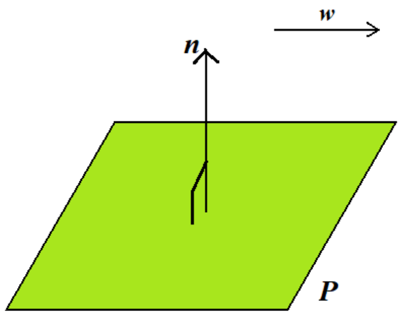
1. au point de paramètres $(1, 1)$.
2. au point de paramètres (u, v) lorsque celui-ci est régulier.
3. En quels points de S le plan tangent est-il parallèle au vecteur $\vec{\imath}$? Démontrer que l'ensemble de ces points constitue une demi-droite.

- On calcule $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = (1, v, 2u)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = (-1, u, 2v)$ puis
  $$\vec{n}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = (2v^2 - 2u^2, -2v - 2u, u + v).$$
  Un point $M(u, v)$ est non régulier si et seulement si $\vec{n}(u, v) = \vec{0}$, donc si et seulement si
  $$\begin{cases} 2v^2 - 2u^2 &= 0 \\ -2v - 2u &= 0 \\ u + v &= 0 \end{cases} \iff u + v = 0.$$
  Ainsi, les points réguliers de S sont les points $M(u, v)$ avec $u + v \neq 0$.
- Le point de paramètres $(1, 1)$ est donc régulier; on a $\vec{n}(1, 1) = (0, -4, 2)$. Puisque $f(1, 1) = (0, 1, 2)$ i.e. les coordonnées du point $M(1, 1)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont $(0, 1, 2)$, une équation cartésienne du plan tangent à S en ce point est
  $$0 \times (x - 0) - 4 \times (y - 1) + 2 \times (z - 2) = 0,$$
  ou encore $-2y + z = 0$.



- En un point de paramètres (u, v) tel que $u + v \neq 0$, donc en un point régulier de S, le plan tangent est le plan passant par le point $M(u, v)$ de coordonnées
  $$(u - v, uv, u^2 + v^2)$$
  et normal au vecteur
  $$\vec{n}(u, v) = (2v^2 - 2u^2, -2v - 2u, u + v).$$
  Un point A de l'espace, de coordonnées (x, y, z) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{M(u, v)A}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}(u, v)$, donc si et seulement si le produit scalaire $\langle \overrightarrow{M(u, v)A}, \vec{n}(u, v) \rangle$ est nul, c'est à dire
  $$(x - u + v)(2v^2 - 2u^2) + (y - uv)(-2v - 2u) + (z - u^2 - v^2)(u + v) = 0,$$
  ce qui donne après développement et simplifications l'équation cartésienne
  $$(2v^2 - 2u^2)x - 2(v + u)y + (u + v)z + (u + v)(u - v)^2 = 0.$$

- Le phénomène de parallélisme entre un plan P et un vecteur $\vec{w}$ a lieu



si et seulement si un vecteur normal $\vec{n}$ à P est orthogonal au vecteur $\vec{w}$, donc si et seulement si $\langle \vec{n}, \vec{w} \rangle = 0$. Donc le parallélisme entre le plan tangent à S au point régulier de paramètres (u, v) et le vecteur $\vec{\imath}$ a lieu si et seulement si

$$\langle \vec{n}(u, v), \vec{\imath} \rangle = 0,$$

c'est à dire

$$2v^2 - 2u^2 = 0,$$

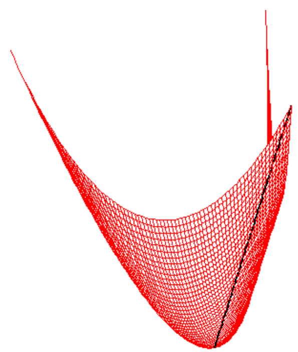
ce qui se produit si et seulement si $u + v = 0$ ou $u - v = 0$. La situation $u + v = 0$ est exclue puisque l'on s'intéresse à des points réguliers. Les points recherchés sont donc ceux pour lesquels $v = u$, c'est à dire (en prenant $v = u$ dans $f(u, v)$) les points de coordonnées

$$(0, u^2, 2u^2), \quad u \in \mathbb{R}^*$$

($u \in \mathbb{R}^*$ pour éviter $u = 0$, qui donnerait $v = 0$ et donc $u + v = 0$, dont on ne veut pas pour cause de non régularité). En posant $t = u^2$, on voit que t décrit $]0, +\infty[$ lorsque u décrit $\mathbb{R}^*$ et l'ensemble des points

$$(0, t, 2t), \quad t \in]0, +\infty[$$

constitue la demi-droite de sommet O dirigée par le vecteur $(0, 1, 2)$.



4 Surfaces définies par une équation cartésienne

L'espace est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dans la définition ci-dessous, très naturelle, il est sous-entendu que "équation" et "coordonnées" signifient équation et coordonnées dans $\mathcal{R}$:

Définition XIX.4.7 Soit F une fonction définie sur une partie $U \subset \mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La surface Σ d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient $F(x, y, z) = 0$.

Exemple

La surface Σ d'équation

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$

i.e. d'équation $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$, est la sphère centrée au point Ω de coordonnées $(1, 0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

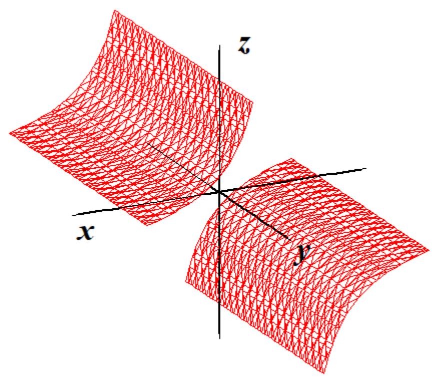
Autre exemple

L'une des variables peut être absente: par exemple soit Σ la surface d'équation

$$xz = 1.$$

Remarquons le point important suivant:

- Soit $M(x, y, z)$ un point de Σ. L'absence de contrainte sur y dans son équation fait que tout point N de coordonnées (x, y', z), où y est un réel quelconque, appartient à Σ. Or un tel point N est un point quelconque de la droite passant par M et dirigée par $(0, 1, 0)$, ce qui explique l'allure suivante:



4.1 Symétries

Définition XIX.4.8 Soit Σ une surface et Γ un plan, une droite ou un point de l'espace. Alors Σ est symétrique par rapport à Γ si pour tout point M de Σ, son symétrique par rapport à Γ est également un point de Σ.

Exemple

Le symétrique par rapport au plan xOy d'un point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) étant le point M' de coordonnées $(x, y, -z)$, démontrer qu'une surface Σ d'équation $F(x, y, z) = 0$ est est symétrique par rapport au plan xOz revient donc à démontrer que le point $M(x, y, z)$ appartient à Σ si et seulement si le point $M'(x, y, -z)$ appartient à Σ et donc à démontrer que

$$F(x, y, z) = 0 \iff F(x, y, -z) = 0.$$

C'est le cas par exemple de la surface Σ d'équation

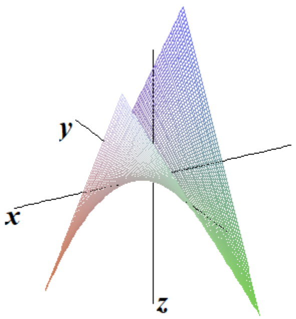
$$(x - 1)^2 + 2y^2 - z^2 = 0,$$

qui est également symétrique par rapport au plan xOz, puisque $F(x, y, z = 0) \iff F(x, -y, z) = 0$.

Exemple de mise en évidence de symétries sur une surface

Soit Σ la surface d'équation $xy = z$ (i.e. $F(x,y,z) = 0$ avec $F(x,y,z) = xy - z$).

- On a clairement
$$xy = z \iff (-x)y = -z$$
autrement dit: le poiçnt $M(x,y,z)$ appartient à Σ si et seulement si le point $M'(-x,y,-z)$ appartient à Σ; Les points M et M' étant symétriques par rapport à l'axe Oy, on en déduit que Σ est symétrique par rapport à l'axe Oy.
- De même,
$$xy = z \iff x(-y) = -z$$
et
$$xy = z \iff -x(-y) = z,$$
ce qui démontre que Σ est symétrique par rapport à l'axe Ox et par rapport à l'axe Oz.



4.2 Plan tangent

Définition XIX.4.9 ***Point régulier.*** Soit Σ la surface d'équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$.
Un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de Σ est dit *régulier* lorsque
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0).$$

Concrètement:

- on calculera le vecteur
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\right)$$
- On recherchera les points non réguliers de Σ, donc les réels (x,y,z) pour lesquels $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = (0,0,0)$,
- ce qui revient donc à résoudre le système d'équations
$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

et les solutions de ce système, s'il y en a, fourniront les points non réguliers de Σ.

Premier exemple

Soit Σ la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

- On a donc ici $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ et
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = (2x, 2y, -2z).$$
- On a
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$
- et avec la condition $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ d'appartenance à Σ, on en déduit que Σ ne possède aucun point non régulier i.e. tous les points de Σ sont réguliers.

Deuxième exemple

Soit Σ la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

- On a donc ici $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ et
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = (2x, 2y, -2z).$$
- On a
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$
- et avec la condition $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ d'appartenance à Σ, on en déduit que le seul point non régulier de Σ est le point $(0,0,0)$.

La proposition suivante a pour objet de déterminer un lien entre surfaces paramétrées et surfaces définies par une équation cartésienne; grosso-modo, sous certaines hypothèses et localement, on parle de la même chose :

Proposition XIX.4.4 Soit Σ la surface d'équation
$$F(x,y,z) = 0$$
et M un point *régulier* de Σ. Alors il existe un voisinage V de M tel que $\Sigma \cap V$ admette une paramétrisation
$$f : (u,v) \longmapsto (x((u,v)), y(u,v), z(u,v))$$
où f est une fonction définie et de classe C^1 sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et le point M est alors un point régulier de cette surface.

La démonstration est admise. La conséquence principale de ce résultat est la suivante :

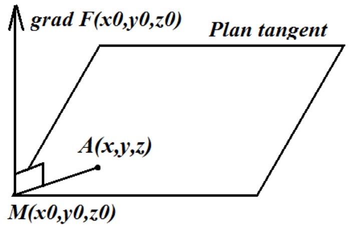
Plan tangent: très très important

Définition XIX.4.10 Soit Σ la surface d'équation cartésienne $F(x,y,z)=0$ et M un point *régulier* de Σ de coordonnées (x_0,y_0,z_0).

- Le plan tangent à Σ en M est le plan passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_0,y_0,z_0)$.
- Un point A de coordonnées (x,y,z) appartient donc à ce plan si et seulement si
$$\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_0,y_0,z_0)\rangle = 0,$$
égalité qui en fournit une équation cartésienne.
- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_0,y_0,z_0)$ est dit normal à Σ au point M et la droite passant par M et dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_0,y_0,z_0)$ est appelée normale à Σ en M.
- La surface Σ est dite régulière lorsque tous ses points sont réguliers.

Démonstration 115

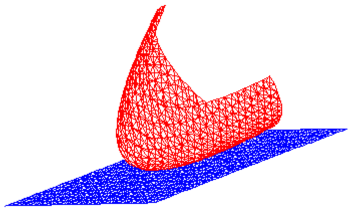
Remarque. Le plan tangent n'est donc défini qu'en un point *régulier* et on aura toujours présente à l'esprit cette configuration:



Premier exemple

Soit Σ d'équation $x^2+z^2-y-2z=0$. Vérifier que le point M_0 de coordonnées $(1,1,0)$ est un point régulier de Σ et écrire une équation cartésienne du plan tangent à Σ en ce point.

- Le point de coordonnées $(1,1,0)$ vérifie bien l'équation de Σ.
- Soit $F:(x,y,z)\mapsto x^2+z^2-y-2z$. On calcule
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x,y,z) = (2x,-1,2z-2) \quad\Longrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(1,1,0)=(2,-1,-2).$$
Comme ce vecteur n'est pas le vecteur nul, le point M_0 est bien un point régulier de Σ.
- Un point A de l'espace de coordonnées (x,y,z) appartient au plan tangent à Σ en M_0 si et seulement si $\langle \overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(1,1,0)\rangle = 0$ ce qui donne après simplification
$$2x-y-2z-1=0.$$



Deuxième exemple

Soit Σ la surface d'équation cartésienne
$$xy-z^2-y+2z=0.$$
Vérifier que $M(4,1,3)$ est un point régulier de Σ et écrire une équation cartésienne du plan tangent en ce point. Écrire enfin une équation du plan tangent à Σ en tout point régulier $M(x_0,y_0,z_0)$.

- Soit $F:(x,y,z)\mapsto xy-z^2-y+2z$. On calcule
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x,y,z) = (y,x-1,-2z+2).$$
Ce vecteur s'annule en $(1,0,1)$ mais ce point n'est pas un point de Σ. Donc tous les points de Σ sont réguliers.
- On a bien $F(4,1,3)=0$ donc $M\in\Sigma$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M)=(1,3,-4)$. Donc une équation du plan tangent à Σ en M est
$$1\times(x-4)+3\times(y-1)-4(z-3)=0,$$
c'est à dire $x+3y-4z+5=0$.
- Plus généralement, une équation du plan tangent à Σ en $M(x_0,y_0,z_0)$ est
$$y_0(x-x_0)+(x_0-1)(y-y_0)+(-2z_0+2)(z-z_0)=0,$$
(bien prendre garde d'appliquer le gradient au point (x_0,y_0,z_0), le point de Σ considéré, et non en (x,y,z)) c'est à dire
$$\begin{aligned} &y_0x+(x_0-1)y+(-2z_0+2)z-x_0y_0-(x_0-1)y_0-z_0(-2z_0+2)=0\\ \iff\ &y_0x+(x_0-1)y+(-2z_0+2)z-2x_0y_0+y_0+2z_0^2-2z_0=0\end{aligned}$$
et comme $-2x_0y_0+z_0^2=-2y_0+4z_0=0$ (du fait que $x_0y_0-z_0^2-y_0+2z_0=0$), le terme constant se simplifie en $-y_0+2z_0$, ce qui donne l'équation
$$y_0x+(x_0-1)y+(-2z_0+2)z-y_0+2z_0=0.$$

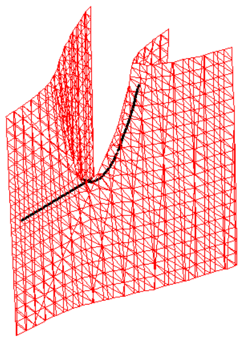
Troisième exemple

Soit Σ la surface d'équation cartésienne
$$x^3-3xy+z=0.$$
Déterminer les points réguliers de Σ. Déterminer les points réguliers de Σ en lesquels le plan tangent passe par le point O et démontrer que leur ensemble est constitué d'une droite et d'une courbe.

- En notant $F:(x,y,z)\mapsto x^3-3xy+z$, on a
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_0,y_0,z_0)=(3x_0^2-3y_0,-3x_0,1).$$
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F$ n'est donc jamais nul, ce qui signifie que Σ est une surface régulière.
- En l'un de ses points $M(x_0,y_0,z_0)$, le plan tangent à Σ est normal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(M)$ et a donc pour équation
$$(3x_0^2-3y_0)(x-x_0)-3x_0(y-y_0)+z-z_0=0.$$

- Ce plan passe par l'origine si et seulement si $(0,0,0)$ vérifie son équation, donc si et seulement si
$$(3x_0^2 - 3y_0)(-x_0) - 3x_0(-y_0) - z_0 = 0$$
c'est à dire
$$-3x_0^3 + 6x_0y_0 - z_0 = 0.$$
- Comme on a $x_0^3 - 3x_0y_0 + z_0 = 0$, on a en combinant:
$$z_0 = x_0^3,$$
que l'on réinjecte dans $-3x_0^3 + 6x_0y_0 - z_0 = 0$ et l'on obtient
$$2x_0^3 - 3x_0y_0 = 0,$$
ce qui donne soit $x_0 = 0$ (et y_0 quelconque), soit $x_0 \neq 0$ et $y_0 = \frac{2}{3}x_0^2$.

- En définitive, le contour apparent est composé de deux parties, à savoir les points de la forme
$$(0, y_0, 0), \quad y_0 \in \mathbb{R},$$
qui constituent l'axe Oy, et des points de la forme
$$(x_0, \frac{2}{3}x_0^2, x_0^3),$$
(en principe avec $x_0 \neq 0$; mais $x_0 = 0$ fournit le point O, et c'est bien un point de ce contour puisqu'il appartient à Oy) qui constituent en fait le support de la courbe gauche
$$t \mapsto (t, \frac{2}{3}t^2, t^3).$$

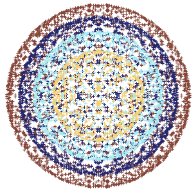


Définition XIX.4.11 ***Surfaces de niveau.*** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On appelle *surface de niveau* λ de la fonction f l'ensemble des points (x, y, z) de U tels que
$$f(x, y, z) = \lambda.$$

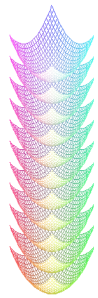
Remarque. C'est évidemment une surface définie par une équation cartésienne, à savoir la surface d'équation cartésienne
$$f(x, y, z) - \lambda = 0.$$

Exemples

- Soit
$$f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2.$$
La surface de niveau $\lambda > 0$ de f est la sphère centrée en O et de rayon $\sqrt{\lambda}$; les lignes de niveau de f sont donc des sphères concentriques (en ne prenant que des niveaux > 0):



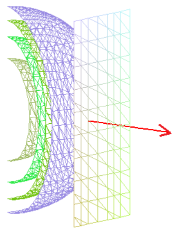
- Soit
$$f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z.$$
Comme on le verra plus tard, la surfacee de niveau λ de f est un paraboloïde de révolution.



Proposition XIX.4.5 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
On considère un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de U tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M) \neq \vec{0}$, on pose $\lambda = f(x_0, y_0, z_0)$ et on note Σ_λ la surface de niveau λ de f; ainsi, M appartient à Σ_λ.

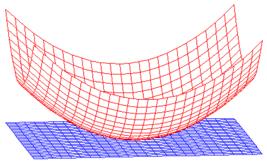
- Alors le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$ est orthogonal à Σ_λ au point M, c'est à dire au plan tangent à Σ_λ au point M.
- De plus, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

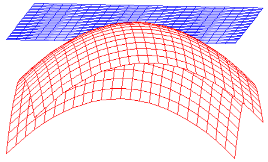
La démonstration est en tout point similaire à celle concernant les lignes de niveau dans le plan.



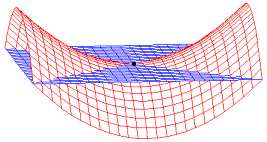
4.3 Position d'une surface par rapport à son plan tangent

Il sera question dans ce paragraphe du problème suivant: en un point (régulier) donné d'une surface, la surface est-elle situé (localement) d'un même côté du plan tangent





ou la surface traverse-t-elle le plan tangent



C'est une question délicate à laquelle on n'apportera de réponse qu'à une certaine catégorie de points d'une certaine catégorie de surfaces.

Théorème XIX.4.6 On considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = g(x, y),$$

et où g est une application de deux variables, définie sur un certain domaine ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (typiquement, $U = \mathbb{R}^2$), de classe C^2 sur U et à valeurs réelles. On se donne un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de S (avec bien entendu $z_0 = g(x_0, y_0)$), tel que (x_0, y_0) soit un *point critique* de g, c'est à dire tel que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

- Soit P le plan tangent à S en M: il a pour équation

  $$z = z_0$$

  avec bien entendu $z_0 = g(x_0, y_0)$.
- On note $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ la matrice hessienne de g en (x_0, y_0).
  - si $\det(H) > 0$, alors sur un voisinage de M, S est située d'un même côté du plan P: le plan P ne traverse pas S.
  - si $\det(H) < 0$, alors le plan P traverse localement S et on dit que M est un *point col* de S.

Démonstration 116

Remarque. Ce théorème ne permet pas de conclure lorsque $\det(H) = 0$ (comme pour les extrémums):

- soit S la surface d'équation cartésienne

  $$z = x^3 + y^3.$$

  alors $(0, 0)$ est un point critique de

  $$g : (x, y) \longmapsto x^3 + y^3,$$

  un calcul rapide mondre que la matrice hessienne de g en $(0, 0)$ est nulle (et a donc un déterminant nul). Le plan tangent à S en $(0, 0, 0)$ est le plan

  $$z = 0$$

  et dans la mesure où tout voisinage de $(0, 0)$ contient des points $(x, 0)$ avec $x < 0$ en lesquels $g(x, 0) < 0$ et donc situés en-dessous du plan tangent et des points $(x, 0)$ avec $x > 0$ en lesquels $g(x, 0) > 0$ et donc situés au-dessus du plan tangent, on en déduit que S est localement traversée par son plan tangent en $(0, 0, 0)$.
- soit S la surface d'équation cartésienne

  $$z = x^4 + y^4.$$

  alors $(0, 0)$ est un point critique de

  $$g : (x, y) \longmapsto x^4 + y^4,$$

  un calcul rapide mondre que la matrice hessienne de g en $(0, 0)$ est nulle (et a donc un déterminant nul). Le plan tangent à S en $(0, 0, 0)$ est le plan

  $$z = 0.$$

  Mais il est clair que $g(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si bien que tous les points de l(hypergraphe de g, et en particulier localement au voisinage de $(0, 0, 0)$ sont situés au-dessus du plan tangent.

Premier exemple

On considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = x^2 - y^2.$$

Préciser la position de S par rapport à son plan tangent au point O de coordonnées $(0, 0, 0)$.

- La surface S a pour équation $z = g(x, y)$ avec

  $$g : (x, y) \mapsto x^2 - y^2.$$

- On a

  $$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2y$$

  si bien que $(0, 0)$ est un point critique de g et le plan tangent P en $(0, 0, 0)$ a donc pour équation

  $$z = 0.$$

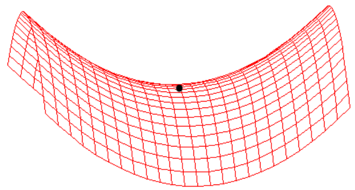
- On calcule

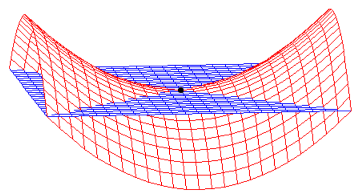
  $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= 2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= -2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

- La matrice hessienne de g en O est donc

  $$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  dont le déterminant -4 est strictement négatif.
- Le plan P coupe donc localement S et le point $M(0, 0, 0)$ de S est un point col.

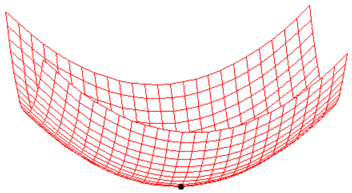


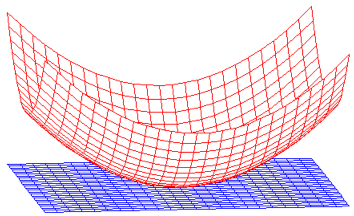


Deuxième exemple

On considère la surface S d'équation cartésienne
$$z = x^2 + y^2.$$
Préciser la position de S par rapport à son plan tangent au point O de coordonnées $(0,0,0)$.

- La surface S a pour équation $z = g(x,y)$ avec
$$g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2.$$
- On a
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$$
si bien que $(0,0)$ est un point critique de g et le plan tangent P en $(0,0,0)$ a donc pour équation
$$z = 0.$$
- On calcule
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= 2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= 2 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$
- La matrice hessienne de g en O est donc
$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
dont le déterminant 4 est strictement positif.
- Ainsi, S est située, localement au voisinage du point O, d'un même côté du plan P.





5 Obtention d'une équation cartésienne par "élimination"

Définition XIX.5.12 Soit S une surface de paramétrisation
$$f : (u,v) \mapsto \begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v). \end{cases}$$
Obtenir une équation cartésienne de S, c'est mettre en évidence une relation "pure", c'est à dire sans aucun paramètre, entre abscisse, ordonnée et cote des points de S.

Premier exemple

Déterminer une équation cartésienne de la surface S de paramétrisation
$$f : (u,v) \mapsto \begin{cases} x(u,v) = u\cos v \\ y(u,v) = u \sin v \\ z(u,v) = u+1 \end{cases} \qquad (u,v) \in D = \mathbb{R} \times [0, 2\pi].$$

Jouer sur la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ est classique en présence des fonctions $\sin$ et $\cos$ dans la paramétrisation.

- Pour tout $(u,v) \in D$, on a
$$x^2(u,v) + y^2(u,v) = u^2$$
alors que
$$u = z(u,v) - 1.$$
- On a donc
$$x^2(u,v) + y^2(u,v) = (z(u,v)-1)^2.$$
Ainsi, tout point de S vérifie l'équation
$$x^2 + y^2 = (z-1)^2,$$
qui est donc une équation cartésienne de S.
- **_Remarque importante._** Notons Σ la surface déquation cartésienne
$$x^2 + y^2 = (z-1)^2.$$
Rigoureusement, on a prouvé que tout point de S vérifie cette équation i.e. tout point de S est un point de la surface Σ et c'est pourquoi on n'a prouvé que l'inclusion $S \subset \Sigma$. *Le problème de l'inclusion réciproque ne sera abordé que si l'énoncé l'exige.* On dira néanmoins que l'on a obtenu une équation cartésienne de S.
- *Bonus* Prouvons l'inclusion $\Sigma \subset S$ i.e. prouvons que tout point de Σ est un point de S.
On se donne donc un point M de Σ, dont les coordonnées (x,y,z) satisfont en conséquence $x^2 + y^2 = (z-1)^2 1$.
- Il s'agit de démontrer que M est un point de S. Mais c'est quoi être un point de S?
  - Prenons une situation plus simple: soit D la droite de l'espace de paramétrisation
$$t \mapsto \begin{cases} 1+3t \\ 2-t \\ 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$
ce qui signifie que les points de D sont les points de coordonnées $(1+3t, 2-t, 2t)$, t pouvant prendre toute valeur dans $\mathbb{R}$.
  - Le point M de coordonnées $(4,1,3)$ est-il un point de D? Ses coordonnées figurent-elles dans la liste des triplets $(1+3t, 2-t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$?
  - C'est le cas si et seulement s'il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} 1+3t = 4 \\ 2-t = 1 \\ 2t = 3. \end{cases}$$
Ce système est clairement incompatible puisque L_1 et L_2 donnent $t = 1$ alors que L_3 donne $t = \frac{3}{2}$. C'est donc que M n'est pas un point de D.
  - Le point M' de coordonnées $(-2,3,-2)$ est-il un point de D? Ses coordonnées figurent-elles dans la liste des triplets $(1+3t, 2-t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$?

– C'est le cas si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 1+3t=-2 \\ 2-t=3 \\ 2t=-2. \end{cases}$$

L_1, L_2 et L_3 donnent $t=-1$. C'est donc que M' est un point de D.

Il s'agit donc ici de trouver deux paramètres u et v tels que

$$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=u+1. \end{cases}$$

Rappelons que les données sont x,y,z satisfaisant $x^2+y^2=(z-1)^2$ et les inconnues sont u et v.

– L_3 donne $u=z-1$, ce qui ramène le système à

$$\begin{cases} x=(z-1)\cos v \\ y=(z-1)\sin v \\ u=z-1. \end{cases}$$

∗ Si $z-1=0$, alors $x^2+y^2=(z-1)^2$ i.e. $x^2+y^2=0$ conduit à $x=y=0$. *Tout* couple (u,v) avec $u=z-1$ est alors solution du système

$$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=u+1. \end{cases}$$

et le point M est bien un point de S.

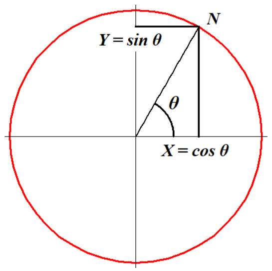
∗ Si $z-1\neq 0$, alors de $x^2+y^2=(z-1)^2$ on déduit par division par $(z-1)^2$:

$$\left(\frac{x}{z-1}\right)^2+\left(\frac{y}{z-1}\right)^2=1.$$

Or lorsque (X,Y) sont deux réels tels que $X^2+Y^2=1$, il existe un réel θ (unique à un multiple de 2π près) tel que

$$X=\cos\theta, \quad Y=\sin\theta.$$

En effet, le point N du plan de coordonnées (X,Y) se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 1:



Ainsi, il existe un réel v tel que

$$\frac{x}{z-1}=\cos v, \quad \frac{y}{z-1}=\sin v$$

et alors le couple (u,v) ave $u=z-1$ est solution du système

$$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=u+1. \end{cases}$$

et le point M est bien un point de S.

- Tout point M de Σ est donc un point de S, ce qui démontre en définitive par double inclusion que $S=\Sigma$.

Deuxième exemple

Déterminer une équation cartésienne de la surface S de paramétrisation

$$f:(u,v)\mapsto\begin{cases} x(u,v)=uv \\ y(u,v)=u \\ z(u,v)=u^2v \end{cases} \quad (u,v)\in D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

- Puisque $u^2v=uv\times u$, on voit que pour tout $(u,v)\in D$, on a
$$z(u,v)=x(u,v)\times y(u,v).$$
- Ainsi, tout point de S vérifie l'équation
$$z=xy$$
si bien que $z=xy$ est une équation cartésienne de S.
- *Bonus* L'inclusion $\Sigma\subset S$ est fausse ici.
  – En effet, en un point de Σ où $y=0$, on a $z=0$ et x peut alors prendre n'importe quelle valeur; par exemple, le point de coordonnées $(1,0,0)$ est un point de Σ.
  – Ce n'est pas le cas en un point de S: si l'ordonnée est nulle en un point $M(u,v)$ de S, c'est que $u=0$. Mais alors $x(u,v)=0\times v=0$ et $z(u,v)=0\times v=0$; ainsi, le point de coordonnées $(1,0,0)$ n'est pas un point de S.
  – On a donc trouvé un point de Σ qui n'est pas un point de S: on a l'inclusion $S\subset\Sigma$ mais on n'a pas l'égalité de ces deux surfaces.

6 Problèmes d'intersection

6.1 Intersection d'une surface et d'un plan; lignes de niveau d'une surface

C'est une thématique classique qui s'inscrit dans le souhait de visualiser une surface à travers un scan, typiquement en coupant une surface par une famille de plans parallèles.

Proposition XIX.6.7 La section de la surface Σ d'équation $F(x,y,z)=0$ par le plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ est constitué des points M de coordonnées (x,y,z) vérifiant

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ ax+by+cz+d=0. \end{cases}$$

Remarque. L'objet obtenu est en général une courbe.

Exemple

Soit Σ la surface d'équation cartésienne

$$x^2+y^2-z^2=1$$

et P le plan d'équation $z=0$. La section γ de Σ par le plan P est définie par les équations

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ z=0, \end{cases}$$

et donc par les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

On voit que γ est le cercle de centre O et de rayon 1 du plan xOy.

Définition XIX.6.13 ***Lignes de niveau d'une surface dans une direction donnée.*** Soit Σ et $\vec{N}$ un vecteur non nul. Les lignes de niveau de Σ dans la direction du vecteur $\vec{N}$ sont les sections de Σ par les plans normaux à $\vec{N}$.

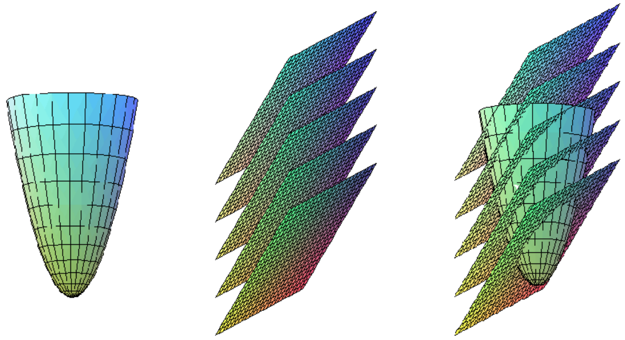
En notant $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ la famille des plans normaux à $\vec{N}$ et

$$\Sigma_\alpha = \Sigma \cap P_\alpha$$

la section de Σ par le plan P_α, Σ est *engendrée* par ces sections:

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \Sigma_\alpha.$$

En géométrie, on préfère le terme "engendré par" à "est la réunion de".



la surface *les plans* *les sections par les plans*

Remarques.

- La démonstration est évidente: tout point de Σ se trouve sur l'un des plans P_α (et un seul) donc se trouve sur l'une des sections Σ_α, d'où l'égalité
$$\Sigma = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \Sigma_\alpha.$$
- Considérer ces sections consiste à réaliser un "scanner" (au sens médical du terme) de la surface et chaque section constitue un "cliché".

Exemple

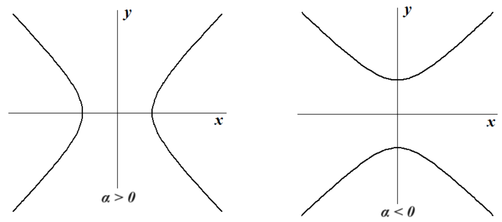
Soit Σ d'équation

$$x^2 - y^2 = z,$$

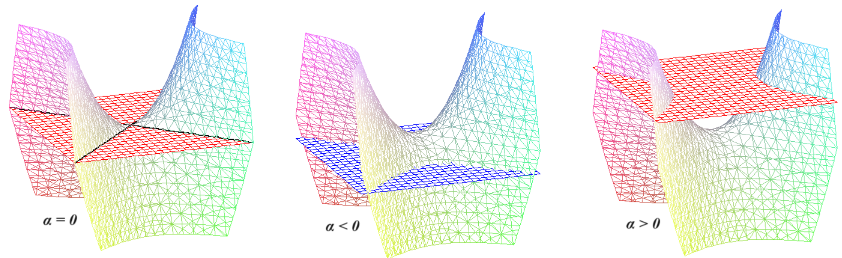
dont on veut étudier les lignes de niveaux "verticales" i.e. les lignes de niveau dans la direction du vecteur $\vec{k}$. Il s'agit donc d'étudier la section de Σ par la famille de plans $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, où P_α est le plan d'équation

$$z = \alpha.$$

- La section γ_α de Σ par le plan d'équation $z = \alpha$ est définie comme étant l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que
$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= z \\ z &= \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= \alpha \\ z &= \alpha. \end{cases}$$
- Si $\alpha = 0$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ z &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= -y \\ z &= 0. \end{cases}$$
Ces deux ensembles sont chacun une droite.
- Si $\alpha \neq 0$, $x^2 - y^2 = \alpha$ est, dans le plan z_α, l'équation d'une hyperbole équilatère dont l'allure est la suivante:

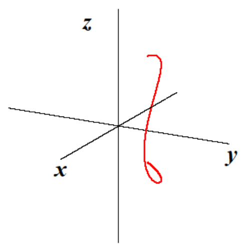


- Voici donc les différentes sections:

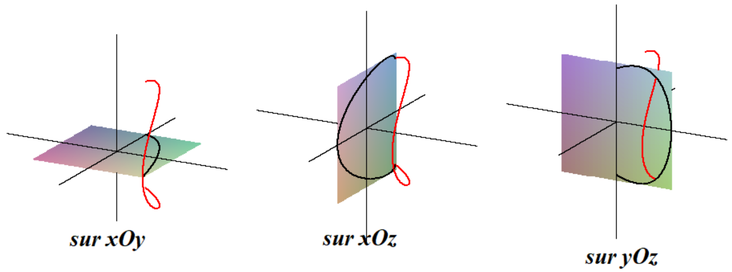


6.2 Intersection de deux surfaces: projection

Objectif. La visualisation d'une courbe 3d n'est pas chose aisée:



C'est la raison pour laquelle on s'interessera à ses projections sur les différents plans de coordonnées:



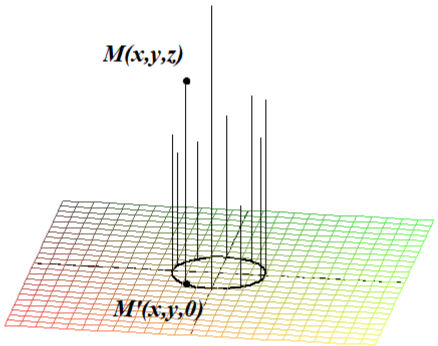
Proposition XIX.6.8 ***Coordonnées d'un projeté.*** Le projeté du point M de coordonnées (x,y,z) sur les plans respectifs xOy, xOz, yOz sont

$$(x,y,0), \quad (x,0,z) \quad (0,y,z).$$

Mais dans le contexte qui va suivre, on ne disposera pas des coordonnées explicites (x,y,z) des points que l'on sera amené à projeter mais seulement de *renseignements* sur ces coordonnées.

Exemple

Supposons qu'en tout point M de coordonnées (x,y,z) d'une courbe γ de l'espace, on ait la relation $x^2+y^2=1$. Le projeté sur le plan xOy d'un tel point est le point M' de coordonnées $(x,y,0)$. Puisque $x^2+y^2=1$, le point M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 du plan xOy.



Principe fondamental

On se donne deux surfaces Σ et Σ' d'équations respectives $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$.
On considère l'intersection $\gamma=\Sigma\cap\Sigma'$ de ces deux surfaces, qui est donc définie par les équations

$$\gamma : \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Rechercher la projection de γ sur le plan xOy, c'est obtenir des renseignements sur les projetés $M'(x,y,0)$ sur le plan xOy des points $M(x,y,z)$ de γ grâce à une relation entre x et y que l'on cherchera à mettre en évidence à travers les équations

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

en combinant ces deux lignes.

Remarques.

- Quand on cherche une relation entre x et y à partir de deux équations, on dit que l'on cherche à éliminer z entre ces deux équations.
- On pourrait résumer ce principe par:

  On sait que $M(x,y,z)$ vérifie les équations de γ. Que dire de (x,y)? Que peut-on en déduire pour point $M'(x,y,0)$?

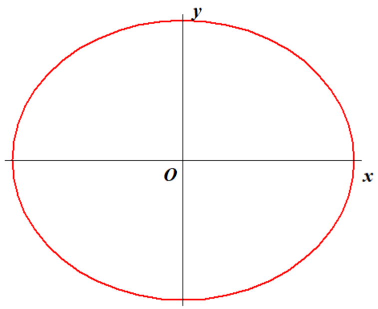
- On obtiendra bien entendu le projeté de γ sur le plan xOz en cherchant à éliminer y, etc.

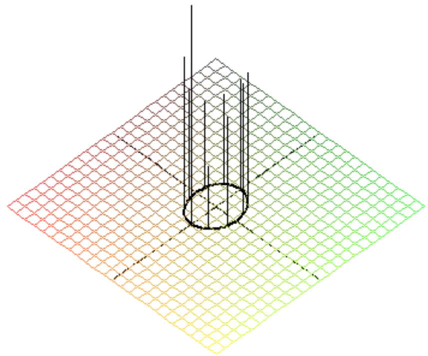
Exemple

Soit γ l'intersection des surfaces $\Sigma : x^2+y^2-z^2=0$ et $\Sigma' : x^2+2y^2+z^2=1$, qui est donc définie par

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x^2+2y^2+z^2=1. \end{cases}$$

- On recherche la projection de γ sur le plan xOy.
- On cherche donc une relation entre x et y sachant que le point de coordonnées (x,y,z) satisfait les équations de γ.
- En faisant L_1+L_2, on obtient $2x^2+3y^2=1$.
- Ainsi, les projetés $M'(x,y,0)$ des points $M(x,y,z)$ de γ satisfont $2x^2+3y^2=1$ et appartiennent donc à une ellipse du plan xOy.



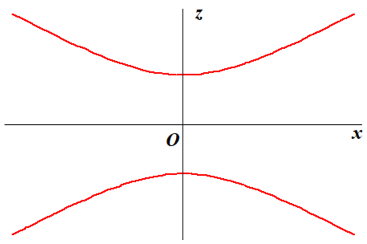


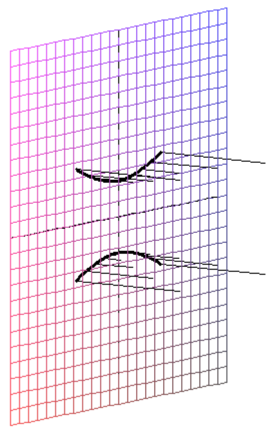
- *Remarque:* rigoureusement, la projection de γ sur le plan xOy est a priori *incluse* dans l'ellipse d'équation $2x^2+3y^2=1$. Le problème de la réciproque ne sera abordé que si l'énoncé l'exige.

- Dans la recherche de la projection sur le plan xOz, on élimine y; en effectuant L_2-2L_1, on obtient

$$-x^2+3z^2=1$$

qui, dans le plan xOz, est l'équation d'une hyperbole.

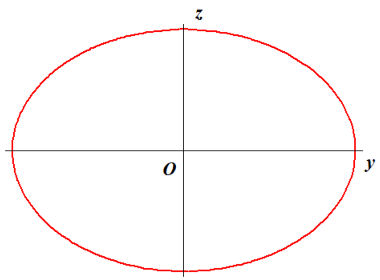


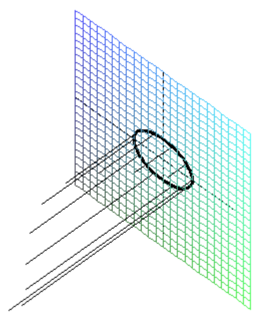


- Dans la recherche de la projection sur le plan yOz, on élimine x; en effectuant L_3-L_2, on obtient

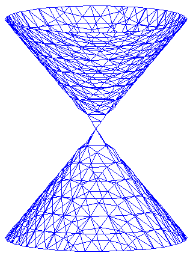
$$y^2+2z^2=1$$

qui, dans le plan yOz, est l'équation d'une ellipse.

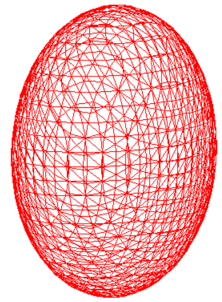




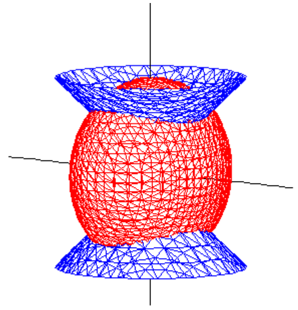
Pour information, les surfaces Σ, Σ' et leur intersection:



Σ



Σ'



$\Sigma\cap\Sigma'$

Exemple d'étude complète

Soit Γ la courbe de l'espace définie par les équations

$$\begin{cases} x^2-y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

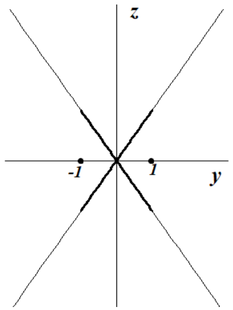
1. Démontrer que la projection de Γ sur le plan yOz est constituée de deux segments de droites, que l'on précisera.
2. Démontrer que la projection de Γ sur le plan xOz est la totalité d'une ellipse.

Réponse.

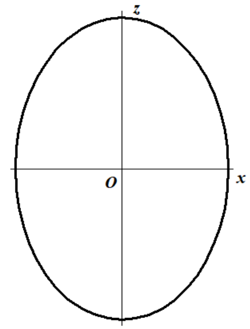
1. Le projeté sur le plan yOz du point M de coordonnées (x,y,z) est le point M' de coordonnées $(0,y,z)$. Sachant que M est un point de Γ, on a des relations entre x, y et z; on voudrait alors isoler des relations sur y et z afin d'en déduire des renseignements sur le point M'. On y parviendra en "éliminant" x entre les équations qui définissent Γ. Ici, en effectuant la différence L_1-L_2, on obtient
$$z^2-2y^2=0.$$
Ainsi, l'ensemble des projetés sur le plan yOz des points de Γ est inclus dans la courbe Γ_1 du plan yOz d'équation
$$z^2-2y^2=0.$$
En fait, Γ_1 est la réunion de deux droites de ce plan, puisque
$$z^2-2y^2=0 \iff z=y\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z=-y\sqrt{2}.$$
Réciproquement, un point de Γ_1 est-il le projeté d'un point de Γ? Soit donc un point M' de Γ_1 et $(0,y,z)$ ses coordonnées; on a donc $z^2-2y^2=0$. Alors M' est le projeté d'un point de Γ si et seulement s'il existe un réel x tel que
$$\begin{cases} x^2-y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{6.1}$$
donc en remplaçant L_1 par L_1-L_2 si et seulement si
$$\begin{cases} z^2-2y^2=0 \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$
ce qui se produit si et seulement s'il existe un réel x tel que
$$x^2=1-y^2,$$
ce qui est possible si et seulement si $1-y^2\geq 0$ donc si et seulement si $-1\leq y\leq 1$. Ainsi,

- si $y > 1$ ou $y < -1$, il n'existe aucun x satisfaisant $x^2 = 1 - y^2$ et donc M' n'est pas un point du projeté.
- Si $-1 \leq y \leq 1$, il existe un réel x vérifiant $x^2 = 1 - y^2$ (et même deux qui sont opposés), ce qui garantit l'existence d'une solution à (6.1) et donc l'existence d'un point M de Γ dont M' est le projeté sur le plan yOz.

En définitive, le projeté de Γ sur le plan yOz est constitué des points des deux droites définissant Γ_1 vérifiant $y \in [-1, 1]$. Ce sont donc des segments de droite:



2. Le projeté sur le plan xOz du point M de coordonnées (x, y, z) est le point M' de coordonnées $(x, 0, z)$. Sachant que M est un point de Γ, on a des relations entre x, y et z; on voudrait alors isoler des relations sur x et z afin d'en déduire des renseignements sur le point M'. Ici, en effectuant la somme des deux équations qui définissent Γ, on obtient :
$$2x^2 + z^2 = 1.$$
Ainsi, l'ensemble des projetés sur le plan xOz des points de Γ est inclus dans la courbe Γ_2 du plan xOz d'équation
$$2x^2 + z^2 = 1.$$
Réciproquement, un point de Γ_2 est-il le projeté d'un point de Γ? Soit donc un point M' de Γ_2 et $(x, 0, z)$ ses coordonnées; on a donc $2x^2 + z^2 = 1$. Alors M' est le projeté d'un point de Γ si et seulement s'il existe un réel y tel que
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \tag{6.2}$$
donc, en remplaçant L_1 par $L_1 + L_2$, si et seulement s'il existe un réel y tel que
$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$
ce qui se produit si et seulement s'il existe un réel y tel $x^2 + y^2 = 1$ i.e.
$$y^2 = 1 - x^2,$$
ce qui est possible si et seulement si $1 - x^2 \geq 0$. Or, du fait que $2x^2 + z^2 = 1$ et $z^2 \geq 0$, on a
$$2x^2 \leq 2x^2 + z^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
et à plus forte raison, la contrainte $-1 \leq x \leq 1$ est satisfaite. Ainsi, en tout point $M'(x, 0, z)$ de Γ_2, on a $-1 \leq x \leq 1$, ce qui garantit l'existence d'une solution à (9.5) et donc l'existence d'un point M de Γ dont M' est le projeté sur le plan xOz.
En conclusion, la projection de Γ sur le plan xOz est constituée de la totalité de la courbe Γ_2 d'équation
$$2x^2 + z^2 = 1$$
du plan xOz. En rapportant ce plan au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{k})$, on voit que Γ_2 qui est une ellipse de centre O et de grand axe Oz.

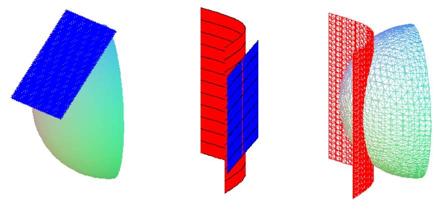


6.3 Courbe obtenue par intersection de deux surfaces: propriétés locales

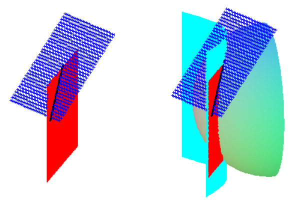
Théorème XIX.6.9 On se donne deux surfaces Σ et Σ' d'équations respectives $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$ et on suppose que leur intersection $\Sigma \cap \Sigma'$ est non vide.

- Soit M un point de leur intersection, que l'on suppose être régulier pour Σ et pour Σ'. Les plans tangents à Σ et Σ' en M sont notés respectivement P, P'.
- Si P et P' sont sécants, ce qui se produit si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, G(M)$ sont non colinéaires, alors $\Sigma \cap \Sigma'$ se présente localement comme un arc de courbe dont la tangente en M est la droite D, intersection des plans P et P'; la droite D est dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, G(M)$.

La démonstration est admise.



Σ et P Σ' et P' $\Sigma \cap \Sigma'$



$P \cap P'$

Exemple

On considère les surfaces Σ d'équation $2x^2+y^2=z$ et Σ' d'équation $-2x^2+2y^2=z$. Démontrer que le point $A(1,2,6)$ est un point commun à Σ et Σ' et que $\Sigma\cap\Sigma'$ est au voisinage de A une courbe régulière γ dont on précisera la tangente.

- Les coordonnées de A satisfont bien les équations de Σ et Σ'. En notant

$$F:(x,y,z)\mapsto 2x^2+y^2-z,\quad G:(x,y,z)\mapsto -2x^2+2y^2-z,$$

 on a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(x,y,z)=(4x,2y,-1),\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(x,y,z)=(-4x,4y,-1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(A)=(4,4,-1),\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(A)=(-4,8,-1).$$

 Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc les surfaces sont sécantes en A et $\gamma=\Sigma\cap\Sigma'$ est alors localement une courbe paramétrée dont la tangente est l'intersection des plans tangents à Σ et Σ' en A.
- Comme ces plans ont pour vecteur normal respectif $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(A)$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(A)$, la tangente à γ en A est la droite passant par A et dirigée par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(A)\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G(A)=(4,8,48).$$

7 Courbe tracée sur une surface

Définition XIX.7.14 Soit S une surface, paramétrée ou définie par une équation cartésienne, et γ une courbe de l'espace.
On dit que γ est tracée sur S si γ est incluse dans S autrement dit si tout point de γ appartient à S.

Remarque. Dire qu'une courbe γ est *tracée* sur une surface S est juste une manière plus géométrique de dire que $\gamma\subset S$.

Premier exemple

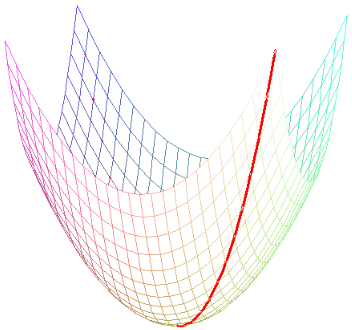
La courbe γ de paramétrisation

$$f:t\mapsto\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=t\\ z(t)=t^2\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

est tracée sur la surface S d'équation cartésienne

$$x^2+y^2=2z$$

puisque pour tout $t\in\mathbb{R}$, les coordonnées (t,t,t^2) du point de paramètre t de γ satisfont l'équation cartésienne de S.



Deuxième exemple

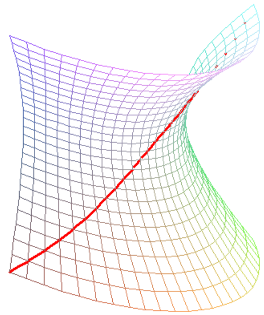
La courbe γ de paramétrisation

$$F:t\mapsto\begin{cases}x(t)=\mathrm{ch}\,t\ \cos t\\ y(t)=\mathrm{ch}\,t\ \sin t\\ z(t)=\mathrm{sh}\,t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

est tracée sur la surface S de représentation paramétrique

$$f:(u,v)\mapsto\begin{cases}x(u,v)=\mathrm{ch}\,u\ \cos v\\ y(u,v)=\mathrm{ch}\,u\ \sin v\\ z(u,v)=\mathrm{sh}\,u\end{cases}\qquad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

puisque pour tout $t\in\mathbb{R}$, le point de paramètre t de γ est le point de paramètres (t,t) de S.

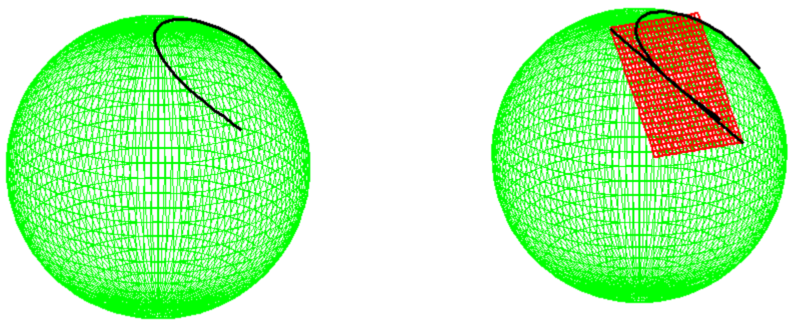


Proposition XIX.7.10 ***Tangente à une courbe tracée sur une surface.*** Soit γ une courbe tracée sur une surface S et M un point de γ.

- On suppose que M est un point régulier de γ et on note D la tangente à γ en M
- et on suppose que M est un point régulier de S et on note P le plan tangent à S en M.

Alors D est incluse dans P.

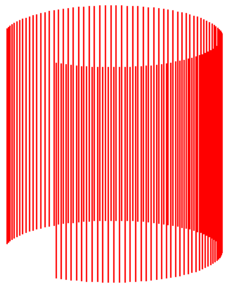
Démonstration 117



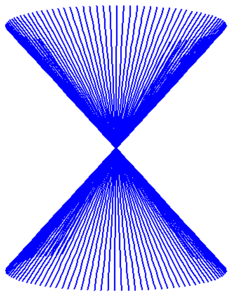
8 Surfaces réglées

Définition XIX.8.15 Une surface S est dite *réglée* si elle est la réunion d'une famille de droites, qui sont alors appelées les génératrices.
En termes ensemblistes, une surface S est réglée dès lors que pour tout point M de S, il existe une droite D passant par M et qui est incluse dans S.

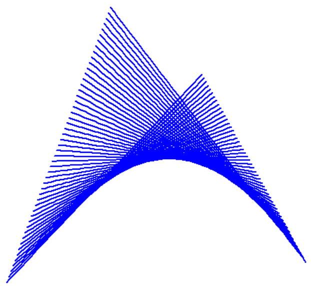
Remarque. On dit aussi qu'une surface est réglée lorsqu'elle est engendrée par une famille de droites.



génératrices: droites verticales, parallèles



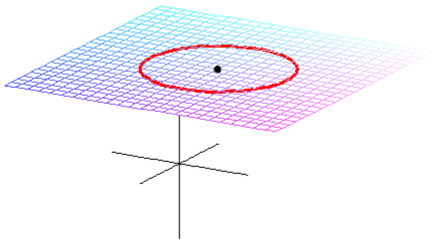
génératrices: droites sécantes



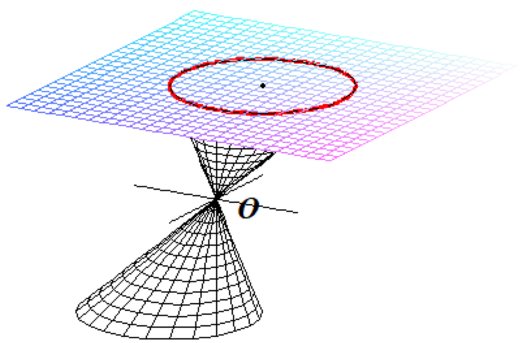
génératrices: elles forment un taco chips

Exemple

De par sa définition même, une surface peut être d'emblée réglée, comme la surface S obtenue par réunion de toutes les droites (c'est donc une surface réglée) qui passent par l'origine et qui rencontrent le cercle centré au point $(0, 1, 0)$ et de rayon 1 du plan d'équation $z = 1$:



le cercle



la surface S

Comment prouver qu'une surface paramétrée est réglée?

Typiquement, par considération de ses courbes coordonnées.

Exemple

La surface S de représentation paramétrique

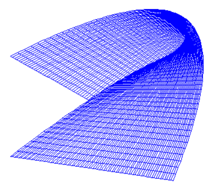
$$f : (u, v) \mapsto \begin{cases} u^2 \\ uv \\ 2u + v \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

est réglée pour la raison suivante:

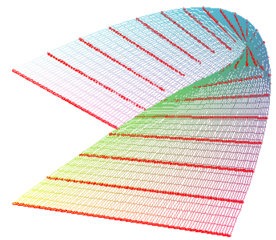
- pour tout u fixé, on voit que la courbe coordonnée

$$C_u : v \mapsto f(u, v) = \begin{cases} u^2 &= u^2 + v \times 0 \\ uv &= 0 + v \times u \\ 2u + v &= 2u + v \times 1 \end{cases}$$

  est une représentation paramétrique d'une droite (plus précisément de la droite passant par le point de coordonnées $(u^2, 0, 2u)$ et dirigée par le vecteur $(0, u, 1)$).
- La surface S étant la réunion de ses courbes coordonnées $(C_u)_{u \in \mathbb{R}}$, on en déduit que S est bien engendrée par une famille de droites.



la surface S



quelques génératrices

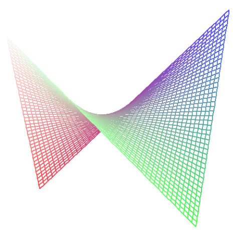
Comment prouver qu'une surface définie par une équation cartésienne est réglée?

Typiquement, en réalisant un "scanner" (au sens médical) de la surface dans une direction convenable et en constatant que chaque "cliché" est une droite. Plus précisément, en démontrant que les lignes de niveau de la surface dans une certaine direction sont des droites: soit Σ une surface (ou tout objet de l'espace) et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons la section

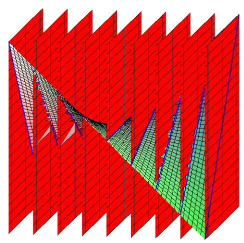
$$\Sigma_\alpha = \Sigma \cap P_\alpha$$

de Σ par P_α, où les (P_α) constituent la famille des plans normaux à une direction donnée; alors

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \Sigma_\alpha.$$



Σ



découpage de Σ en tranches

Premier exemple

Démontrer que la surface Σ d'équation $z = xy^2$ est une surface réglée.

- Considérons les lignes de niveau de Σ dans la direction du vecteur $\vec{\jmath}$ et donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons le plan P_α d'équation cartésienne $y = \alpha$.
- La section $\Sigma_\alpha = \Sigma \cap P_\alpha$ de Σ par le plan P_α est définie par les équations

$$\begin{cases} z = xy^2 \\ y = \alpha \end{cases}$$

donc par les équations

$$\begin{cases} z = \alpha^2 x \\ y = \alpha. \end{cases}$$

  – Pour $\alpha = -2$ par exemple, Σ_{-2} est définie par les équations

$$\begin{cases} z = 4x \\ y = -2. \end{cases}$$

  On reconnaît clairement un système d'équations cartésiennes d'une droite. Ainsi, Σ_{-2} est une droite.

  – Pour $\alpha = 0$ par exemple, Σ_0 est définie par les équations

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

  On reconnaît clairement un système d'équations cartésiennes d'une droite. Ainsi, Σ_0 est une droite.

On voit que pour tout réel α, le système d'équations définissant Σ_α est un système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace et donc Σ_α est une droite:

  – en prenant x comme paramètre,

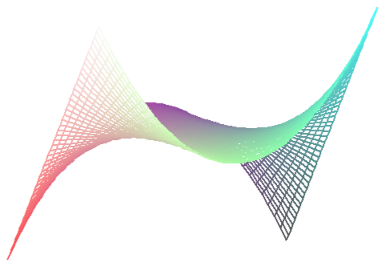
$$x \mapsto \begin{cases} x = x \\ y = \alpha \\ z = \alpha^2 x \end{cases}$$

  est une paramétrisation de la droite passant par le point de coordonnées $(0, \alpha, 0)$ et dirigée par le vecteur $(1, 0, \alpha^2)$.

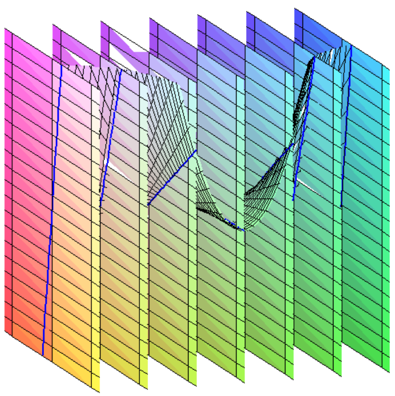
- Enfin, puisque

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \Sigma_\alpha,$$

on en déduit que Σ est engendrée ("est la réunion de") par une famille de droites et donc Σ est une surface réglée.



$\boldsymbol{\Sigma}$



découpage de Σ en tranches

Deuxième exemple

Démontrer que la surface Σ d'équation $z = (x + 2y)^2$ est une surface réglée.

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons le plan P_α d'équation cartésienne $x + 2y = \alpha$: les plans P_α constituent la famille des plans normaux au vecteur

$$\vec{N} = (1, 2, 0).$$

- La section $\Sigma_\alpha = \Sigma \cap P_\alpha$ (on considère donc les lignes de niveau de Σ dans la direction du vecteur $\vec{N}$) de Σ par le plan P_α est définie par les équations

$$\begin{cases} x + 2y = \alpha \\ z = (x + 2y)^2 \end{cases}$$

donc par les équations

$$\begin{cases} x + 2y = \alpha \\ z = \alpha^2. \end{cases}$$

On voit que pour tout réel α, le système d'équations définissant Σ_α est un système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace et donc Σ_α est une droite:

  – en prenant y comme paramètre,

$$y \mapsto \begin{cases} x = -2y + \alpha \\ y = y \\ z = \alpha^2 \end{cases}$$

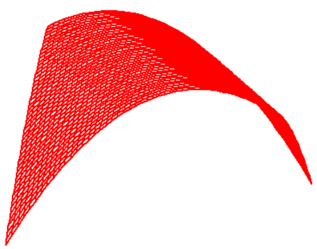
  est une paramétrisation de la droite D_α passant par le point de coordonnées $(\alpha, 0, \alpha^2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-2, 1, 0)$.

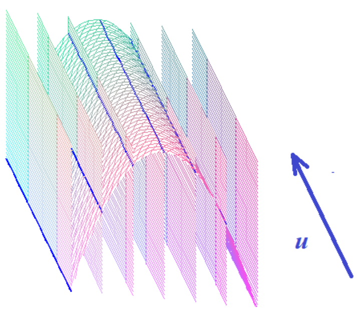
- Enfin, puisque

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \Sigma_\alpha,$$

on en déduit que Σ est engendrée par une famille de droites et donc Σ est une surface réglée.

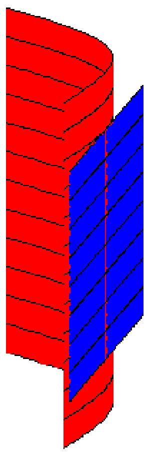
- ***Remarque.*** Toutes les génératrice $(D_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ de Σ (toutes les droites dont Σ est la réunion) sont dirigées par le vecteur $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ i.e. toutes ses génératrices sont parallèles: on dit alors que Σ est un ***cylindre*** de direction $\vec{u}$.





Plan tangent à une surface réglée

Théorème XIX.8.11 Soit S une surface réglée et M un point régulier de S. Alors le plan tangent à S en M contient la génératrice passant par ce point.



Démonstration. C'est un cas particulier du résultat selon lequel lorsqu'une courbe est tracée sur une surface, la tangente à la courbe en un point qui est régulier aussi bien pour la courbe que pour la surface, est incluse dans le plan tangent à la surface en ce point. La courbe en jeu, ici, est bien entendu la génératrice passant par le point considéré qui, de manière évidente, est sa propre tangente.

Exemple

On reprend la surface réglée S précédente, de représentation paramétrique

$$f : (u,v) \mapsto \begin{cases} u^2 \\ uv \\ 2u+v \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

dont les génératrices sont les courbes coordonnées $(C_u)_{u\in\mathbb{R}}$ où pour tout $u \in \mathbb{R}$, C_u est la droite de paramétrisation

$$v \mapsto f(u,v) = \begin{cases} u^2 &=& u^2 + v \times 0 \\ uv &=& 0 + v \times u \\ 2u+v &=& 2u + v \times 1 \end{cases}$$

qui est la droite passant par le point de coordonnées $(u^2, 0, 2u)$ et dirigée par le vecteur $(0, u, 1)$.

- On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= (2u, v, 2) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) &= (0, u, 1) \\ \vec{n}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \\ &= (v-2u, -2u, 2u^2) \end{aligned}$$

  qui est le vecteur nul si et seulement si $u = v = 0$. Ainsi, tous les points de S sont réguliers, sauf le point de paramètres $(0,0)$.
- Soit $M(u_0, v_0)$ un point régulier de S (donc $(u_0, v_0) \neq (0,0)$). Ce point appartient à la génératrice C_{u_0} : donc elle passe par M et elle est dirigée par le vecteur $(0, u_0, 1)$.
- Le plan tangent à S en M est le plan qui passe par M et qui est dirigé par les vecteurs

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\Big)$$

  c'est à dire par

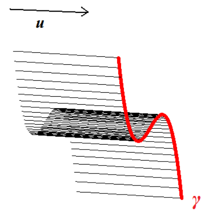
$$\big((2u_0, v_0, 2), (0, u_0, 1)\big).$$

- On voit donc que la génératrice C_{u_0} passant par M est incluse dans le plan tangent à S en ce point.

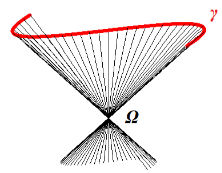
9 Mise en équation de certaines surfaces réglées

Une surface réglée est par définition une surface engendrée par une famille de droites (appelées génératrices). On parle de mise en équation dès lors que l'on cherche une équation cartésienne d'une surface réglée dont les génératrices sont définies par des conditions géométriques, comme par exemple:

- droites parallèles à une direction donnée (dirigées par un vecteur donné) et rencontrant une courbe donnée (on obtient alors une surface appelée *cylindre*)

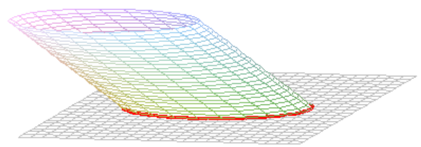


- droites passant par un point donné et rencontrant une courbe donnée (on obtient alors une surface appelée *cône*).



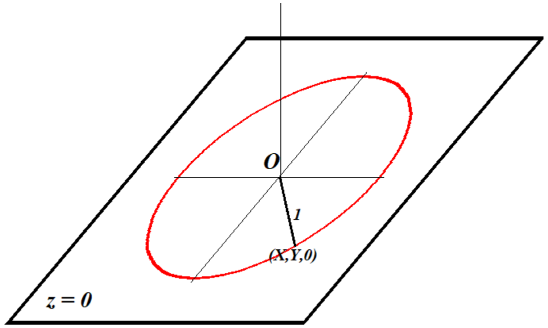
Premier exemple

Déterminer une équation cartésienne de la surface réglée S engendrée par les droites dirigées par le vecteur $\vec{u} = (1,1,1)$ et passant par un point du cercle Γ, inclus dans le plan d'équation $z = 0$, de centre O et de rayon 1.

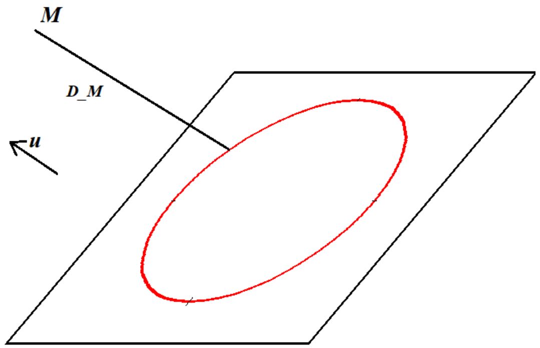


- De façon évidente, un point de l'espace de coordonnées (X,Y,Z) appartient à Γ si et seulement si

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Z = 0. \end{cases}$$



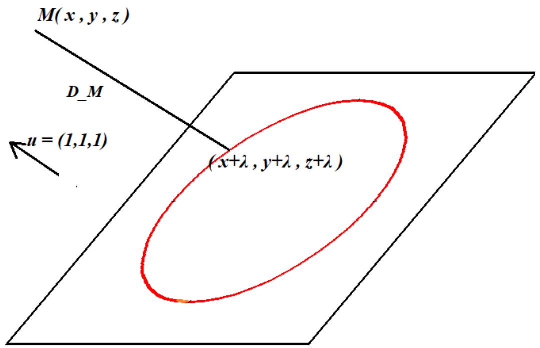
- Soit M un point de l'espace et (x, y, z) ses coordonnées. Alors M appartient à S si et seulement si, par définition, M appartient à l'une des génératrices de S donc si et seulement si M appartient à une droite dirigée par $\vec{u}$ et qui passe par un point de Γ donc si et seulement si la droite D_M passant par M et dirigée par $\vec{u}$ passe par un point de Γ.



- Dans la mesure où la droite D_M admet la paramétrisation

$$\lambda \mapsto \begin{cases} x+\lambda \\ y+\lambda \\ z+\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

le point M appartient donc à S si et seulement s'il existe un réel λ tel que le point de coordonnées $(x+\lambda, y+\lambda, z+\lambda)$ appartienne à Γ.



- Ainsi, M appartient à S si et seulement s'il existe un réel λ tel que

$$\begin{cases} (x+\lambda)^2 + (y+\lambda)^2 = 1 \\ z+\lambda = 0. \end{cases}$$

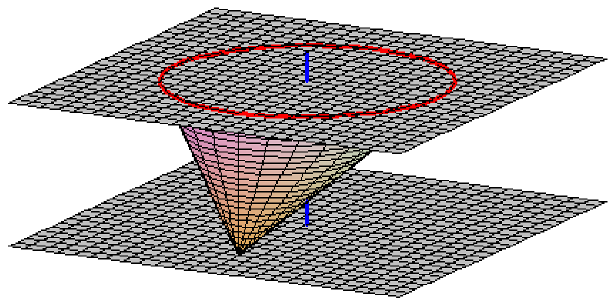
Une équation cartésienne de S s'obtient par élimination du paramètre λ : L_2 donne $\lambda = -z$ qui, dans L_1, conduit à

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1.$$

- ***Remarque.*** La surface Σ est un *cylindre de direction* $\vec{u}$, qui est le nom donné aux surfaces réglées dont toutes les génératrices ont la même direction $\vec{u}$.

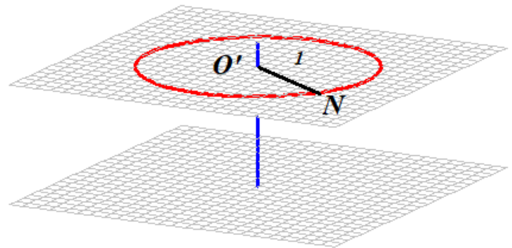
Deuxième exemple

Déterminer une équation cartésienne de la surface réglée S engendrée par les droites passant par le point Ω de coordonnées $(1, 0, 0)$ et passant par un point du cercle Γ, inclus dans le plan d'équation $z = 1$, centré sur l'axe Oz et de rayon 1.

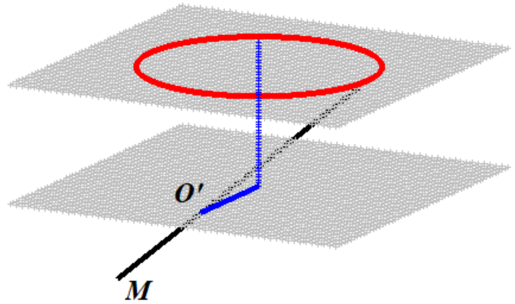


- De façon évidente, le cercle Γ est centré en O', point de coordonnées $(0, 0, 1)$; donc un point N de l'espace de coordonnées (X, Y, Z) appartient à Γ si et seulement si

$$\begin{cases} O'N^2 = 1 \\ Z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Z = 1. \end{cases}$$



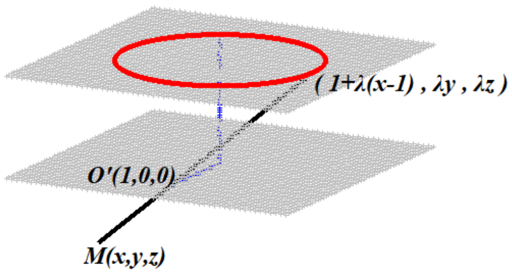
- Soit M un point de l'espace et (x, y, z) ses coordonnées. Alors M appartient à S si et seulement si, par définition, M appartient à l'une des génératrices de S donc si et seulement si M appartient à une droite passant par Ω et qui passe par un point de Γ donc si et seulement si la droite (ΩM), celle qui passe par Ω et par M, passe par un point de Γ.



- Dans la mesure où la droite (Ω_M) passe par Ω et est dirigée par $\overrightarrow{\Omega M} = (x-1, y, z)$, elle admet la paramétrisation

$$\lambda \mapsto \begin{cases} 1+\lambda(x-1) \\ \lambda y \\ \lambda z \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

le point M appartient donc à S si et seulement s'il existe un réel λ tel que le point de coordonnées $(1+\lambda(x-1), \lambda y, \lambda z)$ appartienne à Γ.



- Ainsi, M appartient à S si et seulement s'il existe un réel λ tel que

$$\begin{cases} (1+\lambda(x-1))^2 + (\lambda y)^2 = 1 \\ \lambda z = 1. \end{cases}$$

Une équation cartésienne de S s'obtient par élimination du paramètre λ. En multipliant les deux membres de L_1 par z^2 et puisque L_2 donne $\lambda^2 z^2 = 1$ et compte tenu du fait que

$$\begin{aligned} z^2(1+\lambda(x-1))^2 &= \big(z(1+\lambda(x-1))\big)^2 \\ &= (z+z\lambda(x-1))^2 \\ &= (z+(x-1))^2 \\ z^2(\lambda y)^2 &= z^2\lambda^2 y^2 \\ &= y^2, \end{aligned}$$

on obtient

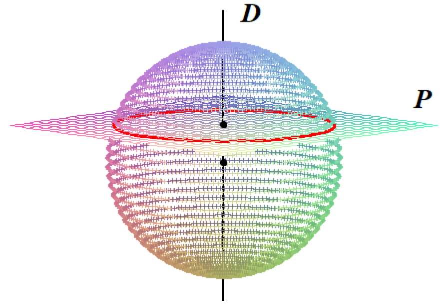
$$(z+x-1)^2 + y^2 = z^2.$$

- ***Remarque.*** La surface Σ est un *cône de sommet* Ω, qui est le nom donné aux surfaces réglées dont toutes les génératrices passent par le point Ω.

10 Surfaces de révolution

Un cercle de l'espace est l'intersection (lorsqu'elle est non vide) d'une sphère S avec un plan P.
- L'axe D du cercle est la normale au plan P passant par le centre de la sphère.
- Le centre de ce cercle est le projeté orthogonal du centre de la sphère sur le plan P.
- Le rayon de ce cercle est $\sqrt{R^2 - h^2}$, où R est le rayon de la sphère et h est la distance du centre de la sphère au centre du cercle.

Remarque. La valeur du rayon du cercle est évidemment une conséquence du théorème de Pythagore.



Proposition XIX.10.12 ***Cas particulier important.*** Étant donnés un réel z_0 et un réel $r > 0$, les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

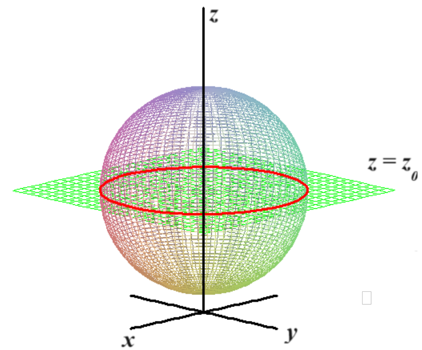
définissent un cercle: le cercle d'axe $(O; \vec{k})$, centré au point de coordonnées $(0, 0, z_0)$ et de rayon r.

Ces deux équations définissent en effet l'intersection de la sphère de centre $\Omega(0, 0, z_0)$ et de rayon r, dont une équation est

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

avec le plan d'équation $z = z_0$, puisque :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-z_0)^2 = r^2 \\ \\ z = z_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \\ z = z_0. \end{cases}$$



Une paramétrisation de ce cercle est

$$t \longmapsto \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = z_0 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Bien entendu, on peut échanger les rôles joués par x, y et z; ainsi,

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ x = x_0 \end{cases}$$

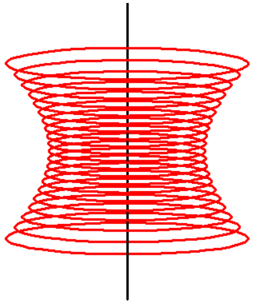
définissent des cercles, d'axes respectifs $(O;\vec{\jmath})$ et $(O;\vec{\imath})$.

Les différentes caractérisations ci-dessous des surfaces de révolution sont importantes. D'abord une caractérisation géométrique, tout à fait naturelle:

Définition XIX.10.16 Une surface Σ est une surface de révolution d'axe la droite D lorsque Σ est engendrée par une famille de cercles qui ont tous D pour axe.

Ces cercles sont appelés les *parallèles* de Σ.

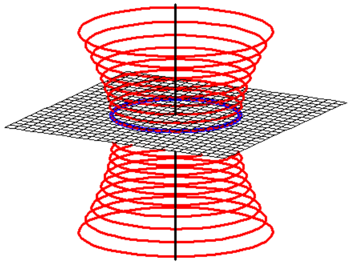
Bien entendu, "engendrée par" signifie "est la réunion de".



La caractérisation suivante est souvent appliquée dans la pratique (cf. les deux exemples ci-dessous):

Définition XIX.10.17 Une surface Σ est une surface de révolution d'axe la droite D lorsque la section de Σ par n'importe quel plan orthogonal à D est un cercle d'axe D (éventuellement l'ensemble vide).

En effet, les sections en jeu dans ce critère sont en fait les lignes de niveau de Σ dans la direction d'un vecteur directeur de D et, comme on le sait, une surface est engendrée par ses lignes de niveau dans une direction donnée.



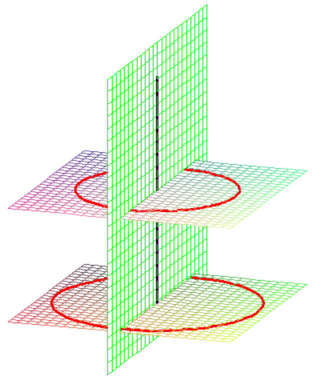
Et pour terminer (démonstration laissée à titre d'exercice):

Définition XIX.10.18 Une surface Σ est une surface de révolution d'axe la droite D lorsque Σ est invariante par toute rotation d'axe D.

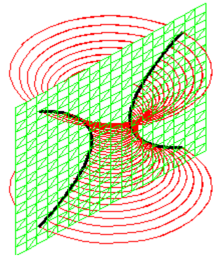
La définition suivante est essentielle:

Définition XIX.10.19 La section d'une surface de révolution Σ d'axe D par un plan contenant D est appelée une *méridienne* de Σ.

Un plan contenant d'axe D va rencontrer tous les cercles d'axe D :



Une méridienne va donc rencontrer toutes les parallèles à Σ :



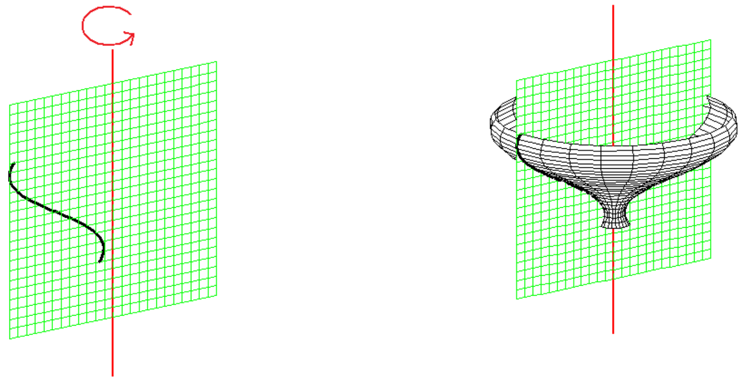
La connaissance d'une méridienne et de l'axe de révolution permet de reconstituer toute la surface Σ :

Proposition XIX.10.13 Soit Σ une surface de révolution d'axe D et γ une méridienne de Σ.

Alors est engendrée par la rotation de γ autour de D.

Ce qui signifie que tout point de Σ est obtenu par rotation d'un point de γ autour de γ. En effet, on reconstitue une surface de révolution en formant tous les cercles qui la composent. Or un cercle d'axe donné peut être reconstitué dès lors que l'on connaît un seul de ses points: il suffit d'effectuer la révolution de ce point autour de l'axe.

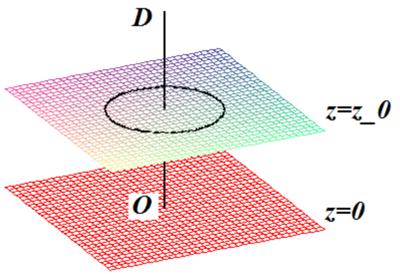
On effectuera donc la *révolution* de la méridienne autour de l'axe de révolution :



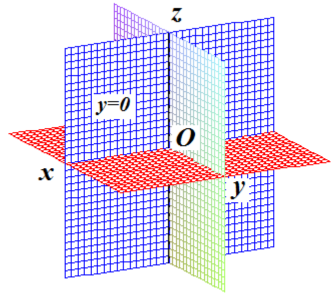
Premier exemple

La surface Σ d'équation $x^2+y^2-z^2=1$ est une surface de révolution d'axe $D=(O,\vec{k})$, car:

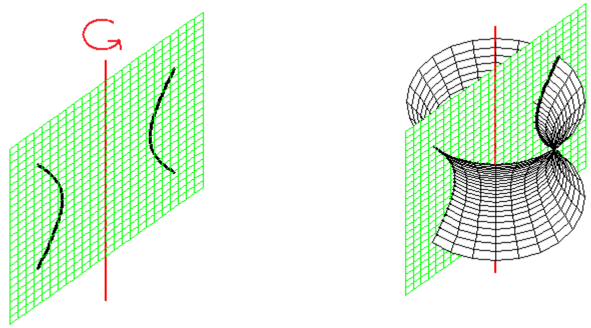
- Un plan P orthogonal à l'axe $(O,\vec{k})$ est un plan d'équation $z=z_0$ où z_0 est une constante. La section de Σ par P est alors définie par les équations
$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=1 \\ \\ z=z_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1+z_0^2 \\ \\ z=z_0. \end{array}\right.$$
Il est clair (cf. rappel ci-dessus) que cette section est le cercle de rayon $\sqrt{1+z_0^2}$ centré en $(0,0,z_0)$ du plan P.



- La section de Σ par tout plan orthogonal à l'axe $(O,\vec{k})$ est donc un cercle et donc Σ est par définition une surface de révolution d'axe $(O,\vec{k})$.
- Une méridienne est obtenue en coupant Σ par un plan contenant $(O,\vec{k})$. Un tel plan est par exemple le plan d'équation $y=0$:



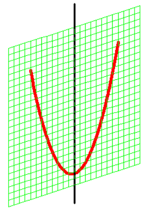
ce qui donne la méridienne γ définie par les équations
$$\gamma : \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=1 \\ \\ y=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2-z^2=1 \\ \\ y=0. \end{array}\right.$$
Cette méridienne est une hyperbole équilatère d'axe focal Ox et la surface Σ, obtenue par rotation de cette hyperbole autour de l'axe Oz, est appelée hyperboloïde de révolution:

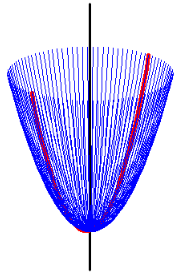


Deuxième exemple

La surface Σ d'équation $x^2+y^2-z=1$ est une surface de révolution d'axe $D=(O,\vec{k})$, car:

- Un plan P orthogonal à l'axe $(O,\vec{k})$ est un plan d'équation $z=z_0$ où z_0 est une constante. La section de Σ par P est alors définie par les équations
$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-z=1 \\ \\ z=z_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1+z_0 \\ \\ z=z_0. \end{array}\right.$$
Il est clair que cette section (cf. rappel ci-dessus):
  - est le cercle de rayon $\sqrt{1+z_0}$ centré en $(0,0,z_0)$ du plan P lorsque $1+z_0\geq 0$,
  - vide lorsque $1+z_0<0$.
- La section de Σ par tout plan orthogonal à l'axe $(O,\vec{k})$ est donc un cercle ou l'ensemble vide et donc Σ est par définition une surface de révolution d'axe $(O,\vec{k})$.
- Une méridienne est obtenue en coupant Σ par un plan contenant $(O,\vec{k})$. Un tel plan est par exemple le plan d'équation $y=0$, ce qui donne la méridienne γ définie par les équations
$$\gamma : \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-z=1 \\ \\ y=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2=1+z \\ \\ y=0. \end{array}\right.$$
Cette méridienne est une parabole d'axe Oz et la surface Σ, obtenue par rotation de cette parabole autour de l'axe Oz, est appelée paraboloïde de révolution:



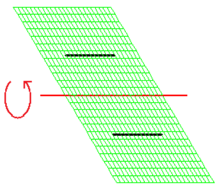


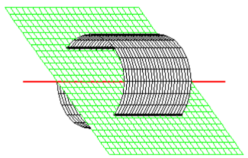
une méridienne — la surface de révolution

Troisième exemple

La surface Σ d'équation $x^2+z^2=1$ est une surface de révolution d'axe $D=(O,\vec{\jmath})$, car:

- la section de Σ par un plan P orthogonal à l'axe $(O,\vec{\jmath})$, donc par un plan d'équation $y=y_0$ où y_0 est une constante, est définie par les équations
$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=y_0 \end{cases}$$
qui est le cercle de rayon 1 centré en $(0,y_0,0)$ du plan P (cf. début de ce paragraphe).
- Donc Σ est bien une surface de révolution d'axe $(O,\vec{\jmath})$.
- Une méridienne est obtenue en coupant Σ par un plan contenant $(O,\vec{\jmath})$ comme le plan d'équation $z=0$, ce qui donne la méridienne γ définie par les équations
$$\gamma:\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z^2=1 \\ x=0, \end{cases}$$
c'est à dire
$$\begin{cases} z=1 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z=-1 \\ x=0 \end{cases}$$
- Cette méridienne est la réunion de deux droites verticales et la surface obtenue est appelée *cylindre de révolution* :

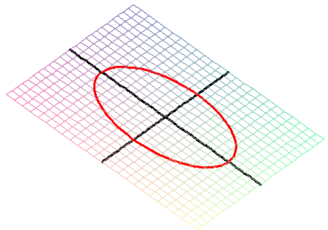


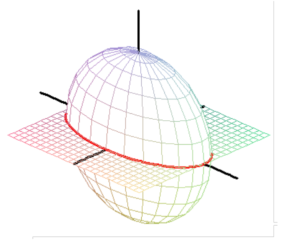


Quatrième exemple

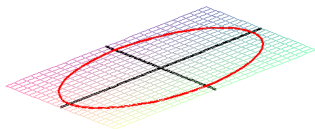
La surface Σ d'équation
$$4x^2+y^2+z^2=1$$
est une surface de révolution d'axe $D=(O,\vec{\imath})$, car:

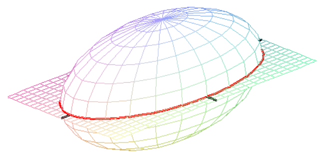
- la section de Σ par un plan P orthogonal à l'axe $(O,\vec{\imath})$, donc par un plan d'équation $x=x_0$ où x_0 est une constante, est définie par les équations
$$\begin{cases} 4x^2+y^2+z^2=1 \\ x=x_0 \end{cases}$$
c'est à dire
$$\begin{cases} y^2+z^2=1-4x_0^2 \\ x=x_0. \end{cases}$$
D'après les rappels du début de ce paragraphe, on reconnaît:
  - le cercle de rayon $\sqrt{1-4x_0^2}$ centré en $(x_0,0,0)$ du plan P (cf. début de ce paragraphe) lorsque $1-4x_0^2\geq 0$,
  - l'ensemble vide sinon.
- Donc Σ est bien une surface de révolution d'axe $(O,\vec{\imath})$.
- Une méridienne est obtenue en coupant Σ par un plan contenant $(O,\vec{\imath})$ comme le plan d'équation $z=0$, ce qui donne la méridienne γ définie par les équations
$$\gamma:\begin{cases} 4x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2+y^2=1 \\ z=0. \end{cases}$$
- Cette méridienne est une ellipse centrée en O et de grand axe (Oy) et la surface obtenue est appelée *ellipsoïde de révolution aplati* (le grand axe n'étant pas l'axe de révolution) :





Il est à noter que la surface Σ' d'équation
$$\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$$
est également une surface de révolution d'axe $D=(O,\vec{\imath})$ mais cette fois, une méridienne est l'ellipse définie par les équations
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2=1 \\ z=0. \end{cases}$$
et la surface obtenue est appelée *ellipsoïde de révolution allongé* (le grand axe est l'axe de révolution) :

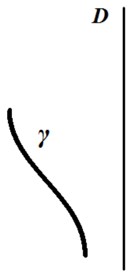


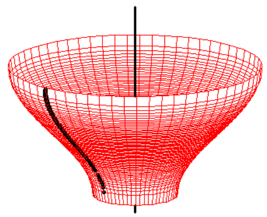


11 Mise en équation d'une surface de révolution

11.1 Obtention d'une équation cartésienne

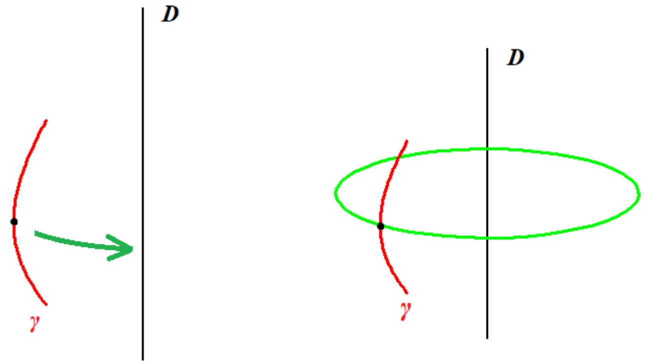
On considérera dans cette section: une droite D, une courbe γ et la surface de révolution Σ engendrée par rotation de γ autour de D.



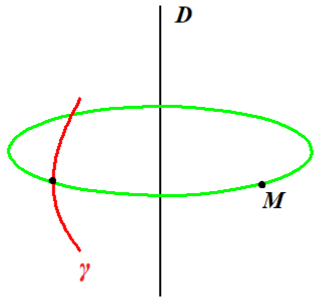


Pour bien comprendre la mise en équation qui va suivre, il est nécessaire de bien saisir ces différentes étapes:

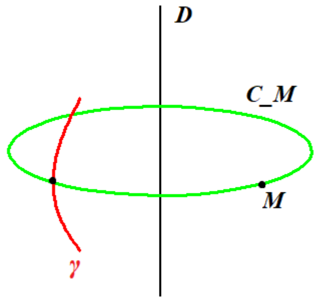
- Dans la révolution de γ autour de D, chaque point de γ produit un cercle (une parallèle de Σ):



- Un point M de l'espace appartient à Σ si et seulement s'il appartient à l'une des parallèles constituant Σ:

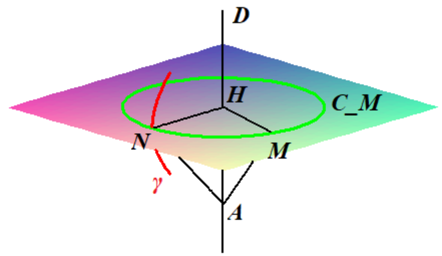


- Donc un point M de l'espace appartient à Σ si et seulement si le cercle C_M, qui est le cercle d'axe D passant par M, rencontre γ:



- Donc un point M de l'espace appartient à Σ si et seulement si le cercle C_M,
  - qui est le cercle d'axe D passant par M
  - et dont le centre est le projeté orthogonal H de M sur D,

  passe par un point N de γ:



- Ceci se produit si et seulement s'il existe un point N de γ appartenant au plan normal à D passant par M et tel que $HM^2 = HN^2$, donc si et seulement si
  - $\langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle = 0$, condition assurant l'orthogonalité de (MN) avec D et donc le fait que le point N se trouve sur le plan normal à D passant par M,
  - $AM^2 = AN^2$ (ce qui équivaut à $HM^2 = HN^2$ en appliquant Pythagore dans les triangles rectangles AHM et AHN), condition assurant que N appartient au cercle C_M.

Ceci mène, suivant la façon dont γ est définie, à l'une de ces deux situations:

Proposition XIX.11.14 Soit D la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$, γ la courbe de l'espace définie par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

Σ la surface de révolution engendrée par rotation de γ autour de D et M un point de l'espace, de coordonnées (x,y,z). Alors

$$\begin{aligned} M \in \Sigma \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists N \in \gamma \text{ tel que } \begin{cases} \langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle & = & 0 \\ AM^2 & = & AN^2 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \quad \exists N(X,Y,Z) \text{ tel que } \begin{cases} F(X,Y,Z) = 0 \\ G(X,Y,Z) = 0 \\ \langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle = 0 \\ AM^2 = AN^2. \end{cases} \end{aligned}$$

On pourra alors obtenir une équation cartésienne de Σ en éliminant les coordonnées (X,Y,Z) de N entre ces équations.

Et la deuxième situation:

Proposition XIX.11.15 Soit D la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$, γ la courbe de l'espace définie par la paramétrisation

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)),$$

et Σ la surface de révolution engendrée par rotation de γ autour de D et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z). Alors

$$M \in \Sigma \iff \exists N(t) \in \gamma \text{ tel que } \begin{cases} \langle \overrightarrow{MN(t)}, \vec{u} \rangle & = & 0 \\ AM^2 & = & AN(t)^2 \end{cases}$$

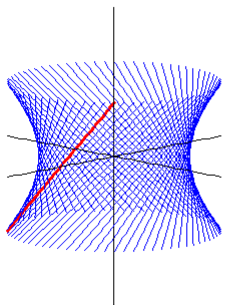
On pourra alors obtenir une équation cartésienne de Σ en éliminant t entre ces équations.

Premier exemple

Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution Σ obtenue par rotation de la droite Δ définie par les équations

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$

autour de l'axe Oz.



- L'axe de révolution passe par O et est dirigé par $\vec{k}$.
- En suivant la méthode ci-dessus, un point $M(x, y, z)$ appartient à Σ si et seulement s'il existe un point N de Δ_k tel que

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle & = & 0 \\ OM^2 & = & ON^2 \end{cases}$$

donc si et seulement s'il existe $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} \begin{cases} X = 1 \\ Y = Z \end{cases} \\ \langle (X - x, Y - y, Z - z), (0, 0, 1) \rangle = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \end{cases} \iff \begin{cases} X = 1 \\ Y = Z \\ Z - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \end{cases}$$

- Les lignes L_3 et L_2 donnent $Y = Z = z$ puis ces expressions de Y et Z avec $X = 1$ donnent dans L_4

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2z^2,$$

c'est à dire

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

qui est donc une équation cartésienne de Σ.

Deuxième exemple

Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution Σ obtenue par rotation de la courbe γ de paramétrisation

$$t \mapsto \begin{cases} 6t - 3 \\ 3t - t^2 \qquad t \in [0, 1] \\ 0 \end{cases}$$

autour de l'axe $D = (O, \vec{\imath})$.

- La droite D passe par O et est dirigée par $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$.
- En suivant la méthode ci-dessus, un point $M(x, y, z)$ appartient à Σ si et seulement s'il existe un point $N(t)$ de γ tel que

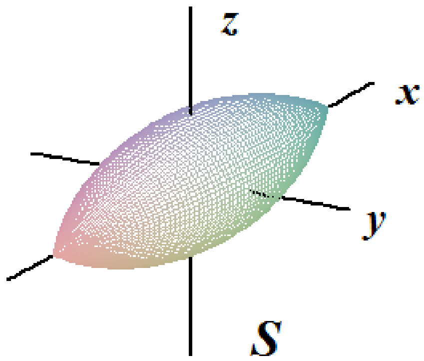
$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{MN(t)}, \vec{\imath} \rangle = 0 \\ OM^2 = ON(t)^2 \end{cases}$$

donc si et seulement si il existe $t \in [0, 1]$ tel que

$$\begin{cases} 6t - 3 - x = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = (6t - 3)^2 + 9(t - t^2)^2. \end{cases}$$

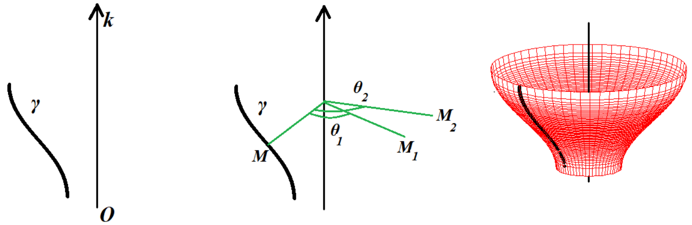
On a alors $x = 6t - 3$ puis $t = \frac{1}{6}(x + 3)$ et L_2 donne alors

$$y^2 + z^2 = 9\left(\frac{1}{6}(x + 3) - \frac{1}{36}(x + 3)^2\right)^2.$$



11.2 Obtention d'une paramétrisation (utilisation de matrices de rotation)

Cette possibilité est typique lorsque l'axe de révolution D est l'axe Oz (*mutatis mutandis*, c'est valable pour les axes (Oy) et (Ox) également): les points de la surface de révolution Σ engendrée par rotation de la courbe γ autour de l'axe Oz sont les images des points de γ par les rotations d'axe Oz et d'angle quelconque dans $[0, 2\pi]$:



L'image d'un point $M(x,y,z)$ par $r_{\theta,z}$, rotation d'angle θ et d'axe Oz et orienté par $\vec{k}$, est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = R_{\theta,z}(\overrightarrow{OM})$, où

$$R_{\theta,z} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc le point M' a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}.$$

De même, l'image d'un point $M(x,y,z)$ par $r_{\theta,y}$, rotation d'angle θ et d'axe Oy et orienté par $\vec{\jmath}$, est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = R_{\theta,y}(\overrightarrow{OM})$, où

$$R_{\theta,y} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donc le point M' a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x\cos\theta - z\sin\theta \\ y \\ x\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$$

et enfin, l'image d'un point $M(x,y,z)$ par $r_{\theta,x}$, rotation d'angle θ et d'axe Ox et orienté par $\vec{\imath}$, est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = R_{\theta,x}(\overrightarrow{OM})$, où

$$R_{\theta,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donc le point M' a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta - z\sin\theta \\ y\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On a ainsi par exemple :

Proposition XIX.11.16 Soit γ la courbe de l'espace définie par la paramétrisation

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

et Σ la surface de révolution engendrée par rotation de γ autour de l'axe Oz et M un point de l'espace, de coordonnées (x,y,z). Alors Σ admet la paramétrisation

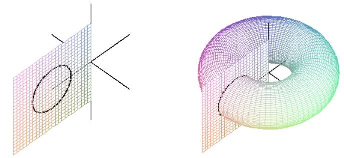
$$(t,\theta) \longmapsto \begin{cases} x(t)\cos\theta - y(t)\sin\theta \\ x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta \\ z(t) \end{cases} \qquad (t,\theta) \in I \times [0, 2\pi].$$

Exemple

Soit γ le cercle de centre $(2,0,0)$ du plan xOz et de rayon 1, dont une paramétrisation est

$$t \mapsto \begin{cases} 2+\cos t \\ 0 \\ \sin t \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

et Σ la surface de révolution engendrée par rotation de γ autour de l'axe Oz



La surface obtenue est un *tore*. Du résultat précédent on déduit la paramétrisation

$$(t,\theta) \longmapsto \begin{cases} (2+\cos t)\cos\theta \\ (2+\cos t)\sin\theta \\ \sin t \end{cases} \qquad (t,\theta) \in [-\pi,\pi] \times [0, 2\pi].$$

Bonus Recherchons une équation cartésienne de Σ. En un point de paramètres (t,θ) de Σ, dont on notera (x,y,z) les coordonnées, on a

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (2+\cos t)^2 \\ &= 4+4\cos t+\cos^2 t \end{aligned}$$

et puisque

$$z^2 = \sin^2 t = 1-\cos^2 t,$$

on a

$$\cos^2 t = 1 - z^2$$

et donc

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4+4\cos t+1-z^2 \\ \Longrightarrow \quad x^2+y^2+z^2-5 &= 4\cos t \\ \Longrightarrow \quad (x^2+y^2+z^2-5)^2 &= 16\cos^2 t \\ &= 16(1-z^2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(x^2+y^2+z^2-5)^2 + 16z^2 - 16 = 0$$

est une équation cartésienne de Σ.

Autre exemple

Déterminer une représentation paramétrique puis une équation cartésienne de la surface de révolution S engendrée par rotation de la droite Δ de paramétrisation

$$t \longmapsto \begin{cases} t-1 \\ t \\ t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

autour de l'axe (Oy).

Les points de S sont les images des points de Δ par les rotations d'axe (Oy). De ce qui précède, l'image du point de coordonnées $M(t-1,t,t)$ (pointde paramètre t de Δ) par la rotation r_θ d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ et d'axe dirigé et orienté par le vecteur $\vec{\jmath}$ est le point de coordonnées

$$\begin{pmatrix} (t-1)\cos\theta - t\sin\theta \\ t \\ (t-1)\sin\theta + t\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une paramétrisation de S est

$$(t,\theta) \longmapsto \begin{cases} x(t,\theta) = (t-1))\cos\theta - t\sin\theta \\ \\ y(t,\theta) = t \\ \\ z(t,\theta) = (t-1)\sin\theta + t\cos\theta \end{cases} \qquad (t,\theta) \in [-\pi,\pi] \times [0,2\pi].$$

En effectuant $L_1^2 + L_2^2$, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} x^2(t,\theta) + z^2(t,\theta) &= (t-1)^2 + t^2 \\ &= 2t^2 - 2t + 1 \\ &= 2(t^2 - t) + 1 \\ &= 2\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 1 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= 2\left(y(t,\theta) - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

si bien qu'une équation cartésienne de S est

$$x^2 + z^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot$$

On remarquera, indépendamment de la mise en équation à laquelle on vient de procéder, que la surface S d'équation

$$x^2 + z^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot$$

est bien une surface de révolution d'axe (Oy) : un plan P orthogonal à l'axe (Oy) est un plan d'équation $y = y_0$ où y_0 est une constante. La section de S par P est alors définie par les équations

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ \\ y = y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + z^2 = 2\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ \\ y = y_0. \end{cases}$$

Il est clair (cf. rappel en début de paragraphe) que cette section est le cercle de rayon $\sqrt{2\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ centré en $(0, y_0, 0)$ du plan P.

Chapitre XX

Séries entières (deuxième année)

1 Définitions; changement d'indice et valeur en 0

1.1 Rappels et conventions très importants: manipulation de factorielles, puissances, modules

- ***Factorielle.***
  - Pour tout entier $n \geq 1$,
$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$$
  - et on adopte la convention:
$$0! = 1.$$
  - Pour tout entier n
$$(n+1)! = (n+1) \times n!, \quad (2n+2)! = (2n+2)(2n+1) \times (2n)!$$
et donc
$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \quad \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2)(2n+1)$$
et pour tout entier $n \geq 1$,
$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$
- ***Puissances de 0.***
  - Pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$0^n = 0 \times 0 \times \ldots \times 0 = 0$$
et par convention on posera dans tout ce chapitre
$$0^0 = 1.$$
  - C'est d'ailleurs la convention habituelle adoptée dans l'écriture des polynômes:
$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N \text{ (écriture à l'ancienne)} \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \text{ (écriture moderne)} \end{aligned}$$
On a évidemment $P(0) = a_0$, ce qui correspond bien, dans l'écriture moderne, à
$$a_0 \times 0^0 = a_0.$$

Ceci n'est valable que dans l'univers des polynômes et des séries entières. Ce n'est absolument pas valable dans un contexte de limite, où 0^0 est une forme indéterminée!

- ***Entiers pairs, entiers impairs.***
  - Pour tout entier p,
$$2p \text{ est un entier pair}, \quad 2p+1 \text{ est un entier impair}.$$
  - Tout entier n pair peut s'écrire
$$n = 2p \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$
  - Tout entier n impair peut s'écrire
$$n = 2p+1 \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, la sous-suite constituée par ses termes de rang pair s'écrit
$$(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$$
la sous-suite constituée par ses termes de rang impair s'écrit
$$(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}.$$
- ***Puissances de -1.***
  - Pour tout entier n,
$$(-1)^n = 1 \text{ si } n \text{ est pair}, \quad (-1)^n = -1 \text{ si } n \text{ est impair}.$$
  - Pour tout entier n
$$|(-1)^n| = 1.$$
  - Pour tout entier p,
$$(-1)^{2p} = 1, \qquad (-1)^{2p+1} = -1.$$
  - Pour tout entier n
$$(-1)^{n+1} = -(-1)^n.$$
  - Pour tout entier n,
$$\frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n.$$
- ***Valeur absolue ou module et produit et puissances.***
  - Pour tout réel $a > 0$,
$$\begin{aligned} |x| < a &\iff -a < x < a \iff x \in \left]-a, a\right[\\ |x| > a &\iff x > a \text{ ou } x < -a \iff x \in \left]-\infty, -a\right[\cup \left]a, +\infty\right[. \end{aligned}$$
  - Pour tous réels A, B et même tous nombres complexes A et B:
$$|AB| = |A| \times |B|$$
et pour $B \neq 0$,
$$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}.$$
  - Pour tout réel x et tout entier n,
$$|x^n| = |x|^n,$$
  - pour tout nombre complexe z et tout entier n,
$$|z^n| = |z|^n.$$

Définition XX.1.20 *Disque du plan complexe.* Pour tout réel $r > 0$, on note $D(0,r)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon r :

$$D(0,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < r\}.$$

- ***Encadrements impliquant des puissances.*** Pour tout entier $N \geq 1$, l'application

$$f : \rho \longmapsto \rho^N$$

est une application définie continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et comme

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \lim_{\rho \to +\infty} f(\rho) &= +\infty, \end{aligned}$$

elle établit, d'après le théorème de la bijection, une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ dont l'application réciproque est également croissante sur $[0,+\infty[$ définie par

$$\forall r \in [0,+\infty[,\ f^{-1}(r) = r^{\frac{1}{N}}.$$

C'est pourquoi

$$\forall (\rho, r) \in [0,+\infty[\times [0,+\infty[,\ \rho^N \leq r \iff \rho \leq r^{\frac{1}{N}}.$$

Il en résulte:

$$\boxed{\forall (z, r) \in \mathbb{C} \times [0,+\infty[,\ |z|^N \leq r \iff |z| \leq r^{\frac{1}{N}}}$$

Exemples

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |z|^2 < 3 &\iff |z| < 3^{\frac{1}{2}} \\ &\iff |z| < \sqrt{3} \\ &\iff z \in D\left(0, \sqrt{3}\right) \\ |z|^3 < 2 &\iff |z| < 2^{\frac{1}{3}} \\ &\iff z \in D\left(0, 2^{\frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x|^2 < 3 &\iff |x| < 3^{\frac{1}{2}} \\ &\iff |x| < \sqrt{3} \\ &\iff x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[\\ |x|^3 < 2 &\iff |x| < 2^{\frac{1}{3}} \\ &\iff x \in \left]-2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right[. \end{aligned}$$

1.2 Définition d'une série entière

Rappels concernant les séries numériques.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, réelle ou complexe.

- La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pout tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k, \\ &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n. \end{aligned}$$

- On utilise la notation $\sum_{n\geq 0} u_n$ pour représenter la série de terme général u_n: c'est un raccourci pour désigner la suite infinie de termes

$$u_0,\ u_0 + u_1,\ u_0 + u_1 + u_2,\ \ldots$$

Cette notation ne désigne donc pas une somme au sens usuel du terme, mais une *limite* de somme.

Et voici la définition d'une série entière:

Définition XX.1.21 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
La série entière de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la variable complexe z est la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dépendant du paramètre z.

Remarques.

- On adopte la convention $z^0 = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, y compris pour $z = 0$.
- Pour tout entier n, on dit que a_n est le coefficient de z^n.
- En particulier, le coefficient a_0 est appelé terme constant.

Une série est soit convergente soit divergente ce qui signifie que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ existe ou n'existe pas, d'où la définition logique suivante:

Définition XX.1.22 On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. La *somme* de cette série entière est la fonction

$$S : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

définie aux points z de $\mathbb{C}$ où la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est convergente.

Exemples typiques:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} z^n, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Les coefficients de ces séries entières forment respectivement la suite

$$\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}},\quad \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},\quad \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

et la suite constante égale à 1.

Séries entières particulières

- Considérons une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ dont le premier coefficient a_0 est nul. À l'ancienne, cette série entière s'écrit
$$0 \times 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$
et comme $0 \times 1 = 0$ ne sert à rien, autant ne pas l'écrire, ce qui revient à écrire la série entière originellement $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$. De même, on rencontre des séries entières de la forme $\sum_{n \geq 2} a_n z^n$.

- Toutes les puissances de z peuvent ne pas figurer dans une série entière; par exemple cette série, écrite "à l'ancienne":
$$S(z) = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + a_6 z^6 + \dots + a_{2p} z^{2p} + \dots$$
est bien une série entière puisque l'on peut écrire
$$S(z) = a_0 + 0 \times z + a_2 z^2 + 0 \times z^3 + a_4 z^4 + 0 \times z^5 + a_6 z^6 + \dots$$
Les coefficients de cette série entière forment la suite
$$a_0,\ 0, a_2,\ 0, a_4,\ 0,\ a_6 \dots$$
En notation "moderne", cette série entière s'écrit
$$S(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_n z^n$$
où
$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est un entier impair} \\ a_{2p} & \text{si } n \text{ est un entier pair, } n = 2p. \end{cases}$$
Comme ajouter des termes nuls comme $0 \times z$, $0 \times z^3$, etc. ne sert à rien, on écrira série entière
$$S(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} z^{2p}$$
ou encore
$$S(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p z^{2p}$$
où pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a posé $b_p = a_{2p}$.

  Il en va de même pour
$$S(z) = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots$$
que l'on peut écrire
$$S(z) = 0 + a_1 z + 0 \times z^2 + a_3 z^3 + 0 \times z^4 + a_5 z^5 + \dots$$
Les coefficients de cette série entière forment la suite
$$0, a_1,\ 0, a_3,\ 0, a_5,\ 0,\ a_7 \dots$$
En notation "moderne", cette série entière s'écrit
$$S(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} z^{2p+1}$$
ou encore
$$S(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p z^{2p+1}$$
où pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a posé $b_p = a_{2p+1}$.

  Exemples typiques:
$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{2n}, \quad S_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{2n+1}, \quad S_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n+1}, \quad S_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}.$$
Les coefficients de ces séries entières forment respectivement les suites:
$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{0!} & 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & \dots \\
0 & \frac{1}{1!} & 0 & \frac{1}{2!} & 0 & \frac{1}{3!} & 0 & \frac{1}{4!} & \dots \\
0 & \frac{1}{(2 \times 0)!} & 0 & \frac{1}{(2 \times 1)!} & 0 & \frac{1}{(2 \times 2)!} & 0 & \frac{1}{(2 \times 3)!} & \dots \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots
\end{array}$$
De telles séries entières, comportant toute une catégorie de coefficients nuls, est qualifiée de *lacunaire*.

1.3 Technique de changement d'indice, de renommage, de regroupement de sommes

Changement d'indice et renommage.

Pour certaines raisons qui apparaîtront plus tard, on sera amené à effectuer des changements d'indice sur la somme d'une série entière.

- On pose $j = n + 1$ dans la série entière $S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^n$. Alors
  - puisque l'indice n prend toutes les valeurs entières à partir de 0, l'indice $j = n + 1$ prend toutes les valeurs entières à partir de 1; en bref, pour $n = 0$ on a $j = 1$.
  - Puisque $j = n + 1$, on a $n = j - 1$ et
$$\frac{1}{(2n)!} z^n = \frac{1}{(2j-2)!} z^{j-1}.$$
  - On a donc
$$\begin{aligned} S_1(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^n \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j-2)!} z^{j-1}. \end{aligned}$$
  - Cela n'a rien d'obligatoire, mais on peut dans cette dernière expression "renommer" l'indice j et l'appeler n. Ainsi,
$$S_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-2)!} z^{n-1}.$$

- On pose $j = n - 1$ dans la série entière $S_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{2n}$. Alors

– puisque l'indice n prend toutes les valeurs entières à partir de 1, l'indice $j = n-1$ prend toutes les valeurs entières à partir de 0; en bref, pour $n = 1$ on a $j = 0$.

– Puisque $j = n-1$, on a $n = j+1$ et

$$\frac{(-1)^n}{n}z^{2n} = \frac{(-1)^{j+1}}{j+1}z^{2j+2} = -\frac{(-1)^j}{j+1}z^{2j+2}.$$

– On a donc

$$\begin{aligned} S_2(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^{2n} \\ &= -\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j+1}z^{2j+2}. \end{aligned}$$

– On peut dans cette dernière expression renommer l'indice j et l'appeler n. Ainsi,

$$S_2(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{2n+2}.$$

Éclatement de sommes; forcing

- À nouveau pour certaines raisons qui apparaîtront plus tard, on sera amené à isoler certains termes d'une série entière: le résultat obtenu est un "éclatement" de cette série en la somme d'un ou de plusieurs termes et d'un Σ qui démarre alors à un rang plus élevé.

  – Dans la série entière

  $$S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}z^n,$$

  isolons les termes correspondant à $n = 0$ et à $n = 1$.

  – Ces termes étant respectivement égaux à 1 et à $\frac{1}{2}z$, on obtient

  $$S_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}z^n.$$

- À l'inverse, on pourra être amené à intégrer "de force" un ou plusieurs termes dans une série; il faudra alors rectifier pour conserver la valeur de la somme.

  – Considérons la série entière

  $$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}z^{2n+1}.$$

  En intégrant "de force" le terme correspondant à $n = 0$, qui vaut $\frac{(-1)^1}{1}z = -z$ et qu'il faut alors retrancher (et il faut donc rajouter $+z$), on obtient

  $$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}z^{2n+1} \quad + z.$$

Regroupement de sommes.

Il sera très important de savoir regrouper deux, voire trois, séries entières pour n'en former qu'une.

- Cela peut-être immédiat:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n.$$

- Mais cela peut nécessiter un éclatement:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n + \sum_{n=2}^{+\infty}b_nz^n &= a_0 + a_1z + \sum_{n=2}^{+\infty}a_nz^n + \sum_{n=2}^{+\infty}b_nz^n \\ &= a_0 + a_1z + \sum_{n=2}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n. \end{aligned}$$

- Afin de produire une série entière, donc une expression du type $\sum c_nz^n$, on ne procédera pas à des regroupements précipités:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n + b_nz^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+zb_n)z^n$$

$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+zb_n)z^n$ ne se présente pas sous la forme d'une série entière $\sum c_nz^n$ puisque $a_n + zb_n$, en raison de la présence de z, n'a pas le statut de coefficient!

On procédera au préalable à un changement puis renommage d'indice:

– au moyen du changement d'indice $j = n+1$ puis au renommage de j par n, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^{n+1} = \sum_{j=1}^{+\infty}b_{j-1}z^j = \sum_{n=1}^{+\infty}b_{n-1}z^n.$$

– Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n + \sum_{n=1}^{+\infty}b_{n-1}z^n.$$

– On éclate la première somme pour la faire démarrer au rang $n = 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n.$$

– Finalement:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^{n+1} &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}a_nz^n + \sum_{n=1}^{+\infty}b_{n-1}z^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_{n-1})z^n. \end{aligned}$$

1.4 Valeur en 0

- Puisque l'on a $0^n = 0$ dès lors que $n \geq 1$ et que par convention $0^0 = 1$, la série entière:

$$S(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$$

donnera la valeur

$$\begin{aligned} S(0) &= a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + \ldots + a_n \times 0 + \ldots \\ &= a_0 \end{aligned}$$

en 0 et pour la série entière:

$$T(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

elle donnera la valeur

$$\begin{aligned} T(0) &= a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + \ldots + a_n \times 0 + \ldots \\ &= 0 \end{aligned}$$

en 0.

Ainsi, une série entière donnera 0 en 0 dès lors que son terme de plus bas degré est une puissance d'exposant ≥ 1 et donnera le coefficient constant sinon.

- ***Exemples.***
  - Pour la série entière
  $$S_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \ldots,$$
  on a $S_1(0) = 0$.
  - Pour la série entière
  $$S_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^n = 1 + \frac{1}{6} z + \frac{1}{5!} z^2 + \ldots,$$
  on a $S_2(0) = 1$.
  - Pour la série entière
  $$S_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} z^{n+1} = \frac{1}{3} z - \frac{1}{5} z^2 + \frac{1}{7} z^3 + \ldots,$$
  on a $S_3(0) = 0$.
  - Pour la série entière
  $$S_4(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} z + \frac{1}{4} z^2 + \ldots,$$
  on a $S_4(0) = \frac{1}{2}$.

2 Disque de convergence, rayon de convergence

Quelques rappels pour bien saisir les démonstrations stylées de cette section.

- Toute suite *convergente* (u_n) (réelle ou complexe) est bornée: il existe un réel $M > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$
- Si une série $\sum_{n \geq 0} v_n$ (de terme général réel ou complexe) converge, alors son terme général tend vers 0: $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (mais on sait que la réciproque est grossièrement fausse). De façon équivalente (c'est la contraposée), si une suite (v_n) ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.
- Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors A possède une borne supérieure b, qui est par définition le plus petit majorant de A:
  - pour tout $x \in A$, on a $x \leq b$,
  - pour tout $b' < b$, il existe $x \in A$ tel que $x > b'$.

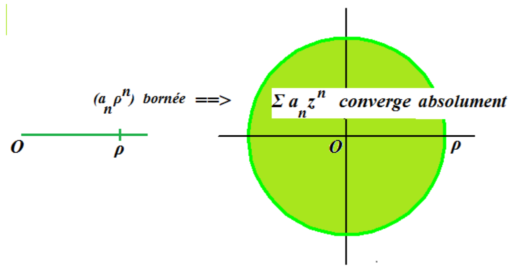
Le but de cette section est de prouver un résultat remarquable: pour tout série entière, il existe un disque à l'intérieur duquel la série entière converge et à l'extérieur strict duquel elle diverge. Ce résultat est notamment basé sur celui-ci:

Proposition XX.2.17 ***Lemme d'Abel.*** Soit un réel $\rho > 0$.

- Si la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$ i.e. pour tout $z \in D(0, \rho)$.
- Si la suite $(a_n \rho^n)$ n'est pas bornée, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge pour tout z tel que $|z| > \rho$.

Démonstration.

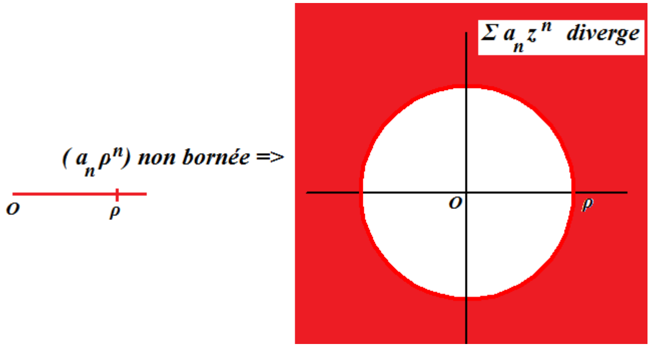
- Soit M un majorant de la suite $(|a_n \rho^n|)$ et soit $z \in D(0, \rho)$. On a:
$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= \left| a_n \rho^n \left(\frac{z}{\rho} \right)^n \right| \\ &= |a_n \rho^n| \times \left| \left(\frac{z}{\rho} \right)^n \right| \\ &\leq M \left| \left(\frac{z}{\rho} \right)^n \right| \\ &= M \left| \frac{z}{\rho} \right|^n. \end{aligned}$$
Puisque $\left| \frac{z}{\rho} \right| < 1$, la série $\sum \left| \frac{z}{\rho} \right|^n$ est une série géométrique convergente et évidemment la série $\sum M |a_n z^n|$ converge aussi. Du théorème de comparaison par majoration, on déduit que la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente. La série entière est donc absolument convergente lorsque $z \in D(0, \rho)$.



- Lorsque $\left|\frac{z}{\rho}\right| > 1$, alors on a aussi $\left|\frac{z}{\rho}\right|^n > 1$ et alors

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= \left|a_n \rho^n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n\right| \\ &= |a_n \rho^n| \times \left|\left(\frac{z}{\rho}\right)^n\right| \\ &> \underbrace{|a_n \rho^n|}_{\text{non borné}} \times 1 \end{aligned}$$

donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée non plus. A fortiori, elle ne tend pas vers 0 et la série $\sum a_n z^n$ est nécessairement divergente.



La définition suivante est plutôt formelle:

Définition XX.2.23 ***Rayon de convergence.*** Soit une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Son rayon de convergence est

$$R = \sup \{\rho \geq 0 \ / \ \text{la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée } \},$$

qui est un réel ou $+\infty$.

Remarque. L'ensemble

$$A = \{\rho \geq 0 \ / \ \text{la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée } \}$$

est non vide car de toute évidence, il contient 0. Si A est majoré, il possède une borne supérieure et si A est non majoré, il est convenu que $\sup A = +\infty$.

Exemples

- Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} n z^n$.

  – Si $0 \leq \rho < 1$,
  $$n\rho^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par croissance comparée. La suite $(n\rho^n)$ est convergente et donc bornée. On vient de prouver que $[0, 1[\subset A$; tout majorant de A, y compris le plus petit d'entre eux, qui est R, doit majorer tous les élements de $[0, 1[$. On a donc $R \geq 1$.

  – Si $\rho \geq 1$, on a
  $$n\rho^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
  donc la suite $(n\rho^n)$ est non bornée. On vient de prouver que si $\rho \geq 1$, alors $\rho \notin A$. Par contraposée,
  $$\rho \in A \implies \rho < 1.$$
  C'est donc que 1 est un majorant de A. Le plus petit majorant de A est donc ≤ 1 i.e. $R \leq 1$.

  En conclusion, $R = 1$.

- Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$.

  – Si $0 \leq \rho \leq 1$,
  $$|\sin(n)\rho^n| \leq 1$$
  donc la suite $(\sin(n)\rho^n)$ est bornée. On vient de prouver que $[0, 1] \subset A$; tout majorant de A, y compris le plus petit d'entre eux, qui est R, doit majorer tous les élements de $[0, 1]$. On a donc $R \geq 1$.

  – Si $\rho > 1$, la suite $(\sin(n)\rho^n)$ n'est pas bornée. En effet, si elle était bornée par un réel $M > 0$, on aurait
  $$|\sin n| \leq \frac{M}{|\rho^n|} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  et en conséquence, $\sin n$ tendrait vers 0, ce qui n'est pas le cas. Donc la suite $(\sin(n)\rho^n)$ est non bornée. On vient de prouver que si $\rho > 1$, alors $\rho \notin A$. Par contraposée,
  $$\rho \in A \implies \rho \leq 1.$$
  C'est donc que 1 est un majorant de A. Le plus petit majorant de A est donc ≤ 1 i.e. $R \leq 1$.

  En conclusion, $R = 1$.

- Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où, pour tout entier n, a_n est la n-ième décimale dans l'écriture décimale de $\sqrt{2}$.

  – Une décimale est un entier compris entre 0 et 9. Donc si $0 \leq \rho \leq 1$,
  $$|a_n \rho^n| \leq 9\rho^n \leq 9,$$
  donc la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée. On vient de prouver que $[0, 1] \subset A$ et comme ci-dessus, on en déduit $R \geq 1$.

  – Il est connu que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal (et pas même un nombre rationnel i.e. $\sqrt{2}$ n'est pas le quotient de deux nombres entiers) i.e. la suite de ses décimales n'est pas stationnaire égale à 0:

    * on peut donc trouver des valeurs de n arbitrairement grandes telles que $a_n \neq 0$ et donc telles que $a_n \geq 1$ et donc pour lesquelles $a_n \rho^n \geq \rho^n$.
    * Puisque $\rho^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la suite $(a_n\rho^n)$ prend des valeurs arbitrairement grandes i.e. cette suite n'est pas bornée.
    * En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on en déduit $R \leq 1$.

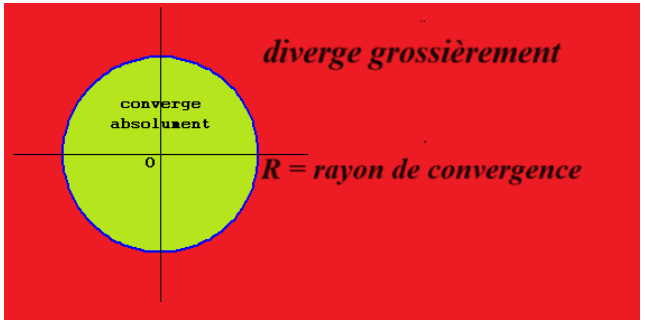
  C'est donc que $R = 1$.

Les raisonnements qui tournent autour de la notion de borne supérieure ne sont pas toujours évidents. Ce résultat est alors fondamental dans la pratique:

Théorème XX.2.18 Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et R son rayon de convergence. Alors

- la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est *absolument convergente* pour tout $z \in D(0,R)$
- la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$; de plus, la suite $(a_n z^n)$ n'est même pas bornée et la série $\sum a_n z^n$ est alors grossièrement divergente.
- Le disque $D(0,R)$ est appelé le *disque de convergence*, qui est donc *le plus grand disque ouvert centré en* 0 sur lequel la série entière converge absolument.
- La somme de la série entière
$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
est donc parfaitement définie sur $D(0,R)$.
- En particulier, S est définie sur tout $\mathbb{C}$ lorsque $R = +\infty$.

On a donc cette configuration:



Remarques.

- On prendra bien soin dans la pratique d'étudier la *convergence absolue* de la série $\sum a_n z^n$ i.e. on s'intéressera à la convergence de la série
$$\sum |a_n z^n|.$$
- Lorsque $|z| > R$, le terme général $a_n z^n$ n'est même pas borné, il ne tend donc pas vers 0: et la divergence de la série est grossière (cf. condition nécessaire de convergence d'une série).
- Ce théorème ne donne aucun renseignement lorsque $|z| = R$. Comme on le verra dans la pratique, il peut y avoir convergence pour certaines séries entières, divergence pour d'autres.

Démonstration du théorème. Notons
$$A = \{\rho \geq 0 \,/\, \text{ la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée }\}.$$
L'ensemble A est non vide puisque de toute évidence, $0 \in A$.

- Si l'ensemble A n'est pas borné, il est donc convenu que $R = +\infty$ et on doit donc apporter la preuve que la série entière converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Soit donc $z \in \mathbb{C}$.
  - Dire que l'ensemble A est non borné, c'est dire par définition que quel que soit le réel M, il existe dans A un réel strictement plus grand que M.
  - Il existe donc $\rho \in A$ tel que $\rho > |z|$.
  - Il résulte alors du lemme d'Abel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si l'ensemble A est borné, étant non vide, il possède une borne supérieure (propriété fondamentale de l'ensemble $\mathbb{R}$), ce qui justifie l'existence de R. Soit $z \in \mathbb{C}$.
  - Supposons $|z| < R$.
    - Alors par définition de la notion de borne supérieure, il existe $\rho \in A$ tel que $\rho > |z|$

(si tel n'était pas le cas, $|z|$ serait un majorant de A et la borne supérieure R de A, qui est par définition le plus petit majorant de A serait donc $\leq |z|$, ce qui est contraire à l'hypothèse).
    - Il résulte alors du lemme d'Abel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.
  - Supposons $|z| > R$.
    - Alors $|z| \notin A$ (la borne supérieure R de l'ensemble A est par définition un majorant de A i.e. majore tous les éléments de A, ce qui serait contradictoire si $|z|$ appartenait à A) i.e. la suite $a_n |z|^n$ est non bornée.
    - Puisque
$$|a_n |z|^n| = |\,|a_n z^n|\,|,$$
la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 (une suite convergente est bornée) et la série $\sum a_n z^n$ est donc divergente.

Exemple

- Considérons la série entière
$$\sum_{n\geq 0} z^n.$$
Il s'agit de la série géométrique de raison z et pour ce qui est de la convergence absolue, de la série géométrique de raison $|z|$. On sait que celle-ci converge si et seulement si $|z| < 1$. Le plus grand disque ouvert sur lequel la série entière converge absolument est donc le disque $D(0,1)$. Son rayon de convergence vaut donc 1.

Le théorème suivant est surtout utile pour les séries entières de la variable réelle; comme on le verra plus loin, il concerne une série entière et sa dérivée:

Proposition XX.2.19 Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration. Notons R, resp. R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, resp. $\sum n a_n z^n$.

- De façon évidente, $|a_n| \leq |n a_n|$ pour tout entier $n \geq 1$. D'un résultat ci-dessus, on déduit $R \geq R'$.
- Démontrons à présent que si $|z| < R$, alors la série $\sum n a_n z^n$ converge absolument.
  - Fixons un réel $\rho \in]|z|, R[$. À la Abel, on écrit
$$|n a_n z^n| = |a_n \rho^n| \times \left| n \left(\frac{z}{\rho}\right)^n \right|.$$

– Posons $r = \left|\frac{z}{\rho}\right|$; puisque $r < 1$, on sait que nr^n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (résultat de croissance comparée). On a donc

$$na_n z^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a_n \rho^n\right).$$

– Puisque $\rho \in D(0,R)$, la série $\sum a_n \rho^n$ est absolument convergente et il résulte alors du théorème de comparaison pour les séries absolument convergentes que la série $\sum na_n z^n$ est à son tour absolument convergente.

- Ainsi,

  z appartient au disque de convergence de $\sum a_n z^n \implies z$ appartient au disque de convergence de $\sum na_n z^n$.

  C'est la preuve que $D(0,R) \subset D(0,R')$ et donc $R \leq R'$.

On a donc finalement $R = R'$.

2.1 Situations pratiques

Puisqu'aux points du disque ouvert de convergence la convergence de la série est absolue, on cherchera à déterminer les valeurs du nombre complexe z pour lesquelles la série $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ converge. On est alors amené à étudier la nature d'une série à termes positifs, ce qui est un atout énorme, car les critères usuels: majoration, comparaison, règle de d'Alembert ne s'appliquent pas aux séries dont le terme général n'est pas de signe constant et a fortiori aux séries dont le terme général est un nombre complexe. La règle de d'Alembert sera quasi systématiquement employée *dans les situations concrètes*, car la présence de z^n se prête bien à l'application de cette règle.

Règle de d'Alembert. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels > 0 (ou seulement à partir d'un certain rang).

- On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite ℓ lorsque $n \to +\infty$.
- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$ (ou $\ell = +\infty$), alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente et on a même $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $\ell = 1$, alors ce théorème ne permet pas de conclure.

Exemple typique

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} z^{2n+1}.$$

- Il s'agit donc de trouver le plus grand disque ouvert sur lequel la série

$$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} z^{2n+1}\right|$$

  converge.
- On a vu plus haut qu'une série entière converge toujours en $z = 0$; on se donne donc un complexe $z \neq 0$.
- On pose

$$u_n(z) = \left|\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} z^{2n+1}\right|$$

  et on va étudier la convergence de la série $\sum u_n(z)$ en utilisant la règle de d'Alembert.
- On a

$$u_n(z) = \frac{1}{4^n(2n+1)} \left|z^{2n+1}\right|$$

  et donc

$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{4^n(2n+1)}{4^{n+1}(2n+3)} \times \left|\frac{z^{2n+3}}{z^{2n+1}}\right| = \frac{(2n+1)}{4(2n+3)} |z|^2$$

  et en conséquence

$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} |z|^2.$$

- D'après la règle de d'Alembert:
  – si $\frac{1}{4}|z|^2 < 1$ i.e. $|z|^2 < 4$, c'est à dire $|z| < 2$ c'est à dire si z est intérieur au disque $D(0,2)$, alors $\sum u_n(z)$ converge c'est à dire qu'il y a convergence absolue de la série entière en z,
  – si $\frac{1}{4}|z|^2 > 1$ i.e. $|z|^2 > 4$, donc si $|z| > 2$ c'est à dire si z est strictement à l'extérieur du disque $D(0,2)$, alors la série $\sum u_n(z)$ diverge, i.e. il n'y a pas convergence absolue de la série entière.
  – Le plus grand disque ouvert sur lequel la série entière est absolument convergente est donc le disque $D(0,2)$.
  – Le rayon de convergence vaut donc 2.

Autre exemple typique

Soit la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

- Soit $z \neq 0$. Posons $u_n(z) = \left|\frac{1}{n!} z^n\right|$ et étudions la convergence de la série $\sum u_n(z)$.
- On a

$$u_n(z) = \frac{1}{n!} |z^n|$$

  et donc

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} &= \frac{n!\,|z^{n+1}|}{(n+1)!\,|z^n|} \\ &= \frac{1}{n+1} |z| \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

- Cette limite 0 est < 1 et ce quel que soit z. Il résulte donc de la règle de d'Alembert que la série $\sum u_n(z)$ converge. Autrement dit, la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$: son rayon de convergence vaut donc $+\infty$.

Troisième exemple typique

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$$

vaut 1.

- Soit $z \neq 0$. Posons $u_n(z) = |n^\alpha z^n|$ et étudions la convergence de la série $\sum u_n(z)$.
- On a
$$u_n(z) = n^\alpha |z^n|$$
et donc
$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} &= \frac{(n+1)^\alpha |z^{n+1}|}{n^\alpha |z^n|} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha |z|. \end{aligned}$$
- La fonction
$$t \longmapsto t^\alpha$$
est définie et continue sur $]0,+\infty[$ et donc continue en 1, ce qui signifie
$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1} t^\alpha &= 1^\alpha \\ &= 1, \end{aligned}$$
et puisque
$$\frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
on peut affirmer que
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi,
$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$
- D'après la règle de d'Alembert:
  - si $|z| < 1$ i.e. si z est intérieur au disque $D(0,1)$, alors $\sum u_n(z)$ converge c'est à dire qu'il y a convergence absolue de la série entière en z,
  - si $|z| > 1$ i.e. si z est strictement à l'extérieur du disque $D(0,1)$, alors la série $\sum u_n(z)$ diverge, i.e. il n'y a pas convergence absolue de la série entière.
- Le plus grand disque ouvert sur lequel la série entière est absolument convergente est donc le disque $D(0,1)$.
- Le rayon de convergence vaut donc 1.

La méthode utilisée dans ces deux derniers exemples peut se généraliser (dans le théorème ci-dessous, on adopte la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$) :

Théorème XX.2.20 ***Règle de d'Alembert pour les séries entières.*** On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.
Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite L (éventuellement infinie), alors le rayon de convergence de cette série entière est $R = \frac{1}{L}$.

Démonstration 118

Remarques.

- Lorsque la suite (a_n) s'annule, donc pour une série entière lacunaire, cette règle ne peut pas s'appliquer. C'est notamment le cas pour toute série entière du type $\sum_{p\geq 0} b_p z^{2p}$, qui est de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mais avec $a_n = 0$ pour tout entier n impair, ou du type $\sum_{p\geq 0} b_p z^{2p+1}$, qui est de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ mais avec $a_n = 0$ pour tout entier n pair. Dans ce genre de situation, il faut se ramener à la méthode employée dans le premier exemple typique.
- Cette règle ne peut pas s'appliquer non plus lorsque l'on *ignore* si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ possède une limite. C'est le cas notamment dans les situations théoriques du type "on considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \dots$".
- Et enfin, cette règle ne s'applique pas lorsque la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ ne possède pas de limite. C'est le cas par exemple de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où $a_n = 1$ lorsque n est pair et $a_n = 2$ lorsque n est impair puisqu'alors $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$ ou $\frac{1}{2}$ suivant la parité de n.

Exemple

Déterminer le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n 2^n}{n+2} z^n.$$

Réponse. C'est une série entière pour laquelle tous les coefficients sont non nuls. En posant
$$a_n = \frac{(-1)^n n 2^n}{n+2},$$
on a
$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)2^{n+1}}{n+3}\right| \times \left|\frac{n+2}{(-1)^n n 2^n}\right| \\ &= \frac{(n+1)2^{n+1}}{n+3} \times \frac{n+2}{n2^n} \\ &= \frac{2(n+1)(n+2)}{n(n+2)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^2}{n^2} \\ &= 2. \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$
et c'est pourquoi le rayon de convergence de cette série entière vaut $\frac{1}{2}$.

Autre exemple

Déterminer le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n.$$

Réponse. C'est une série entière pour laquelle tous les coefficients sont non nuls. En posant

$$a_n = \frac{1}{n!},$$

on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

et c'est pourquoi le rayon de convergence de cette série entière vaut $+\infty$.

Encore un autre exemple

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)!}{n^2(2n+1)!} z^{n+1}$$

Réponse. C'est une série entière dont les coefficients sont non nuls à partir du rang 2 (cette série entière ne comportant ni terme constant ni terme en z); mais cela n'empêche pas de pouvoir appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières, puisque la valeur des premiers termes d'une série n'a pas d'influence sur sa nature. En posant

$$a_n = \frac{(n+1)!}{n^2(2n+1)!},$$

on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+2)!}{(n+1)^2(2n+3)!}\right| \times \left|\frac{n^2(2n+1)!}{(n+1)!}\right| \\ &= \frac{(n+2)!}{(n+1)^2(2n+3)!} \times \frac{n^2(2n+1)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{n^2(n+2)}{(n+1)^2(2n+3)(2n+2)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^2 \times 2n \times 2n} \\ &= \frac{1}{4n}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et c'est pourquoi le rayon de convergence de cette série entière vaut $+\infty$.

2.2 Étude du rayon de convergence dans des situations abstraites

On se donne une série entière $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ "abstraite" i.e. les coefficients a_n se sont pas donnés explicitement.

- Dans la recherche de son rayon de convergence, on ne pourra a priori *pas* tenter d'appliquer la règle de d'Alembert; en effet on ne pourra pas espérer déterminer l'éventuelle limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ en l'absence de formule explicite[1]
- On se basera alors sur la caractérisation de l'intervalle (ou disque dans le cas complexe) de convergence: c'est le plus grand intervalle ouvert (ou disque) sur lequel la série entière converge absolument.

[1] C'est le cas par exemple pour la suite (a_n) définie par $a_n = n$-ième décimale du nombre π.

D'ailleurs même pour certaines séries entières très concrètes, la règle de d'Alembert est inenvisageable; c'est le cas pour la série entière $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin n) z^n$ puisqu'il est à peu près clair que la suite $\frac{\sin(n+1)}{\sin n}$ ne possède pas de limite.

Exemple

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ soit divergente. Démontrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ vérifie $R \leq 1$.

- Si l'on avait $R > 1$, l'intervalle de convergence contiendrait le point 1 et la série entière convergerait en 1 i.e. la série $\sum_{n\geq 0} a_n \times 1^n$ serait convergente i.e. la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ serait convergente, ce qui n'est pas le cas. Il y a donc contradiction et c'est pourquoi on ne peut pas avoir $R > 1$; c'est donc que $R \leq 1$.

Les deux théorèmes suivant instaurent des méthodes de comparaison des rayons de convergence:

Proposition XX.2.21 On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq |b_n|$$
(ou seulement à partir d'un certain rang). Alors
$$R_a \geq R_b.$$
Plus généralement, si
$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n),$$
alors
$$R_a \geq R_b.$$
- En particulier, si
$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n),$$
alors
$$R_a \geq R_b.$$

Démonstration.

- Soit $z \in D(0, R_b)$, si bien que $\sum |b_n z^n|$ converge. De plus,
$$|a_n| \leq |b_n| \implies |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$$
et comme $\sum |b_n z^n|$ converge, il en est de même pour $\sum |a_n z^n|$ d'après le théorème de comparaison par majoration. Ainsi,

  z appartient au disque de convergence de $\sum b_n z^n \implies z$ appartient au disque de convergence de $\sum a_n z^n$.

C'est la preuve que $D(0,R_b) \subset D(0,R_a)$ et donc $R_b \leq R_a$.

- Rappelons que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n),$$
signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$|a_n| \leq C|b_n|$$
au voisinage de $+\infty$. On peut reprendre la démonstration ci-dessus, dans la mesure où le facteur C n'a pas d'effet sur la convergence d'une série.
- Enfin,
$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n),$$
entraîne
$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n),$$
d'où le résultat.

Proposition XX.2.22 On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ et on suppose que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$
Alors ces séries entières ont même rayon de convergence.

Démonstration. En effet, lorsque
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$$
alors on a aussi bien
$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(b_n)$$
que
$$b_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(a_n)$$
donc, de la proposition précédente, on déduit que les rayons de convergence R_a et R_b de ces séries entières vérifient à la fois
$$R_a \geq R_b$$
et
$$R_b \geq R_a.$$
C'est donc qu'ils sont égaux.

Exemple

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} e^{\cos n} z^n$.

- De $-1 \leq \cos n \leq 1$, on déduit
$$e^{-1} \leq e^{\cos n} \leq e$$
ou encore, ce qui est la même chose ici, mais ce qui est fondamental dans l'univers des séries entières, avec des valeurs absolues:
$$e^{-1} \leq |e^{\cos n}| \leq e.$$
- Les séries entières $\sum_{n\geq 0} e^{-1} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} e z^n$ sont deux séries géométriques de même raison z (le premier terme i.e. les coefficients e^{-1} ou e n'ont évidemment pas d'effet sur la convergence) et comme on l'a vu plus haut, ces deux séries entières ont le même rayon de convergence égal à 1.
- On applique alors le théorème ci-dessus deux fois:
  - de
  $$|e^{\cos n}| \leq e,$$
  on déduit que R est $\geq$ au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} e z^n$ et donc $R \geq 1$.
  - de
  $$e^{-1} \leq |e^{\cos n}|,$$
  on déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} e^{-1} z^n$ est $\geq R$ et donc $1 \geq R$.

C'est donc que $R = 1$.

3 La série géométrique a.k.a. la série la plus importante de la Terre

Remarque concernant module et valeur absolue, disque et intervalle.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Son module est $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $|z| < R \iff z \in D(0,R)$. Donc si $x \in \mathbb{R}$, son module en tant que nombre complexe est $\sqrt{x^2} = |x|$: c'est donc sa valeur absolue et $|x| < R \iff x \in]-R,R[$.

Ainsi, dans les résultats ci-dessous, on remplacera $D(0,R)$ par $]-R,R[$ lorsque l'on se penchera sur le cas réel.

Soit $z \in \mathbb{C}$ (et en particulier si $z \in \mathbb{R}$); la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ de raison z est en réalité une série entière (ses coefficients sont tous égaux à un. Le résultat suivant est capital:

La série entière géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge absolument si et seulement si $|z| < 1$. Son rayon de convergence vaut donc 1 et
$$\forall z \in D(0,1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

On a aussi
$$\forall z \in D(0,1)[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$
et plus généralement,
$$\forall z \in D(0,1),\ \forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} z^n = \frac{z^{n_0}}{1-z} \qquad \text{"premier terme/1-raison"}.$$

Autres situations typiques de séries géométriques.

- Reconnaître la série entière $S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$.
  - Pour tous réels a, b et tout entier n, on a
  $$a^n b^n = (ab)^n.$$

– Pour tout entier n et tout réel z, on a donc
$$(-1)^n z^n = (-z)^n.$$
– Ainsi, S_1 est la série géométrique de raison $-z$. Celle-ci converge si et seulement si
$$|-z| < 1 \iff |z| < 1 \iff z \in D(0,1)$$
et alors
$$\forall z \in D(0,1), \quad S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}.$$

- Reconnaître la série entière $S_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n}$.

– On y voit beaucoup plus clair en écrivant la série à l'ancienne:
$$S_2(z) = z^2 + z^4 + z^6 + \ldots,$$
ce qui la fait apparaître comme série géométrique de raison z^2, ce qui est dû au fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tous entiers n, k
$$z^{kn} = \left(z^k\right)^n$$
et donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout entier n,
$$z^{2n} = \left(z^2\right)^n.$$
– Ainsi,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^2\right)^n$$
et on reconnaît effectivement une série géométrique de raison z^2.

– La série géométrique de raison z^2 converge si et seulement si
$$\left|z^2\right| < 1 \iff |z| < \sqrt{2} \iff z \in D(0, \sqrt{2})$$
et on alors
$$\forall z \in D(0, \sqrt{2}), \quad S_2(z) = \frac{z^2}{1-z^2}.$$

- Reconnaître la série entière $S_3(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n-1}$.

– On y voit beaucoup plus clair en écrivant la série à l'ancienne:
$$S_3(z) = z + z^3 + z^5 + \ldots,$$
ce qui la fait apparaître comme série géométrique de raison z^2.

– Plus rigoureusement, on procède au changement d'indice $j = n-1$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n-1} &= \sum_{j=0}^{+\infty} z^{2(j+1)-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} z^{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} z \times z^{2j} = z \sum_{j=0}^{+\infty} z^{2j} = z \sum_{j=0}^{+\infty} \left(z^2\right)^j\end{aligned}$$
et on reconnaît effectivement une série géométrique de raison z^2.

– La série géométrique de raison z^2 converge si et seulement si
$$\left|z^2\right| < 1 \iff |z|^2 < 1 \iff -1 < |z| < 1$$
et on alors
$$\forall z \in D(0,1), \quad S_3(z) = z \sum_{j=0}^{+\infty} \left(z^2\right)^j = z \frac{1}{1-z^2}.$$

- Reconnaître la série entière $S_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} z^{2n+1}$.

– On écrit
$$\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{3^n}, \qquad z^{2n+1} = z \times z^{2n} = z \times \left(z^2\right)^n.$$
– Puisque pour tous réels a, b et tout entier n:
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$
on a
$$\frac{1}{3^{n-1}} z^{2n+1} = 3z \left(\frac{z^2}{3}\right)^n$$
et on reconnaît en $S_4(z)$ une série géométrique de raison $\frac{z^2}{3}$.

– La série géométrique de raison $\frac{z^2}{3}$ converge si et seulement si
$$\left|\frac{z^2}{3}\right| < 1 \iff \frac{|z|^2}{3} < 1 \iff |z|^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < |z| < \sqrt{3}$$
et on alors
$$\forall z \in D(0, \sqrt{3}), \quad S_4(z) = 3z \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z^2}{3}\right)^n = 3z \frac{1}{1-\frac{z^2}{3}} = \frac{9z}{3-z^2}.$$

4 Somme et produit de Cauchy de deux séries entières

Proposition XX.4.23 On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie
$$R \geq \min\{R_a, R_b\}$$
et pour tout $z \in D(0, \min\{R_a, R_b\})$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration. Rappelons que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
Notons
$$R_0 = \min\{R_a, R_b\}$$
et soit $z \in D(0, R_0)$. On applique l'inégalité triangulaire:
$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) z^n| &= |a_n z^n + b_n z^n| \\ &\leq |a_n z^n| + |b_n z^n|.\end{aligned}$$

Puisque $R_0 \geq R_a$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente; puisque $R_0 \geq R_b$ la série $\sum b_n z^n$ est absolument convergente, donc la série

$$\sum \left(|a_n z^n| + |b_n z^n| \right)$$

est convergente. Par théorème de comparaison par majoration, la série

$$\sum \left(|(a_n + b_n) z^n| \right)$$

est également convergente. Puisque cette absolue convergence a lieu pour tout $z \in D(0, R_0)$, on en déduit que le plus grand disque ouvert sur lequel ce phénomène se produit est le disque $D(0, R_0)$. C'est pourquoi

$$R \geq R_0.$$

Le reste se déduit du rappel.

Remarques.

- Si $R_a < R_b$, alors
$$R = R_a.$$
  - En effet, dans la mesure où on a alors
  $$\min\{R_a, R_b\} = R_a,$$
  on a déjà
  $$R \geq R_a$$
  d'après la proposition ci-dessus.
  - Ensuite, démontrons que la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est divergente lorsque
  $$R_a < |z| < R_b.$$
  Car, du fait que
  $$|z| < R_b,$$
  la série $\sum b_n z^n$ est convergente et du fait que
  $$|z| > R_a,$$
  la série $\sum a_n z^n$ est divergente. Si la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ était convergente alors en écrivant
  $$a_n z^n = (a_n + b_n) z^n - b_n z^n,$$
  on en déduirait que la série $\sum a_n z^n$ serait convergente (une combinaison de séries convergentes est convergente), ce qui est une contradiction.
  - Il est donc impossible que le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ soit $> R_a$ et c'est pourquoi
  $$R \leq R_a.$$
  - On a donc bien
  $$R = R_a.$$
- Il n'y a donc que lorsque $R_a = R_b$ qu'il y a une incertitude concernant la valeur du rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$. La proposition ci-dessus montre que
$$R \geq R_a = R_b$$
mais il est possible que l'on ait $R > R_a$. C'est le cas pour les séries entières
$$\sum_{n \geq 0} z^n$$
et
$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n!} - 1 \right) z^n.$$
  - Le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum z^n$ vaut 1 (série géométrique).
  - On a
  $$\frac{1}{n!} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -1$$
  et d'après une proposition précédente (deux coefficients équivalents produisent des séries entières ayant le même rayon de convergence), le rayon de convergence R_b de la série entière $\sum \left(\frac{1}{n!} - 1 \right) z^n$ est le même que celui de la série entière $\sum -z^n$, c'est à dire 1 aussi.
  - On a
  $$\sum (a_n + b_n) z^n = \sum \frac{1}{n!} z^n$$
  dont le rayon de convergence R vaut $+\infty$ (règle $R = \frac{1}{L}$).

  On a donc bien $R > R_a$.

Rappelons le résultat suivant:

On considère deux séries absolument convergentes $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ (à termes réels ou complexes).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} w_n$, appelée produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Le résultat suivant en décooule:

Théorème XX.4.24 ***Produit de Cauchy de deux séries entières.*** On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Le produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum c_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Son rayon de convergence R vérifie

$$R \geq \min\{R_a, R_b\}$$

et pour tout $z \in D(0, \min\{R_a, R_b\})$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Démonstration 119

5 Séries entières de la variable réelle; généralités, intervalle de convergence

Il n'y a pas de différence dans la définition ou le vocabulaire lorsque l'on se restreint à la variable réelle:

Définition XX.5.24 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. La série entière de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la variable réelle x est la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dépendant du paramètre x, en adoptant la convention $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Pour tout entier n, on dit que a_n est le coefficient de x^n. En particulier, le coefficient a_0 est appelé terme constant.

Une série est soit convergente soit divergente ce qui signifie que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ existe ou n'existe pas, d'où la définition suivante:

Définition XX.5.25 On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. La *somme* de cette série entière est la fonction

$$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

définie aux points x de $\mathbb{R}$ où la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente.

Théorème XX.5.25 ***Rayon de convergence.*** Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Son rayon de convergence est

$$R = \sup \{\rho \geq 0 \,/\, \text{ la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée } \},$$

qui est un réel ou $+\infty$. Alors

- la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in]-R, R[$
- la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge pour tout réel x tel que $|x| > R$; de plus, la suite $(a_n z^n)$ n'est même pas bornée et la divergence de la série $\sum a_n x^n$ est grossière, dans la mesure où son terme général $a_n x^n$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
- L'intervalle $]-R, R[$ est appelé ***intervalle ouvert de convergence***, qui est donc le plus grand intervalle ouvert centré en 0 sur lequel la série entière converge absolument.
- L'application

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

appelée somme de la série entière, est donc parfaitement définie sur l'intervalle $]-R, R[$.
- En particulier, S est définie sur tout $\mathbb{R}$ lorsque $R = +\infty$.

Remarques.

- Inutile de produire de démonstration, puisque la valeur absolue d'un nombre réel coïncide avec son module lorsque celui-ci est considéré comme un nombre complexe.
- Une série entière de rayon de convergence nul est divergente en tout réel x tel que $|x| > 0$ et donc pour tout $x \neq 0$!
- Une série entière de rayon de convergence non nul est donc une fonction d'une variable réelle sur un intervalle (non vide). On va alors s'intéresser dans les sections suivantes à des questions naturelles: dérivabilité, calcul d'intégrales et de primitives. C'est la raison pour laquelle les énoncés qui suivront concerneront des séries entières de rayon de convergence non nul.
- Ce théorème ne donne aucun renseignement lorsque $|x| = R$ i.e lorsque $x = R$ ou $x = -R$. Comme on le verra dans la pratique, il peut y avoir convergence pour certaines séries entières, divergence pour d'autres. On peut toutefois énoncer:

Proposition XX.5.26 *Intervalle de définition d'une série entière de la variable réelle.* Le domaine de définition d'une série entière de la variable réelle est toujours un intervalle.

En effet, ce résultat est trivial lorsque son rayon de convergence R vaut 0 ou $+\infty$ et lorsque R est un réel > 0, la série entière est soit définie seulement sur son intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, soit sur l'intervalle $[-R, R[$ si la série entière converge en $-R$, soit sur l'intervalle $]-R, R]$ si la série entière converge en R, soit sur l'intervalle $[-R, R]$ si la série entière converge en $-R$ et en R.

Comme pour les séries entières, on dispose de cette règle:

Théorème XX.5.27 ***Règle de d'Alembert pour les séries entières.*** On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.
Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite L (éventuellement infinie), alors le rayon de convergence de cette série entière est $R = \frac{1}{L}$.

La démonstration est évidemment identique à celle du cas complexe.

Exemple

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}.$$

- C'est une série entière dont tous les coefficients sont non nuls.
- En posant

$$a_n = \frac{1}{n+1},$$

on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et c'est pourquoi le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.
- Remarquons que la série diverge pour $x = 1$ (série harmonique) alors qu'elle converge pour $x = -1$ puisqu'il s'agit de la série harmonique alternée, pour laquelle le critère spécial des séries alternées s'applique immédiatement.

Autre exemple

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{2^n} x^{3n+1}.$$

Réponse. C'est une série entière dont les coefficients s'annulent: la règle de d'Alembert *pour les séries entières* $R = \frac{1}{L}$ ne peut donc pas s'appliquer directement.

- Il s'agit donc de déterminer le plus grand intervalle ouvert sur lequel la série

$$\sum_{n\geq 0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{2^n}x^{3n+1}\right|$$

converge.

- On a vu plus haut qu'une série entière converge toujours en $x = 0$; on se donne donc un réel $x \neq 0$.

- On pose

$$u_n(x) = \left|\frac{(-1)^n n}{2^n}x^{3n+1}\right|$$

et on va étudier la convergence de la série $\sum u_n(x)$ en utilisant la règle de d'Alembert *pour les séries*.

- On a

$$u_n(x) = \frac{n}{2^n}\,|x|^{3n+1}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \frac{n+1}{n}\times\frac{2^n}{2^{n+1}}\times\frac{|x|^{3n+4}}{|x|^{3n+1}}\\ &= \frac{n+1}{2n}\times|x|^3\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,|x|^3\end{aligned}$$

et en conséquence

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,|x|^3.$$

- D'après la règle de d'Alembert pour les séries:
  - si $\frac{1}{2}\,|x|^3$ i.e. $|x|^3 < 2$, c'est à dire

    $$|x| < \sqrt[3]{2},$$

    c'est à dire si

    $$x \in \left]-\sqrt[3]{2},\,\sqrt[3]{2}\right[,$$

    alors $\sum u_n(x)$ converge c'est à dire qu'il y a convergence absolue de la série entière en x,
  - si $\frac{1}{2}\,|x|^3 > 1$ donc si

    $$|x| > \sqrt[3]{2},$$

    c'est à dire si x est strictement à l'extérieur de l'intervalle ci-dessus, alors la série $\sum u_n(x)$ diverge, i.e. il n'y a pas convergence absolue de la série entière.
  - Le plus grand intervalle ouvert sur lequel la série entière est absolument convergente est donc l'intervalle

    $$\left]-\sqrt[3]{2},\,\sqrt[3]{2}\right[$$

  - Le rayon de convergence de cette série entière vaut donc $\sqrt[3]{2}$.

6 Théorème de continuité sur l'intervalle de définition d'une série entière

Nous admettrons ce résultat :

Théorème XX.6.28 Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ (éventuellement $R = +\infty$). Alors l'application

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est continue sur son intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

De plus, S est continue sur son domaine de définition, c'est à dire: si R est réel et si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n R^n$ converge, resp. si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(-R)^n$ converge, alors S est continue au point R, et donc sur $]-R, R]$, resp. au point $-R$, et donc sur $[-R, R[$.

Remarques.

- Évidemment, si les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n R^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(-R)^n$ convergent, alors S est continue sur $[-R, R]$.
- En R, resp. $-R$, il s'agit bien sûr de continuité à gauche, resp. à droite.

Exemple typique

On considère la série entière

$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

- Par une application de la règle $R = \frac{1}{L}$, on obtient immédiatement que son rayon de convergence est

  $$R = 1.$$

- On verra plus loin dans ce chapitre que

  $$\forall x \in\,]-1, 1[\,,\quad S(x) = \ln(1+x).$$

- Par une application immédiate du théorème spécial des séries alternées, la série

  $$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

  est convergente (puisque la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante de limite nulle) i.e. la série entière

  $$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

  converge en $x = R = 1$.

- Il résulte alors du théorème de continuité sur l'intervalle de définition que S est continue en 1, c'est à dire

  $$S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} S(1)$$

  autrement dit:

  $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

- Mais dans la mesure où

  $$\forall x \in\,]-1, 1[\,,\quad S(x) = \ln(1+x)$$

et que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est évidemment continue sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 1, on a

$$\ln(1+x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \ln 2$$

c'est à dire

$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \ln 2.$$

- Par unicité de la limite (i.e. S ne peut pas tendre vers deux choses différentes),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

7 Théorème de dérivation terme à terme

7.1 Énoncé du théorème

Ce théorème est capital:

Théorème XX.7.29 On considère une série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors S est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-R,R[$ et pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n\, x^{n-1} \\ S''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

et plus généralement,

$$\forall p \geq 1, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n\, x^{n-p}.$$

Toutes les dérivées successives de S sont des séries entières possédant le même rayon de convergence R que S.

La démonstration est admise.

Ce théorème permet notamment d'établir certaines identités.

Premier exemple

On considére la série entière

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

- On a reconnu en S_1 la série géométrique de raison x; on sait que son rayon de convergence vaut 1 et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S_1(x) = \frac{1}{1-x}.$$

- Ainsi

$$\forall x \in]-1,1[,\ S_1(x) = \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

- Mais le théorème dérivation terme à terme donne

$$\forall x \in]-1,1[,\ S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

- C'est donc que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Deuxième exemple

On considére la série entière

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

- Recherchons son rayon de convergence.
  - C'est une série entière dont tous les coefficients sont non nuls.
  - En posant

$$a_n = \frac{1}{n!},$$

on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

et c'est pourquoi le rayon de convergence de cette série entière vaut $+\infty$.

- D'après le théorème de dérivation terme à terme, S_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_2'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1}.$$

- Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

- On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

- En effectuant un changement d'indice consistant à poser $m = n-1$ puis un renommage d'indice,

$$S_2'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} x^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = S_2(x).$$

- On a donc mis en évidence:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_2'(x) = S_2(x).$$

- Ainsi, S_2 satisfait l'équation différentielle $y'(x) = y(x)$ dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$y(x) = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}$$

et puisque $S_2(0) = 1$ (terme constant), c'est que $C = 1$.
- On a donc $S_2(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En conclusion, on a le résultat fondamental suivant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \mathrm{e}^x.$$

Ce résultat établit un lien entre coefficients d'une série entière et les valeurs de ses dérivées successives en 0:

Théorème XX.7.30 On considère une série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$. Alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

et on a en conséquence

$$\forall x\in\,]-R,R[\,,\quad S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

On dit alors que S est égale à sa *série de Taylor* sur l'intervalle $]-R,R[$.

En effet, des égalités

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, x^{n-1}\\
S''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\\
\forall p\geq 1,\ S^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n\, x^{n-p}
\end{aligned}$$

on déduit, avec la convention d'écriture habituelle discutée plus haut: $z^0=0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, les valeurs en 0:

$$\begin{aligned}
S'(0) &= a_1\\
S''(0) &= 2\times 1\times a_2\\
S^{(p)}(0) &= p\times(p-1)\times\dots\times 1\times a_p\\
&= p!a_p.
\end{aligned}$$

7.2 Les séries dérivées commencent-elles à $n=0$, $n=1$, $n=2$?

- Dans le cas général où $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on peut présenter le théorème de dérivation terme à terme de la manière suivante:

$$\begin{array}{lcccccccccl}
S(x) &=& a_0 &+& a_1x &+& a_2x^2 &+& a_3x^3 &+& \dots\\
S'(x) &=& 0 &+& a_1 &+& 2a_2x &+& 3a_3x^2 &+& \dots=\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}\\
S''(x) &=& 0 &+& 0 &+& 2a_2 &+& 6a_3x &+& \dots=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}
\end{array}$$

  - Puisque le premier terme de $S(x)$ est la constante a_0, le premier terme de la série dérivée $S'(x)$ est 0 et ne sert donc à rien; c'est pourquoi on la fait commencer à $n=1$.
  - Puisque le premier terme de $S'(x)$ est la constante a_1, le premier terme de la série dérivée seconde $S''(x)$ est 0 et ne sert donc à rien; c'est pourquoi on la fait commencer à $n=2$ et ainsi de suite.

- Mais dans la pratique, les séries entières rencontrées ne seront pas toutes de la forme $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par exemple, pour

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1},$$

on aura:

$$\begin{array}{lcccccccl}
S(x) &=& a_0x &+& a_1x^3 &+& a_2x^5 &+& \dots=\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{2n+1}\\
S'(x) &=& a_0 &+& 3a_1x^2 &+& 5a_2x^4 &+& \dots=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}\\
S''(x) &=& 0 &+& 6a_1x &+& 20a_2x^3 &+& \dots=\sum_{n=1}^{+\infty} 2n(n+1)a_nx^{2n-1}
\end{array}$$

  - La série dérivée commence à $n=0$ car le terme correspondant à $n=0$ dans $S(x)$ est a_0x, qui n'est pas un terme constant et qui donne a_0 par dérivation;
  - en revanche, $S''(x)$ va commencer à $n=1$ puisque le terme correspondant à $n=0$ dans $S'(x)$ est la constante a_0, qui va donner 0 par dérivation et ne servira donc à rien dans la somme.

- On prendra donc garde d'observer si le premier terme à dériver, i.e. le terme correspondant à l'indice le plus bas, est un terme constant ou non:
  - si oui, la série dérivée commence un rang plus loin,
  - si non, la série dérivée démarre au même rang.
  - Ne pas hésiter à écrire la série à l'ancienne!

7.3 Application au calcul de certaines sommes

Considérons la série entière

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n}x^{4n}.$$

- Déterminons son rayon de convergence. Puisque c'est une série entière dont certains coefficients s'annulent, la règle de d'Alembert pour les séries entières $R=\frac{1}{L}$ ne peut pas s'appliquer.
  - Pour tout $x\neq 0$, on pose

$$u_n(x)=\left|\frac{(-1)^n}{4n}x^{4n}\right|$$

    et on va étudier la convergence de la série $\sum u_n(x)$ en utilisant la règle de d'Alembert.
  - On a

$$u_n(x)=\frac{1}{4n}\left|x^{4n}\right|$$

    et donc

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\frac{4n}{4(n+1)}\times\left|\frac{x^{4(n+1)}}{x^{4n}}\right|=\frac{4n}{4(n+1)}|x|^4$$

    et en conséquence

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4n}{4n}|x|^4=|x|^4=x^4$$

    et c'est pourquoi

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x^4.$$

– Posons $X = x^2$.
  * On a
  $$x^4 < 1 \iff X^2 < 1 \iff -1 < X < 1 \iff -1 < x^2 < 1 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$$
  donc d'après la règle de d'Alembert si $-1 < x < 1$, la série $\sum u_n(x)$ converge c'est à dire qu'il y a convergence absolue de la série entière en x,
  * On a
  $$x^4 > 1 \iff X^2 > 1 \iff |X| > 1 \iff x^2 > 1 \iff |x| > 1$$
  donc si x est strictement à l'extérieur de l'intervalle $]-1, 1[$, la série $\sum u_n(x)$ diverge, i.e. il n'y a pas convergence absolue de la série entière.
  * Le plus grand intervalle ouvert sur lequel la série entière est absolument convergente est donc l'intervalle $]-1, 1[$.
  * Le rayon de convergence vaut donc 1.

- D'après le théorème de dérivation terme à terme,
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{4n-1}.$$
- Le changement d'indice $m = n - 1$ donne
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S'(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{m+1} x^{4(m+1)-1} = -\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m x^{4m+3},$$
c'est à dire
$$\begin{aligned}\forall x \in]-1, 1[, \quad S'(x) &= -x^3 \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m x^{4m} = -x^3 \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(x^4\right)^m \\ &= -x^3 \sum_{m=0}^{+\infty} \left(-x^4\right)^m\end{aligned}$$
si bien que l'on a affaire à la série géométrique de raison $-x^4$ et c'est pourquoi
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S'(x) = -x^3 \times \frac{1}{1 + x^4} = -\frac{x^3}{1 + x^4}.$$
- La suite est classique: on a une expression de la dérivée d'une fonction; on "reconstitue" alors la fonction par un calcul de primitive. Reconnaissant la forme
$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln |u(x)| + C$$
avec $u(x) = 1 + x^4$, on en déduit qu'il existe une constante C telle que
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \ln |1 + x^4| + C = \ln(1 + x^4) + C.$$
- On va bien entendu déterminer la valeur de C par considération de la valeur de S en 0.
  – De
  $$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n}$$
  on déduit $S(0) = 0$ puisqu'on est en présence d'une série entière sans terme constant.
  – Mais
  $$S(x) = \ln(1 + x^4) + C \implies S(0) = \ln 1 + C = C.$$
  – C'est donc que $C = 0$.
- On a donc
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \ln(1 + x^4).$$

8 Primitivation d'une série entière

8.1 Énoncé du théorème

Une fonction ne possède qu'une seule dérivée mais une infinité de primitives; en revanche, elle ne possède qu'une seule primitive prenant une valeur donnée en un point donné. Cela justifie le mot "la" dans l'énoncé suivant:

Théorème XX.8.31 On considère une série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. La primitive sur $]-R, R[$ de S qui s'annule en 0 est la série entière F définie par
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}.$$
C'est une série entière dont le rayon de convergence vaut également R.

On a donc
$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}.$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord que les séries entières $\sum \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$ et $\sum a_n x^n$ ont le même rayon de convergence.
- On a vu que pour toute suite (b_n) de coefficients, les séries entières $\sum b_n z^n$ et $\sum n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
- C'est pourquoi le rayon de convergence de F est le même que celui de la série entière $\sum \frac{n a_n}{n+1}\, x^{n+1}$ et comme deux suites équivalents de coefficients produisent des séries entières de même rayon de convergence et que
$$\frac{n a_n}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n,$$
la série entière $\sum \frac{n a_n}{n+1}\, x^{n+1}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum a_n\, x^{n+1}$ et donc le même rayon de convergence que S.
- Ainsi, F et S ont le même rayon de convergence.

Ensuite, la formule du théorème est tout à fait logique:
- la série entière $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$ est effectivement nulle en 0.
- En appliquant le théorème de dérivation terme à terme à la série entière T, on obtient
$$\begin{aligned}F'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \times (n+1) \times x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\end{aligned}$$
c'est à dire précisément $S(x)$.
- Ainsi, F s'annule en 0 et est une primitive de S; c'est donc la primitive de S qui s'annule en 0.
- Enfin la primitive de S sur $]-R, R[$ qui s'annule en 0 est, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction
$$x \longmapsto \int_0^x S(t)\, dt,$$
c'est à dire la fonction
$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt.$$

Le dernier résultat du théorème résulte donc de l'unicité de cette primitive sur $]-R, R[$.

Exemple fondamental

Considérons la série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

i.e. la série entière géométrique de raison x.

- On sait que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

et donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \frac{1}{1-x}$$

- Les primitives de S sur $]-1, 1[$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto -\ln(1-x) + C$$

et parmi celles-ci, celle qui s'annule en 0 est la fonction

$$x \mapsto -\ln(1-x).$$

- Par ailleurs, le théorème d'intégration terme à terme affirme que la primitive qui s'annule en 0 de

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

sur $]-1, 1[$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- C'est donc que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

Autre exemple fondamental

Reprenons le développement (série géométrique)

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et remplaçons x par $-x^2$, en observant que

$$x^2 \in]-1, 1[\iff x \in]-1, 1[.$$

- On obtient

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$$

et comme

$$(-x^2)^n = (-1)^n x^{2n},$$

on a alors

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

- La primitive sur $]-1, 1[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

qui s'annule en 0 est la fonction

$$x \mapsto \arctan x$$

alors que la primitive qui s'annule en 0 de

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

sur $]-1, 1[$ est

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

d'après le théorème d'intégration terme à terme.

- C'est donc que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

Remarque concernant certaines séries entières. Pour une série entière comme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n-1},$$

la primitive de S qui s'annule en 0 est bien entendu

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n}}{2n}$$

et donc quelle que soit la série entière, quelles que soient les puissances de x en jeu, sa primitive qui s'annule en 0 sera la somme de la série des primitives s'annulant en 0 de chaque terme de la somme.

Une application du théorème de primitivation des séries entières

Démontrer que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{1+t^5}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+4)2^{5n+4}}.$$

- On sait que

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

et donc

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n.$$

- Or

$$-1 < t^5 < 1 \iff -\sqrt[5]{1} < t < \sqrt[5]{1} \iff -1 < t < 1$$

et donc

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+t^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (t^5)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{5n}$$

puis

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{t^3}{1+t^5} = t^3 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{5n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{5n+3}$$

- Puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, le théorème de primitivation des séries entières donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{1+t^5}\, dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n t^{5n+3}\right)\right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \left((-1)^n t^{5n+3}\right)\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(1/2)^{5n+4}}{5n+4} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+4)2^{5n+4}}.\end{aligned}$$

8.2 Application au calcul de certaines sommes

On considère la série entière

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n-1}.$$

- Déterminons son rayon de convergence. Puisque c'est une série entière dont certains coefficients s'annulent, la règle de d'Alembert pour les séries entières $R = \frac{1}{L}$ ne peut pas s'appliquer.
  - Pour tout $x \neq 0$, on pose

    $$u_n(x) = \left|(-1)^{n+1} n x^{2n-1}\right|$$

    et on va étudier la convergence de la série $\sum u_n(x)$ en utilisant la règle de d'Alembert.
  - On a

    $$u_n(x) = n\left|x^{2n-1}\right|$$

    et donc

    $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{n+1}{n} \times \left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{x^{2n-1}}\right| = \frac{n+1}{n}\, |x|^2.$$

    En conséquence

    $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n}\, |x|^2 = |x|^2 = x^2$$

    et c'est pourquoi

    $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2.$$

    * On a

      $$x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$$

      donc d'après la règle de d'Alembert si $-1 < x < 1$, la série $\sum u_n(x)$ converge c'est à dire qu'il y a convergence absolue de la série entière en x,
    * On a

      $$x^2 > 1 \iff |x| > 1$$

      donc si x est strictement à l'extérieur de l'intervalle $]-1,1[$, la série $\sum u_n(x)$ diverge, i.e. il n'y a pas convergence absolue de la série entière.
    * Le plus grand intervalle ouvert sur lequel la série entière est absolument convergente est donc l'intervalle $]-1,1[$.
    * Le rayon de convergence vaut donc 1.

- Notons T la primitive de S sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0. D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\quad T(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n\end{aligned}$$

  si bien que l'on a affaire à la série géométrique de raison $-x^2$ et c'est pourquoi

$$\forall x \in]-1,1[,\quad T(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

- Résumons: T est une primitive de S sur $]-1,1[$, ce qui signifie:

$$\forall x \in]-1,1[,\quad T'(x) = S(x).$$

- Le calcul donne immédiatement

$$T'(x) = -\frac{x}{(1+x^2)^2}$$

  et en conséquence

$$\forall x \in]-1,1[,\quad S(x) - \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

9 Théorème d'identification des séries entières; solution d'une équation différentielle sous forme de série entière

Le premier résultat de ce paragraphe est le suivant:

Théorème XX.9.32 ***Théorème d'identification des séries entières.*** Soit $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- Alors S est la fonction nulle sur $]-R,R[$ si et seulement si tous ses coefficients c_n sont nuls.
- En conséquence, si deux séries entières coïncident sur un intervalle:

$$\forall x \in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

  alors $a_n = b_n$ pour tout entier n.

Démonstration.

- Évidemment si tous les coefficients sont nuls, S est la fonction nulle.
- Réciproquement, si S est la fonction nulle, alors toutes ses dérivées le sont aussi, en particulier en 0, ce qui donne le résultat en vertu du fait qu'une série entière est égale à sa *série de Taylor* son intervalle ouvert de convergence:

On considère une série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

et on a en conséquence

$$\forall x \in]-R,R[,\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

- Enfin, si $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$, alors $\sum (a_n - b_n) x^n = 0$ et on est ramené à la situation précédente.

Ce résultat peut prendre plusieurs formes:

$$\forall x \in]-R, R[\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 0$$

ou encore

$$\forall x \in]-R, R[\,, \qquad c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ b_n = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\forall x \in]-R, R[\,, \qquad c_0 + c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ b_n = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

ou encore

$$\forall x \in]-R, R[\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n-1} = 0 \Longleftrightarrow \forall n \geq 1,\ b_n = 0.$$

Solution d'une équation différentielle sous forme de série entière

Le contexte est le suivant: on se donne une équation différentielle, homogène pour fixer les idées.

$$(E_0) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$$

et on en recherche une solution y sous la forme d'une série entière: $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Pour déterminer une telle solution:

- en partant d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ de rayon de convergence $R > 0$, on calcule $y'(x)$ et $y''(x)$ par application du théorème de dérivation terme à terme,
- on écrit alors $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x)$ sous la forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, ce qui nécessite en général:
  - des changements et renommages d'indice afin de faire apparaître dans les trois sommes $a(x)y''(x)$, $b(x)y'(x)$ et $c(x)y(x)$ une même puissance de x (typiquement, les trois sommes en x^n ou les trois sommes en x^{n-1}...)
  - l'isolation de quelques termes ($n = 0$ ou $n = 1$) afin de faire commencer les trois sommes à un même indice et de les regrouper sous une même somme.
  - L'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n$ peut apparaître sous l'une de ces formes:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n, \quad c_0 + c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n, \quad c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n-1} \ldots$$

  - Les coefficients b_n sont en général des combinaisons de a_{n+1} et a_n ou a_{n-1}.
- On obtient alors en général une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n ou a_{n-1}.
- Au cas par cas, on appliquera la "méthode de la descente", qui consiste à exprimer a_n en fonction de a_0 (et de points de suspension!) dans le but d'exprimer a_n en fonction de n uniquement.
  - Il sera extrêmement fréquent d'obtenir une relation entre a_{n+1} et a_{n-1} (et donc entre a_n et a_{n-2}) et donc, à force de descendre de deux en deux, une relation:
    * qui relie a_n à a_0 si n est pair,
    * qui relie a_n à a_1 si n est impair.
  - Il sera fréquent également que l'on ait $a_0 = 0$ ou $a_1 = 0$, ce qui se produit typiquement si (E_0) est accompagnée d'une, ou deux, condition(s) initiale(s) (et donc un problème de Cauchy) comme $y(0) = 0$ ou $y'(0) = 0$ car pour une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on sait que $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$.
    * Dans le cas d'une relation de récurrence entre a_n et a_{n-2}, la nullité de a_0 se transmet à a_2, a_4 ...et donc à tous les a_{2p} et la nullité de a_1 se transmet à a_3, a_5 ...et donc à tous les a_{2p+1}.
    * Lorsque tous les a_{2p} sont nuls, la série entière s'écrit alors $\sum a_{2p+1} x^{2p+1}$ et lorsque tous les a_{2p+1} sont nuls, la série entière s'écrit alors $\sum a_{2p} x^{2p}$.
- Après avoir déterminé les a_n, on vérifiera que la série entière $\sum a_n x^n$ (ou selon le cas, $\sum a_{2p} x^{2p}$, $\sum a_{2p+1} x^{2p+1}$) a un rayon de convergence non nul.

Exemple typique

On considère le problème de Cauchy:

$$(E): \begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Démontrer que (E) possède une solution qui est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Réponse. Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

- *Première étape.* On écrit $xy''(x) + y'(x) + xy(x)$ sous la forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. En vertu du théorème de dérivation terme à terme, on a

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n\, x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \end{aligned}$$

  et on a donc

$$\begin{aligned} xy''(x) + y'(x) + xy(x) &= x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n\, x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n\, x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

  Ayant deux sommes alignées sur x^{n-1} dans 9.2, on va modifier la dernière. En posant $n + 1 = m - 1$, i.e. $m = n + 2$ qui varie de 2 à l'infini quand n varie de 0 à l'infini, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+1} = \sum_{m=2}^{+\infty} a_{m-2}\, x^{m-1}$$

et pour plus de clarté, on renomme n le nouvel indice. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}\, x^{n-1}.$$

On regroupe enfin les trois sommes de 9.2 en une seule, en démarrant à un indice commun (ici $n=2$), ce qui nécessite d'isoler le terme $n=1$ de la deuxième somme, qui vaut a_1:

$$\begin{aligned} xy''(x)+y'(x)+xy(x) &= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(a_{n-2}+na_n+n(n-1)a_n\right) x^{n-1} \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(a_{n-2}+n^2a_n\right) x^{n-1}. \end{aligned}$$

- Puisque pour la série entière $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$,

$$y(0)=a_0, \quad y'(0)=a_1,$$

la prise en compte des conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ donne: y est solution de (E) sur $I=\left]-R,R\right[$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x\in I, \quad a_1+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(a_{n-2}+n^2a_n\right)x^{n-1}=0 \\ a_0=1,\ a_1=0 \end{array}\right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall x\in I, \quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(a_{n-2}+n^2a_n\right)x^{n-1}=0 \\ a_0=1,\ a_1=0. \end{array}\right. \tag{9.3}$$

- C'est le moment d'appliquer le théorème d'identification des séries entières: on a

$$\forall x\in I, \quad \sum_{n=2}^{+\infty}\left(a_{n-2}+n^2a_n\right)x^{n-1}=0 \iff \forall n\geq 2,\ a_{n-2}+n^2a_n=0,$$

si bien que 9.3 a lieu si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n\geq 2,\ a_{n-2}+n^2a_n=0 \\ a_0=1,\ a_1=0. \end{array}\right. \tag{9.4}$$

- *Deuxième étape.* Elle consiste en la détermination des a_n. *Le fait suivant est capital:* on observe que la relation de récurrence lie les coefficients a_n de 2 en 2; ainsi, de $a_1=0$ et de $a_{n-2}+n^2a_n=0$, on déduit $a_3=-\frac{1}{9}a_1=0$ puis $a_5=-\frac{1}{25}a_3=0$ et ainsi de suite: $a_n=0$ pour tout entier n impair. Pour n pair, on pose $n=2p$ et on applique une méthode de redescente qui va donc nous permettre de redescendre jusquà a_0:

$$\begin{aligned} a_{2p}=\frac{-1}{(2p)^2}.a_{2p-2} &= \frac{-1}{4p^2}.a_{2(p-1)} \\ &= \frac{-1}{4p^2}.\frac{-1}{4(p-1)^2}.a_{2(p-2)} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

La dernière relation que l'on écrit en redescendant jusquà a_0 est

$$a_2=\frac{-1}{4\times 1^2}a_0$$

(on conserve la notation 4×1^2 par souci d'unité dans les différents facteurs), c'est à dire $a_2=\frac{-1}{4\times 1^2}$.

On a donc

$$a_{2p}=\frac{-1}{4p^2}.\frac{-1}{4(p-1)^2}\cdots\frac{-1}{4.1^2}.$$

On va maintenant simplifier l'expression obtenue; on voit que celle-ci comporte p facteurs:

$$2p\to 2(p-1)\to 2(p-2)\to\ldots\to 2.1\to 0$$

et comporte donc autant de "sauts" que

$$p\to p-1\to p-2\to\ldots\to 1\to 0,$$

c'est à dire p, si bien que le numérateur s'écrit $(-1)^p$.

Le dénominateur comporte p-fois le facteur 4, c'est à dire 4^p ainsi que les facteurs

$$p^2\times(p-1)^2\ldots 1^2=(p(p-1)\ldots 1)^2=(p!)^2.$$

En définitive,

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2}\,. \tag{9.5}$$

- *Conclusion.* La seule série entière vérifiant 9.1 est donc la série entière où les coefficients a_{2p} sont donnés par 9.5 et où les a_{2p+1} sont nuls, c'est à dire:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n \text{ pair}}^{+\infty} a_nx^n + \sum_{n \text{ impair}}^{+\infty} a_nx^n \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p}+0 \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2}x^{2p}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Il faut absolument vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est non nul. S'il était nul, S ne serait pas une fonction!

- Soit $x\neq 0$. Posons $u_p(x)=\left|\frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2}x^{2p}\right|$ et étudions la convergence de la série $\sum u_p(x)$.
- On a

$$u_p(x)=\frac{1}{4^p(p!)^2}\left|x^{2p}\right|$$

et donc

$$\frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}=\frac{4^p(p!)^2}{4^{p+1}((p+1)!)^2}\times\frac{\left|x^{2p+2}\right|}{\left|x^{2p}\right|}=\frac{1}{4(p+1)^2}\left|x^2\right|\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

- Cette limite 0 est <1 et ce quel que soit x.
- Il résulte donc de la règle de d'Alembert que la série $\sum u_p(x)$ converge.
- Autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^p}{4^p(p!)^2}x^{2p}$ converge absolument, donc converge, pour tout $x\in\mathbb{R}$: la somme S de cette série entière est ainsi définie sur tout $\mathbb{R}$.

En conclusion, le problème (E) possède une solution et une seule sous forme de série entière, celle-ci est définie sur tout $\mathbb{R}$ et est donnée par 9.6.

10 Développement en série entière: la définition et les développements à connaître par cœur

Définition XX.10.26 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.

- On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coefficients et un réel $R>0$ tel que

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

- c'est à dire s'il existe un intervalle centré en 0 sur lequel f est égale à la somme d'une série entière.

Remarques.

- De tels intervalles I sont par exemple $]-1,1[$, $]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[$, $]-1,+\infty[$ ou même $\mathbb{R}$.

- Le mot *voisinage* ne doit pas prêter à confusion: la variable x n'a *pas* pour vocation de *tendre* vers 0 comme dans un développement limité. La variable x peut prendre n'importe quelle valeur d'un certain intervalle centré en 0 et un tel intervalle est appelé *voisinage de* 0; dans de nombreux cas par exemple, ce "voisinage " est $\mathbb{R}$ tout entier.

- Un développement en série entière est une égalité de deux fonctions sur *tout un intervalle* alors qu'un développement limité au voisinage de 0 n'est que la valeur d'une certaine limite en 0! En effet, quand on écrit

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x),$$

c'est à dire

$$e^x-1-x \underset{x\to 0}{=} o(x)$$

on écrit en fait, *par définition*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}=0.$$

Les notions de développement limité et de développement en série entière ont "de l'ADN en commun" mais ne jouent pas du tout dans la même division, n'ont pas du tout les mêmes usages.

- La plupart des fonctions construites à partir des fonctions usuelles sont développables en série entière; par exemple, le fait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},$$

est la preuve que la fonction $x\mapsto e^x$ est développable en série entière au voisinage de 0 et le fait que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

est la preuve que la fonction $x\mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Théorème XX.10.33 Les fonctions

$$\begin{array}{lllllll}
x & \longmapsto & e^x & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x}\\
x & \longmapsto & \operatorname{ch} x & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x}\\
x & \longmapsto & \operatorname{sh} x & & x & \longmapsto & \ln(1+x)\\
x & \longmapsto & \cos x & & x & \longmapsto & \ln(1-x)\\
x & \longmapsto & \sin x & & x & \longmapsto & (1+x)^\alpha
\end{array}$$

(où α est un paramètre réel) sont développables en série entière au voisinage de 0.

Démonstration 120

Les développements à connaître par cœur

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \,]-1,1[\,, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall x \in \,]-1,1[\,, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

$$\forall x \in \,]-1,1[\,, \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\forall x \in \,]-1,1[\,, \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\forall x \in \,]-1,1[\,, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Un grand nombre de développements s'obtiennent à partir des développements ci-dessus par substitution, dérivation, intégration, ce qui va faire l'objet des sections suivantes.

10.1 Obtention par substitution

Premier exemple

Justifier que la fonction

$$f : x \mapsto e^{x^2}$$

est développable en série entière au voisinage de 0.

- On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- Ce développement est valable en n'importe quel réel; on peut donc l'appliquer en $-x^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}.$$

- Puisque

$$(-x^2)^n = (-1)^n (x^2)^n = (-1)^n x^{2n},$$

on a finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Deuxième exemple

Justifier que la fonction

$$f : x \mapsto \ln(1+2x)$$

est développable en série entière au voisinage de 0.

- On sait que

$$\forall x \in \,]-1,1[\,, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

- Ce développement n'est valable que sur l'intervalle $]-1,1[$; vouloir l'appliquer à un réel en dehors de cet intervalle n'a tout simplement aucun sens.
- On souhaite appliquer ce développement en $2x$; il faut donc absolument que $2x \in \,]-1,1[$. Puisque

$$-1 < 2x < 1 \quad \iff \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},$$

on a alors

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad \ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, (2x)^{n+1}}{n+1}$$

et puisque

$$(2x)^{n+1} = 2^{n+1} x^{n+1},$$

on a finalement

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad \ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(n+1)} x^{n+1}.$$

Troisième exemple

Développer en série entière la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{2-x}.$$

On écrit

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}.$$

Sachant que

$$\forall u \in \,]-1,1[\,, \quad \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

dès lors que $\frac{x}{2} \in]-1,1[$, c'est à dire pour tout $x \in]-2,2[$.

Quatrième exemple

Justifier que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière au voisinage de 0. Écrire ensuite les coefficients de ce développement à l'aide de factorielles.

- En prenant $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans la formule du binôme généralisée, on a

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n.$$

  De manière évidente,

$$-x^2 \in]-1,1[\iff x^2 \in]-1,1[\iff x^2 \in [0,1[\iff x \in]-1,1[$$

  si bien que

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-1)^n x^{2n},\end{aligned}$$

  ce qui prouve bien que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

- Le produit $-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)$ comporte n facteurs car

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = (\alpha-0)(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))$$

  comporte bien n facteurs (de 0 à $n-1$); en distribuant les n facteurs -1 que comporte $(-1)^n$ sur ce produit, on obtient

$$-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)\times(-1)^n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\dots(\frac{1}{2}+n-1)$$

  et en réduisant au dénominateur 2 chaque facteur:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(\frac{1}{2}+n-1\right) &= \frac{1\times(1+2)\dots\times(1+2n-2)}{2^n} \\ &= \frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{2^n}.\end{aligned}$$

  Afin de produire le nombre $(2n)!$, on va multiplier (et diviser) par les facteurs manquants qui sont $2\times 4\times\dots\times 2n$:

$$\begin{aligned}\frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{2^n} &= \frac{1\times 2\times 3\times\dots\times(2n-1)\times 2n}{2^n\times 2\times 4\times\dots\times 2n} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n\times 2\times 4\times\dots\times 2n}\end{aligned}$$

  et enfin

$$\begin{aligned}2\times 4\times\dots 2n &= (2\times 1)\times(2\times 2)\times\dots\times(2\times n) \\ &= 2^n\times n!.\end{aligned}$$

  On a donc obtenu

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\times(-1)^n &= \frac{(2n)!}{2^n\times 2^n\times n!} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n n!}\end{aligned}$$

  et en conséquence

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n\times(n!)^2}x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n\times(n!)^2}x^{2n}\end{aligned}$$

  car on peut observer que l'expression $\frac{(2n)!}{4^n\times(n!)^2}$ donne 1 pour $n=0$.

Un exemple stupide mais pas tant que ça

Un polynôme n'est pas développable en série entière ... un polynôme *EST* une série entière! En effet, par exemple,

$$\begin{aligned}2-x+3x^2 &= 2-x+3x^2+0\times x^3+0\times x^4+\dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ -1 & \text{si } n=1 \\ 3 & \text{si } n=2 \\ 0 & \text{si } n\geq 3. \end{cases}$$

10.2 Obtention par d'autres opérations

Multiplication par une puissance de x

On a par exemple

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

et il en résulte immédiatement que

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ x^2\ln(1+x) &= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \\ &= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{n+1},\end{aligned}$$

ce qui démontre que la fonction $f : x \mapsto x^2\ln(1+x)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Somme de deux développements

Soit à développer

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

- On écrit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x-2} &= \frac{1}{2-x} \\ &= \frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

- Sachant que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

on en déduit

$$-\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$$

dès lors que $\frac{x}{2} \in]-1,1[$, c'est à dire pour tout $x \in]-2,2[$.

- De même,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-3} &= -\frac{1}{3-x} \\ &= -\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}. \end{aligned}$$

- Sachant que

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-3} &= -\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

dès lors que $\frac{x}{3} \in]-1,1[$, c'est à dire pour tout $x \in]-3,3[$.

- ***Remarque importante.*** Pour bénéficier simultanément des deux développements

$$\forall x \in]-2,2[, \ -\frac{1}{x-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad \forall x \in]-3,3[, \ \frac{1}{x-3} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}},$$

il faut que $x \in]-2,2[$ et $x \in]-3,3[$; il faut donc que $x \in]-2,2[$ et alors

$$\begin{aligned} \forall x \in]-2,2[, \ f(x) &= -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n. \end{aligned}$$

On a plus généralement ce résultat:

Proposition XX.10.34 Soit f et g deux fonctions développables en série entière au voisinage de l'origine:

$$\forall x \in]-R_1,R_1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-R_2,R_2[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Pour tout couple de constantes (λ,μ), la fonction $h = \lambda f + \mu g$ est développable en série entière et son rayon de convergence R vérifie $R \geq R_0 = \min\{R_1,R_2\}$:

$$\forall x \in]-R_0,R_0[, \quad \lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)x^n.$$

10.3 Obtention par dérivation ou intégration terme à terme

Voici une conséquence immédiate du théorème de dérivation terme à terme:

Proposition XX.10.35 Si une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0, avec un développement valable sur $]-R,R[$:

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors f' est développable en série entière au voisinage de 0 et son développement est obtenu à l'aide du théorème de dérivation terme à terme:

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Exemple

À partir du développement

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

justifier que les fonctions $g : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ et $h : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}$ sont développables en série entière et donner leur développement.

- Du développement

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

  et du théorème de dérivation terme à terme on déduit:

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

  ce qui prouve que g est développable en série entière au voisinage de 0.

- Du développement en série entière au voisinage de 0 de g

$$\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

le théorème de dérivation terme à terme donne

$$\forall x \in]-1,1[, \quad g'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2},$$

c'est à dire

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}.$$

- Ainsi, h est développable en série entière au voisinage de 0 et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}.$$

Voici une conséquence immédiate du théorème d'intégration terme à terme:

Proposition XX.10.36 Si une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0, avec un développement valable sur $]-R,R[$:

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

alors sa primitive F qui s'annule en 0 est développable en série entière au voisinage de 0 et son développement s'obtient à l'aide du théorème d'intégration terme à terme:

$$\forall x \in]-R,R[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Les deux exemples suivants doivent absolument savoir être reproduits

Premier exemple

- À partir du développement

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

on obtient en prenant $\alpha - \frac{1}{2}$:

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n.$$

- On veut obtenir le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui nécessite que $-x^2 \in]-1,1[$. Or

$$-x^2 \in]-1,1[\iff -1 < -x^2 < 1 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1.$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n x^{2n},\end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière au voisinage de 0.

- La fonction $\arcsin$ est la primitive de la fonction f qui s'annule en 0.
- Mais du théorème d'intégration terme à terme, on déduit que la primitive sur $]-1,1[$ de la série entière

$$x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n x^{2n}$$

qui s'annule en 0 est

$$x \mapsto x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

- On a donc

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Deuxième exemple

Reprenons le développement

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

que l'on va appliquer $-x^2$, en observant que

$$x^2 \in]-1,1[\iff x^2 \in [0,1[\iff x \in]-1,1[$$

si bien que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$$

et comme $(-x^2)^n = (-1)^n x^{2n}$, on a alors

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

La primitive sur $]-1,1[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

qui s'annule en 0 est la fonction

$$x \mapsto \arctan x$$

alors que la primitive qui s'annule en 0 de

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

sur $]-1,1[$ est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$
d'après le théorème d'intégration terme à terme. C'est donc que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

10.4 Obtention par produit de Cauchy

Théorème XX.10.37 Soit f et g deux fonctions développables en série entière au voisinage de l'origine:
$$\forall x \in]-R_1, R_1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \forall x \in]-R_2, R_2[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

- Alors la fonction $h : x \mapsto f(x)g(x)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et le développement est valable au moins sur l'intervalle $]-R, R[$ où $R = \inf\{R_1, R_2\}$ et
$$\forall x \in]-R, R[, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Démonstration 121

Exemple

Soit $F : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$.

- On connaît les développements
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, \qquad \forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$
- De la théorie du produit de Cauchy, on déduit
$$\forall x \in]-1,1[, \quad e^x \times \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$
avec
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times (-1)^{n-k}.$$
Ainsi, F est développable en série entiìre au voisinage de 0 avec
$$\forall x \in]-1,1[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
où
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}.$$

10.5 Obtention en utilisant une équation différentielle

Cette méthode d'obtention du développement en série entière d'une fonction donnée en utilisant une équation différentielle fait l'objet d'un raisonnement logique et solide:

- un problème est considéré dont on sait qu'il possède une solution *et une seule*.
- Par des chemins empruntés différemment, on met en évidence l'existence de deux solutions à ce problème.
- On déduit de *l'unicité* de la solution à ce problème que ces deux solutions sont confondues: les deux "objets" découverts à l'étape précédente n'en sont qu'un en fait.

Elle s'appuie en outre sur les résultats suivants (on pourra se reporter au chapitre "Équations différentielles"):

Unicité de la solution à un problème de Cauchy pour une équation du premier ordre. On considère une équation différentielle
$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$
où a, b et c sont trois fonctions définies et continues sur un intervalle I; on suppose que a ne s'annule pas sur I (hypothèse essentielle) et on se donne $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Alors le problème de Cauchy
$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
possède une solution et seule définie sur I.

Unicité de la solution à un problème de Cauchy pour une équation du deuxième ordre. On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I. Pour tout t_0 donné dans I et tout couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution et une seule définie sur tout I, au problème de Cauchy:
$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Exemple très facile pour commencer

Démontrons que la fonction $f : x \mapsto e^x$ est développable en série entière au voisinage de 0 en utilisant l'équation différentielle $y' = y$.

- On a $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, donc f est solution du problème de Cauchy
$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
- Recherchons une solution de $(\mathcal{P})$ sous forme de série entière; soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
  - Par théorème de dérivation terme à terme, on a $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.
  - On a ensuite
$$y(x) - y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
et en posant $m = n - 1$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$$

et en procédant au renommage d'indice $m = n$:

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(m+1)a_{m+1}x^m = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

si bien que

$$\begin{aligned} y(x) - y'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - (n+1)a_{n+1})x^n. \end{aligned}$$

– Par théorème d'unicité des séries entières, on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) - y'(x) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_n - (n+1)a_{n+1} = 0.$$

– De plus,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \Longrightarrow \quad y(0) = a_0$$

donc la condition $y(0) = 1$ équivaut à $a_0 = 1$. Ainsi, la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n - (n+1)a_{n+1} = 0 \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

– Ensuite,

$$a_n - (n+1)a_{n+1} = 0 \iff a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$$

ce qui donne au rang n

$$a_n = \frac{1}{n}a_{n-1}$$

et au rang $n-1$:

$$a_{n-1} = \frac{1}{n-1}a_{n-2}$$

et ainsi de suite. Ainsi,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n+1}a_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n}a_{n-1} = \ldots \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} \times \ldots \times \frac{1}{1}a_0 = \frac{1}{(n+1)n \times \ldots \times 1}. \end{aligned}$$

– En conséquence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

et puisque l'on a aussi

$$a_0 = 1 = \frac{1}{0!}$$

c'est que l'on a fait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{n!}.$$

– Ainsi, la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$ est solution de $(\mathcal{P})$

– Par application de la règle de d'Alembert, on obtient facilement que son rayon de convergence vaut $+\infty$.

- Le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ possède une solution et une seule sur tout $\mathbb{R}$ puisque le "coefficient" $x \mapsto 1$ de $y'(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que tous les "coefficients" $x \mapsto 1$, $x \mapsto -1$ et $x \mapsto 0$ de l'équation différentielle sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- Puisque $f : x \mapsto e^x$ et $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$ sont deux solutions de ce problème, c'est que l'on a $f = y$ sur tout $\mathbb{R}$ i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

- On a donc prouvé que $x \mapsto e^x$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exemple plus sophistiqué

Démontrer que la fonction

$$f : x \longmapsto (\arcsin x)^2$$

est développable en série entière au voisinage de 0 en procédant de la façon suivante:

- on pose $g = f'$. Mettre en évidence un problème de Cauchy linéaire du premier ordre $(\mathscr{P})$ dont g est solution sur $I =]-1, 1[$.
- Déterminer la solution de $\mathscr{P}$ sous forme de série entière.
- En déduire que g est développable en série entière au voisinage de 0 en précisant ce développement et son rayon de convergence.
- En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0 en précisant ce développement et son rayon de convergence.

Réponse.

- On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) &= \frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -2x \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{x}{(1-x^2) \times \sqrt{1-x^2}} \\ g(x) &= f'(x) \\ &= 2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

puis en considérant g' comme un produit :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f''(x) \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x}{1-x^2}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}f'(x) \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}g(x) \end{aligned}$$

et en mulitpliant les deux membres par $1 - x^2$ et en rapatriant tout à gauche,

$$(1-x^2)g'(x) - xg'(x) - 2 = 0$$

Ainsi, g est solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ (1-x^2)y' - xy - 2 = 0$$

et puisque $g(0)=0$, on peut même dire que g est solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (1-x^2)y' - xy - 2 & = & 0 \\ \\ y(0) = 0. & & \end{array} \right. \tag{10.7}$$

- Recherchons une solution de $(\mathcal{P})$ sous forme de série entière; soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

  – Par théorème de dérivation terme à terme, on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

  – On a ensuite

$$\begin{array}{rcl} (1-x^2)S'(x) - xS(x) & = & (1-x^2)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \end{array}$$

et en posant $m = n-1$ dans la première somme, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$$

et en procédant au renommage d'indice $m = n$:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} x^m = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

et on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \tag{10.8}$$

En posant $m = n+1$ dans les deux autres sommes puis en renommant l'indice, on a

$$\begin{array}{rcl} -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} & = & -\displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} (m-1) a_{m-1} x^m - \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} x^m \\ & = & -\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n. \end{array} \tag{10.9}$$

Les trois sommes portent désormais sur les mêmes puissances de x: on peut donc procéder à leur regroupement, mais en partant de l'indice commun $n=2$, ce qui nécessite d'isoler les termes $n=0$ et $n=1$ dans le membre de droite de (10.8), qui valent respectivement

$$1 \times a_1 \times 1, \quad 2 \times a_2 \times x.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

et en isolant le terme $n=1$ dans la deuxième somme de (10.9), qui vaut $a_0 x$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = a_0 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{l} a_1 + 2a_2 x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - a_0 x - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ = a_1 + (2a_2 - a_0)x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \big((n+1) a_{n+1} x^n - (n-1) a_{n-1} x^n - a_{n-1} x^n\big) \\ = a_1 + (2a_2 - a_0)x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \big((n+1) a_{n+1} - (n-1) a_{n-1} - a_{n-1}\big) x^n \\ = a_1 + (2a_2 - a_0)x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \big((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}\big) x^n \end{array}$$

et alors

$$(1-x^2)S'(x) - xS(x) - 2 = a_1 - 2 + (2a_2 - a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}\big) x^n$$

Ainsi, $(1-x^2)S'(x) - xS(x) - 2$ est une série entière dont :

  * le terme constant est $a_1 - 2$,
  * le terme affectant x est $2a_2 - a_0$,
  * le terme affectant x^n pour $n \geq 2$ est $(n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}$.

  – Par théorème d'unicité des séries entières, on a

$$\forall x \in]-R,R[\,,\ (1-x^2)S'(x) - xS(x) - 2 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} a_1 - 2 = 0 \\ \\ 2a_2 - a_0 = 0 \\ \\ \forall n \geq 2,\ (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} = 0. \end{array} \right.$$

  – De plus,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \Longrightarrow \quad S(0) = a_0$$

donc la condition $S(0) = 0$ équivaut à $a_0 = 0$. Ainsi, la série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si

$$(\mathscr{R}) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ \\ a_1 - 2 = 0 \\ \\ 2a_2 - a_0 = 0 \\ \\ \forall n \geq 2,\ (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} = 0. \end{array} \right.$$

  – On a donc

$$a_0 = 0$$

et L_3 donne

$$a_2 = 0.$$

En appliquant L_4 avec $n=3$, on obtient

$$\begin{aligned} 4a_4 &= 3a_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$a_4 = 0,$$

et comme L_4 est une relation liant les coefficients à deux indices de distance et donc lie les coefficients a_n de rang pair entre eux, on conjecture que $a_n = 0$ lorsque n est un entier pair, c'est à dire

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0,$$

ce que l'on prouve immédiatement par récurrence :

* de ce qui précède, c'est vrai pour $p=0$ et pour $p=1$ (et même $p=2$).
* Supposons cette proposition vraie pour un entier $p \geq 1$; de L_4 que l'on applique avec $n+1 = 2(p+1)$, c'est à dire avec $n = 2p+1$, on déduit

  $$\begin{aligned} (2(p+1))a_{2(p+1)} &= (2p+1)a_{2p} \\ &= 0 \quad \text{(hypothèse de récurrence)}, \end{aligned}$$

  d'où l'on déduit

  $$a_{2(p+1)} = 0.$$

Du principe de récurrence, on déduit que l'on a bien

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0.$$

– Recherchons ensuite la valeur des coefficients de rang impair, c'est à dire les coefficients a_{2p+1}. De L_4 dans $(\mathscr{R})$ appliqué avec $n = 2p$, on déduit

$$\forall p \geq 1,\ a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1}. \tag{10.10}$$

En appliquant cette même relation mais au rang inférieur, c'est à dire avec $p-1$ à la place de p, on a

$$a_{2p-1} = \frac{2(p-1)}{2p-1)} a_{2p-3},$$

ce qui donne

$$a_{2p+1} = \frac{2p \times 2(p-1)}{(2p+1)(2p-1)} a_{2p-3}$$

et ainsi de suite jusqu'à écrire les deux dernières relations qui sont permises par (10.10), à savoir

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{4}{5} a_3 \\ a_3 &= \frac{2}{3} \times a_1 \\ &= \frac{2}{3} \times 2 \ \text{(d'après } L_2\text{)}, \end{aligned}$$

on obtient par "redescente" :

$$a_{2p+1} = \frac{2p \times 2(p-1) \times \ldots \times 4 \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \ldots \times 5 \times 3} \times 2.$$

Conjecturons la valeur de ce produit; en écrivant

$$2p \times 2(p-1) \times \ldots \times 4 \times 2 = 2p \times 2(p-1) \times \ldots \times (2 \times 2) \times (2 \times 1),$$

on conjecture que ce produit comporte p facteurs, chacun comportant le facteur 2 et c'est pourquoi

$$\begin{aligned} 2p \times 2(p-1) \times \ldots \times (2 \times 2) \times (2 \times 1) &= 2^p \times (p \times (p-1) \times \ldots \times 2 \times 1) \\ &= 2^p \times p!. \end{aligned}$$

Ensuite, on écrit classiquement (en comblant le produit des entiers impairs en intercalant le produit des entiers pairs) :

$$\begin{aligned} (2p+1) \times (2p-1) \times \ldots \times 5 \times 3 &= \frac{(2p+1) \times (2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times \ldots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2p \times (2p-2) \times \ldots \times 4 \times 2} \\ &= \frac{(2p+1)!}{2^p \times p!} \end{aligned}$$

(on a reconnu le travail précédent concernant le produit des entiers pairs) et c'est pourquoi on conjecture que

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} &= \frac{2^p p!}{\frac{(2p+1)!}{2^p \times p!}} \times 2 \\ &= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \times 2 \\ &= \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

ce que l'on prouve immédiatement par récurrence :

* C'est vrai pour $p=0$ car cette formule donne $a_1 = 2$, ce qui est vrai d'après L_2.
* Supposons cette proposition vraie pour un entier $p \geq 0$; de (??) que l'on applique en remplaçant p par $p+1$,

  $$\begin{aligned} a_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3} a_{2p+1} \\ &= \frac{(2p+2)}{2p+3} \times \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(2p+2) \times (2p+2) \times 2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!} \\ &= \frac{2^2 \times (p+1)^2 \times 2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+3)!} \\ &= \frac{2^{2p+3}((p+1)!)^2}{(2p+3)!} \end{aligned}$$

  et on en déduit que cette relation est vrai au rang $p+1$.

Du principe de récurrence, on déduit que l'on a bien

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

– Ainsi, la série entière

$$S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

(n'oublions pas que l'on a prouvé que tous les coefficients a_{2p} sont nuls) est une solution du problème $(\mathscr{P})$. Déterminons son rayon de convergence; étant lacunaire, on va poser, pour $x \neq 0$:

$$u_p(x) = \left| \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1} \right|$$

c'est à dire en fait

$$u_p(x) = \left| a_{2p+1} x^{2p+1} \right|.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)} &= \left|\frac{a_{2p+3}x^{2p+3}}{a_{2p+1}x^{2p+1}}\right| \\ &= \left|\frac{a_{2p+3}}{a_{2p+1}}\right| x^2 \\ &= \frac{2(p+1)}{2p+3} \quad \text{(d'après (10.9) au rang } 2p+3\text{)} \\ &\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x^2. \end{aligned}$$

De la règle de d'Alembert, on déduit que la série entière converge absolument lorsque $x^2 < 1$, c'est à dire lorsque $-1 < x < 1$ et ne converge pas absolument dans le cas contraire. Le plus grand intervalle ouvert sur lequel la série entière converge absolument, c'est à dire l'intervalle de convergence, est donc l'intervalle $]-1,1[$; cette série entière a donc pour rayon de convergence 1.

- Le problème $(\mathscr{P})$ est un problème de Cauchy qui relève du théorème d'unicité sur I car la fonction $x \mapsto 1-x^2$ *ne s'annule pas* sur I; en conséquence, nous sommes en présence d'a priori *deux* solutions de $(\mathscr{P})$ sur I, à savoir g et S.

  On déduit donc du théorème d'unicité à ce problème de Cauchy que $g = S$ sur I, c'est à dire,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

- On déduit du théorème d'intégration terme à terme que f est développable sur I, et du fait que

$$\begin{aligned} f(0) &= (\arcsin 0)^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

  ce qui prouve que f est la primitive de f' qui s'annule en 0, on a finalement

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \quad (\arcsin x)^2 &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+2)!} \frac{x^{2p+2}}{2p+2} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+2)!} x^{2p+2}. \end{aligned}$$

11 Quelques compléments

11.1 Exponentielle complexe

On a vu que pour tout réel x, on a

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Par ailleurs, on a adopté dans les classes antérieures la notation

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Théorème XX.11.38 La série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini; on l'appelle exponentielle complexe et on note

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Pour tous nombres complexes z et z', on a

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Démonstration 122

Remarque. Cette fonction prolonge donc l'exponentielle réelle (on connaît le développement de e^x) mais aussi l'exponentielle e^{ix}. En effet, en séparant la somme ci-dessous suivant les indices pairs et impairs:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^{2p} x^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{i^{2p+1} x^{2p+1}}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} i^{2p} &= (i^2)^p = (-1)^p \\ i^{2p+1} &= i^{2p} \times i = (-1)^p i \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p i x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + i \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

(on a en effet reconnu le développement en série entière des fonctions $\cos$ et $\sin$).

Exemple

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^x \cos x$ est développable en série entière.

- On écrit

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right).$$

- Sachant que $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x e^{ix} + e^x e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n x^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{n!} x^n \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que f est développable en série entière.

- Remarquons que f est à valeurs réelles, les coefficients $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ de son développement sont réels. On peut donc légitimement s'attendre à ce que les coefficients ci-dessus s'arrangent. On écrit pour cela $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, d'où

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}.$$

Par conjugaison, on a $(1-i)^n = (\sqrt{2})^n e^{-in\frac{\pi}{4}}$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \left(e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}}\right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Pour n de la forme $8p$, on a $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2p\pi = 1$; pour n de la forme $8p+1$, on a $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2p\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, etc. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \begin{cases} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} & \text{si } n = 8p \\ \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2n!} & \text{si } n = 8p+1 \\ 0 & \text{si } n = 8p+2 \\ \frac{(-\sqrt{2})^{n+1}}{2n!} & \text{si } n = 8p+3 \\ \frac{(-\sqrt{2})^n}{n!} & \text{si } n = 8p+4 \\ \frac{(-\sqrt{2})^{n+1}}{2n!} & \text{si } n = 8p+5 \\ 0 & \text{si } n = 8p+6 \\ \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2n!} & \text{si } n = 8p+7. \end{cases}$$

11.2 Développement en série entière: la théorie

Comme conséquence du théorème de dérivation terme à terme, on a vu que si une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 (rappelons-le, "voisinage" au sens large, c'est à dire sur un intervalle $]-R, R[$ centré en 0) alors elle est de classe C^∞ sur ce voisinage et comme conséquence des relations entre coefficients du développement et dérivées successives en 0, f est égale à sa *série de Taylor* sur l'intervalle $]-R, R[$, c'est à dire:

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Cependant, il existe[2] des fonctions f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 pour lesquelles:

- la série de Taylor diverge pour tout $x \neq 0$
- ou dont la série de Taylor converge, mais pas vers $f(x)$.

C'est en se ramenant scrupuleusement à la notion de série convergente et de somme de série convergente qu'on pourra alors être amené à démontrer qu'une fonction est développable en série entière au voisinage de 0, c'est à dire égale à sa série de Taylor:

- la fonction f est développable lorsque pour tout x d'un intervalle centré en 0, la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

est convergente et de somme $f(x)$, c'est à dire lorsque

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

- ou encore lorsque

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour tout réel x d'un intervalle centré en 0.

On peut donc énoncer :

Théorème XX.11.39 Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 en son intérieur et à valeurs réelles ou complexes. Alors f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies:

- f est de classe C^∞ sur un voisinage de 0,
- f est égale à sa série de Taylor sur un voisinage de 0, c'est à dire :

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour tout réel x d'un intervalle centré en 0.

Dans cette perspective, la *formule de Taylor avec reste intégral* et sa conséquence: *l'inégalité de Taylor Lagrange* jouent un rôle capital:

[2] On peut démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa série de Taylor est donc nulle en tout point et n'est donc pas égale à f.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^{N+1} sur l'intervalle I et a, x deux points de I.

- Alors :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,dt\,.$$
- En conséquence, si l'on a la majoration
$$\forall t \in [a,x],\ \left|f^{(N+1)}(t)\right| \leq M_{N+1,x,a}$$
(où $M_{N+1,x,a}$ est un réel), alors la différence
$$R(N,x,a) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$
vérifie *l'inégalité de Taylor-Lagrange:*
$$|R(N,x,a)| \leq M_{N+1,x,a} \frac{|x-a|^{N+1}}{(N+1)!}.$$
- En particulier, si 0 est un point de I et si
$$\forall t \in [0,x],\ \left|f^{(N+1)}(t)\right| \leq M_{N+1,x}$$
alors
$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \leq M_{N+1,x} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

(Il est écrit l'intervalle $[a,x]$, étant entendu que c'est l'intervalle d'extrémités a et x avec éventuellement $x \leq a$).

Il résulte donc de toute cette analyse qu'une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'elle est de classe C^∞ sur un intervalle centré en 0 et lorsque (avec les notations précédentes):
$$R(N,x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
pour tout réel x d'un intervalle centré en 0. Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, il suffit pour cela de démontrer que
$$M_{N+1,x} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
pour tout réel x d'un intervalle centré en 0. C'est la raison pour laquelle l'étude du développement en série entière d'une fonction en suivant cette approche passera par le calcul de ses dérivées successives et par la majoration (en valeur absolue) de celles-ci.

Exemple

Prenons pour f la fonction sinus.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$f^{(n)} = \pm\sin \text{ ou } \pm\cos$$
donc
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left|f^{(N+1)}(t)\right| \leq 1.$$
- Avec les notations ci-dessus, on peut donc prendre
$$M_{N+1,x} = 1$$
et en conséquence,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ |R(N,x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$
- Pour tout réel x, on a
$$\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
et en voici deux preuves:
  - *Première preuve.* C'est un résultat de croissance comparée entre puissances et factorielles;
  - *Deuxième preuve.* Considérons la série $\sum_{N\geq 0} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$. En posant
  $$u_N(x) = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!},$$
  on a
  $$\begin{aligned}\frac{u_{N+1}(x)}{u_N(x)} &= \frac{|x|^{N+2}}{(N+2)!} \times \frac{(N+1)!}{|x|^{N+1}} \\ &= \frac{x}{N+2} \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,\end{aligned}$$
  ce qui démontre que la série $\sum_{N\geq 0} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$ est convergente d'après la règle de d'Alembert.
  En particulier (propriété bien connue des séries convergentes), son terme général tend vers 0, c'est à dire
  $$\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
- Récapitulons: on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
et puisque
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall N,\ |R(N,x)| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!},$$
on a aussi
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |R(N,x)| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
On conclut donc de la méthode théorique exposée ci-dessus que f est bien développable et que ce développement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Plus précisément, on a
$$\sin' = \cos,\ \sin'' = -\sin,\ \sin''' = -\cos,$$
donc
$$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1$$
et on a facilement par récurrence:
$$\forall p \in \mathbb{N},\ f^{(2p)}(0) = 0, \quad f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p.$$

- On en déduit:

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{0}{(2p)!} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}
\end{aligned}
$$

  c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Remarque: on déduit alors du théorème de dérivation terme à terme le développement en série entière de la fonction $\cos$:

- La dérivée de la fonction $\sin$ est la fonction $\cos$.
- D'autre part, on déduit du théorème de dérivation terme à terme que la dérivée de la série entière

$$x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

  est la série entière

$$
\begin{aligned}
x \quad \longmapsto \quad & \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+1) x^{2p} \\
= \quad & \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}
\end{aligned}
$$

  avec conservation de l'intervalle de convergence, à savoir $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}.$$

$\boxed{\textbf{\textit{Autre exemple}}}$

Considérons la fonction

$$f : x \mapsto (1+x)^\alpha$$

où α est un paramètre réel fixé.

- La fonction f est clairement C^∞ sur $J =]-1, +\infty[$ *(mais on sait que ce n'est pas suffisant)* et en notant

$$B(k, \alpha) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$$

  on a: $f^{(k)}(t) = B(k,\alpha)(1+t)^{\alpha-k}$.

- Fixons $x \in]-1, 1[$ et montrons alors que $R(N, x) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui se fait en plusieurs étapes.
  - On a

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt &= \frac{B(N+1,\alpha)}{N!} \int_0^x (x-t)^N (1+t)^{\alpha-(N+1)} dt \\
&= \frac{B(N+1,\alpha)}{N!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^N (1+t)^{\alpha-1} dt.
\end{aligned}
$$

  - Étudions tout d'abord les variations de la fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{x-t}{1+t}.$$

    On calcule

$$\varphi'(t) = \frac{-x-1}{(1+t)^2}$$

    qui est clairement ≤ 0 pour tout $t \in]-1, 1[$ car du fait que $-1 < x < 1$, on a

$$-x-1 < 0.$$

    Maintenant, on a besoin d'en savoir plus sur $\varphi(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle d'intégration $[0, x]$, ce qui nous amène à distinguer deux cas:

    * Si $x \geq 0$, les variations de φ sont les suivantes sur $[0, x]$:

t	0	x
$\varphi'(t)$	$-$	
φ	x ↘	0

      ce qui démontre:

$$\forall t \in [0, x],\ 0 \leq \varphi(t) \leq x.$$

    * Si $x \leq 0$, les variations de φ sont les suivantes sur $[x, 0]$:

t	0	x
$\varphi'(t)$	$-$	
φ	x ↘	0

      ce qui démontre:

$$\forall t \in [x, 0],\ x \leq \varphi(t) \leq 0.$$

    Dans les deux cas, on obtient

$$\forall t \in [0, x],\ \varphi(t) \leq |x|,$$

    c'est à dire

$$\forall t \in [0, x], \quad \left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leq |x|,$$

    d'où l'on déduit

$$\forall t \in [0, x], \quad \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^N \leq |x|^N.$$

– il en résulte que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt\right| &\leq \left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!}\right| \left|\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^N (1+t)^{\alpha-1}dt\right| \\ &\leq \left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!}\right| \int_{I_x} \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^N (1+t)^{\alpha-1}dt\end{aligned}$$

où I_x désigne l'intervalle $[0,x]$ ou $[x,0]$ selon que $x \geq 0$ ou[3] $x < 0$ et donc

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt\right| &\leq \left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!}\right| \int_{I_x} |x|^N (1+t)^{\alpha-1}\, dt \\ &= \left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!}\right| |x|^N \int_{I_x} (1+t)^{\alpha-1}\, dt \\ &= \left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!}\right| |x|^N M_x, \qquad (11.11)\end{aligned}$$

où l'on a noté

$$M_x = \int_{I_x} (1+t)^{\alpha-1}\, dt$$

(il n'y a pas de problème d'existence de cette intégrale: la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$ est définie sur $]-1,+\infty[$ et comme x est fixé dans $]-1,1[$, t reste > -1 quand t parcourt l'intervalle I_x).

– La méthode utilisée ensuite est subtile: considérons la série

$$\sum \left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!} x^N\right|$$

et montrons qu'elle est convergente. En posant $u_N(x) = \left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!} x^N\right|$, on a

$$\begin{aligned}\frac{u_{N+1}(x)}{u_N(x)} &= \left|\frac{B(N+2,\alpha)}{B(N+1,\alpha)}\right| \times \frac{N!}{(N+1)!} \times \frac{|x^{N+1}|}{|x|^N} \\ &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-N+1)(\alpha-(N+1)+1)}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-N+1)}\right| \times \frac{|x|}{N+1} \\ &= |\alpha - N| \frac{|x|}{N+1} \\ &\underset{N\to+\infty}{\sim} N\frac{|x|}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} |x| < 1.\end{aligned}$$

– Il résulte alors de la règle de d'Alembert que la série est bien convergente. On en déduit en particulier que son terme général tend vers 0:

$$\left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!} x^N\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

et puisque le réel M_x est indépendant de N,

$$\left|\frac{B(N+1,\alpha)}{N!} x^N\right| M_x \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

• Il découle alors de 11.11 que

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

et ce pour tout $x \in]-1,1[$. En conclusion, f est développable en série entière et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n}$$

C'est la *formule du binôme généralisée*.

[3] Rappelons que l'on a l'inégalité

$$\left|\int_a^b g(t)dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|\, dt$$

uniquement lorsque $a \leq b$; sinon, on a

$$\left|\int_a^b g(t)dt\right| \leq \int_b^a |g(t)|\, dt$$

lorsque $a > b$.

Chapitre XXI

Fonctions définies par des intégrales (deuxième année)

1 Intégrale dépendant de ses bornes

1.1 Théorème fondamental de l'analyse

Dans cette section, il sera question de fonctions construites à partir d'intégrales dans lesquelles la variable intervient uniquement au niveau des bornes d'intégration, comme

$$F_1(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt, \quad F_2(x) = \int_x^0 \sin(t^3)\,dt, \quad F_3(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{1+t}\,dt, \quad F_4(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{\ln t}{t}\,dt.$$

Rappelons le théorème suivant, archi-connu, appelé théorème fondamental de l'analyse ou théorème fondamental de l'intégration:

Soit I un intervalle, f une fonction définie et continue sur I et a un point quelconque de I. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est définie et de classe C^1 sur I et c'est une primitive de f sur I:

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

et c'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarques.

- C'est souvent le seul moyen d'exprimer d'une manière ou d'une autre des primitives de fonctions usuelles, même très simples:

$$F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

est donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ (tout calcul par intégration par parties ou changement de variable serait vain).

- C'est aussi une manière de créer des fonctions:

Premier exemple

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{t+1}\,dt.$$

- $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$ est définie et continue sur $I =]-1,+\infty[$. Donc F est définie et de classe C^1 sur I avec

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

On voit en particulier que $F'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et donc F est strictement croissante sur I.

- On peut obtenir un développement limité de F en 0, par exemple à l'ordre 4, en utilisant le théorème d'intégration des développements limités:

Soit f une fonction définie et continue sur un voisinage de 0 et possédant un développement limité d'ordre n en ce point:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors la primitive F de f qui s'annule en 0 posséde un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, qui s'obtient en intégrant terme à terme celui de f:

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

On a

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ \frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) \\ \frac{e^x}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)\left(1 - x + x^2 + x^3\right) + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

(après développement en ne conservant que les termes de degré ≤ 3). Du fait que F est la primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$ qui s'annule en 0, on déduit du théorème d'intégration terme à terme des développements limités:

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).$$

- Il est possible également d'obtenir des limites en utilisant les méthodes habituelles, à savoir les théorèmes d'encadrement, majoration ou minoration:
  - Pour tout $t \in]-1,0]$, on a $e^t \leq e^0 = 1$
  - donc pour tout $x \in]-1,0]$,

$$t \in [0,x] \implies t \in]-1,0] \implies e^t \leq 1.$$

  - Ainsi, pour tout $x \in]-1,0]$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t+1}\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt$$

et puisque

$$\int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt = \big[\ln|t+1|\big]_0^x = \ln|x+1|,$$

on a

$$\forall x \in]-1,0], \quad F(x) \leq \ln|x+1|.$$

– Puisque

$$\ln|x+1| \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} -\infty,$$

on déduit de la minoration ci-dessus:

$$F(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

Deuxième exemple

Soit

$$F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$, impaire et démontrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

- L'application $f : t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a:
  - soit $x > 0$, auquel cas $2x > 0$ et donc $[x, 2x] \subset]0, +\infty[$ et l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est parfaitement définie en tant qu'intégrale de la fonction définie et continue f sur le segment $[x, 2x]$,
  - soit $x < 0$, auquel cas $2x < 0$ et donc $[2x, x] \subset]-\infty, 0[$ et l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est parfaitement définie en tant qu'intégrale (son opposé en fait) de la fonction définie et continue f sur le segment $[2x, x]$.

  Ainsi, $F(x)$ est parfaitement défini pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
- Comparons $F(x)$ et $F(-x)$; dans

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt,$$

  effectuons le changement de variable $u = -t$. Alors
  - lorsque t parcourt $[x, 2x]$, u parcourt $[-x, -2x]$,
  - on a $du = -dt$,
  - et enfin $\frac{\cos t}{t^2} = \frac{\cos(-u)}{(-u)^2} = \frac{\cos u}{u^2}$.

  Ainsi,

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos u}{u^2}\,(-du) &= -\int_{-x}^{-2x} \frac{\cos u}{u^2}\,du \\ &= -F(-x). \end{aligned}$$

  Donc F est une fonction impaire.

Rappel: inégalité triangulaire. Soit a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Rappel: théorème d'encadrement. Soit f une fonction à valeurs réelles (ou complexes) et g une fonction fonction à valeurs réelles ≥ 0 toutes deux définies sur un intervalle I, a une extrémité (finie ou non) de I telles que

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

- Soit $x > 0$; de l'inégalité triangulaire, on déduit dans un premier temps

$$|F(x)| = \left|\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| \leq \int_x^{2x} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\,dt.$$

  De façon évidente,

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

  On a donc

$$\forall x > 0, \quad |F(x)| \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,dx.$$

  Mais

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,dx = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x}.$$

  Puisque manifestement

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  On déduit de la majoration ci-dessus de $|F(x)|$ et du théorème d'encadrement que

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1.2 Dérivation pour des variantes d'intégrales dépendant de ses bornes

Bornes inversées. Puisque $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$, on a évidemment

$$F(x) = \int_x^a f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = -f(x).$$

Le contexte suivant est plus subtil:

Théorème XXI.1.1 Soit I un intervalle, f une fonction définie et continue sur I, a un point quelconque de I et u une fonction définie et de classe C^1 sur un intervalle J, à valeurs dans I. Alors la fonction

$$G : x \longmapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$$

est définie et de classe C^1 sur J et

$$\forall x \in J,\ G'(x) = u'(x) f(u(x)).$$

Démonstration. Tout d'abord, G est bien définie: pour tout $x \in I$, $u(x) \in I$ par hypothèse, si bien que

$$\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$$

existe: il s'agit de l'intégrale sur un segment, en l'occurrence le segment $[a, u(x)]$, de la fonction f, définie et continue sur ce segment. Par ailleurs, soit

$$F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt.$$

Alors $G = F \circ u$. Puisque F est de classe C^1 sur I d'après le théorème fondamental de l'analyse avec $F' = f$, G est de classe C^1 sur J par théorème de dérivation des fonctions composées et ce théorème donne

$$\begin{aligned} G' &= u' \times F' \circ u \\ &= u' \times f \circ u. \end{aligned}$$

Exemple

Soit

$$G : x \mapsto \int_0^{\sin x} e^{-t^2}\, dt.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\sin$ est définie et de classe C^1 sur $J = \mathbb{R}$ donc G est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et la formule précédente donne

$$G'(x) = \cos x \times e^{-\sin^2 x}.$$

Remarque. Par l'intermédiaire de la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt,$$

on se ramène aux deux situations d'intégrale dépendant de sa borne supérieure/inférieure lorsque les deux bornes de l'intégrale dépendent de x.

Exemple

Soit

$$F : x \mapsto \int_x^{3x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

- En écrivant
$$F(x) = \underbrace{\int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}_{F_1(x)} + \underbrace{\int_0^{3x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}_{F_2(x)},$$
on se ramène aux situations décrites ci-dessus. On a alors
$$\begin{aligned} F'(x) &= F_1'(x) + F_2'(x) \\ &= -e^{-\frac{x^2}{2}} + 3 \times e^{-\frac{(3x)^2}{2}} \\ &= -e^{-\frac{x^2}{2}} + 3e^{-\frac{9x^2}{2}}. \end{aligned}$$

1.3 Intégrale dépendant de ses bornes dans un cadre impropre

Note concernant les intégrales impropres. Comme chacun sait, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est divergente, ce qui signifie que l'intégrale n'existe pas, tout comme n'existent pas $\frac{1}{0}$ ou $\ln(-2)$:

> bien que l'intégrale ne présente pas d'écriture choquante comme $\dfrac{1}{0}$ ou $\ln(-2)$, il n'en demeure pas moins que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ n'existe pas (et c'est donc une écriture choquante!).

Exemple typique d'intégrale impropre dépendant de ses bornes

- L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente i.e. I existe. En effet,
  - on a
  $$e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
  car Xe^{-X} tend vers 0 lorsque X tend vers $+\infty$ (et on pose $X = t^2$).
  - Puisque l'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente, il résulte du théorème de comparaison pour les fonctions intégrables que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente.
  - Donc I est convergente car l'intégrale existe par ailleurs sur $[0,1]$ comme intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.
- Comme on l'a vu dans la démonstration ci-dessus, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ existe. De façon évidente, l'intégrale $\int_2^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ existe aussi, tout comme $\int_{-1}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ ou $\int_{-10}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ (en effet, les intégrales sur les segments $[-1,0]$ ou $[-10,0]$ existent comme intégrales d'une fonction définie et continue sur des segments).
- Bref, pour tout réel x, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ existe; certes, on ignore sa valeur ou comment calculer cette intégrale (d'ailleurs, qui sait calculer $\ln x$ ou $\sin x$?), mais il n'empêche que c'est un certain réel, dont la valeur dépend évidemment de x.
- Ainsi, on crée une fonction F définie sur tout $\mathbb{R}$ en posant
$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$
- En écrivant
$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt &= \int_x^0 e^{-t^2}\, dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \\ F(x) &= -\int_0^x e^{-t^2}\, dt + I \end{aligned}$$
on voit, dans la mesure où I est une constante, que l'on est dans le cadre traditionnel du théorème fondamental de l'analyse. Il en résulte que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -e^{-x^2}.$$

Autre exemple

- L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\, dt$ est convergente. En effet,
  - l'intégrale n'est impropre qu'à la borne 0.
  - On a
  $$\frac{\ln t}{t+1} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t.$$
  - L'intégrale $\int_0^1 \ln t\, dt$ est convergente (intégrale de référence).

– Il résulte alors du théorème de comparaison par équivalence que I converge i.e. I existe.

- De façon évidente, l'intégrale $\int_0^2 \frac{\ln t}{t+1}\,dt$ existe aussi, tout comme $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{t+1}\,dt$ ou $\int_0^{0,2} \frac{\ln t}{t+1}\,dt$ est convergente puisque le problème n'est qu'en 0 et que ce problème est réglé par le théorème de comparaison utilisé ci-dessus.
- Bref, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^x \frac{\ln t}{t+1}\,dt$ existe.
- Ainsi, on crée une fonction F définie sur $]0, +\infty[$ en posant
$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t+1}\,dt.$$
- En écrivant
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\ln t}{t+1}\,dt &= \int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\,dt + \int_1^x \frac{\ln t}{t+1}\,dt\\ F(x) &= I + \int_1^x \frac{\ln t}{t+1}\,dt\end{aligned}$$
on voit, dans la mesure où I est une constante, que l'on est dans le cadre traditionnel du théorème fondamental de l'analyse. Il en résulte que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{\ln x}{x+1}.$$

À la lumière de ces deux exemples, on peut énoncer:

Proposition XXI.1.2

- Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit convergente. Alors la fonction
$$F : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$$
est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et
$$\forall x \in [0, +\infty[\,, \quad F'(x) = -f(x).$$
- De même, soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$, impropre en 0, soit convergente. Alors la fonction
$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$
est de classe C^1 sur $]0, 1]$ et pour tout $x \in]0, 1]\,, \quad F'(x) = f(x)$.

Remarque. Il est évident que ces deux résultats sont transposables à partir de n'importe quelle intégrale impropre convergente.

Démonstration. La relation de Chasles
$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt\\ &= -\int_0^x f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt,\end{aligned}$$
parfaitement autorisée du fait de la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, montre que F relève du théorème fondamental de l'analyse ***classique*** et le résultat s'ensuit, dans la mesure où $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est une constante.
Dans le deuxième cas, on écrit
$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$$
et on conclut de la même manière.

2 Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette section, il sera question de fonctions construites à partir d'intégrales dans lesquelles la variable intervient uniquement à l'intérieur de la fonction qui est intégrée, comme
$$F_1(x) = \int_0^\pi \sin(x\cos t)\,dt, \quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt, \quad F_3(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^x}\,dt.$$
La première chose fondamentale à observer est que l'on n'est *absolument pas* dans l'univers des intégrales dépendant de leurs bornes.

Rappels.

Soit I un intervalle, borné ou non, fermé ou non, d'extrémités a et b, finies ou non.
- Pour toute fonction définie et continue g sur I et possédant une intégrale sur I; cette intégrale sera notée
$$\int_a^b g(t)\,dt \qquad \text{ou} \qquad \int_I g(t)\,dt.$$
- On dit que g est intégrable sur I lorsque la fonction $t \mapsto |g(t)|$ possède une intégrale sur I, donc lorsque l'intégrale
$$\int_I |g(t)|\,dt$$
converge.

2.1 Domaine de définition

Premier exemple: où il est question de $F_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos t)\,dt$.

- La fonction $t \mapsto \sin(\cos t)$ est définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cela ne fait pas l'ombre d'un doute.
- En conséquence, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos t)\,dt$ existe, comme c'est le cas dès lors que l'on est en présence de l'intégrale sur un segment d'une fonction définie et continue sur ce segment.
- Le même argument peut être tenu concernant les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\cos t)\,dt$ ou $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(-3\cos t)\,dt$.
- Bref, pour tout réel α, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha\cos t)\,dt$ existe ou, ce qui revient strictement au même, pour tout réel x, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos t)\,dt$ existe.

- Ainsi, on crée une fonction F_1 définie sur tout $\mathbb{R}$ en posant

$$F_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos t)\, dt.$$

Deuxième exemple: où il est question de $F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$.

- L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est convergente.
  - En effet,

$$\int_0^T \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_0^T = \arctan T$$

  et

$$\arctan T \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

  - Cela prouve par définition l'existence de l'intégrale I.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{1+t^2}\, dt$ est également convergente.
- En effet,

$$0 \le \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \le \frac{1}{1+t^2}$$

et comme on vient de prouver l'existence de I, il résulte du théorème de comparaison par majoration que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

- On prouverait par un argument tout à fait similaire l'existence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{1+t^2}\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}}{1+t^2}\, dt$.
- Et même, pour tout réel $x \ge 0$, on a

$$\forall t \ge 0,\ -xt \le 0 \quad\Longrightarrow\quad 0 \le e^{-xt} \le 1 \quad\Longrightarrow\quad 0 \le \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \le \frac{1}{1+t^2}$$

ce qui garantit, par théorème de comparaison par majoration, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ est convergente i.e. l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ existe; même si l'on s'avère incapable de calculer cette intégrale, il n'empêche que c'est un certain réel, dont la valeur dépend évidemment de x.
- Ainsi, on crée une fonction F_2 définie sur $[0,+\infty[$ en posant

$$F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

Troisième exemple: où il est question de $F_3(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^x}\, dt$.

- L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt$ est convergente.
  - En effet,

$$\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{t}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}.$$

  Or l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\, dt$$

  est convergente (intégrale de Riemann de référence). il résulte du théorème de comparaison par comparaion que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt$ est convergente.

- L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{4}}}\, dt$ est également convergente. En effet,

$$\frac{\sin t}{t^{\frac{5}{4}}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{t}{t^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}.$$

Or l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}\, dt$$

est convergente (intégrale de Riemann de référence) et il résulte du théorème de comparaison par comparaison que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{4}}}\, dt$ est convergente.
- Et même, pour tout réel $x < 2$, on a

$$\frac{\sin t}{t^x} \underset{t\to0}{\sim} \frac{t}{t^x} = \frac{1}{t^{x-1}}$$

et puisque $x < 2$, on a $x - 1 < 1$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale de référence $\int_0^1 \frac{1}{t^{x-1}}\, dt$ et donc par théorème de comparaison par équivalence, l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^x}\, dt$
- Ainsi, on crée une fonction F_3 définie sur $]-\infty, 2[$ en posant

$$F_3(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^x}\, dt.$$

Quatrième exemple: où il est question de $F_4(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{t+x}}{t+1}\, dt$.

- La fonction $t \mapsto \frac{\sin\sqrt{t}}{t+1}$ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- En conséquence, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{t}}{t+1}\, dt$ existe, comme c'est le cas dès lors que l'on est en présence de l'intégrale sur un segment d'une fonction définie et continue sur ce segment.
- Le même argument peut être tenu concernant les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{t+\frac{1}{2}}}{t+1}\, dt$ ou $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{t+3}}{t+1}\, dt$.
- Bref, pour tout réel $x \ge 0$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{t+x}}{t+1}\, dt$ existe car le réel $x \ge 0$ étant donné, l'application

$$t \mapsto \frac{\sin\sqrt{t+x}}{t+1}$$

est définie et continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ si bien que son intégrale existe sur ce segment.

- Ainsi, on crée une fonction F_4 définie sur $[0,+\infty[$ en posant
$$F_4(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{t+x}}{t+1}\,dt.$$

D'où la définition suivante:

Définition XXI.2.1 Soit
$$\begin{array}{rccc} g: & D\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & (x,t) & \longmapsto & g(x,t) \end{array}$$
où I est un intervalle d'extrémités quelconques a,b avec $-\infty\leq a<b\leq+\infty$ et D une partie de $\mathbb{R}$.

Le domaine de définition de la fonction
$$f: x\mapsto\int_a^b g(x,t)\,dt$$
est l'ensemble des réels x de D pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x,t)dt$ existe i.e. pour lesquels l'intégrale converge.

Remarques.
- En cas d'intégrale impropre, l'existence de l'intégrale est un problème de convergence d'intégrale (cf. deuxième et troisième exemples ci-dessus).
- En cas d'intégrale non impropre, l'existence de l'intégrale ne pose pas de problème: il suffit de justifier la définition et la continuité de la fonction sur l'intervalle d'intégration (cf. premier et quatrième exemples ci-dessus).

2.2 Hypothèse de domination

L'objet dont on va parler dans cette section est vital pour les théorèmes de continuité et dérivabilité qui seront énoncés plus loin.

Le contexte est le suivant: on considère la fonction
$$f: x\longmapsto\int_a^b g(x,t)\,dt,$$
avec
$$\begin{array}{rccc} g: & D\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & (x,t) & \longmapsto & g(x,t) \end{array}$$
où I est un intervalle d'extrémités quelconques a,b avec $-\infty\leq a<b\leq+\infty$ et D une partie de $\mathbb{R}$.

Définition XXI.2.2 On dit que l'hypothèse de domination est satisfaite sur le domaine D lorsqu'il existe une fonction $\phi: t\mapsto\phi(t)$ définie et continue sur I à valeurs ≥ 0 et vérifiant :

- $\forall (x,t)\in D\times I,\ |g(x,t)|\leq\phi(t)$
- ϕ est intégrable sur I, i.e. $\displaystyle\int_a^b\phi(t)\,dt$ converge.

On dit aussi que ϕ est une dominante intégrable de g sur D.

Remarques.
- Il est très important de prendre en considération la valeur absolue.
- L'application ϕ ne dépend que de la variable t et la majoration par $\phi(t)$ doit avoir lieu pour tout x du domaine D.
- Cette hypothèse de domination est l'hypothèse principale, incontournable, des théorèmes de continuité et dérivabilité qui vont suivre.

Rappels de règles de base dans les inégalités

- Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement positif, le sens de l'inégalité est conservé. Par exemple, pour tout réel x, on a $e^x>0$ et alors
$$t\geq 2\quad\Longrightarrow\quad te^x\geq 2e^x$$
- mais si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité doit être renversé. Par exemple, pour tout $t\in]0,1[$, on a $\ln t<0$ et alors
$$x\geq 2\quad\Longrightarrow\quad x\ln t\leq 2\ln t.$$
- Une fonction croissante conserve l'ordre[1], une fonction décroissante renverse l'ordre.
  - Par exemple,
  $$\forall a\in\mathbb{R},\ \big(x\in[a,+\infty[\,,\ t\in[0,+\infty[\,\big)\implies\left(e^{-xt}\leq e^{at}\right).$$
  En effet,
  $$\forall t\geq 0,\ x\geq a\implies xt\geq at\implies -xt\leq -at$$
  et par croissance de la fonction $u\mapsto e^u$ sur $\mathbb{R}$, $e^{-xt}\leq e^{at}$.
  - Autre exemple:
  $$\forall a>0,\ \big(x\in[a,+\infty[\,,\ t\in[0,+\infty[\,\big)\implies\left(\frac{1}{1+x^2t^2}\leq\frac{1}{1+a^2t^2}\right).$$
  En effet, par croissance de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $[0,+\infty[$
  $$x\geq a>0\implies x^2\geq a^2$$
  puis
  $$\forall t\geq 0,\ x\geq a>0\implies x^2t^2\geq a^2t^2\implies 1+x^2t^2\geq 1+a^2t^2$$
  et par décroissance de la fonction $u\mapsto\frac{1}{u}$ sur $]0,+\infty[$, $\frac{1}{1+x^2t^2}\leq\frac{1}{1+a^2t^2}$.

Premier exemple de dominante intégrable

Considérons la fonction
$$f: x\mapsto\int_0^{+\infty}\sin(xt^2)e^{-t}\,dt.$$

- Pour tout réel x et tout $t\in[0,+\infty[$ on a la majoration
$$\left|\sin(xt^2)\right|\leq 1\quad\Longrightarrow\quad\left|\sin(xt^2)e^{-t}\right|\leq e^{-t}.$$
- La fonction
$$\varphi: t\mapsto e^{-t}$$
est intégrable sur $[0,+\infty[$ (intégrale de référence).
- L'hypothèse de domination est donc satisfaite sur $\mathbb{R}$.

[1] Plus précisément une fonction croissante sur un intervalle conserve l'ordre entre points de cet intervalle

- On en déduit en particulier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt^2)e^{-t}\,dt$ est convergente (car absolument convergente par théorème de comparaison par majoration par φ) pour tout réel x.
- Ainsi, $f(x)$ existe pour tout réel x i.e. f est définie sur $\mathbb{R}$.

Deuxième exemple

Considérons la fonction
$$f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t\sqrt{t}}\,dt.$$

- Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ et tout $t \in [1, +\infty[$ on a la majoration
$$-xt^2 \leq 0 \quad\Longrightarrow\quad 0 \leq e^{-xt^2} \leq 1 \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{e^{-xt^2}}{t\sqrt{t}}\right| = \frac{e^{-xt^2}}{t\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t\sqrt{t}}.$$
- La fonction
$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$
est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de référence).
- L'hypothèse de domination est donc satisfaite sur $[0, +\infty[$.
- On en déduit en particulier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{t\sqrt{t}}\,dt$ est convergente (car absolument convergente par théorème de comparaison par majoration par φ) pour tout réel $x \in [0, +\infty[$.
- Ainsi, $f(x)$ existe pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ i.e. f est définie sur $[0, +\infty[$.

Troisième exemple

Considérons la fonction
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

- Pour tout réel $x \in [2, +\infty[$ et tout $t \in [0, +\infty[$ on a la majoration
$$\begin{array}{lllllll} x \geq 2 & \Longrightarrow & xt \geq 2t & \Longrightarrow & -xt \leq -2t & \Longrightarrow & \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq \frac{e^{-2t}}{1+t} \\ t \geq 0 & \Longrightarrow & 1+t \geq 1 & \Longrightarrow & \frac{1}{1+t} \leq 1 & \Longrightarrow & \frac{e^{-2t}}{1+t} \leq e^{-2t} \\ & & & & & \Longrightarrow & \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| \leq \frac{e^{-2t}}{1+t} \leq e^{-2t}. \end{array}$$
- La fonction
$$\varphi_1 : t \mapsto e^{-2t}$$
est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence).
- L'hypothèse de domination est donc satisfaite sur $[2, +\infty[$.
- En raisonnant de la même façon, pour tout $x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on a
$$\left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| \leq \frac{e^{-\frac{1}{3}t}}{1+t} \leq e^{-\frac{1}{3}t}$$
- et comme la fonction
$$\varphi_2 : t \mapsto e^{-\frac{1}{3}t}$$
est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence), l'hypothèse de domination est satisfaite sur $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$.
- Plus généralement, fixons-nous un réel $a > 0$ et examinons la situation sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
- Pour tout réel $x \in [a, +\infty[$ et tout $t \in [0, +\infty[$ on a la majoration
$$\begin{array}{lllllll} x \geq a & \Longrightarrow & xt \geq at & \Longrightarrow & -xt \leq -at & \Longrightarrow & \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq \frac{e^{-at}}{1+t} \\ t \geq 0 & \Longrightarrow & 1+t \geq 1 & \Longrightarrow & \frac{1}{1+t} \leq 1 & \Longrightarrow & \frac{e^{-at}}{1+t} \leq e^{-at} \\ & & & & & \Longrightarrow & \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| \leq \frac{e^{-at}}{1+t} \leq e^{-at}. \end{array}$$
- La fonction
$$\varphi_3 : t \mapsto e^{-at}$$
est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence).
- L'hypothèse de domination est donc satisfaite sur $[a, +\infty[$.

Remarque. Toujours concernant
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt,$$
on a évidemment, pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$
$$e^{-xt} \leq 1$$
si bien que pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$
$$\begin{aligned} \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| &= \frac{e^{-xt}}{1+t} \\ &\leq \frac{1}{1+t}. \end{aligned}$$
Mais la fonction
$$\varphi : t \longmapsto \frac{1}{1+t}$$
n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque
$$\frac{1}{1+t} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$
et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge. La majoration
$$\left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| \leq \frac{1}{1+t}$$
ne permet donc *pas* d'affirmer que l'hypothèse de domination est satisfaite sur $[0, +\infty[$.

2.3 Théorème de continuité

Considérons une fonction du type
$$f : x \mapsto \int_a^b g(x,t)\,dt.$$

Il est ridicule de dire que f est continue comme "composée" de fonctions continues

En effet, calculer une intégrale ne relève pas du tout d'un processus de composition.

La question de la continuité d'une telle fonction ne relève donc pas des théorèmes généraux. On connaîtra donc le théorème suivant sur le bout des doigts:

Théorème XXI.2.3 Soit
$$g: \begin{array}{ccc} D\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & g(x,t) \end{array}$$
où I est un intervalle d'extrémités quelconques a, b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et D une partie de $\mathbb{R}$. On considère alors la fonction
$$f : x \mapsto \int_a^b g(x,t)\,dt.$$
On suppose que:

- pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur D (on dit aussi que g est continue par rapport à la première variable x sur D),
- pour tout $x \in D$, l'application $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I (i.e. g est continue par rapport à la deuxième variable t sur I),
- g vérifie l'hypothèse de domination sur D i.e. il existe une fonction $\phi : t \mapsto \phi(t)$ définie et continue sur I à valeurs ≥ 0 et vérifiant
  - $\forall (x,t) \in D\times I,\ |g(x,t)| \leq \phi(t)$
  - ϕ est intégrable sur I, i.e. $\displaystyle\int_a^b \phi(t)\,dt$ converge.
- Alors l'application
$$f : x \mapsto \int_a^b g(x,t)\,dt$$
est définie et continue sur D.

Remarques.

- L'hypothèse de domination est absolument incontournable dans cette situation; sa non vérification serait une très lourde erreur.
- Dans la pratique, on justifiera la continuité de g sur $D\times I$ par des théorèmes généraux: somme, produit, quotient, composée.

Premier exemple

Considérons la fonction
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(xt^2)e^{-t}\,dt$$
et démontrons que f est définie et continue sur $D = \mathbb{R}$.

On pose $g(x,t) = \sin(xt^2)e^{-t}$. Alors:

- pour tout $x \in D$, la fonction $t \mapsto g(x,t) = \sin(xt^2)e^{-t}$ est continue sur $I = [0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues,
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto g(x,t) = \sin(xt^2)e^{-t}$ est continue sur D,
- pour tout $x \in D$ et tout $t \in I$, on a
$$\left|\sin(xt^2)\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sin(xt^2)e^{-t}\right| \leq e^{-t}.$$
- La fonction
$$\varphi : t \mapsto e^{-t}$$
est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence): l'hypothèse de domination est donc satisfaite sur $\mathbb{R}$.
- Il résulte du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Deuxième exemple

Considérons la fonction
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,dt$$
et démontrons que f est définie et continue sur $D = [0, +\infty[$.

On pose $g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$. Alors:

- pour tout $x \in D$, la fonction $t \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$ comme produit, quotient et composée de fonctions continues,
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue sur D,
- pour tout $x \in D$ et tout $t \in I$, on a
$$t > 0,\ x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad -xt \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq e^{-xt} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \left|\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}.$$
- La fonction
$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$
est intégrable sur I, car:
  - l'intégrale est impropre en 0, mais
$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$
et puisque l'intégrale (de référence) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge, il en est de même pour $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ par théorème de comparaison par équivalence,
  - l'intégrale est impropre en $+\infty$, mais
$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}\times t} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$
et puisque l'intégrale (de référence) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ converge, il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ par théorème de comparaison par équivalence.

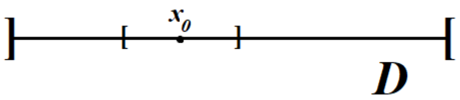
  Ainsi, φ est intégrable sur I: l'hypothèse de domination est donc satisfaite sur $\mathbb{R}$.
- Il résulte du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2.4 Preuve de la continuité par raisonnement local

Le raisonnement est basé sur ce principe élémentaire, mais capital:

Soit f une fonction définie sur un intervalle D, de nature quelconque: borné ou non, ouvert, fermé, ou semi-ouvert, ou une réunion d'intervalles (typiquement $\mathbb{R}^*$). Alors f est continue sur D si et seulement si f est continue sur tout segment inclus dans D.

En effet, la phrase "f est continue sur D" signifie, par définition, "f est continue en tout point de D". Or si x_0 est un point donné de D, il existe toujours un segment inclus dans D et qui contient le point x_0:



Donc la continuité sur tout segment inclus dans D entraîne la continuité en tout point de D et donc la continuité sur D.

Exemple typique, très important

Considérons la fonction
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt$$
et démontrons que f est définie et continue sur $D =]0, +\infty[$.

- On considère un segment $[a, b]$ quelconque inclus dans D, donc avec $0 < a < b$.
- Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in [0, +\infty[$,
$$\begin{aligned} a \le x \le b,\ t \ge 0 \implies at \le xt \le bt \implies -bt \le -xt \le -at &\implies e^{-bt} \le e^{-xt} \le e^{-at} \\ t \ge 0 \implies 1 + t \ge 1 &\implies \frac{1}{1+t} \le 1 \\ &\implies \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t} \le e^{-at} \end{aligned}$$
- La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence): l'hypothèse de domination est donc satisfaite sur le segment $[a, b]$.
- Il résulte du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que f est définie et continue sur le segment $[a, b]$.
- Ainsi, f est définie et continue sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et est donc définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Remarque importante. Ce raisonnnement dit "local" peut se décliner de plusieurs manières. Le plus important est de prouver la continuité sur une famille d'intervalles dont la réunion est le domaine étudié.

Exemple typique

Reprenons la fonction
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt$$
et démontrons que f est définie et continue sur $D =]0, +\infty[$.

- Soit un réel $a > 0$. Démontrons que f est définie et continue sur $[a, +\infty[$.
  - Pour tout $x \in [a, +\infty[$ et tout $t \in [0, +\infty[$,
$$\begin{aligned} x \ge,\ t \ge 0 \implies xt \ge at \implies -xt \le -at &\implies 0 \le e^{-xt} \le e^{-at} \\ t \ge 0 \implies 1 + t \ge 1 &\implies \frac{1}{1+t} \le 1 \\ &\implies \left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right| = \frac{e^{-xt}}{1+t} \le e^{-at} \end{aligned}$$
  - La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence): l'hypothèse de domination est donc satisfaite sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
- Il résulte du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre que f est définie et continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
- Or il est clair que $]0, +\infty[$ est la réunion de tous les intervalles $[a, +\infty[$, a variant dans $]0, +\infty[$:

- Ainsi, f est définie et continue sur une famille d'intervalles dont $]0, +\infty[$ est la réunion et c'est pourquoi f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2.5 Théorème de dérivabilité

Comme pour la continuité, la dérivabilité d'une fonction du type
$$f : x \mapsto \int_a^b g(x, t)\, dt$$
ne relève pas du tout des théorèmes généraux. On connaîtra donc le théorème suivant sur le bout des doigts:

Théorème XXI.2.4 Soit
$$g : \begin{array}{ccc} D \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x, t) & \longmapsto & g(x, t) \end{array}$$
où I est un intervalle d'extrémités quelconques a, b avec $-\infty \le a < b \le +\infty$. On considère alors la fonction
$$f : x \mapsto \int_a^b g(x, t)\, dt.$$
On suppose que:

- pour tout $x \in D$, l'application $t \mapsto g(x, t)$ est continue intégrable sur I, c'est à dire: pour tout $x \in D$, l'intégrale
$$\int_a^b |g(x, t)|\ dt$$
converge,
- pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur D,
- pour tout $x \in D$, l'application $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I,
- $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $D \times I$, i.e. il existe une fonction $\phi : t \mapsto \phi(t)$ définie et continue sur I à valeurs ≥ 0 et vérifiant
  - $\forall (x, t) \in D \times I,\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \le \phi(t)$
  - ϕ est intégrable sur I, i.e. $\displaystyle\int_a^b \phi(t)\, dt$ converge.

Alors l'application
$$f : x \mapsto \int_a^b g(x, t)\, dt$$
est définie et de classe C^1 sur D et
$$\forall x \in D,\ f'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\, dt.$$

Remarques.

- Il est encore question d'hypothèse de domination; mais celle-ci porte sur $\dfrac{\partial g}{\partial x}$: *c'est l'hypothèse essentielle de ce théorème.*
- On notera qu'il faudra vérifier l'hypothèse d'intégrabilité:
$$\forall x \in D, \quad \int_a^b |g(x,t)|\, dt \text{ converge.}$$
Cette intégrabilité entraîne, par théorème de convergence absolue, la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(x,t)\, dt$ i.e. tout simplement l'existence de $f(x)$ autrement dit, cette hypothèse d'intégrabilité entraîne que f est bien définie sur D: c'est donc une hypothèse tout à fait cohérente.

Exemple

Démontrons que la fonction
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^4}\, dt$$
est définie et de classe C^1 sur $D = [0, +\infty[$.

- Soit $x \in D$ et $t \in I = [0, +\infty[$; on a les majorations
$$x \geq 0,\ t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad -xt \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq e^{-xt} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^4}\right| \leq \frac{1}{1+t^4}.$$
- Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\, dt$ est convergente car
  - $\dfrac{1}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$
  - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\, dt$ converge (référence).
  - On déduit alors du théorème de comparaison que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\, dt$ converge.
  - Le résultat s'ensuit, puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\, dt$ existe comme intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.
- Il résulte du théorème de comparaison par majoration que
$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^4}\right| dt$$
converge i.e. la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^4}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $t \in I$, l'application
$$x \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^4}$$
est clairement de classe C^1 sur D (produit, composée, quotient)
- pour tout $x \in D$, l'application
$$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t^4}$$
est clairement continue sur I.
- On a la majoration
$$\forall x \in D,\ \forall t \in [0, +\infty[, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{te^{-xt}}{1+t^4}\right| \leq \frac{t}{1+t^4}.$$
En notant $\phi(t) = \frac{t}{1+t^4}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\, dt$ est convergente car
  - $\dfrac{t}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$
  - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, dt$ converge (référence).
  - On déduit alors du théorème de comparaison par équivalence que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\, dt$ converge.
  - Le résultat s'ensuit, puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\, dt$ existe comme intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.
- L'hypothèse de domination est donc satisfaite pour $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sur $D \times [0, +\infty[$. Il résulte alors du théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre que f est définie et de classe C^1 sur D et que
$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t^4}\, dt.$$

Remarque. Dans la mesure où f' se présente comme une intégrale dépendant d'un paramètre, on va démontrer que f est de classe C^2 sur D en démontrant, à l'aide de ce même théorème de dérivabilité, que
$$f' : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t^4}\, dt$$
est de classe C^1 sur D.

- L'hypothèse de domination établie ci-dessus pour $\frac{\partial g}{\partial x}$ démontre que pour tout $x \in D$, l'application $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ i.e.
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{te^{-xt}}{1+t^4}\right| \leq \frac{t}{1+t^4} \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| dt \text{ convege.}$$
- Pour tout $t \in I$, l'application
$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^3}$$
est clairement de classe C^1 sur D (produit, composée, quotient)
- pour tout $x \in D$, l'application
$$t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^4}$$
est clairement continue sur I.
- On a la majoration
$$\forall x \in D,\ \forall t \in [0, +\infty[, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^4}\right| \leq \frac{t^2}{1+t^4}.$$
En notant $\psi(t) = \frac{t^2}{1+t^4}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)\, dt$ est convergente car
  - $\dfrac{t^2}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

– $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (référence).

– On déduit alors du théorème de comparaison par équivalence que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$ converge .

– Le résultat s'ensuit, puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$ existe comme intégrale d'une fonction définie et continue sur un segment.

- L'hypothèse de domination est donc satisfaite pour $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ sur $D \times [0,+\infty[$. Il résulte alors du théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre que f' est de classe C^1 sur D i.e. f est de classe C^2 sur D et que

$$\forall x \in D, \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^4}\,dt.$$

2.6 Preuve du caractère C^1 par raisonnement local

Comme pour la continuité:

Soit f une fonction définie sur un intervalle D, de nature quelconque: borné ou non, ouvert, fermé, ou semi-ouvert, ou une réunion d'intervalles (typiquement $\mathbb{R}^*$). Alors f est de classe C^1 sur D si et seulement si f est de classe C^1 sur tout segment inclus dans D.

Remarque importante. Ce raisonnnement dit "local" peut se décliner de plusieurs manières. Le plus important est de prouver le caractère C^1 sur une famille d'intervalles dont la réunion est le domaine étudié.

Exemple typique

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}\cos t}{t}\,dt.$$

1. Soit a et b deux réels avec $0 < a < b$. Démontrer que f est définie et de classe C^1 sur $[a,b]$.
2. En déduire que f est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Solution.

1. Posons
$$g(x,t) = \frac{e^{-tx}\cos t}{t}.$$

- Pour tout $x \in [a,b]$, l'application
$$t \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-tx}\cos t}{t}$$
est continue sur $I = [1,+\infty[$ (produit, composée, quotient).

- Pour tout $x \in [a,b]$,
$$t \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-tx}\cos t}{t}$$
est intégrable sur I i.e.
$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{-tx}\cos t}{t}\right| dt$$
converge car

– pour tout $t \in I$,
$$|\cos t| \le 1,\ t \ge 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{t} \le 1 \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{e^{-tx}\cos t}{t}\right| \le e^{-xt}$$

– $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge (référence) car $x \in [a,b]$ donc $x \ge a > 0$

– donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{-tx}\cos t}{t}\right| dt$ par théorème de comparaison par majoration.

- Pour tout $t \in I$, l'application
$$x \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-tx}\cos t}{t}$$
est de classe C^1 sur $[a,b]$ (produit, composée, quotient) avec
$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) &= -\frac{te^{-tx}\cos t}{t}\\ &= -e^{-tx}\cos t.\end{aligned}$$

- Pour tout $x \in [a,b]$, l'application
$$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -e^{-tx}\cos t$$
est continue sur I (produit, composée, quotient).

- Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in I$, on a $t \ge 1$ et en particulier $t \ge 0$, d'où
$$\begin{aligned} x \ge a &\implies tx \ge ta\\ &\implies -tx \le -ta\end{aligned}$$
et par croissance de la fonction exponentielle,
$$-tx \le -ta \quad\Longrightarrow\quad e^{-tx} \le e^{-ta}.$$
Enfin,
$$|\cos t| \le 1,\ e^{-tx} \le e^{-ta} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| &= \left|-e^{-tx}\cos t\right|\\ &= e^{-tx}|\cos t|\\ &\le e^{-ta}.\end{aligned}$$
Posons $\phi(t) = e^{-ta}$. Alors

– $\forall (x,t) \in D \times I$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \le \phi(t)$

– ϕ est intégrable sur I, i.e. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-ta}\,dt$ converge (référence).

L'hypothèse de domination est donc satisfaite sur $[a,b]$.

- On déduit alors du théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre que f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et
$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b], \quad f'(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt\\ &= -\int_1^{+\infty} e^{-tx}\cos t\,dt.\end{aligned}$$

2. La fonction f est alors définie et de classe C^1 sur $D =]0,+\infty[$ car elle est définie et de classe C^1 sur tout segment inclus dans D.

2.7 Recherche de limites pour des intégrales dépendant d'un paramètre

Il est possible d'obtenir des limites en utilisant les méthodes habituelles, à savoir les théorèmes d'encadrement, majoration ou minoration *et ce sont les seules méthodes à notre disposition*. Dans cette perspective, les arguments suivants sont souvent décisifs:

Inégalité triangulaire dans le cas général. Soit I un intervalle et f une fonction définie et continue sur I, à valeurs réelles ou complexes, intégrable sur I, c'est à dire telle que $\int_I |f(t)|\,dt$ converge. Alors

$$\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leq \int_I |f(t)|\,dt.$$

Théorème d'encadrement.

- Soit (u_n) une suite réelle (ou complexe) et (α_n) une suite à termes réels ≥ 0 telles que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \alpha_n \\ \\ \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

  Alors (u_n) converge vers 0.
- Soit f une fonction à valeurs réelles (ou complexes) et g une fonction fonction à valeurs réelles ≥ 0 toutes deux définies sur un intervalle I, a une extrémité (finie ou non) de I telles que

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq g(x) \\ \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

  Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Premier exemple

On a

$$\int_0^1 t^n \sin(nt)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car:

- d'une part,

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nt)| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad |t^n \sin(nt)| \leq |t^n| = t^n.$$

- D'autre part,

$$\int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

- En conséquence, l'inégalité triangulaire donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_0^1 t^n \sin(nt)\,dt\right| \begin{array}{l} \leq \displaystyle\int_0^1 |t^n \sin(nt)|\,dt \\ \leq \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt \\ \leq \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

  et on déduit du théorème d'encadrement que

$$\int_0^1 t^n \sin(nt)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deuxième exemple

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t\,dt.$$

Alors f est définie sur $]0,+\infty[$ et

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet,

- Pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0,+\infty[$, on a les majorations

$$|\sin t| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|e^{-xt}\sin t\right| \leq e^{-xt}$$

  et puisque l'on sait que l'intégrale de référence

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$$

  est convergente pour tout réel $x > 0$, il résulte du théorème de comparaison par majoration que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left|e^{-xt}\sin t\right|\,dt$ est convergente et par théorème de convergence absolue, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt$ est également convergente. Ainsi, $f(x)$ existe pour tout $x > 0$.
- Ensuite, la majoration ci-dessus et l'inégalité triangulaire donnent

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|e^{-xt}\sin t\right|\,dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt. \end{aligned}$$

- Or, pour tout réel $x > 0$:

$$\int_0^T e^{-xt}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-xt}\right]_0^T = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}e^{-xT}$$

  et puisque

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x}e^{-xT} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\times 0 = \frac{1}{x},$$

  il résulte de la définition même de la valeur d'une intégrale impropre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}.$$

- On a donc établi:

$$\forall x > 0, \quad |f(x)| \leq \frac{1}{x}.$$

- Il résulte alors du théorème d'encadrement que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Chapitre XXII

Variables aléatoires (deuxième année)

1 Rappels: calculs de certaines sommes finies ou de séries

Dans ce chapitre, interviendront constamment la formule du binôme, les séries géométriques et exponentielles.

1.1 Binôme de Newton

- Pour tous entiers n et k avec $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

- En particulier

$$\binom{n}{0} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- Pour tous réels (ou complexes) a et b et pour tout entier n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemples

Soit un entier $n \geq 1$ et a un réel. Exprimer simplement les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^k$.

Réponses.

1. On prend a et 1 dans la formule du binôme:

$$(a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k.$$

2. On prend 1 et a dans la formule du binôme:

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.$$

3. On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a \times a^k = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \\ &= a \times (a+1)^n. \end{aligned}$$

4. On écrit

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k - 1,$$

le nombre 1 correspondant au terme $k=0$ que l'on a rajouté dans la somme (puisque $\binom{n}{0} \times a^0 = 1 \times 1 = 1$). Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k = (a+1)^n - 1.$$

5. On a applique dans un premier temps la formule du binôme avec 1 et 1:

$$\begin{aligned} (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ \Longrightarrow 2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1$$

le nombre 1 correspondant au terme $k=n$ que l'on a rajouté dans la somme (puisque $\binom{n}{n} = 1$). Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

6. Si $a=0$, tous les termes de la somme sont nuls, sauf celui correspondant à $k=0$, qui, avec la convention habituelle $0^0=1$, produit
$$\binom{n}{1}\times 1 = n.$$
La somme vaut donc n dans ce cas.
Si $a\neq 0$, on procède au changement d'indice $j=k+1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}a^k=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}a^{j-1}=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{a}\times a^j=\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}a^j.$$
On écrit ensuite
$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}a^j \quad = \quad \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j-1,$$
le nombre 1 correspondant au terme $k=0$ que l'on a rajouté dans la somme (puisque $\binom{n}{0}\times a^0=1\times 1=1$). Or
$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j=(a+1)^n$$
et on a finalement
$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k+1}a^k \quad = \quad \frac{1}{a}\big((a+1)^n-1\big).$$

1.2 Série géométrique

- Pour tout réel $x\in\,]-1,1[$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$
- On a aussi
$$\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$
et plus généralement pour tout entier n_0:
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}x^n=\frac{x^{n_0}}{1-x}$$
- Par application du théorème de dérivation terme à terme des séries entières, la dérivée de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$ étant $x\mapsto\frac{1}{(1-x)^2}$:
$$\forall x\in\,]-1,1[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$
et par une nouvelle dérivation, la dérivée de $x\mapsto\frac{1}{(1-x)^2}$ étant $x\mapsto\frac{2}{(1-x)^3}$:
$$\forall x\in\,]-1,1[,\quad \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Remarque. On obtient la troisième somme en posant $j=n-n_0$: $x^n=x^{n_0+j}=x^{n_0}\times x^j$ et alors
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}x^n=x^{n_0}\times\sum_{j=0}^{+\infty}x^j=x^{n_0}\frac{1}{1-x}.$$

Exemples

Soit $x\in\,]0,1[$. Exprimer simplement les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n-1}}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1-x)^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n+1}$,
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n$.

Réponses.

1. On a
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
2. On écrit
$$\frac{2^n}{3^{n-1}}=\frac{2^n}{\frac{1}{3}\times 3^n}=3\frac{2^n}{3^n}=3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
et alors
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n-1}} &= 3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\\ &= 3\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\\ &= 6.\end{aligned}$$

3. Puisque $x \in]0,1[$, on a $1-x \in]0,1[$ et alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-x)^n &= \frac{1-x}{1-(1-x)}\\ &= \frac{1-x}{x}.\end{aligned}$$

4. On écrit $x^{n+1} = x \times x^n$ et alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} &= x\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\\ &= x\frac{x}{1-x}\\ &= \frac{x^2}{1-x}.\end{aligned}$$

5. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et en conséquence en écrivant $x^n = x \times x^{n-1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n &= x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x \times \frac{1}{(1-x)^2}\\ &= \frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

6. On distribue:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

et de ce qui précède,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x}\\ &= \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

1.3 Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Ensembles dénombrables

Définition XXII.2.1 ***Ensemble dénombrable.*** Un ensemble E est dit dénombrable lorsqu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E.

Remarque. D'une certaine manière, il faut envisager $\mathbb{N}$ comme un ensemble d'étiquettes et l'application φ, mettant en bijection $\mathbb{N}$ avec E, est la machine à distribuer les étiquettes : pour tout entier n, $\varphi(n)$ est un élément de E sur lequel on va coller l'étiquette portant le numéro n et cet élément sera alors noté x_n.
Ainsi, un ensemble E est dénombrable si l'on peut accoler une étiquette et une seule à tout élément de E; les éléments de E peuvent alors être énumérés sous la forme $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, tels les termes d'une suite.

Exemples

- Évidemment l'ensemble $\mathbb{N}$ lui-même.
- L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable; en effet, l'application

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}\\ n & \longmapsto & n-1\end{array}$$

  est clairement une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$: f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ admet l'unique antécédent $m+1$.
- L'ensemble E des entiers ≥ 5 est dénombrable: l'application $f : n \mapsto n-5$ est une bijection de E dans $\mathbb{N}$: f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ admet l'unique antécédent $m+5$.
- L'ensemble E des entiers impairs est dénombrable: l'application

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \longrightarrow & E\\ n & \longmapsto & 2n+1\end{array}$$

  est clairement une bijection de $\mathbb{N}$ dans E.
- En considérant l'application $f : n \mapsto 2n$, on voit de même que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
- Plus généralement:

Proposition XXII.2.1 Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration 123

Définition XXII.2.2 Un ensemble E est dit au plus dénombrable s'il est fini ou s'il dénombrable, ce qui se produit si et seulement si E est en bijection avec une partie finie de $\mathbb{N}$ ou avec $\mathbb{N}$ tout entier.

Ainsi, un ensemble au plus dénombrable peut être *décrit en extension* :

$$E = \{x_i;\ i \in I\},$$

où I est une partie finie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}$ tout entier.

Proposition XXII.2.2 L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

En effet, il suffit d'envoyer les nombres positifs sur les entiers pairs et les nombres négatifs sur les impairs. On obtient ainsi clairement une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ (la démonstration hyper formelle est toute proche de cette démonstration).

Proposition XXII.2.3 Si E et F sont des ensembles dénombrables, alors le produit cartésien $E \times F$ est dénombrable.

Rappelons que $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y), avec x dans E et y dans F.

- ***Idée de la démonstration.*** Dans le quart de plan supérieur droit, plaçons un tableau. L'axe des abscisses représentera l'ensemble E dont chaque élément est numéroté $0, 1, 2, \ldots$; l'axe des ordonnées représentera de même l'ensemble F. Les éléments de $E \times F$ seront donc représentés par les carrés de ce tableau.

⋮					
4					
3					
2					
1					
0					
F \ E	0	1	2	3	4	...

- Démontrer que $E \times F$ est dénombrable revient donc à démontrer que ce tableau est dénombrable; ce qui peut se faire ainsi, en attribuant les étiquettes en effectuant un balayage diagonale par diagonale de ce tableau:

⋮						
4	**10**					
3	**6**	**11**				
2	**3**	**7**	**12**			
1	**1**	**4**	**8**	**13**		
0	**0**	**2**	**5**	**9**	**14**	
F \ E	0	1	2	3	4	...

Exemples

- $\mathbb{N}^2$ est un ensemble dénombrable.
- $\mathbb{Z}^2$ est un ensemble dénombrable.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, que l'on peut identifier à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$, est donc dénombrable.

Remarque. On peut démontrer (mais la démonstration est hors de notre portée) que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2.2 Note concernant certaines propriétés de certaines séries; séries doublement indexées

Conformément au programme, nous admettrons les résultats de cette section.

Théorème XXII.2.4 La valeur de la somme d'une série absolument convergente est indépendante:

- de l'ordre de sommation,
- d'un choix de regroupement de termes par paquets.

- La première propriété est une généralisation de la propriété de commutativité
$$a + b = b + a$$
étendue à une infinité de termes c'est à dire que si l'on fait une permutation généralisée des termes d'une série absolument convergente
$$u_n \rightsquigarrow u_{\sigma(n)}$$
où σ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la somme de la série ne changera pas:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
Cela peut paraître évident, puisque les termes sommés ne changent pas, mais ce résultat est faux pour une série convergente qui n'est pas absolument convergente. Comme quoi, une "somme de série" n'est après tout pas une somme!
- La deuxième est une généralisation de la notion *d'associativité*: dans la somme
$$a + b + c + d + e + f + g,$$
on peux poser des parenthèses où bon nous semble, sommer l'intérieur de chaque parenthèse, sommer le tout et on obtiendra toujours la même chose; par exemple
$$(a + b + c) + d + (e + f + g) = (a + b) + (c + d + e) + (f + g).$$
Dans le cas de la somme d'une série absolument convergente, on peut procéder à un regroupement en un nombre fini de paquets, comme le paquet des termes de rangs pairs et le paquet des termes de rangs impairs. Par exemple,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ est pair}}}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ est impair}}}^{+\infty}$$
ce que l'on peut effectivement vérifier: d'une part
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$
et d'autre part
$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ est pair}}}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{2p}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(3^2)^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{9^p} = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=0\\ n \text{ est impair}}}^{+\infty} \frac{1}{3^n} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{2p+1}}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(3^2)^p \times 3}\\ &= \frac{1}{3}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{9^p}\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

et on a bien

$$\frac{9}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{2}.$$

On admettra le résultat suivant, assez intuitif, concernant les *séries doubles* ou sommes indexées sur un produit d'ensemble:

Proposition XXII.2.5 ***Théorème de Fubini.*** Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double (on dit aussi indexée sur un produit) de nombres réels positifs. On suppose que:

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\geq 0} a_{ij}$ est convergente,
- la série $\sum\limits_{i\geq 0}\left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_{ij}\right)$ est convergente.

Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i\geq 0} a_{ij}$ est convergente et

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij}\right)$$

et cette valeur commune est notée $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij}$; on dit alors que la série double $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij}$ est convergente et que $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_{ij}\right)$ en est sa somme.

Remarque. Il est évident qu'on a un résultat analogue concernant une suite indexée sur $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, ou sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$...

Premier exemple

- Démontrer que la série double $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente et déterminer sa somme

C'est la situation la plus simple dans la mesure où l'on peut décomposer le terme général en un produit:

$$\frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i}\times\frac{1}{2^j}$$

et en conséquence:

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\geq 0}\frac{1}{2^{i+j}}$, c'est à dire la série $\sum\limits_{j\geq 0}\frac{1}{2^i}\times\frac{1}{2^j}$ est convergente puisque le facteur $\frac{1}{2^i}$ pouvant être "sorti", on reconnaît la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$:
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+j}} &= \frac{1}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j}\\ &= \frac{1}{2^i}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{2}{2^i}.\end{aligned}$$
- Ensuite, la série $\sum\limits_{i\geq 0}\left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+j}}\right)$ est convergente puisque l'on reconnaît une nouvelle série géométrique de raison $\frac{1}{2}$:
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+j}}\right) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2}{2^i}\\ &= \frac{2}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 4.\end{aligned}$$
On a donc
$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times N}\frac{1}{2^{i+j}} = 4.$$

Deuxième exemple

- Démontrer que la série double $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\frac{i^j}{i!j!}$ est convergente et déterminer sa somme

On suit le protocole:

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\geq 0}\frac{i^j}{i!j!}$ est convergente, puisqu'en écrivant
$$\frac{i^j}{i!j!} = \frac{1}{i!}\times\frac{i^j}{j!},$$
on reconnaît le développement en série entière de e^i:
$$e^i = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{j!}$$
et le facteur constant $\frac{1}{i!}$ n'affecte évidemment pas la convergence:
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{i!j!} &= \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{j!}\\ &= \frac{e^i}{i!}.\end{aligned}$$
- Ensuite, la série $\sum\limits_{i\geq 0}\left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{i!j!}\right)$ est convergente puisque l'on reconnaît une nouveau développement d'exponentielle:
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{i!j!}\right) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{e^i}{i!}\\ &= e^e.\end{aligned}$$

La série double $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{i^j}{i!j!}$ est donc convergente et sa valeur est e^e.

2.3 Définition formelle et notations

Introduction. Une expérience aléatoire est réalisée:

- un lancer de deux dés à six faces,
- le jet d'une pièce (pile ou face) dix fois de suite,
- le jet d'une pièce (pile ou face), sans limitation du nombre de jets,
- on tire une boule d'une urne contenant des boules rouges, vertes et jaunes.

On s'intéresse aux "phénomènes" suivants:

- à la somme des points obtenus,
- au nombre de "Face" obtenus,
- le nombre de jets nécessaires à l'obtention de la première série de deux "Pile" consécutifs,
- la couleur de la première boule tirée.

Ce sont quatre exemples de variables aléatoires.

Voici la définition extrêmement formelle d'une variable aléatoire. Rappelons qu'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω est une certaine catégorie de parties de Ω qu'on appelle *événements*.

Définition XXII.2.3 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application X définie sur Ω et à valeurs dans un certain ensemble E telle que:

- $X(\Omega)$ est au plus dénombrable
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble
$$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$$
est un événement.

Une variable aléatoire est dite réelle si X est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarques importantes

- *Image réciproque*. Pour toute application f définie sur un ensemble $\mathcal{E}$ et à valeurs dans un ensemble $\mathcal{F}$ et pour tout *ensemble* $B \subset \mathcal{F}$, l'image réciproque de l'ensemble B par f est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ est défini par
$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathcal{E},\ f(x) \in B\}$$
c'est à dire les élements de l'ensemble de départ dont l'image appartient à l'ensemble B; ce concept s'applique en particulier à tout *singleton* x de $\mathcal{F}$. Par exemple, si
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}$$
alors
$$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}.$$
- *De façon très concrète,* considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés numérotés de 1 à 6 (l'un bleu, l'un rouge). L'univers est
$$\Omega = \{(1,1), (2,1), \ldots, (6,1), \ldots, (6,6)\}.$$
À partir de là, considérons la somme des numéros obtenus: on est donc amenés à considérer la variable aléatoire (donc la fonction) X définie sur Ω par
$$\forall (n,p) \in \Omega,\ X(n,p) = n + p,$$
qui représente la somme des numéros obtenus lors du lancer ayant produit les numéros (n,p). Alors
$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$
et par exemple,
$$X^{-1}(\{6\}) = \{(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5)\}.$$
- Ainsi, de manière générale, $X^{-1}(\{x\})$ est l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire produisant le "phénomène" x. Autrement dit, $X^{-1}(\{x\})$ est l'événement "X prend la valeur x".
- Plus généralement, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$, c'est à dire pour tout ensemble de valeurs prises par X, $X^{-1}(A)$ est l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire produisant un phénomène appartenant à A. Autrement dit, $X^{-1}(A)$ est l'événement "X prend ses valeurs dans A". Par exemple, dans l'expérience du lancer de dés où X est la somme des points obtenus, les lancers produisant une somme égale à 2, à 3 ou à 4 sont les lancers
$$(1,1),\ (2,1),\ (1,2),\ (2,2).$$
Ainsi, en notant
$$A = \{2, 3, 4\},$$
on a
$$X^{-1}(A) = \{(1,1),\ (2,1),\ (1,2),\ (2,2)\}.$$

Remarques moins importantes.

- Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit A une partie de $X(\Omega)$. Puisque, par hypothèse, $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, il en est de même, à plus forte raison, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$; ainsi, on peut définir A en extension:
$$A = \{x_n,\ n \in I\}$$
où I est une partie finie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}$ tout entier et il est alors clair que
$$X^{-1}(A) = \bigcup_{n\in I} X^{-1}(\{x_n\}).$$
Puisque, par hypothèse, $X^{-1}(\{x_n\})$ est un membre de la tribu $\mathcal{A}$, il en est de même de
$$\bigcup_{n\in I} X^{-1}(\{x_n\})$$
par propriété d'une tribu.
- C'est la raison pour laquelle, *de manière très formelle, très rigoureuse* et dans l'optique du calcul de la probabilité d'un phénomène lié à une variable aléatoire, il est nécessaire que les causes produisant ce phénomène constituent un ensemble dont on peut effectivement calculer la probabilité, c'est à dire un événement, autrement dit un membre de la tribu; cela justifie la deuxième clause de la définition.

Définition XXII.2.4 Soit X une variable aléatoire sur un espace $(\Omega, \mathcal{A})$.
Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'événement $X^{-1}(\{x\})$, c'est à dire l'événement "X prend la valeur x", est noté

$$(X = x)$$

ou

$$\{X = x\}.$$

Pour tout ensemble $A \subset X(\Omega)$, l'événement "X prend une valeur appartenant à A", c'est à dire l'événement $X^{-1}(A)$, est noté

$$(X \in A)$$

ou

$$\{X \in A\}.$$

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout réel x, l'événement "X prend une valeur $\leq x$", c'est à dire l'événement $X^{-1}(]-\infty, x])$, est noté

$$(X \leq x)$$

ou

$$\{X \leq x\}.$$

De même, on utilisera les notations $(X < x)$, $(X \geq x)$, $(X > x)$, $(a \leq X \leq b)$, etc.

On suppose maintenant que l'on dispose d'une loi de probabilité P sur l'univers $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition XXII.2.5 et **Proposition XXII.2.6** ***Loi d'une variable aléatoire***. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est l'application P_X définie sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$ définie par

$$\forall A \subset X(\Omega),\ P_X(A) = P(X \in A).$$

La loi de probabilité P_X est entièrement déterminée par la famille des réels

$$(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$$

appelée distribution de probabilités: pour toute partie $A \subset X(\Omega)$,

$$\begin{aligned} P_X(A) &= P(X \in A) \\ &= \sum_{x \in A} P(X = x). \end{aligned}$$

En d'autres termes, déterminer la loi de probabilité de X, c'est:

- déterminer l'ensemble $X(\Omega)$, c'est à dire déterminer les valeurs prises par X
- et pour chaque valeur $x \in X(\Omega)$, calculer la probabilité $P(X = x)$, c'est à dire calculer la probabilité que cette valeur soit prise par X.

Enfin, on a

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$$

ce qui signifie par exemple que si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1.$$

Démonstration.

- Remarquons que l'on a précédemment observé que pour toute partie $A \subset X(\Omega)$, l'ensemble $(X \in A)$ est un membre de la tribu $\mathcal{A}$ i.e. est un événement ; c'est la raison pour laquelle $P(X \in A)$ a un sens.
- Puisque, par hypothèse, $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, il en est de même, à plus forte raison, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$; ainsi, on peut définir A en extension:

$$A = \{x_n,\ n \in I\}$$

  où I est une partie finie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}$ tout entier. Cela justifie (par σ-additivité), la formule

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

  qui s'écrit en réalité soit sous la forme

$$P(X \in A) = \sum_{i=1}^{N} P(X = x_i)$$

  lorsque A est fini, ou

$$P(X \in A) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i)$$

  lorsque A est infini.
- Enfin, l'ensemble de départ Ω de l'application X est évidemment l'image réciproque $X^{-1}(X(\Omega))$ de son ensemble image; autrement dit, en notations probabilistes:

$$\Omega = (X \in X(\Omega))$$

  et comme $P(\Omega) = 1$, c'est que

$$P(X \in X(\Omega)) = 1$$

  (ce qui est complètement trivial: l'événement "X prend ses valeurs dans $X(\Omega)$" est l'événement certain!) et on conclut en écrivant que par définition,

$$X(\Omega) = \{x,\ x \in X(\Omega)\}.$$

Exemple

- Dans le contexte du lancer de deux dés où X est la somme des nombres obtenus, soit $A = \{5, 6, 7\}$. Alors $X \in A$ est l'événement "la somme obtenue vaut 5, 6, ou 7". Dans la mesure où sur les 36 lancers, 4 lancers $\big((1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1)\big)$ donnent la somme 5, 5 lancers donnent la somme 6 $\big((1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1)\big)$ et 6 lancers $\big((1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\big)$ donnent la somme 6, on

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7), \\ &= \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} \\ &= \frac{15}{36}. \end{aligned}$$

- De même, l'événement $X \geq 11$ est l'événement $X \in \{11, 12\}$, d'où

$$\begin{aligned} P(X \geq 11) &= P(X = 11) + P(X = 12) \\ &= \frac{2}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{3}{36}. \end{aligned}$$

2.4 Quelques définitions complémentaires

Dans l'esprit de la proposition précédente, selon laquelle la loi de probabilité d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par sa distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, la proposition suivante est logique et naturelle (les détails techniques sont omis).

Théorème XXII.2.7 Soit une série $\sum_{n \geq 1} p_n$ à termes positifs ou nuls vérifiant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1.$$

Alors il existe une variable aléatoire X, définie sur un certain espace probabilisé d'univers Ω, prenant toutes les valeurs entières $1, 2, 3, \ldots$:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

et dont la distribution de probabilités est donnée par la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = p_n.$$

Remarques.

- C'est le point de départ de nombreux énoncés de problèmes débutant par "soit X une variable aléatoire prenant des valeurs entières et dont la loi est donnée par telle formule".
- Bien entendu, si on se donne série $\sum_{n \geq 0} p_n$ à termes positifs ou nuls vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, il existera une variable aléatoire X prenant toutes les valeurs entières $0, 1, 2, 3, \ldots$ i.e. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par la formule
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = p_n.$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer qu'il existe un unique réel α, que l'on déterminera, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{3^n}.$$

- De ce qui précède, c'est le cas si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{3^n}$ est convergente et de somme 1.
- Or la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n}$ est convergente et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$
- Ainsi, la formule
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{3^n}$$
définit la loi de la variable aléatoire X si et seulement si $\alpha = 2$.

Proposition XXII.2.8 Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé Ω et soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors $f(X)$ est une variable aléatoire définie sur Ω.

Remarques.

- $f(X)$ est la notation traditionnelle pour la composée $f \circ X$.
- Il n'y a rien de révolutionnaire dans cette proposition: après tout, une variable aléatoire est une fonction que l'on crée à partir des résultats d'une expérience aléatoire, ce qui est effectivement le cas de la composée $f \circ X$.

Exemple

Soit un entier $n \geq 2$. Une urne comporte n boules numérotées de 1 à n. On tire l'une de ces boules avec équiprobabilité. Soit X le numéro de la boule obtenu à l'issue de ce tirage et soit f la fonction définie sur $[\![1, n]\!]$ par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \; f(k) = (-1)^k.$$

Alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire sur Ω avec

$$Y(\Omega) = \{-1, 1\}.$$

Puisque $(-1)^k$ vaut 1 si k est pair et -1 s'il est impair et que $[\![1, n]\!]$ contient autant de nombres pairs que de nombres impairs lorsque n est lui-même pair, on a

$$P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

lorsque n est pair. Lorsque n est impair, $n = 2p + 1$ alors $[\![1, n]\!]$ contient $p + 1$ nombres impairs et p nombres pairs, si bien que

$$P(Y = -1) = \frac{p+1}{2p+1}, \quad P(Y = 1) = \frac{p}{2p+1}.$$

Définition XXII.2.6 On note

$$X \sim Y$$

lorsque deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi, c'est à dire lorsque:

- elles sont définies sur le même univers Ω,
- $X(\Omega) = Y(\Omega)$
- et
$$\forall z \in X(\Omega), \; P(X = z) = P(Y = z).$$

De plus, si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$, alors

$$f(X) \sim f(Y).$$

Par exemple, deux lancers successifs d'une même pièce produisent deux variables aléatoires de même loi.

Définition XXII.2.7 ***Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement.*** Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et B un événement tel que $P(B) \neq 0$.

La loi conditionnelle de X sachant B est l'application $P_{X,B}$ définie sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$ par

$$\forall A \in \mathscr{P}(X(\Omega)), \;\; P_{X,B}(A) = P((X \in A)|B)$$

(que l'on peut noter aussi $P_B(X \in A)$).

Déterminer cette loi c'est:

- déterminer l'ensemble $X(\Omega)$, c'est à dire déterminer les valeurs prises par X
- et pour chaque valeur $x \in X(\Omega)$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X = x|B)$.

Exemple

Une urne contient 10 boules (indiscernables au toucher) numérotées de 1 à 10. Soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. On note B l'événement "le numéro obtenu est impair". De façon évidente, pour tout entier impair $k \in \{1,3,5,7,9\}$, on a

$$\begin{aligned} P((X=k)|B) &= \frac{P((X=k)\cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(X=k)}{P(B)} \end{aligned}$$

car par exemple, l'événement "le numéro tiré vaut 5 et il est impair" est évidemment l'événement "le numéro tiré vaut 5" et donc

$$\begin{aligned} P((X=k)|B) &= \frac{1/10}{1/2} \\ &= \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

alors que pour tout entier pair $k \in \{2,4,6,8,10\}$,

$$\begin{aligned} P((X=k)|B) &= \frac{P((X=k)\cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\emptyset)}{P(B)} \end{aligned}$$

car par exemple, l'événement "le numéro tiré vaut 4 et il est impair" est évidemment l'événement impossible et donc

$$P((X=k)|B) = 0.$$

2.5 Deux exemples typiques d'établissement de loi

Premier exemple

On lance un dé à six faces trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus. Déterminer la loi de X.

- L'univers Ω de cette expérience est naturellement constitué des triplets que l'on peut constituer avec $\{1,2,3,4,5,6\}$: une issue de cette expérience étant

  (premier lancer, deuxième lancer, troisième lancer)

  donc
  $$\mathrm{Card}(\Omega) = 6^3 = 216.$$
- Les valeurs possibles prises par X sont $0,1,2,3$. On écrira donc $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.
- Par exemple, l'événement $X=2$ désigne tous les triplets de lancers produisant deux fois le 1. Ces tirages sont:
  $$\underbrace{(1,1,\text{tout } i \in [\![2,6]\!])}_{\text{5 en tout}},\ \underbrace{(1,\text{tout } i \in [\![2,6]\!],1)}_{\text{5 en tout}},\ \underbrace{(\text{tout } i \in [\![2,6]\!],1,1)}_{\text{5 en tout}}.$$
  On en a donc $5+5+5=15$ et on a alors
  $$P(X=2) = \frac{15}{216}.$$
- On calcule de même
  $$P(X=0) = \frac{125}{216}, \quad P(X=1) = \frac{75}{216}, \quad P(X=3) = \frac{1}{216}$$
- D'où la loi de probabilité de X:

$x \in X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Deuxième exemple

On lance une pièce sans limitation du nombre de lancers. La probabilité d'obtenir pile est un réel donné $p \in \,]0,1[$ et celle d'obtenir face est $1-p$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers où pile est obtenu pour la première fois. Déterminer la loi de X puis calculer les probabilités des événements E_1 : "on obtient le premier pile au bout d'au moins 5 lancers" et E_2: "on obtient le premier pile au bout d'un nombre *pair* de lancers".

- L'ensemble de toutes les valeurs prises par X est ici $\{1,2,\ldots,\} = \mathbb{N}^*$. On écrira donc:
  $$X(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$
- Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $X=n$ est l'événement "on obtient le premier pile au bout de n lancers", ce qui se produit si et seulement si les $n-1$ premiers ont donné face et le n-ième a donné pile.
- Ainsi, $X=n$ est l'intersection des événements "face face ... face pile", les $n-1$ premiers étant de probabilité $1-p$ et le dernier de probabilité p; étant naturellement mutuellement indépendants, on a alors
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = (1-p)\times\ldots\times(1-p)\times p = (1-p)^{n-1}\times p$$
  et la loi de X est établie (il s'agit de la loi géométrique de paramètre p).
- La réalisation de l'événement E_1 est bien entendu la réalisation de l'événement
  $$(X \in A)$$
  où
  $$A = \{n,\ n \geq 5\}$$
  Ainsi,
  $$\begin{aligned} P(E_1) &= P(X \geq 5) \\ &= P(X \in A) \\ &= \sum_{n=5}^{+\infty} P(X=n) \\ &= \sum_{n=5}^{+\infty} (1-p)^{n-1}\times p \\ &= p(1-p)^4 \times \frac{1}{1-(1-p)} \quad \text{(série géométrique de premier terme } (1-p)^{5-1}\text{)} \\ &= (1-p)^4. \end{aligned}$$
- De même, la réalisation de l'événement E_2 est la réalisation de l'événement
  $$(X \in B)$$
  où On a
  $$B = \{2k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$$

et donc

$$\begin{aligned}
P(E_2) &= P(X\in B)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k-1}\times p\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k}\times \frac{p}{1-p}\\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^k\\
&= \frac{p}{1-p}\times(1-p)^2\times\frac{1}{1-(1-p)^2}\\
&= \frac{p(1-p)}{2p-p^2}\\
&= \frac{1-p}{2-p}.
\end{aligned}$$

2.6 Lois usuelles: un premier tour d'horizon

Définition XXII.2.8 ***Loi uniforme.*** Une variable aléatoire X suit une loi uniforme lorsque l'application X prend un nombre fini de valeurs avec équiprobabilité,

- i.e. lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini $\{x_1,\dots,x_N\}$ de cardinal N et que $P(X=x_i)=\frac{1}{N}$ pour tout $i\in[\![1,N]\!]$.
- Pour tout $U\in X(\Omega)$ on a alors

$$P(X\in U)=\frac{\mathrm{Card}(U)}{N}.$$

Remarque. Cette variable modélise typiquement le nombre de points obtenu sur une face lors du lancer d'un dé non biaisé ou du numéro obtenu lors du tirage d'une boule dans une urne comportant N boules numérotées $1,\dots,N$; bref, l'équiprobabilité.

Définition XXII.2.9 ***Loi de Bernoulli.*** Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$ lorsque $X(\Omega)=\{0,1\}$ avec

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p.$$

On note alors $X\sim\mathcal{B}(p)$.

Remarque. C'est une loi modélisant typiquement une expérience à deux issues possibles, communément appelées "succès" et "échec".

- Le tirage à pile ou face: on considère la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si l'on obtient pile et 0 si l'on obtient face
  - si la pièce est équilibrée, alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$;
  - si la pièce est non équilibrée, il existe $p\in]0,1[$ tel que $X\sim\mathcal{B}(p)$.
- Le tirage de boules dans une urne: si cette urne contient des boules et parmi elles, des boules blanches en proportion p. On tire une boule de cette urne et on pose $X=1$ si la boule est blanche et 0 sinon. Alors la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Dans le rappel ci-dessous, on anticipe le concept d'indépendance de variables aléatoires, qui sera défini un peu plus loin.

Définition XXII.2.10 ***Loi binomiale.*** Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$ lorsque X prend les valeurs $0,1,\dots,n$:

$$X(\Omega)=\{0,1,\dots,n\}$$

et lorsque pour tout $k\in\{0,1,\dots,n\}$,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ modélise le nombre de succès obtenus au cours de la répétition de manière indépendante de n épreuves de Bernoulli ayant toutes le même paramètre p, en attribuant la valeur 1 à un succès et 0 à un échec.

Démonstration.

- Notons X_i la i-ème répétition de cette épreuve. Alors

$$X=X_1+\ldots+X_n$$

puisque si

$$X_1+\ldots+X_n=k,$$

c'est que parmi les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$, il y en a exactement k qui prennent la valeur 1, et il y a eu donc k succès, et $n-k$ qui prennent la valeur 0 et il y a eu donc $n-k$ échecs.

Mais combien existe-t-il de sommes de n entiers, tous égaux à 0 ou à 1 valant k? Matérialisons une répartition des valeurs prises par les (X_i) par un tableau. Par exemple

1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	0	0	0	1

matérialise, pour $n=7$, le résultat

$$(X_1=0,\ X_2=1,\ X_3=1,\ X_4=0,\ X_5=0,\ X_6=0,\ X_7=1).$$

La somme des 7 variables aléatoires vaut 3 et cette répartition de valeurs peut être associée à l'ensemble

$$\{2,3,7\}$$

dont les éléments sont les emplacements des 1 dans ce tableau. Il existe donc autant de répartitions de valeurs dont la somme vaut 3 que de sous-ensembles à 3 éléments que l'on peut former à partir de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, c'est à dire

$$\binom{7}{3}.$$

De façon plus générale, en suivant le même raisonnement, il existe

$$\binom{n}{k}$$

répartitions des valeurs prises par les n variables aléatoires (X_i) dont la somme vaut k.

Du fait de l'indépendance des X_i, un événement comme

$$(X_1=0,\ X_2=1,\ X_3=1,\ X_4=0,\ X_5=0,\ X_6=0,\ X_7=1)$$

a pour probabilité

$$P(X_1=0)\times P(X_2=1)\times P(X_3=1)\times P(X_4=0)\times P(X_5=0)\times P(X_6=0)\times P(X_7=1)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}(1-p)\times p\times p\times(1-p)\times(1-p)\times(1-p)\times p &= p^3\times p^4\\ &= p^3(1-p)^{7-3}\end{aligned}$$

et plus généralement, toute répartition des valeurs prises par les n variables aléatoires (X_i) dont la somme vaut k se produira avec la probabilité

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Les $\binom{n}{k}$ événements conduisant à une somme égale à k ont tous la même probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ et c'est pourquoi

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

- On a bien défini une loi de probabilité, conformément à la proposition XXII.2.6:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &= (p+(1-p))^n\\ &= 1^n\\ &= 1\end{aligned}$$

car on a reconnu la formule du binôme de Newton.

Exemple

Dans une salle informatique se trouvent huit ordinateurs. La probabilité que l'un d'eux tombe en panne dans l'année est de $0,05$. En supposant que les états des ordinateurs soient indépendants les uns des autres,

- quelle est la probabilité v que deux appareils exactement tombent en panne dans l'année?
- Quelle est la probabilité v' qu'au moins un appareil tombe en panne dans l'année?

Réponse. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs en panne dans l'année; alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0,05$, d'où:

- $v=\binom{8}{2}\times(0,05)^2\times(0,95)^6\approx 0,051.$
- L'événement contraire est qu'aucun appareil ne tombe en panne dans l'année, donc

$$v'=1-\binom{8}{0}\times(0,05)^0\times(0,95)^8\approx 0,336.$$

Définition XXII.2.11 ***Loi géométrique.*** Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$ lorsque $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}.$$

On note alors $X\sim\mathcal{G}(p)$.

Remarques.

- La loi géométrique peut être interprétée comme le rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. En effet, considérons par exemple une partie illimitée de pile ou face où la probabilité d'obtenir pile est un réel donné $p\in\,]0,1[$. Appelons "succès" l'obtention d'un pile; soit X la variable aléatoire égale au rang du premier "succès" obtenu, donc au rang du premier pile obtenu.
  - L'ensemble de toutes les valeurs prises par X est $\{1,2,\ldots,\}=\mathbb{N}^*$.
  - Fixons $k\in\mathbb{N}^*$. L'événement $X=k$ est l'événement "on obtient le premier succès au bout de k tentatives", ce qui se produit si et seulement si les $k-1$ premiers ont produit des échecs et le k-ième un succès.
  - Ainsi, $X=k$ est l'intersection des événements "échec échec ...échec succès" et par mutuelle indépendance des événements:

$$\begin{aligned}P(X=k) &= \underbrace{(1-p)\times\ldots\times(1-p)}_{k-1\text{ fois}}\times p\\ &= p(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

  donc X suit effectivement la loi géométrique de paramètre p.

- On a bien défini une loi de probabilité, conformément à la proposition XXII.2.6: puisque

$$0<1-p<1,$$

  la série géométrique $\sum(1-p)^k$ est convergente et sa somme vaut bien 1 puisque

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1} &= p\times\frac{1}{1-(1-p)}\\ &= \frac{p}{p}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Définition XXII.2.12 ***Loi de Poisson.*** Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ lorsque $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note alors $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque. On a bien défini une loi de probabilité, conformément à la proposition XXII.2.6, puisque:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\times e^{\lambda}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Exemples typiques: loi des "événements rares"

La loi de Poisson décrit la probabilité du nombre d'occurrences d'un événement dans un intervalle de temps donné lorsque ces événements se produisent avec une fréquence moyenne connue (fruit d'une observation statistique), indépendamment les uns des autres et lorsque la probabilité d'occurrence est proportionnelle à la durée d'observation: si λ est le nombre moyen d'occurrences d'un certain phénomène sur une période de temps T donnée (une heure, une année...), alors la variable aléatoire X est égale au nombre d'occurrences de ce phénomène pendant la période de temps T suit une loi de Poisson de paramètre λ.

- Une certaine rivière provoque une inondation tous les 15 ans en moyenne. En supposant le modèle de Poisson adéquat, calculer les probabilités de survenue d'aucune, puis d'une et enfin de 5 inondations sur une période de 15 ans.

- Puisque le nombre moyen est de 1 tous les 15 ans, on a $\lambda = 1$. En notant X le nombre d'inondations sur une période de 15 ans, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
- $P(X = 0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = e^{-1} \approx 0,368$.
- $P(X = 1) = e^{-1}\frac{1^1}{1!} = e^{-1} \approx 0,368$.
- $P(X = 5) = e^{-1}\frac{1^5}{5!} = \frac{e^{-1}}{120} \approx 0,003$.

- Le nombre moyen de buts inscrits par match lors d'une coupe du monde de football est environ $2,5$. En supposant le modèle de Poisson adéquat, calculer les probabilités qu'aucun, puis qu'un seul, et enfin que 5 buts soient inscrits lors d'un match donné.
  - Puisque le nombre moyen est de $2,5$ par match, on a $\lambda = 2,5$. En notant X le nombre de buts marqués par match, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2,5$.
  - $P(X = 0) = e^{-2,5}\frac{2,5^0}{0!} \approx 0,082$.
  - $P(X = 1) = e^{-2,5}\frac{2,5^1}{1!} \approx 0,205$.
  - $P(X = 5) = e^{-2,5}\frac{2,5^5}{5!} \approx 0,067$.

3 Couple de variables aléatoires; lois marginales et conjointes

3.1 Loi conjointe

Définition XXII.3.13 Un couple Z de variables aléatoires est formé de deux variables aléatoires (X, Y) définies sur un même univers Ω.

Notations très importantes

On utilisera les notations

$$(X = x, Y = y) \quad \text{ou} \quad \{X = x\} \cap \{Y = y\} \quad \text{ou} \quad \{X = x, Y = y\}$$

comme raccourci pour signifier la réalisation simultanée des événements

$$X = x \quad \text{et} \quad Y = y.$$

La simultanéité de ces deux événements est alors considérée comme un événement unique dont la probabilité est notée

$$P(X = x, Y = y).$$

On notera en particulier que la virgule fait état de "et".

Définition XXII.3.14 ***Loi conjointe.*** La loi conjointe des variables aléatoires est la loi $P_{(X,Y)}$ du couple (X, Y).

Établir la loi de probabilité du couple (X, Y), c'est déterminer, pour chaque valeur x prise par X et pour chaque valeur y prise par Y, la probabilité de l'événement

$$P(X = x, Y = y).$$

Remarque. Dans la pratique, cette probabilité est avant tout calculée en interprétant l'événement $(X = x, Y = y)$, en faisant valoir des arguments probabilistes.

Premier exemple

On lance deux dés à six faces (l'un bleu, l'autre rouge). On considère le couple $Z = (X, Y)$ où X, resp. Y, est la variable aléatoire égale au plus grand, resp. plus petit, des deux numéros obtenus.

- On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et il y a 36 tirages possibles.
- Par exemple, l'événement $X = 4, Y = 3$ se produit si et seulement si le dé bleu a donné 4 et le rouge 3 ou si le dé bleu a donné 3 et le rouge 4. Ainsi, il y a deux tirages sur les 36 possibles qui réalisent l'événement $X = 4, Y = 3$ et c'est pourquoi
$$P(X = 4, Y = 3) = \frac{2}{36}.$$
- L'événement $X = 4, Y = 4$ ne se produit que si le dé bleu et le dé rouge ont donné tous les deux 4. Ainsi,
$$P(X = 4, Y = 4) = \frac{1}{36}.$$
- L'événement $X = 3, Y = 4$ est impossible: si le max de deux numéros est 3, le minimum n'est pas 4. Ainsi,
$$P(X = 3, Y = 4) = 0.$$
- En raisonnant de la même façon pour toutes les autres valeurs, la loi conjointe de (X, Y), consignée dans un tableau à double entrée, est la suivante:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Deuxième exemple

On lance, sans limitation du nombre de lancers, une pièce; la probabilité d'obtenir pile est p, où $p \in]0, 1[$ est donné. On considère le couple $Z = (X, Y)$ où X, resp. Y, est le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier, resp. deuxième, "Pile".

- On a $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots\}$ et $Y(\Omega) = \{2, 3, \ldots\}$.
- Soit $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
  - Si $j \leq i$, l'événement $(X = i, Y = j)$ est évidemment impossible: on a donc
  $$P(X = i, Y = j) = 0$$
  dans ce cas.
  - Supposons $j > i$; par définition d'une probabilité conditionnelle
  $$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(Y = j, X = i) \\ &= P(Y = j | X = i) \times P(X = i). \end{aligned}$$
  Sachant l'événement $(X = i)$ réalisé, l'événement $Y = j$ est réalisé si et seulement si les lancers entre le $(i + 1)$-ème et le $(j - 1)$-ème, qui sont au nombre de $(j - 1) - (i + 1) + 1$, c'est à dire $j - i - 1$, ont donné face et le j-ème a donné pile; par indépendance des lancers, ceci se produit avec la probabilité
  $$q^{j-i-1} \times p$$
  (notons que cette formule est encore vraie même si $j = i + 1$, c'est à dire si le deuxième pile survient juste après le premier auquel cas il n'y a aucun lancer intermédiare ayant donné face, ce qui est conforme avec le fait que le facteur q^{j-i-1} vaut alors q^0, c'est à dire 1). Ainsi,
  $$P(Y = j | X = i) = q^{j-i-1} \times p$$

et puisque X suit la loi géométrique de paramètre p,

$$P(X=i)=q^{i-1}p$$

et c'est pourquoi

$$\begin{aligned} P(X=i,Y=j) &= q^{j-i-1}p\times q^{i-1}p \\ &= p^2q^{j-2}. \end{aligned}$$

- Ainsi, la loi conjointe de (X,Y) est définie par

$$\forall (i,j)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\quad P(X=i,Y=j)=\begin{cases} p^2q^{j-2} & \text{si } j>i \\ \\ 0 & \text{si } j\leq i. \end{cases}$$

- ***Remarque.*** Vérifions que cette loi est bien une loi de variable aléatoire au sens de la proposition XXII.2.6, c'est à dire que la somme de tous les termes de la distribution de probabilités vaut 1; conformément au protocole d'étude d'une série double, on étudie, à i fixé, la série

$$\sum_{j\geq 2} P(X=i,Y=j)$$

qui est en réalité la série

$$\sum_{j\geq i+1} p^2q^{j-2}.$$

On reconnaît une série géométrique de raison q et comme $q=1-p\in]0,1[$, elle est convergente et en effectuant le changement d'indice $n=j-2$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=i+1}^{+\infty} p^2q^{j-2} &= \sum_{n=i-1}^{+\infty} p^2q^n \\ &= p^2\times\frac{q^{i-1}}{1-q} \\ &= p^2\times\frac{q^{i-1}}{p} \\ &= pq^{i-1}. \end{aligned}$$

On s'intéresse à présent à la série

$$\sum_{i\geq 1}\left(\sum_{j=2}^{+\infty} P(X=i,Y=j)\right),$$

c'est à dire la série

$$\sum_{i\geq 1} pq^{i-1}.$$

On reconnaît encore une série géométrique de raison q et en effectuant le changement d'indice $n=i-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} pq^{i-1} &= p\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \\ &= p\times\frac{1}{1-q} \\ &= p\times\frac{1}{p} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait vérifier.

3.2 Lois marginales

Définition XXII.3.15 ***Lois marginales.*** Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. Les lois de X et de Y sont appelées les lois marginales du couple (X,Y).

La loi "marginale" de X n'est pas autre chose que la loi de X (ce n'est pas une deuxième loi); on rajoute cet adjectif pour la signaler comme "produit dérivé" du couple (X,Y) au sens de la très importante formule suivante:

Théorème XXII.3.9 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé d'univers Ω. Alors

$$\forall x\in X(\Omega),\quad P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x,Y=y).$$

On dit alors que l'on a calculé la *loi marginale* de X à partir de la loi conjointe du couple (X,Y).

De même, la loi marginale de Y à partir de la loi conjointe du couple (X,Y) s'obtient par:

$$\forall y\in Y(\Omega),\quad P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x,Y=y)$$

Démonstration.

- La famille d'événements

$$(Y=y)_{y\in y(\Omega)}$$

forme un système complet d'événements puisque pour tout $\omega\in\Omega$, $Y(\omega)$ prend l'une de ces valeurs et une seule i.e. tout ω appartient à un et à un seul de ces ensembles.

- Fixons $x\in X(\Omega)$; d'après la formule des probabilités totales,

$$P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x,Y=y).$$

- Idem pour Y, par permutation.

Premier exemple

On reprend le lancer de deux dés où (X,Y) est le (max,min) des deux numéros.

- La formule donnant la loi marginale de X fournit

$$P(X=4)=\sum_{y=1}^{6} P(X=4,Y=y)=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}+0+0=\frac{7}{36}.$$

- Cette valeur $\frac{7}{36}$ peut évidemment être confirmée ainsi: le maximum des deux numéros vaut 4 si l'un des tirages $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(3,4)$, $(2,4)$, $(1,4)$ est apparu; il y en a 7 et sur les 36 possibles, cela donne bien une probabilité de $\frac{7}{36}$.
- La formule donnant la loi marginale de Y fournit

$$P(Y=3)=\sum_{x=1}^{6} P(X=x,Y=3)=0+0+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{7}{36}.$$

- Cette valeur $\frac{7}{36}$ peut évidemment être confirmée ainsi: le minimum des deux numéros vaut 3 si l'un des tirages $(6,3)$, $(5,3)$, $(4,3)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$ est apparu; il y en a 7 et sur les 36 possibles, cela donne bien une probabilité de $\frac{7}{36}$.

Deuxième exemple

On reprend le lancer d'une pièce: X, resp. Y, est le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier, resp. deuxième, "Pile"

- Par exemple, la formule donnant la loi marginale de X fournit

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \sum_{j=2}^{+\infty} P(X=4,Y=j) = \sum_{j=2}^{4} P(X=4,Y=j) + \sum_{j=5}^{+\infty} P(X=4,Y=j) \\ &= 0+0+0+\sum_{j=5}^{+\infty} p^2q^{j-2} = p^2\sum_{j=5}^{+\infty} q^{j-2} \\ &= p^2\sum_{k=3}^{+\infty} q^k = p^2\frac{q^3}{1-q} = p^2\frac{q^3}{p} = pq^3. \end{aligned}$$

- Cette valeur pq^3 peut évidemment être confirmée par le fait que X suit la loi géométrique de paramètre p et c'est pourquoi

$$P(X=4) = q^3p.$$

- ***Plus important.*** Cette formule permet de déterminer la loi de Y; en effet, pour tout entier $j \geq 2$, la loi marginale de Y donne

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i,Y=j)$$

  et on a vu que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad P(X=i,Y=j) = \begin{cases} p^2q^{j-2} & \text{si } j > i \\ 0 & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

  Puisque tous les termes $P(X=i,Y=j)$ sont nuls lorsque $j \leq i$, ils n'ont aucun effet sur la somme de la série et peuvent être retirés et il ne restera plus qu'une somme où l'indice i va varier de 1 à $j-1$; on a donc

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{j-1} q^{j-i-1}p \times q^{i-1}p \\ &= p^2\sum_{i=1}^{j-1} q^{j-2} \\ &= p^2 \times (j-1) \times q^{j-2}. \end{aligned}$$

Généralisation

Soit un entier $n \geq 2$.

- On définit naturellement la notion de n-uplet

$$(X_1,\ldots,X_n)$$

  de variables aléatoires définies sur un même univers Ω.
- La loi conjointe d'un tel n-uplet est la loi permetant de déterminer, pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, la probabilité de l'événement

$$P(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n).$$

- La loi marginale de X_1 est donnée à partir de la formule

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in X_2(\Omega)\times\ldots\times X_n(\Omega)} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots, X_n = x_n)$$

  (la somme étant étendue sur l'ensemble de toutes les valeurs prises par les $n-1$-uplets $(x_2,\ldots,x_n)$; les lois marginales de $X_2,\ldots$ s'obtiennent *mutatis mutandis*.

4 Indépendance

4.1 Définitions et premiers résultats

Il n'y a pas de nouveauté dans la définition ci-dessous: des valeurs prises par des variables aléatoires sont avant tout des événements:

Définition XXII.4.16 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On dit que X et Y indépendantes, ce que l'on note

$$X \perp\!\!\!\perp Y$$

lorsque pour tous ensembles $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ de valeurs prises par X et Y respectivement, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est à dire

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

De manière équivalente, les variables aléatoires X et Y sont équivalentes si et seulement si la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X=x,Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y).$$

Démonstration 124

Par exemple,

$$P(X \geq a, Y \leq b) = P(X \geq a) \times P(Y \leq b)$$

pour des variables aléatoires à valeurs réelles indépendantes.

Premier exemple

On reprend le lancer de deux dés où (X,Y) est le (max,min) des deux numéros.

- D'après le tableau ci-dessus, on a

$$P(X=4,Y=3) = \frac{2}{36}.$$

- On a calculé

$$P(X=4) = \frac{7}{36}, \qquad P(Y=3) = \frac{7}{36}.$$

- On a alors

$$P(X=4) \times P(Y=3) = \frac{7}{36} \times \frac{7}{36} = \frac{49}{1296} \neq \frac{2}{36}.$$

- Ainsi,

$$P(X=4,Y=3) \neq P(X=4) \times P(Y=3),$$

  ce qui démontre que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Deuxième exemple

On reprend le lancer d'une pièce: X, resp. Y, est le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier, resp. deuxième, "Pile" et on se place dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$.

- D'après le calcul de la loi conjointe, on a
$$P(X = 4, Y = 5) = p^2 q^3 = \frac{1}{2^5}.$$
- On a calculé
$$P(X = 4) = pq^3 = \frac{1}{2^4}, \qquad P(Y = 5) = 4p^2q^3 = 4\frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^3}.$$
- On a alors
$$P(X = 4) \times P(Y = 5) = \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^7} \neq \frac{1}{2^5}.$$
- Ainsi,
$$P(X = 4, Y = 5) \neq P(X = 4) \times P(Y = 5),$$
ce qui démontre que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Troisième exemple

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par:
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}.$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer $P(X = Y)$.

Solution.

1. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et d'après la formule donnant la loi marginale de X
$$\begin{aligned}\forall i \in \mathbb{N},\ P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!}\\ &= \frac{1}{e2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\\ &= \frac{1}{e2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1^j}{j!}\\ &= \frac{1}{e2^{i+1}} \times e^1\\ &= \frac{1}{2^{i+1}}.\end{aligned}$$
De même,
$$\begin{aligned}\forall j \in \mathbb{N},\ P(Y = j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j)\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!}\\ &= \frac{1}{ej!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\\ &= \frac{1}{ej!} \times 1\\ &= \frac{1}{ej!}.\end{aligned}$$
2. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}P(X = i, Y = j) &= \frac{1}{e2^{i+1}j!}\\ &= \frac{1}{2^{i+1}} \times \frac{1}{ej!}\\ &= P(X = i) \times P(Y = j)\end{aligned}$$
donc X et Y sont indépendantes.
3. L'événement $(X = Y)$ est réalisé si et seulement si X et Y prennent la même valeur, donc si et seulement si $(X = 0)$ *et* $(Y = 0)$, ou bien $(X = 1)$ *et* $(Y = 1)$,.... Ainsi, $(X = Y)$ est la réunion des événements
$$(X = i, Y = i)_{i \in \mathbb{N}}.$$
Ces événements étant deux à deux incompatibles, on a
$$\begin{aligned}P(X = Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i, Y = i)\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}i!}\\ &= \frac{1}{2e} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2^i}}{i!}\\ &= \frac{1}{2e} \times e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

Cette proposition est tout à fait naturelle:

Proposition XXII.4.10 Lorsque X et Y sont indépendantes, alors
$$f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$
pour toutes fonctions f et g respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Démonstration 125

4.2 Nombre quelconque et suites de variables indépendantes; lemme des coalitions et suites i.i.d.

La définition suivante est naturelle:

Définition XXII.4.17 ***Nombre quelconque de variables indépendantes.***

- Des variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ (en nombre fini) sur un espace probabilisé d'univers Ω sont dites indépendantes, ou mutuellement indépendantes, lorsque pour tout $A_1 \subset X_1(\Omega), \ldots, A_n \in X_n(\Omega)$, les événements
$$(X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n)$$
sont indépendants, c'est à dire lorsque
$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \ldots \times P(X_n \in A_n).$$
- De manière équivalente, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes lorsque pour toutes valeurs $(x_1, \ldots, x_r) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_r(\Omega)$,
$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r) = P(X_1 = x_1) \times \ldots \times P(X_r = x_r).$$
- Lorsque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies respectivement sur $X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$, les variables aléatoires
$$f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$$
sont indépendantes.
- ***Lemme des coalitions.*** Si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de $X_1, \ldots, X_m$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{m+1}, \ldots, X_n$:
$$f(X_1, \ldots, X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$$
pour toutes fonctions f et g.

Remarques.

- L'équivalence proposée dans cette définition se prouve comme dans le cas de deux variables.
- Dans le lemme des coalitions, les fonctions f et g sont bien entendu des fonctions définies sur des domaines convenables et il se démontre grosso-modo de la manière suivante: en posant
$$U = (X_1, \ldots, X_m), \qquad V = (X_{m+1}, \ldots, X_n),$$
on crée par hypothèse d'indépendance de la suite $(X_1, \ldots, X_n)$ deux variables aléatoires indépendantes U et V et dans ce contexte, il a été vu dans une proposition précédente que
$$f(U) \perp\!\!\!\perp g(V)$$
(les détails sont faciles).
- Ainsi, si (X, Y, Z) sont indépendantes, alors $X + Y$ et Z sont indépendantes.
- On peut bien entendu imaginer plus de deux coalitions: si (U, V, X, Y, Z) sont des variables indépendantes, alors
$$U,\ V + X,\ Y - Z$$
sont des variables indépendantes. Ainsi, plus généralement, si $(X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes, alors les variables aléatoires
$$f_1(X_1, \ldots, X_{m_1}), f_2(X_{m_1+1}, \ldots, X_{m_2}), \ldots, f_{k+1}(X_{m_k+1}, \ldots, X_n)$$
sont indépendantes.
- L'indépendance (on dit aussi indépendance mutuelle) est une hypothèse généralement faite lors de la répétition, dans les mêmes conditions, d'une même expérience, comme le lancer d'un dé ou d'une pièce: si on lance un dé équilibré 10 fois de suite, on compte le nombre S de 6 que l'on a obtenus; l'indépendance mutuelle du résultat obtenu à l'issue de chaque lancer est une hypothèse tout à fait raisonnable: la connaissance, par exemple, des résultats aux premier, deuxième et quatrième lancers n'a pas d'influence sur les résultats obtenus aux troisième et au neuvième. Cette hypothèse permet d'ailleurs d'évoquer la loi binomiale: en considérant les variables aléatoires de Bernoulli $(X_n)_{1 \leq n \leq 10}$ où l'on définit X_n par
$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n\text{-ième lancer produit un } 6 \\ \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
on a $S = \sum_{n=1}^{10} X_n$ et S suit une loi binomiale de paramètres $\left(10, \frac{1}{6}\right)$.

Plus généralement:

Définition XXII.4.18 ***Suite de variables indépendantes.*** Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes *indépendantes* sur un espace probabilisé d'univers Ω est une suite dont chaque sous-famille finie est constituée de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.

Par exemple, on lance une pièce, sans limitation du nombre de lancers, avec probabilité d'obtenir pile égale à un même réel $p \in]0, 1[$ à chaque lancer et on s'intéresse au nombre X de lancers nécéssaires à l'obtention du premier pile. On est en présence d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'épreuves de Bernoulli où l'on définit X_n par
$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n\text{-ième lancer produit un pile} \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
L'indépendance mutuelle de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est également raisonnable, comme lorsque l'on se limite à un certain nombre de lancers.

Plus généralement:

Définition XXII.4.19 ***Suites i.i.d.*** Une suite (X_n), finie ou infinie, de variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) sont des variables aléatoires qui suivent toutes la même loi de probabilité et sont indépendantes.

Exemple fondamental

C'est donc le cas de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ modélisant le jeu de pile ou face infini décrit ci-dessus où pour tout entier $n \geq 1$,
$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n\text{-ième lancer produit un pile} \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5 Espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs réelles

5.1 Définition et propriétés

On considère une variable aléatoire X à valeurs réelles. Dans le cas où X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, l'espérance est la moyenne des valeurs prises par X, chaque valeur étant pondérée par sa probabilité de réalisation:

Définition XXII.5.20 Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, ne prenant qu'un nombre fini $x_1, \dots, x_N$ de valeurs. L'espérance $E(X)$ de X est le réel

$$x_1 P(X = x_1) + \dots + x_N P(X = x_N),$$

c'est à dire le réel

$$\sum_{n=1}^{N} x_n P(X = x_n).$$

Premier exemple

Dans le lancer d'un dé équilibré à 6 faces, soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu au cours d'un lancer. Alors

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{6 \times 7}{2 \times 6} = \frac{7}{2}.$$

Deuxième exemple

Un dé à 6 faces est fabriqué de telle sorte que les numéros pairs ont deux fois plus de chance de sortir que les numéros impairs. Soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu au cours d'un lancer. Quelle est la loi de X? Quelle est son espérance?

- Soit p la probabilité d'apparition d'un nombre impair tel que 3; celle d'un nombre pair tel que 4 est donc $2p$. Ce dé comporte 3 faces impaires et 3 faces paires et la somme des probabilités de sortie de tous les nombres doit être égale à 1 i.e.

$$p + p + p + 2p + 2p + 2p = 1,$$

  c'est à dire $9p = 1$ et donc $p = \frac{1}{9}$.
- La loi de X est donc

$x \in X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

- Son espérance est alors

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{1}{9} + 6 \times \frac{2}{9} = \frac{33}{9}.$$

Espérance d'une variable aléatoire discrète

La situation est plus délicate:

Définition XXII.5.21 Soit X une variable aléatoire réelle discrète, prenant une suite infinie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de valeurs.
On dit que X possède une espérance lorsque la série

$$\sum_{n \geq 1} x_n P(X = x_n)$$

est absolument convergente. On dit aussi dans ce cas que X est d'espérance finie.
En cas d'absolue convergence, l'espérance $E(X)$ de X est alors le réel

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n P(X = x_n).$$

Remarque. On attachera une attention particulière à la preuve de la convergence absolue de la série. Très rigoureusement, cela permet, grâce aux propriétés admises plus haut concernant les séries absolument convergentes, de justifier que la valeur de l'espérance ne dépend pas de la manière d'énumérer l'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs prises par X.

Premier exemple (loi géométrique)

On lance une pièce sans limitation du nombre de lancers. La probabilité d'obtenir pile est un réel donné $p \in]0, 1[$ et celle d'obtenir face est $1 - p$. Soit X la variable aléatoire égale au rang du premier pile obtenu.

- On a vu que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (X est la loi géométrique de paramètre p) et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1-p) \times \dots \times (1-p) \times p = (1-p)^{n-1} \times p.$$

- La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} n \times (1-p)^{n-1} \times p$$

  est convergente (ici, $x_n = n$, les termes sont positifs, d'où l'absence de valeur absolue) donc si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} n(1-p)^{n-1}$$

  est convergente. Or on sait que (série géométrique)

  – $\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.
  – Par théorème de dérivation terme à terme:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

  – En prenant $x = 1 - p$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2}.$$

- Donc X admet une espérance et

$$E(X) = p \times \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Deuxième exemple

Vérifier que l'on définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance?

Solution. La formule ci-dessus définit une variable aléatoire si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

est à termes positifs, convergente et de somme 1.

- Elle est bien à termes positifs puisque $n+1 \geq n \implies \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$.
- Pour tout $N \geq 1$, on a par télescopage:
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$
On en déduit
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$
ce qui est la preuve que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est convergente et de somme 1.

On a bien affaire à une loi de variable aléatoire.
Ensuite, X possède une espérance si et seulement si la série
$$\sum_{n \geq 1} n \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$
est convergente (ici, $x_n = n$, les termes sont positifs, d'où l'absence de valeur absolue). Or
$$\begin{aligned} n \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) &= n \times \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
et on sait que la série (de Riemann) $\sum \frac{1}{n+1}$ est divergente.
Ainsi, X ne possède pas d'espérance.

Proposition XXII.5.11 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et à valeurs réelles définies sur un même univers. On suppose que Y est d'espérance finie et que
$$|X| \leq Y.$$
Alors X possède une espérance.

La démonstration est admise.

Propriétés de l'espérance

Théorème XXII.5.12 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et à valeurs réelles possédant une espérance et a, b des scalaires.
- La variable aléatoire aX a une espérance et
$$E(aX) = aE(X).$$
- La variable aléatoire $aX + bY$ a une espérance et
$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$
(linéarité de l'espérance).
- Si $X \geq 0$ i.e. si les valeurs prises par X sont positives, alors $E(X) \geq 0$.
- Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

La linéarité est admise; les autres propriétés sont évidentes.

Proposition XXII.5.13 ***Cas d'une variable aléatoire constante.*** Soit X une variable aléatoire constante i.e. soit Ω un univers probabilisé, a un réel et X la variable aléatoire constante égale à a i.e. pour tout $x \in \Omega$, $X(x) = a$. Alors X possède une espérance et
$$E(X) = a.$$

En effet, la somme
$$\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$
est une somme à un seul terme égal à $a \times 1$ puisque a est la seule valeur de l'ensemble $X(\Omega)$ et qu'alors l'événement $(X = a)$ est certain.

Remarques.
- Cette situation est évidemment sans aucun intérêt probabiliste: c'est celle par exemple de la variable aléatoire égale au numéro obtenu dans le lancer d'un dé où toutes les faces portent le même numéro!
- On écrira plus simplement: pour tout réel a,
$$E(a) = a.$$

Définition XXII.5.22 Une variable aléatoire possédant une espérance nulle est dite *centrée*.

Exemple

Considérons un dé équilibré à 6 faces numérotées $1, 2, 3, -1, -2, -3$ soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu au cours d'un lancer. Alors
$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6} - 3 \times \frac{1}{6} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposition XXII.5.14 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles d'espérance finie. Alors la variable aléatoire
$$X - E(X)$$
est centrée.

En effet,
$$\begin{aligned} E(X - E(X)) &= E(X) - E(E(X)) \\ &= E(X) - E(X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proposition XXII.5.15 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles et *positives* et d'espérance nulle. Alors l'événement
$$X = 0$$
est presque sûr, c'est à dire
$$P(X = 0) = 1.$$

Démonstration 126

La propriété suivante est importante:

Théorème XXII.5.16 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et à valeurs réelles possédant une espérance. Si X et Y sont indépendantes, alors la variable aléatoire XY possède une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et toutes d'espérance finie, alors le produit

$$X_1 \times \dots \times X_n$$

possède une espérance et

$$E(X_1 \times \dots \times X_n) = E(X_1) \times \dots \times E(X_n).$$

La démonstration est admise.

Remarque. La réciproque est fausse: si $E(XY) = E(X)E(Y)$, les variables aléatoires X et Y peuvent ne pas être indépendantes. Par exemple, soit X la variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ avec

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

- Alors
$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$
  et prenons $Y = 1 - |X|$, si bien que
$$Y(\Omega) = \{0, 1\} \quad \begin{cases} P(Y = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ P(Y = 1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$
  (car $Y = 0$ a lieu si et seulement si $|X| = 1$ i.e. si et seulement si $X = 1$ *ou* $X = -1$).
- Il est clair que (X, Y) ne sont pas indépendantes! Par exemple, l'événement
$$(X = 1, Y = 1)$$
  qui a lieu si et seulement si $X = 1$ *et* $|X| = 0$ est impossible i.e.
$$P(X = 1, Y = 1) = 0$$
  alors que
$$P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$
  si bien que
$$P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1) \times P(Y = 1).$$
  Ou alors, on a évidemment
$$P_{Y=1}(X = 0) = 1$$
  (puisque $Y = 1$ est l'événement $X = 0$) et on a donc
$$P_{Y=1}(X = 0) \neq P(X = 0).$$
- Puisque $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$, on a $(XY)(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et l'événement $XY = 0$ est la réunion des événements:
  - $(X = -1, Y = 0)$ i.e. $(X = -1, |X| = 1)$ i.e. $(X = -1, X = -1)$ *ou* $(X = -1, X = 1)$; ce dernier étant impossible, $(X = -1, Y = 0)$ a lieu si et seulement si $X = -1$, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{1}{3}$,
  - $(X = 0, Y = 0)$ i.e. $(X = 0, |X| = 1)$, de probabilité nulle puisque impossible
  - $(X = 1, Y = 0)$ de probabilité $\frac{1}{3}$ (même raisonnement que dans le premier cas)
  - et $(X = 0, Y = 1)$ i.e. $(X = 0, |X| = 0)$ i.e. $(X = 0)$, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

  Puisque ces événements sont deux à deux incompatibles, l'événement $XY = 0$ a une probabilité de
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$
  et c'est donc l'événement certain.
- Les événements $XY = 1$ et $XY = -1$ sont alors impossibles.
- Ainsi
$$E(XY) = 0 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 0 = 0.$$
- On a donc $E(XY) = E(X)E(Y)$, bien que X et Y ne soient pas indépendantes.

Proposition XXII.5.17 *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* Soit X et Y deux variables aléatoires telles que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie. Alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

De plus, on a l'égalité

$$E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2)$$

si et seulement si la famille (X, Y) est presque sûrement liée, c'est à dire si et seulement s'il existe deux scalaires $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tels que l'événement $(\alpha X + \beta Y = 0)$ soit presque sûr.

Démonstration 127

5.2 Formule de transfert

Théorème XXII.5.18 ***Formule de transfert.*** Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles telle que

$$X(\Omega) = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles.
Alors la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente, auquel cas

$$E(f(X)) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n).$$

Remarques.

- Notons $Y = f(X)$; les valeurs prises par la variable aléatoire Y est la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où on a posé $y_n = f(x_n)$. La subtilité de la formule de transfert réside dans le fait que si elle existe, l'espérance de Y est
$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n P(Y = y_n),$$

i.e.
$$E(f(X)) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x_n)P(f(X) = f(x_n)).$$
On voit donc, grâce à la formule du transfert, qu'il n'est pas nécessaire de calculer la probabilité de l'événement $f(X) = f(x_n)$ (qui pourrait poser des problèmes, vu l'impossibilité en général de "simplifier" par f).

- Si x ne prend qu'un nombre fini de valeurs réelles, la somme en jeu est finie et il n'y a évidemment aucun problème de convergence.

Exemple

On considère une variable aléatoire X suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Démontrer que la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$ possède une espérance et la calculer.

- On a $Y = f(X)$ où
$$f : t \mapsto \frac{1}{t}.$$
D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} f(n)P(X = n)$ i.e.
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \times p(1-p)^{n-1}$$
est convergente, sa somme étant égale à $E(Y)$ en cas de convergence.

– On sait que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$
Notons alors S la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

– Les primitives de S sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions
$$x \mapsto -\ln(1-x) + C$$
et parmi celles-ci, celle qui s'annule en 0 est la fonction
$$x \mapsto -\ln(1-x).$$

– Par ailleurs, le théorème d'intégration terme à terme affirme que la primitive qui s'annule en 0 de
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
sur $]-1,1[$ est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

– C'est donc que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

- Puisque $1-p \in]0,1[$, on en déduit que Y possède une espérance et
$$\begin{aligned} E(Y) &= p\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-1}}{n} \\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n}}{n} \\ &= -\frac{p}{1-p} \times \ln(1-(1-p)) \\ &= -\frac{p\ln p}{1-p}. \end{aligned}$$

5.3 Espérance d'une variable aléatoire à valeurs entières positives

Proposition XXII.5.19 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors X possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} P(X \geq n)$ est convergente et si tel est le cas,
$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Démonstration 128

Remarque. Dans certains cas, cette formule permet de calculer l'espérance *avant* même d'avoir calculé la loi d'une variable aléatoire.

Exemple typique

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant respectivement les lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. On considère la variable aléatoire $U = \max(X,Y)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(X \geq n+1)$. En déduire $P(X \leq n)$. Déterminer de même $P(Y \leq n)$ et en déduire $P(U \leq n)$.
2. En déduire la valeur de $P(U \geq n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que U possède une espérance et la calculer.

Solution.

1. L'événement $X \geq n+1$ est la réunion des événements $(X = k)_{k\geq n+1}$:
$$(X \geq n+1) = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (X = k)$$

et comme ces événements sont deux à deux incompatibles,

$$\begin{aligned}
P(X \geq n+1) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_1(1-p_1)^{k-1} \\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} p_1(1-p_1)^{j} \\
&= p_1 \frac{(1-p_1)^n}{1-(1-p_1)} \\
&= (1-p_1)^n.
\end{aligned}$$

L'événement $P(X \leq n)$ étant son événement contraire,

$$\begin{aligned}
P(X \leq n) &= 1 - P(X \geq n+1) \\
&= 1 - (1-p_1)^n, \\
&= 1 - q_1^n
\end{aligned}$$

où $q_1 = 1 - p_1$. Remarquons que pour $n = 0$, ce résultat est cohérent: d'une part, la formule donne $1 - q_1^0 = 1 - 1 = 0$ et d'autre part, l'événement $X \leq 0$ est évidemment impossible, puisque les valeurs prises par une loi géométrique sont les entiers ≥ 1.
On a donc également

$$P(Y \leq n) = 1 - q_2^n,$$

où $q_2 = 1 - p_2$.
Ensuite, le plus grand des deux nombres x et y est inférieur à un nombre donné c si et seulement si x *et* y sont tous les deux inférieurs à c. On a donc

$$(U \leq n) \iff (X \leq n) \quad \text{et} \quad (Y \leq n).$$

Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a alors

$$\begin{aligned}
P(U \leq n) &= P(X \leq n) \times P(Y \leq n) \\
&= (1-q_1^n)(1-q_2^n).
\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \geq 1$, $P(U \geq n)$ est l'événement contraire de l'événement $P(U \leq n-1)$, d'où

$$\begin{aligned}
P(U \geq n) &= 1 - P(U \leq n-1) \\
&= 1 - \left(1 - q_1^{n-1}\right)\left(1 - q_2^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

3. D'après la formule ci-dessus, il est question d'étudier la nature de la série de terme général

$$P(U \geq n) = 1 - \left(1 - q_1^{n-1}\right)\left(1 - q_2^{n-1}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
1 - \left(1 - q_1^{n-1}\right)\left(1 - q_2^{n-1}\right) &= -q_1^n - q_2^n + q_1^n q_2^n \\
&= -q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n.
\end{aligned}$$

Or

$$q_1 \in]0,1[\,,\ q_2 \in]0,1[\implies q_1 q_2 \in]0,1[$$

si bien que chacune des séries géométriques

$$\sum_{n\geq 1} q_1^n,\ \sum_{n\geq 1} q_2^n,\ \sum_{n\geq 1} (q_1 q_2)^n$$

est convergente. Ainsi, la série

$$\sum_{n\geq 1} P(U \geq n)$$

est convergente et c'est pourquoi U possède une espérance. Enfin,

$$\begin{aligned}
E(U) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geq n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} q_1^n - \sum_{n=1}^{+\infty} q_2^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (q_1 q_2)^n \\
&= -\frac{q_1}{1-q_1} - \frac{q_2}{1-q_2} + \frac{q_1 q_2}{1 - q_1 q_2} \\
&= -\frac{1-p_1}{p_1} - \frac{1-p_2}{p_2} + \frac{1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}
\end{aligned}$$

6 Variance; écart-type, covariance

6.1 Définitions et premiers exemples

Approche de la notion de variance

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. La variance mesure l'écart moyen entre la variable et sa moyenne, c'est à dire son espérance:

- la variable aléatoire $X - E(X)$ (c'est la variable aléatoire X moins une constante) mesure la différence entre X et sa moyenne; mais la considération de l'espérance de cette variable aléatoire n'a aucun intérêt puisqu'elle est *centrée* i.e. a une espérance nulle, puisque

$$\begin{aligned}
E(X - E(X)) &= E(X) - E(E(X)) \\
&\quad \text{(linéarité de l'espérance)} \\
&= E(X) - E(X) \\
&\quad \text{(l'espérance d'une variable aléatoire constante est cette constante)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

  ce qui s'explique intuitivement par le fait qu'une variable aléatoire centrée s'écarte autant par la gauche que par la droite de sa moyenne.

- La variable aléatoire $(X - E(X))^2$ mesure donc elle aussi l'écart entre X et sa moyenne et alors

$$E\Big((X - E(X))^2\Big)$$

  mesure l'écart moyen entre X et sa moyenne: c'est la définition théorique de la variance.

- Et sous réserve d'existence des quantités en jeu,

$$\begin{aligned}
E\left((X - E(X))^2\right) &= E\left(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2\right) \\
&= E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E\left(E(X)^2\right) \\
&\quad \text{(linéarité de l'espérance: } -2E(X) \text{ est un scalaire)} \\
&= E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E(X)^2 \\
&\quad \text{(l'espérance d'une variable aléatoire constante est cette constante)} \\
&= E(X^2) - E(X)^2.
\end{aligned}$$

Définition XXII.6.23 Si la variable aléatoire X ne prend qu'un nombre fini de valeurs réelles $x_1 \dots, x_N$, la variance $V(X)$ de X est définie par

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N} x_n^2 P(X = x_n) - \left(\sum_{n=1}^{N} x_n P(X = x_n) \right)^2. \end{aligned}$$

Exemple

Dans le lancer d'un dé équilibré à 6 faces, soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu au cours d'un lancer. Alors on a calculé

$$E(X) = \frac{7}{2} \quad \Longrightarrow \quad E(X)^2 = \frac{49}{4}$$

et

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{91}{6}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

Variance d'une variable aléatoire discrète

Définition XXII.6.24 Soit X une variable aléatoire discrète réelle, prenant une suite infinie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de valeurs.
On dit que X possède une variance lorsque X^2 possède une espérance, c'est à dire lorsque la série

$$\sum x_n^2 P(X = x_n)$$

est convergente. Dans ce cas, X possède une espérance ainsi que $(X - E(X))^2$ et on définit la variance $V(X)$ de X comme l'espérance de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ et donc par la formule

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2\big).$$

La variance est aussi donnée par la formule de *König-Huygens*:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 P(X = x_n) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \right)^2. \end{aligned}$$

Démonstration 129

Premier exemple (loi géométrique)

On lance une pièce sans limitation du nombre de lancers. La probabilité d'obtenir pile est un réel donné $p \in]0, 1[$ et celle d'obtenir face est $1 - p$. Soit X la variable aléatoire égale au rang du premier pile obtenu. On va démontrer que X possède une variance et la calculer.

- On a vu que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1 - p) \times \dots \times (1 - p) \times p = (1 - p)^{n-1} \times p.$$
- On a déjà vu que X possède une espérance avec
$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \Longrightarrow \quad E(X)^2 = \frac{1}{p^2}.$$
- La variable X possède une variance si et seulement si la série
$$\sum_{n \geq 1} n^2 P(X = n)$$
est convergente, c'est à dire si et seulement si la série
$$\sum_{n \geq 1} n^2 (1 - p)^{n-1} \times p$$
est convergente. Or on sait que (série géométrique):
  - $\forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1 - x}.$
  - Par dérivation terme à terme:
  $$\forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1 - x} \right) = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$
  - En notant $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ on a donc $g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ et par une nouvelle dérivation terme à terme,
  $$\forall x \in]-1, 1[, \ g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$$
  et donc après calculs:
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x + 1}{(1 - x)^3}.$$
  - En prenant $x = 1 - p$, on a bien $x \in]-1, 1[$, ce qui prouve que la série
  $$\sum_{n \geq 1} n^2 (1 - p)^{n-1}$$
  est convergente et
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1 - p)^{n-1} = \frac{(1 - p) + 1}{(1 - (1 - p))^3} = \frac{2 - p}{p^3}.$$

  Ainsi, X possède une variance et
  $$E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1 - p)^{n-1} \times p = p \times \frac{2 - p}{p^3} = \frac{2 - p}{p^2}$$
  puis
  $$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{2 - p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1 - p}{p^2}. \end{aligned}$$

Deuxième exemple

Vérifier que l'on définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

La variable aléatoire X possède-t-elle une variance?

Solution. La formule ci-dessus définit une variable aléatoire si et seulement si la série

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

est à termes positifs, convergente et de somme 1.

- Elle est bien à termes positifs puisque $n+1 \geq n \implies (n+1)^2 \geq n^2 \implies \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$.
- Pour tout $N \geq 1$, on a par télescopage:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(N+1)^2}.$$

  On en déduit

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

  ce qui est la preuve que la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ est convergente et de somme 1.

On a bien affaire à une loi de variable aléatoire.
Ensuite, X possède une variance si et seulement si la série

$$\sum_{n^2\geq 1} n \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
n^2 \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) &= n^2 \times \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} \\
&= \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{n^2} \\
&= \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

et on sait que la série (de Riemann) $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.
Ainsi, X ne possède pas de variance.

Notons cette proposition, qui peut être utile dans de nombreux contextes où le calcul de la variance s'appuie sur l'expression de la dérivée seconde d'une série entière:

Proposition XXII.6.20 Soit X une variable aléatoire réelle discrète et possèdant une variance. Alors

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2.$$

En particulier, si X prend des valeurs entières,

$$V(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) \quad + E(X) - (E(X))^2.$$

En effet,

$$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$$

par linéarité de l'espérance et le résultat s'ensuit.

Exemple typique

Reprenons une variable aléatoire X suivant la loi géométrique de paramètre p, c'est à dire

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= \mathbb{N}^* \\
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) &= p(1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

où $p \in]0,1[$ est donné.

- On a déjà calculé $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Considérons la série

$$\sum_{n\geq 1} n^2 P(X=n),$$

  c'est à dire la série de terme général

$$u_n = pn^2(1-p)^{n-1}.$$

  On a

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^2(1-p)^n}{n^2(1-p)^{n-1}} \\
&= (1-p)\frac{(n+1)^2}{n^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} (1-p)\frac{n^2}{n^2} \\
&= (1-p)
\end{aligned}$$

  et puisque $0 < 1-p < 1$, il résulte de la règle de d'Alembert que la série $\sum u_n$ converge, ce qui garantit l'existence théorique de la variance.
- Calculons ensuite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)p(1-p)^{n-1}.$$

  On sait que (série géométrique):

  - $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$
  - Par dérivation terme à terme:

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

    et par une nouvelle dérivation terme à terme,

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) \\
&= \frac{2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

    si bien que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

En prenant $x = 1 - p$, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)p(1-p)^{n-1} &= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^3}\\ &= \frac{2p(1-p)}{p^3}\\ &= \frac{2(1-p)}{p^2}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}V(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) + E(X) - (E(X))^2\\ &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\\ &= \frac{2(1-p)+p-1}{p^2}\\ &= \frac{1-p}{p^2}.\end{aligned}$$

Définition XXII.6.25 ***Écart-type.*** Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles possédant une variance. L'écart-type de X est le réel $\sigma(X)$ défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque. C'est en réalité la véritable mesure de l'écart entre une variable et sa moyenne (car l'écart-type se mesure dans la même unité que la variable aléatoire X).

Propriétés de la variance

Proposition XXII.6.21 ***Variance d'une constante.*** Soit X la variable aléatoire constante égale à a i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$. Alors $V(X) = 0$.

En effet, X est constante égale à a donc X^2 est constante égale à a^2 et puisque l'espérance d'une variable aléatoire constante est la constante elle même:

$$E(X) = a,\ E(X)^2 = a^2,\ E(X^2) = a^2$$

d'où

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2\\ &= a^2 - a^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ce résultat est logique: la variance a pour effet de mesurer le carré de l'écart moyen entre la variable et sa moyenne; ici, la variable est constante: l'écart est en tout point nul.

Proposition XXII.6.22 Pour toute variable aléatoire X possédant une variance et tous réels a et b, $aX + b$ possède un variance et

$$V(aX+b) = a^2V(X).$$

En particulier,

$$V(aX) = a^2V(X), \qquad V(X+b) = V(X).$$

Ce résultat est logique: la variance a pour effet de mesurer le carré de l'écart moyen entre la variable et sa moyenne: multiplier X par a a pour effet de multiplier toutes les valeurs prises par X par a et donc sa moyenne aussi; l'écart moyen s'en trouve multiplié par a et son carré par a^2. Enfin, $X + b$ ne fait que décaler X de b et sa moyenne d'autant : cela n'affecte pas les écarts.

Démonstration. On a $(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$. Par hypothèse, X^2 a une espérance et alors par théorème, X possède une espérance et la variable aléatoire constante b également. Donc $(aX+b)^2$ aussi et alors par linéarité de l'espérance:

$$\begin{aligned}E((aX+b)^2) &= E(a^2X^2 + 2abX + b^2)\\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + E(b^2)\\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2\end{aligned}$$

puisque l'espérance d'une constante est la constante elle-même. De même,

$$\begin{aligned}(E(aX+b))^2 &= (aE(X)+b)^2\\ &= a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}E((aX+b)^2) - (E(aX+b))^2 &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E(X)^2 - 2abE(X) - b^2\\ &= a^2E(X^2) - a^2E(X)^2\\ &= a^2V(X).\end{aligned}$$

Ensuite, il suffit de prendre $b = 0$ dans la propriété précédente:

$$V(aX+b) = a^2V(X) \quad\Longrightarrow\quad V(aX) = a^2V(X).$$

Et enfin de prendre $a = 1$:

$$V(aX+b) = a^2V(X) \quad\Longrightarrow\quad V(X+b) = V(X+b).$$

Proposition XXII.6.23 Soit X une variable aléatoire réelle discrète possédant une variance nulle. Alors X est presque sûrement constante.

Démonstration 130

Proposition XXII.6.24 Soit X une variable aléatoire réelle discrète possédant une variance non nulle. Alors la variable aléatoire

$$\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est *centrée réduite* i.e. d'espérance nulle et de variance égale à 1.

En effet, des propriétés de l'espérance et de la variance, on a

$$\begin{aligned}E\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) &= \frac{1}{\sigma(X)}E(X - E(X))\\ &= 0\end{aligned}$$

(car on a vu que la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée) et

$$\begin{aligned}V\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) &= \frac{1}{\sigma^2(X)}V(X - E(X))\\ &= \frac{1}{V(X)}V(X)\\ &= 1.\end{aligned}$$

6.2 Variance d'une somme; covariance

Théorème XXII.6.25 Soit X et Y deux variables aléatoires possédant chacune une variance. Alors $X+Y$ possède une variance et

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2E(XY) - 2E(X)E(Y).$$

Démonstration 131

Remarquons que la variance d'une somme n'est pas la somme des variances.

Définition XXII.6.26 Soit X et Y deux variables aléatoires possédant chacune une variance. Alors le produit $(X-E(X))(Y-E(Y))$ possède une espérance et puisque X^2 et Y^2 on définit la covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$ par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big).$$

Démonstration 132

Remarque. Intuitivement, la covariance mesure les variations simultanées de deux variables aléatoires: elle sera positive lorsque les écarts entre les variables et leurs moyennes ont tendance à être de même signe, négative dans le cas contraire.

Proposition XXII.6.26 *(Contexte précédent).* On a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Démonstration 133

Il en résulte :

Proposition XXII.6.27 Soit X et Y deux variables aléatoires possédant chacune une variance. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0, \qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Définition XXII.6.27 Deux variables aléatoires possédant chacune une variance et dont la covariance est nulle sont dites *décorrélées.*

Deux variables indépendantes sont décorrélées, mais la réciproque est fausse: on a exhibé plus haut dans ce chapitre deux variables non indépendantes X et Y vérifiant $E(XY) = E(X)E(Y)$ i.e. de covariance nulle.

Proposition XXII.6.28 ***Variance d'une somme finie.*** Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires possédant chacune une variance. Alors $X_1 + \ldots + X_n$ possède une variance et

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \; + \; 2 \sum_{1 \le i < j \le j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

En particulier si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux décorrélées, alors

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Remarques.

- La démonstration, inintéressante, généralise le cas de la somme de deux variables et repose essentiellement sur la linéarité de l'espérance.
- On a adopté la convention d'écriture habituelle: la somme est étendue sur tous les couples (i,j) d'entiers tels que
$$1 \le i < j \le n.$$
Cela garantit, dans la somme, la présence d'une fois et une seule d'un terme tel que
$$\mathrm{Cov}(X_2, X_5)$$
puisque
$$\mathrm{Cov}(X_5, X_2)$$
n'apparaîtra pas.

7 Séries génératrices

Théorème XXII.7.29 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. La série génératrice de X est la série entière G_X définie par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$

- Son rayon de convergence R_X vaut au moins 1.
- Son domaine de définition est au moins l'intervalle $[-1,1]$.
- La fonction G_X est de classe C^∞ au moins sur l'intervalle $]-1,1[$, elle est continue sur $[-1,1]$ et vérifie $G_X(1) = 1$.
- Pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, $G_X(t)$ est l'espérance de la variable aléatoire t^X:
$$G_X(t) = E\left(t^X\right).$$

.

Preuve.

- Pour tout $t \in [-1,1]$, on a
$$|P(X=n)t^n| \le P(X=n)$$
et comme par définition d'une loi de variable aléatoire, la série $\sum P(X=n)$ est convergente (et de somme 1), on déduit du théorème de comparaison par majoration que la série $\sum |P(X=x_n)t^n|$ est convergente.
- La série entière $\sum P(X=x_n)t^n$ est donc déjà absolument convergente sur l'intervalle $[-1,1]$: l'intervalle de convergence est donc au moins l'intervalle $]-1,1[$ et c'est pourquoi $R_X \ge 1$.

- Puisque la série la série $\sum P(X=n)$ est convergente, la série entière G_X converge en $t=1$ mais aussi en $t=-1$ par absolue convergence. C'est pourquoi son intervalle de définition est au moins l'intervalle $[-1,1]$ et par théorème de continuité des séries entières, G_X est continue sur cet intervalle.
- Enfin, puisque
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)=1,$$
c'est que $G_X(1)=1$.
- Soit $t\in\,]-R_X,R_X[$ et f l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $f(t)=t^n$. Dans la mesure où la série
$$\sum_{n\geq 0} t^n P(X=n)$$
converge, il résulte du théorème de transfert que la variable aléatoire $Y=t^X$ possède une espérance et que
$$\begin{aligned} E(t^X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \\ &= G_X(t). \end{aligned}$$

Remarque. Dans le cas d'une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs entières, soit N la valeur la plus élevée prise par X; les événements $(X=n)$ sont alors impossibles pour tout $n\geq N+1$ et on a donc $P(X=n)=0$ pour tout $n\geq N+1$. Il en résulte que la série génératrice de X
$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} P(X=n)t^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(X=n)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} P(X=n)t^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 0\times t^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} P(X=n)t^n \end{aligned}$$
est un polynôme; la série génératrice est donc définie sur tout $\mathbb{R}$ i.e. $R_X=+\infty$.

Exemples

- Soit X la variable aléatoire suivant une loi de Binomiale de paramètres $(3,\frac{1}{4})$:
$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\},\quad \forall k\in\{0,1,2,3\}\qquad P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\times\left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}$$
$$\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64} \\ P(X=1)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64} \\ P(X=2)=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64} \\ P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64} \end{array}\right.$$
et alors la série génératrice G_X de X est donnée par
$$G_X(t)=\frac{27}{64}+\frac{27}{64}t+\frac{9}{64}t^2+\frac{1}{64}t^3.$$
- Soit $\lambda>0$ et X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ:
$$\forall n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$
Alors pour tout réel t,
$$\begin{aligned} t^nP(X=n) &= t^ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(t\lambda)^n}{n!} \end{aligned}$$
et dans la mesure où
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{x=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,$$
la série
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(t\lambda)^n}{n!}$$
converge pour tout $t\in\mathbb{R}$ i.e. la série génératrice de X a un rayon de convergence infini et de surcroît:
$$\begin{aligned} \forall t\in\mathbb{R},\ G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^nP(X=n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda(t-1)}. \end{aligned}$$

Espérance et série génératrice

Théorème XXII.7.30 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors X possède une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1, auquel cas
$$E(X)=G'_X(1).$$
Ce résultat est notamment garanti lorsque le rayon de convergence R_X de la série génératrice de X vérifie $R_X>1$.

Démonstration 134

Exemple

Reprenons une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, où on a établi que
$$\forall t\in\mathbb{R},\ G_X(t)=e^{\lambda(t-1)}.$$

Il est trivial que G_X est dérivable en 1 (ce que confirme d'ailleurs le fait que G_X a un rayon de convergence infini) et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ G'_X(t) &= \lambda e^{\lambda(t-1)} \\ \Longrightarrow G'_X(1) &= \lambda. \end{aligned}$$

De ce fait, l'espérance de la loi de Poisson de paramètre λ vaut λ.

Variance et série génératrice

Théorème XXII.7.31 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors X possède une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1, auquel cas

$$G''_X(1) = E\big(X(X-1)\big).$$

Ce résultat est notamment garanti lorsque le rayon de convergence R_X de la série génératrice de X vérifie $R_X > 1$.

La démonstration est admise mais immédiate lorsque $R_X > 1$, puisque le théorème de dérivation terme à terme appliqué deux fois donne, pour tout $t \in]-R_X, R_X[$:

$$\begin{aligned} G'_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)t^{n-1} \\ G''_X(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2} \end{aligned}$$

et donc

$$G''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$$

qui est précisément l'expression de l'espérance de $X(X-1)$.

Exemple

Reprenons une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, où on a établi que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Il est trivial que G_X est deux fois dérivable en 1 (ce que confirme d'ailleurs le fait que G_X a un rayon de convergence infini) et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ G'_X(t) &= \lambda e^{\lambda(t-1)} \\ G''_X(t) &= \lambda^2 e^{\lambda(t-1)} \\ \Longrightarrow G'_X(1) &= \lambda \\ \Longrightarrow G''_X(1) &= \lambda^2 \end{aligned}$$

et donc

$$E(X(X-1)) = \lambda^2.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= E(X^2 - X) \\ &= E(X^2) - E(X) \end{aligned}$$

et comme on sait que

$$E(X) = \lambda,$$

c'est que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

et finalement,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

De ce fait, la variance de la loi de Poisson de paramètre λ vaut λ.

Théorème XXII.7.32 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors le rayon de convergence de la série génératrice $X+Y$ est un réel $R' \geq R = \inf\{R_X, R_Y\}$ et

$$\forall t \in]-R, R[\,,\ G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t).$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_N$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors le rayon de convergence de la série génératrice de la somme

$$X_1 + \ldots + X_N$$

est un réel $R' \geq R = \inf\{R_{X_1}, \ldots, R_{X_N}\}$ et

$$\forall t \in]-R, R[\,,\ G_{X_1+\ldots+X_N}(t) = G_{X_1}(t) \times \ldots \times G_{X_N}(t).$$

Démonstration 135

Proposition XXII.7.33 La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X, autrement dit, la connaissance de G_X permet de déterminer la loi de X:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

et si l'on connaît le développement de G_X en série entière:

$$\forall t \in]-G_X, G_X[\,,\ \ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(X=n) = a_n.$$

Ainsi, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivent la même loi si et seulement si elles possèdent la même série génératrice.

Démonstration. Cela résulte du théorème de dérivation terme à terme:

On considère une série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$. Alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

et on a en conséquence

$$\forall x\in\,]-R,R[,\quad S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

On dit alors que S est égale à sa *série de Taylor* sur l'intervalle $]-R,R[$.

si bien que de

$$G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)t^n$$

et de

$$G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}t^n,$$

on déduit

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ P(X=n)=\frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

En conséquence, si deux variables aléatoires X et Y ont la même série génératrice:

$$\forall t\in\,]-R_X,R_X[,\ \ G_X(t)=G_Y(t),$$

alors par dérivations successives,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ \forall t\in\,]-R_X,R_X[,\ \ G_X^{(n)}(t)=G_Y^{(n)}(t),$$

et en particulier:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ G_X^{(n)}(0)=G_Y^{(n)}(0)$$

et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ P(X=n)=P(Y=n),$$

ce qui est la preuve que X et Y suivent la même loi.

Premier exemple

Si une variable aléatoire X a pour série génératrice

$$G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}t^n,$$

c'est donc que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Remarquons que l'on a effectivement affaire à une loi de probabilité conformément à la proposition XXII.2.6, puisque

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\geq 0$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Deuxième exemple

Si la série génératrice est donnée sous la forme d'une fonction, il suffit de développer cette fonction en série entière pour se retrouver dans la situation précédente. Par exemple, si

$$G_X(t)=\frac{3t}{4-t},$$

on développe G_X en série entière comme suit:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \frac{3t}{4-t}=\frac{3t}{4\left(1-\frac{t}{4}\right)}=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{4}\right)^n \quad\text{lorsque } \left|\frac{t}{4}\right|<1\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{4}\times\frac{1}{4^n}\times t^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{4^n}\times t^n \end{aligned}$$

et du théorème d'identification des séries entières, on déduit que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(X=n)=\frac{3}{4^n}$$

et on vérifie que l'on a effectivement affaire à une loi de probabilité conformément à la proposition XXII.2.6, puisque

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{3}{4^n}\geq 0$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{4^n}=3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=1.$$

8 Lois usuelles: résultats complets

8.1 Loi uniforme

Théorème XXII.8.34 Une variable aléatoire X suit une loi uniforme lorsque $X(\Omega)$ prend un ensemble fini de valeurs avec équiprobabilité,

- i.e. lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini $\{x_1,\dots,x_n\}$ de cardinal n et que $P(X=x_i)=\frac{1}{n}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.
- Pour tout $U\in X(\Omega)$ on a alors
$$P(X\in U)=\frac{\mathrm{Card}(U)}{n}.$$
- Lorsque $X(\Omega)=\{1,2,\dots,n\}$,
$$E(X)=\frac{n+1}{2},\quad V(X)=\frac{n^2-1}{12}$$
et sa série génératrice est donnée par
$$\forall t\in\mathbb{R},\ G_X(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}t^k=\frac{1}{n}(t+\ldots+t^n).$$

La démonstration est assez immédiate et repose, pour la variance, sur le fait que

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Remarque. Cette variable modélise typiquement le nombre de points obtenu sur une face lors du lancer d'un dé non biaisé ou du numéro obtenu lors du tirage d'une boule dans une urne comportant n boules numérotées $1,\dots,n$; bref, l'équiprobabilité.

8.2 Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \{0,1\}$ avec $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

- On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.
- Espérance et variance sont données par

$$E(X) = p, \quad V(X) = p(1-p).$$

- Sa série génératrice est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p) + pt = q + pt.$$

La démonstration est complètement évidente et résulte immédiatement des définitions.

Remarque. C'est une loi modélisant typiquement une expérience à deux issues possibles, communément appelées "succès" et "échec".

8.3 Loi binomiale

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque X est la somme de n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ suivant la même loi $\mathcal{B}(p)$.

- On note alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
- On a donc $X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}$ et pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- Espérance et variance sont données par

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p).$$

- Sa série génératrice est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (1-p+pt)^n = (q+pt)^n.$$

Démonstration 136

Remarque. La loi binomiale modélise typiquement le nombre de succès obtenus au cours de la répétition de manière indépendante d'épreuves de Bernoulli, telle le nombre de piles obtenu lors de lancers successifs d'une pièce de monnaie.

8.4 Loi géométrique

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$

- On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.
- Espérance et variance sont données par

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- Sa série génératrice est donnée par

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[,\ G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t} = \frac{pt}{1-qt}.$$

Démonstration 137

Remarque. La loi géométrique peut être interprétée comme le rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

8.5 Loi de Poisson; son lien avec la loi binomiale

D'où vient la loi de Poisson? La loi de Poisson est la loi dite des "événements rares"; elle décrit la probabilité du nombre d'occurrences d'un événement dans un intervalle de temps donné lorsque ces événements se produisent avec une fréquence moyenne connue (fruit d'une observation statistique), indépendamment les uns des autres et lorsque la probabilité d'occurrence est proportionnelle à la durée d'observation:

- en télécommunications: nombre d'appels téléphoniques reçus par minute, nombre d'accès à un serveur web par minute,
- en sismologie: nombre de tremblements de terre de grande amplitude par an dans une région donnée,
- en biologie: nombre de décès par an dans une certaine tranche d'âge,
- en sports: nombre de buts marqués dans un sport de balle...

Si λ est le nombre moyen d'occurrences d'un certain phénomène sur une période de temps T donnée (une heure, une année...), alors la variable aléatoire X égale au nombre d'occurrences de ce phénomène pendant la période de temps T suit une loi de Poisson de paramètre λ. Voici une explication:

- Soit donc un événement aléatoire $\mathcal{E}$ dont la probabilité d'apparition p sur un petit intervalle de temps Δt (destiné à tendre vers 0) est proportionnelle à Δt: $p = c\Delta t$ et soit indépendante de la période considérée (la probabilité d'apparition est la même entre minuit et minuit une qu'entre midi et midi une).
- On suppose en outre que $\mathcal{E}$ apparaît au plus une fois sur chaque intervalle de temps Δt.
- Considérons à présent un (grand) laps de temps T, que l'on subdivise en n petits intervalles Δt:

$$T = n\Delta t,$$

et notons X la variable aléatoire mesurant le nombre d'apparitions de $\mathcal{E}$ pendant cet intervalle de temps.

- Compte-tenu des hypothèses, à savoir $\mathcal{E}$ apparaît 0 ou 1 fois dans chaque intervalle de temps Δt, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p=\frac{\lambda}{n}$ où $\lambda=cT$ (car $\Delta t=\frac{T}{n}$ donc $p=c\Delta t=\frac{cT}{n}$). Ainsi

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\times\frac{\lambda^k}{n^k}\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

- Lorsque n tend vers $+\infty$, le facteur

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

tend vers 1 ainsi que le facteur $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$.

- Enfin,

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right] \\ &= \exp\left[n\left(-\frac{\lambda}{n}+o(\frac{1}{n})\right)\right] \\ &= \exp\left[-\lambda+o(1)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

C'est pourquoi

$$P(X=k)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Définition XXII.8.28 Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ lorsque $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

- On note alors $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$.
- Espérance et variance sont données par

$$E(X)=\lambda,\quad V(X)=\lambda.$$

- Sa série génératrice est donnée par

$$\forall t\in\mathbb{R},\ G_X(t)=e^{\lambda(t-1)}.$$

Démonstration 138

9 Inégalités probabilistes: Markov et Bienaymé-Tchebychev

Outre leurs intérêts théoriques, surtout pour aboutir à la loi faible des grands nombres, ces inégalités probabibilistes permettent d'obtenir des estimations de probabilités à l'arrache.

Théorème XXII.9.35 ***Inégalité de Markov.*** Soit X une variable aléatoire réelle discrète possédant une espérance. Alors pour tout réel $t>0$,

$$P(|X|\geq t)\quad\leq\quad\frac{E(|X|)}{t}.$$

Démonstration. Notons

$$X(\Omega)=\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}.$$

On peut diviser cet ensemble en deux parties: le sous-ensemble E_1 correspondant aux valeurs x_n vérifiant $|x_n|<t$ le sous-ensemble E_2 correspondant aux valeurs x_n vérifiant $|x_n|\geq t$.

On a alors

$$E(|X|)=\sum_{x_n\in E_1}|x_n|P(|X|=|x_n|)+\sum_{x_n\in E_2}|x_n|P(|X|=|x_n|)$$

et puisque

$$\sum_{x_n\in E_1}|x_n|P(|X|=|x_n|)\geq 0,$$

on a

$$E(|X|)\geq\sum_{x_n\in E_2}|x_n|P(|X|=|x_n|)$$

et puisque dans cette somme, tous les $|x_n|$ sont $\geq t$:

$$\begin{aligned} E(|X|) &\geq \sum_{x_n\in E_2}tP(|X|=|x_n|) \\ &= t\sum_{x_n\in E_2}P(|X|=|x_n|). \end{aligned}$$

Mais par définition même de E_2, l'événement $(|X|\geq t)$ est la réunion des événements $(|X|=x_n)_{x_n\in E_2}$:

$$(|X|\geq t)=\bigcup_{x_n\in E_2}(|X|=|x_n|)$$

et comme ces événements sont deux à deux incompatibles,

$$P(|X|\geq t)=\sum_{x_n\in E_2}P(|X|=|x_n|),$$

d'où

$$E(|X|)\geq tP(|X|\geq t),$$

d'où le résultat.

Remarques.

- Cette inégalité a surtout des vertus théoriques: elle permettra notamment d'établir l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis la loi faible des grands nombres.
- Dans la pratique, elle permet d'obtenir des estimations de probabilités "à l'arrache".

Exemple

Dans une urne il y a trois boules: deux noires et une blanche. On tire une boule successivement avec remise. Donner une estimation de la probabilité de devoir attendre plus de 60 tirages avec remise pour obtenir pour la première fois la boule blanche

Réponse avec l'inégalité de Markov.

- Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. Il est donc question de déterminer une estimation de l'événement $(X\geq 60)$.

- On sait que $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{3})$ et on a donc $E(X) = 3$.
- L'inégalité de Markov donne alors

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &\leq \frac{E(X)}{60} \\ &= \frac{1}{20} = 0,05. \end{aligned}$$

La probabilité est donc inférieure à $0,05$.

Réponse exacte. L'événement $(X \geq 60)$ est la réunion des événements $X = k$, $k \geq 60$:

$$(X \geq 60) = \bigcup_{k=60}^{+\infty} (X = k)$$

et comme ces événements sont deux à deux incompatibles,

$$P(X \geq 60) = \sum_{k=60}^{+\infty} P(X = k).$$

Puisque $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{3})$,

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= \sum_{k=60}^{+\infty} P(X = k) \\ &= \sum_{k=60}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{(\frac{2}{3})^{59}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{59} \\ &\approx 4 \times 10^{-10}. \end{aligned}$$

L'estimation donnée par l'inégalité de Markov est donc très très médiocre.

Autre exemple: une inégalité de concentration

En revanche, dans les situations où l'on ne connaît pas la loi d'une variable aléatoire mais seulement sa valeur moyenne, l'inégalité de Markov est utile pour obtenir une *inégalité de concentration*, c'est à dire une estimation de la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa valeur moyenne. Par exemple, la moyenne obtenue à un certain examen est de 9 sur 20. Donner une majoration de la probabilité qu'une copie prise au hasard ait une note supérieure à 15.

- Soit X la variable aléatoire égale à la note d'une copie choisie aléatoirement.
- On a donc $E(X) = 9$ et l'inégalité de Markov donne alors (en remarquant que $|X| = X$):

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &\leq \frac{E(X)}{15} \\ &= \frac{9}{15} \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Théorème XXII.9.36 ***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*** Soit X une variable aléatoire réelle discrète possédant une variance. Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration 139

Exemple

On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. On note S_n le nombre de 1 obtenus au cours de ces n lancers.

1. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Soit $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ la proportion de 1 obtenus au cours de ces n lancers. Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
3. Quelle est la plus petite valeur du nombre n de lancers à effectuer permettant d'affirmer, pour être sûr au moins à 95%, que la proportion du nombre de 1 obtenus soit entre $\frac{1}{6} - \frac{1}{100}$ et $\frac{1}{6} + \frac{1}{100}$?

Solution.

1. Bien entendu, S_n suit la loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{6})$. On a alors

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \frac{n}{6} \\ V(S_n) &= n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{5n}{36}. \end{aligned}$$

2. Par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} E(F_n) &= E\left(\frac{X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} E(X_n) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

et par propriété de la variance,

$$\begin{aligned} V(F_n) &= V\left(\frac{X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V(X_n) \\ &= \frac{5}{36n}. \end{aligned}$$

3. L'événement "F_n est entre $\frac{1}{6} - \frac{1}{100}$ et $\frac{1}{6} + \frac{1}{100}$" est l'événement

$$\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{100}$$

et "être sûr au moins à 95%" que cet événement se produise est la probabilité

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{100}\right) \geq 0,95.$$

On va passer par l'événement contraire, à savoir

$$\left|F_n - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{100}.$$

Dans la mesure où $\frac{1}{6} = E(F_n)$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right) \leq \frac{5 \times 10^4}{36n}$$

et qu'évidemment

$$\left|F_n - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{100} \implies |F_n - \geq 16| \geq \frac{1}{100},$$

on a

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{100}\right) \leq P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right)$$

et en conséquence,

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{100}\right) \leq \frac{5 \times 10^4}{36n}$$

si bien qu'en passant par l'événement contraire,

$$\begin{aligned} P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{100}\right) &= 1 - P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{100}\right) \\ &\geq 1 - \frac{5 \times 10^4}{36n}. \end{aligned}$$

Pour que $P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{100}\right) \geq 0,95$, il suffit donc que

$$1 - \frac{5 \times 10^4}{36n} \geq 0,95$$

i.e.

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{5 \times 10^4}{(1 - 0,95) \times 36} \\ &\approx 2778. \end{aligned}$$

Donc 2778 lancers suffisent.

Autre exemple: une inégalité de concentration

On reprend la variable aléatoire égale à la note d'une copie choisie aléatoirement dans un paquet de copies dont la moyenne est 9. Mais on suppose de plus que sa variance vaut 3. Donner une majoration de la probabilité qu'une copie prise au hasard ait une note supérieure à 15.

- Puisque $15 = 9 + 6$, on remarque que

$$X \geq 15 \implies X - E(X) \geq 6 \implies |X - E(X)| \geq 6$$

et en conséquence,

$$P(X \geq 15) \leq P\left(|X - E(X)| \geq 6\right).$$

- D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P\left(|X - E(X)| \geq 6\right) \leq \frac{V(X)}{6^2}$$

donc ici

$$P\left(|X - E(X)| \geq 6\right) \leq \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

et c'est pourquoi

$$P(X \geq 15) \leq \frac{1}{12}.$$

On remarque que cette majoration est bien plus fine que la majoration $P(X \geq 15) \leq \frac{3}{5}$ obtenue par l'inégalité de Markov; c'est normal, étant donné qu'en connaissant sa variance, on en sait plus sur la variable aléatoire.

10 Loi faible des grands nombres

La loi des grands nombres est un théorème ayant pour cadre la répétition d'une même expérience un grand nombre de fois; il stipule que la moyenne de tous les résultats obtenus à l'issue de ces expériences est proche de l'espérance de cette expérience.
Typiquement, l'espérance d'un lancer de dé est

$$\frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5.$$

La loi des grands nombres affirme qu'en lançant un dé un grand nombre de fois, la moyenne des lancers tendra vers $3,5$.

Théorème XXII.10.37 ***Loi faible des grands nombres.*** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. c'est à dire une suite de variables aléatoires réelles deux à deux indépendantes et de même loi, admettant une variance.

- On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad m = E(X_1), \quad \sigma = \sigma(X_1).$$

- Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

- En conséquence,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration 140

Remarques.

- Toutes les lois $(X_n)_{n\geq 1}$ suivent donc la loi de X_1.
- La variable aléatoire S_n est la somme des résultats obtenus au cours de la réalisation des expériences $X_1, \ldots, X_n$ et $\frac{S_n}{n}$ en est donc la moyenne.

  Ainsi, $\frac{S_n}{n}$ simule la moyenne des résultats obtenus au cours de n répétitions de l'expérience X_1.
- L'événement

$$\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon$$

  est donc l'événement "le résultat moyen obtenu en répétant n fois l'expérience X_1 s'écarte de l'espérance de X_1 d'au moins ε".
- Il faut bien comprendre le sens au moins intuitif de

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  La probabilité que cette moyenne fasse un écart donné, aussi petit soit-il, avec l'espérance tend vers 0 lorsque le nombre de répétitions tend vers l'infini.
- Prenons un tout petit ε, comme $\varepsilon = 10^{-6}$ et restons dans l'expérience du lancer de dé (on peut évidemment transposer le raisonnement à toute autre situation), où S_n représente la somme obtenue au bout de n lancers, $\frac{S_n}{n}$ est la moyenne des lancers et $m = 3,5$ est l'espérance d'un lancer. Alors

$$\left|\frac{1}{n}S_n - 3,5\right| \geq 10^{-6}$$

est l'événement: "la moyenne des points obtenus en lançant le dé n fois s'écarte de $3,5$ de plus de 10^{-6}." Remarquons que cet écart n'est pas énorme. Eh bien le fait que

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - 3,5\right| \geq 10^{-6}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

nous dit que pour les grandes valeurs de n, cette probabilité est très très faible.

Premier exemple

On lance une pièce équilibrée $n = 1000$ fois. Quelle est la probabilité d'obtenir entre 450 et 550 fois pile?

Réponse.

- Pour tout $i \in [\![1, 1000]\!]$ soit X_i définie par
  - $X_i = 1$ si on obtient pile
  - $X_i = 0$ si on obtient face.

  Alors $X_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et

$$E(X_i) = \frac{1}{2}, \quad \sigma(X_i) = \frac{1}{2}.$$

- Soit S_n la variable aléatoire "nombre de piles obtenus":

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

  On a

$$\begin{aligned} 450 \leq S_n \leq 550 \quad &\iff \quad 500 - 50 \leq S_n \leq 500 + 50 \\ &\iff \quad \frac{1}{2} - 0,05 \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2} + 0,05 \\ &\iff \quad \left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

  avec $\varepsilon = 0,05$.

- Les événements

$$\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \leq \varepsilon, \quad \left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon$$

  étant complémentaires,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \leq \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon\right) \geq 1$$

  et puisque

$$\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon,$$

  on a

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon\right) \;\leq\; P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \leq \varepsilon\right)$$

  et dans la mesure où, d'après la loi des grands nombres,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

  on a

$$1 - P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

  et donc

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \leq \varepsilon\right) \quad &\geq \quad 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \\ &= \quad 1 - \frac{\frac{1}{4}}{1000 \times 25 \times 10^{-4}} \\ &= \quad 0,9. \end{aligned}$$

- La probabilité d'obtenir entre 450 et 550 piles en lançant la pièce 1000 fois est donc supérieure à $0,9$.

- ***Remarque.*** Le nombre Z de piles obtenus au cours de cette expérience suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 1000$ et $p = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, 1000]\!],\ P(Z = k) \quad &= \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \quad \binom{1000}{k} \times \frac{1}{2^{1000}}. \end{aligned}$$

  L'événement A: "obtenir entre 450 et 550 piles en lanant la pièce 1000 fois" est la réalisation de l'un des événements

$$(Z = 450),\ (Z = 451),\ \ldots,\ (Z = 550)$$

  i.e.

$$A = \bigcup_{k=450}^{550} (Z = k)$$

  et comme les événements listés dans cette union sont deux à deux incompatibles,

$$\begin{aligned} P(A) \quad &= \quad \sum_{k=450}^{550} P(Z = k) \\ &= \quad \sum_{k=450}^{550} \binom{1000}{k} \times \frac{1}{2^{1000}} \\ &\approx \quad 0,9986 \end{aligned}$$

  (Maple). L'application de la loi, plutôt que des estimations qui ne reposent que sur les valeurs de la variance et de l'espérance, donne des résultats beaucoup plus précis.

Deuxième exemple

On effectue un sondage à propos d'un référendum.

- Soit p la proportion (inconnue!) de votants sur la totalité du corps électoral répondant "oui".
- C'est quoi faire un bon sondage? C'est dire quelque chose comme: "on est à peu près sûrs que la proportion de oui est autour de tant". Il reste évidemment à affiner "autour de" et "à peu près sûrs" et il est clair que ces deux paramètres vont dépendre de la taille de l'échantillon de personnes interrogées: plus grand est le nombre de personnes interrogées, plus fiable est le sondage.
  - "Autour de", c'est se donner un intervalle de confiance, comme $[p - 0,02, p + 0,02]$.
  - "À peu près sûrs", c'est donner une probabilité (si possible élevée!), par exemple $0,95$, pour que le résultat du vote soit dans l'intervalle de confiance.
- Ainsi, quelle est la taille n de l'échantillon à interroger pour que l'on ait une probabilité au moins de $0,95$ que la proportion de sondés répondant "oui" soit dans l'intervalle $[p - 0,02, p + 0,02]$?

Réponse.

- Les réponses des n personnes interrogées peuvent être modélisées par n variables aléatoires indépendantes $X_1 \sim \mathcal{B}(p), \dots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$, avec $X_i = 1$ si la i-ème répond "oui" et 0 sinon. Ainsi,
$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
est la proportion de "oui" dans l'échantillon.
- En passant par l'événement contraire, on cherche n tel que
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq 0,02\right) \leq 0,05.$$
On sait que
$$E(X_1) = p, \quad V(X_1) = p(1-p).$$
- Puisque $p \mapsto p(1-p)$ atteint, sur $[0,1]$, son maximum en $p = \frac{1}{2}$ (étude basique de fonction) et que ce max vaut $\frac{1}{4}$, on a toujours
$$p(1-p) \leq \frac{1}{4}.$$
- D'après la loi des grands nombres (avec $\varepsilon = 0,02$),
$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2} \\ &= \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$
- Pour avoir l'inégalité
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq 0,02\right) \leq 0,05$$
il suffit donc que
$$\frac{1}{4n(0,02)^2} \leq 0,05$$
i.e.
$$\begin{aligned} n &\geq \frac{1}{4 \times 0,05 \times (0,02)^2} \\ &= 12500. \end{aligned}$$
Ainsi, un échantillon de 12500 personnes suffit.

Chapitre XXIII

Annexe: notations différentielles, différentielles totales (pour les sciences physiques)

1 Différentielles, notations différentielles (une variable)

- ***Différentielles.*** On connaît la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction f d'une variable, dérivable en un point x_0:

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0)+hf'(x_0)+o(h).$$

Sa signification rigoureuse est la suivante (c'est la définition même d'un $o(h)$):

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0))-hf'(x_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et son interprétation en termes d'accroissements est la suivante:

- la variation, ou "variation réelle", de f entre les points x_0 et x_0+h est le réel Δy défini par

$$\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$$

- la variation "en première approximation" ou "estimée" est la quantité ∂y définie par

$$\partial y = hf'(x_0).$$

- Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto 3x^2$ et prenons $x_0 = 2$; dans le tableau ci-dessous, on prend différentes valeurs pour h, on calcule la variation

$$\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0) = 3(x_0+h)^2-3x_0^2 = 6hx_0+3h^2 = 12h+3h^2$$

et la variation estimée

$$\partial y = hf'(x_0) = 6hx_0 = 12h$$

entre x_0 et x_0+h et on compare ces deux valeurs:

h	Δy	δy	$\vert\Delta y-\delta y\vert$
1	12	15	3
0,1	1,2	1,203	0,003
0,01	0,12	0,1203	0,0003
0,001	0,012	0,012003	0,000003

L'écart $|\Delta y-\delta y|$ vaut ici exactement $\left|12h+3h^2-12h\right| = 3h^2$ qui, comme on le sait, est une quantité négligeable devant h lorsque h tend vers 0.

- Dans le cas général, la variation réelle et la variation estimée sont proches au sens suivant: leur écart $|\Delta y-\delta y|$ est négligeable devant l'accroissement de la variable lorsque cet accroissement tend vers 0, ce qui est la signification du fait que

$$\Delta y-\delta y = f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0) \underset{h\to 0}{=} o(h).$$

La variation estimée

$$h \mapsto hf'(x_0)$$

est une fonction linéaire de l'accroissement h. Cette fonction linéaire s'appelle la *différentielle de f en x_0*; on la note df_{x_0}:

$$df_{x_0} : h \mapsto hf'(x_0).$$

- Dans l'exemple ci-dessus où $f : x \mapsto 3x^2$ et $x_0 = 2$,

$$df_{x_0} : h \mapsto 12h.$$

- Prenons $f : x \mapsto x$; pour tout x_0, on a $f'(x_0) = 1$ et alors

$$df_{x_0} : h \mapsto h.$$

La différentielle de f en tout point est la même; le mathématicien Leibniz (18ème siècle) qui est à l'origine de cette étude, a introduit la notation dx pour noter cette différentielle:

$$dx : h \mapsto h.$$

- Reprenons à nouveau $f : x \mapsto 3x^2$ et $x_0 = 2$; en utilisant cette notation de Leibniz, on peut alors écrire

$$df_{x_0} = 12dx,$$

cette égalité étant à appréhender au sens de l'égalité de deux fonctions. En prenant un réel quelconque x_0, on peut de même écrire

$$df_{x_0} = 6x_0dx$$

et si on laisse carrément tomber toute référence à x_0, on écrira

$$df = 6xdx.$$

En résumé: étant donnée une application dérivable f sur un domaine D, pour tout point x_0 de D:

- la différentielle de f en x_0 est l'application

$$df_{x_0} : h \mapsto f'(x_0).$$

- C'est l'instrument de mesure de la partie linéaire de l'accroissement d'une fonction.
- En utilisant la notation dx de Leibniz pour désigner l'application $h \mapsto h$, on peut écrire

$$df_{x_0} = f'(x_0)dx$$

- et on écrira même

$$df = f'(x)dx.$$

C'est le premier acte des notations différentielles; on va voir pourquoi ces notations ont beaucoup de succès en sciences physiques.

- ***Notations différentielles.*** La formule de dérivation d'une fonction composée $(f\circ g)' = f'\circ g \times g'$ donne de façon abstraite au niveau des différentielles:

$$d(f\circ g)_{x_0} = df_{g(x_0)} \circ dg_{x_0}$$

et voici comment elle est interprétée et utilisée en sciences physiques. Les physiciens utilisent en général des noms pour représenter les résultats produits par des fonctions dont les variables sont en général non nommées alors que les mathématiciens utilisent des noms distincts pour les fonctions et pour les résultats que produisent ces fonctions.
En pensant à la surface d'un disque de rayon R, un physicien écrit $S = \pi R^2$ et dit que S est fonction de R. Dans ces conditions, S représente à la fois une fonction et un nombre. En fait on peut tout autant écrire $S = \pi R^2$ que $S = \pi\frac{D^2}{4}$ où D est le diamètre. Que se passe-t-il si on dérive?

* $S = \pi R^2$ donne $S' = 2\pi R$ en pensant que R est la variable
* $S = \pi \frac{D^2}{4}$ donne $S' = \pi \frac{2D}{4} = \pi R$ en pensant que D est la variable

Les deux résultats sont différents parce que dans un cas la variable considérée est R et dans l'autre cas c'est D. deux cas donc on ne peut pas dire quelle est la dérivée. En revanche, on retombe sur ses pieds si on recadre ces calculs dans un contexte de composition des différentielles:

* $S = \pi R^2$ donne $dS = 2\pi R dR$ en pensant que R est la variable
* $S = \pi \frac{D^2}{4}$ donne $dS = \pi \frac{2D}{4} dD = \pi R dD$ en pensant que D est la variable
* et en imaginant $D = 2R$ comme une fonction de R, on a
$$dD = 2dR$$
et en reportant dans $dS = \pi R dD$, on obtient
$$dS = 2\pi R dR.$$

C'est pour ces raisons que les physiciens n'utilisent pratiquement jamais la notation des dérivées mais qu'ils utilisent la notation différentielle. Voici un autre exemple:

- On fait une certaine expérience. On sait que pendant cette expérience, une grandeur physique f va un peu varier parce que f dépend d'un paramètre physique, disons ℓ, qui va légèrement varier. Disons pour fixer les idées que la théorie montre que f et ℓ sont liés par
$$f(\ell) = \ell^2 + \cos(\ell)$$
et on en déduit que
$$df = (2\ell - \sin(\ell))d\ell.$$
Après l'expérience, on s'aperçoit que la température T n'a pas été constante et que ℓ dépend de T suivant la relation
$$\ell(T) = \ln(T) + 4T$$
donc il serait plus judicieux d'utiliser comme variable T au lieu de ℓ. Grâce à la différentielle, il n'est pas nécessaire de refaire tous les calculs. Il suffit de remarquer que de $\ell(T) = \ln(T) + 4T$ on déduit
$$d\ell = \left(\frac{1}{T} + 4\right) dT$$
d'où, en remplaçant:
$$\begin{aligned} df &= (2\ell - \sin(\ell))d\ell \\ &= (2\ell - \sin(\ell))\left(\frac{1}{T} + 4\right) dT \\ &= (2\ln T + 8T - \sin(\ln T + 4T))\left(\frac{1}{T} + 4\right) dT. \end{aligned}$$
- On pourra retenir que les notations différentielles sont un moyen très commode de décrire les variations d'une fonction, quelles que soient les variables qui sont à l'origine de ces variations; enfin, la substitution "à la physicienne" de dx (ou $d\ell$ ou dT suivant le contexte) par la différentielle d'une fonction s'inscrit dans le cadre de la différentielle de la composée de deux fonctions et donc dans le cadre de la dérivée de la composée de deux fonctions.

2 Dérivées partielles; différentielles (plusieurs variables)

- ***Calcul d'une dérivée partielle.*** Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de deux variables.
  * Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, imaginer que y est une constante C et dériver la fonction de la variable x obtenue avec C à la place de y:
$$f(x,y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right) \rightleftharpoons x \mapsto \sin\left(\frac{C}{x}\right) \overset{\text{dériv.}}{\hookrightarrow} -\frac{C}{x^2}\cos\left(\frac{C}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right).$$
  * Idem pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$:
$$f(x,y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right) \rightleftharpoons y \mapsto \sin\left(\frac{y}{C}\right) \overset{\text{dériv.}}{\hookrightarrow} \frac{1}{C}\cos\left(\frac{y}{C}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right).$$
  * Même principe pour calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (qui se présente sous la forme d'un produit de fonctions à dériver) et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right) \rightleftharpoons x \mapsto -\frac{C}{x^2}\cos\left(\frac{C}{x}\right) \\ &\overset{\text{dériv.}}{\hookrightarrow} \frac{2C}{x^3}\cos\left(\frac{C}{x}\right) - \frac{C}{x^2} \times \frac{C}{x^2}\sin\left(\frac{C}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y}{x^3}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x^4}\sin\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) \rightleftharpoons y \mapsto \frac{1}{C}\cos\left(\frac{y}{C}\right) \overset{\text{dériv.}}{\hookrightarrow} \frac{1}{C} \times \frac{-1}{C}\sin\left(\frac{y}{C}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{x^2}\sin\left(\frac{y}{x}\right).$$
  * On calcule suivant le même principe une dérivée partielle d'une fonction de trois variables:
$$\begin{aligned} f(r,\theta,\varphi) = r^2\cos(\theta)\sin(r\varphi) &\rightleftharpoons r \mapsto r^2\cos(C_1)\sin(rC_2) \\ &\overset{\text{dériv.}}{\hookrightarrow} 2r\cos(C_1)\sin(rC_2) + r^2\cos(C_1)C_2\cos(rC_2) \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta,\varphi) = 2r\cos(\theta)\sin(r\varphi) + r^2\cos(\theta)\varphi\cos(r\varphi). \end{aligned}$$
- ***Formule de Taylor à l'ordre 1.*** Elle atteste que
$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right),$$
et met en lumière le fait que la variation ("réelle")
$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$$
peut être approchée par la variation "estimée"
$$h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$
l'écart entre variation réelle et variation estimée étant négligeable devant l'accroissement des variables.
- ***Différentielle d'une fonction f en un point (x_0, y_0).*** C'est l'application linéaire
$$df_{(x_0,y_0)} : (h,k) \mapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$
Comme pour les fonctions d'une variable, on note "à la Leibniz"
$$dx : h \mapsto h, \quad dy : k \mapsto k$$
et $df_{(x_0,y_0)}$ peut s'écrire alors
$$df_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$
et plus généralement,
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$
Comme pour les fonctions d'une variable, l'intérêt majeur des notations différentielles est de décrire les variations d'une fonction (au sens strict du terme ou "à la physicienne"), quelles que soient les variables qui sont à l'origine de ces variations. Par exemple, considérons une grandeur S s'écrivant $S = x^2 + y^3$; alors
$$dS = 2xdx + 3y^2dy$$

mais imaginons qu'après expérience, il s'avère que x et y dépendent de r et θ de la manière suivante:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

De quelle manière S dépend-elle de r et θ? On procède par substitution de différentielles, généralisant ainsi la méthode utilisée pour une grandeur dépendant d'une variable; puisque

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) = \cos\theta,\ \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta) = -r\sin\theta,\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) = \sin\theta,\ \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta) = r\cos\theta,$$

on a alors, du point de vue des différentielles:

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

et par substitution:

$$\begin{aligned} dS &= 2x(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) + 3y^2(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \\ &= 2r\cos\theta(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) + 3r^2\sin^2\theta(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta) \\ &= (2r\cos^2\theta + 3r^2\sin^3\theta)dr + (-2r^2\cos\theta\sin\theta + 3r^3\sin^2\theta\cos\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Corrigés des exercices

Identités, complexes, systèmes: corrigés

Exercice 1

(1) $x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(2) $x^3+8y^3=x^3+(2y)^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

(3) $a^3-5b^3=a^3-(\sqrt[3]{5}b)^3=(a-\sqrt[3]{5}b)(a^2+\sqrt[3]{5}b+5^{\frac{2}{3}}b^2)$

Exercice 2

(1) $(2x+3iy)^2=4x^2-9y^2+12ixy$

(2) $(3x-2y)^3=27x^3-54x^2y+36x^2-8y^3$

(3) $(x+2y-1)^2=x^2+4y^2+1+4xy-2x-4y.$

Exercice 3

$$\begin{aligned}\sin(2a+b) &= \sin(2a)\cos b+\sin b\cos(2a)\\ &= 2\sin a\cos a\cos b+\sin b(1-2\sin^2 a).\end{aligned}$$

Exercice 4

(1)

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x)=\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x\\ &= (2\cos^2-1)\cos x-2\sin x\cos x\sin x\\ &= 2\cos^3 x-\cos x-2\sin^2 x\cos x\\ &= 2\cos^3 x-\cos x-2(1-\cos^2 x)\cos x\\ &= 4\cos^3 x-3\cos x.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x+x)=\sin(2x)\cos x+\sin x\cos(2x)\\ &= 2\sin x\cos x\cos x+\sin x(1-2\sin^2)x\\ &= 2\sin x\cos^2 x+\sin x-2\sin^3 x\\ &= 2\sin x(1-\sin^2 x)+\sin x-2\sin^3 x\\ &= 3\sin x-4\sin^3 x.\end{aligned}$$

Exercice 5

(1) $\frac{2+3i}{1-4i}=\frac{(2+3i)(1+4i)}{|1-4i|^2}=\frac{-10+11i}{17}$ donc

$$\mathrm{Re}(z_1)=-\frac{10}{17},\quad \mathrm{Im}(z_1)=\frac{11}{17}.$$

(2) $\frac{i}{2-i}=\frac{i(2+i)}{|2-i|^2}=\frac{-1+2i}{5}$ donc

$$\mathrm{Re}(z_2)=-\frac{1}{5},\quad \mathrm{Im}(z_2)=\frac{2}{5}.$$

(3) $\frac{2}{2i-4}=\frac{2(-2i+4)}{|2i-4|^2}=\frac{8-4i}{20}$ donc

$$\mathrm{Re}(z_3)=\frac{8}{20},\quad \mathrm{Im}(z_3)=-\frac{4}{20}.$$

Exercice 6 On a $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$ et

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

donc

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \frac{1}{8}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3\\ &= \frac{1}{8}\left((e^{i\theta})^3+3(e^{i\theta})^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2+(e^{-i\theta})^3\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta+3\cos(-\theta)+\cos(-3\theta)+i(\sin 3\theta+3\sin\theta+3\sin(-\theta)+\sin(-3\theta)\right)\end{aligned}$$

et puisque la fonction $\cos$ est paire et que la fonction $\sin$ est impaire,

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \frac{1}{8}(2\cos 3\theta+6\cos\theta)\\ &= \frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta.\end{aligned}$$

On a $\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$ et

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

et puisque

$$i^3=i^2\times i=-i,$$

on a donc

$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= -\frac{1}{8i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3\\ &= -\frac{1}{8i}\left((e^{i\theta})^3-3(e^{i\theta})^2e^{-i\theta}+3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2-(e^{-i\theta})^3\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}-e^{-3i\theta}\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\left(\cos 3\theta-3\cos\theta+3\cos(-\theta)-\cos(-3\theta)+i(\sin 3\theta-3\sin\theta+3\sin(-\theta)-\sin(-3\theta)\right)\end{aligned}$$

et puisque la fonction $\cos$ est paire et que la fonction $\sin$ est impaire,

$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= -\frac{1}{8i}i(2\sin 3\theta-6\sin\theta)\\ &= -\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta.\end{aligned}$$

Exercice 7 On a

$$(e^{i\theta})^3=e^{i3\theta},$$

c'est à dire

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

et donc en utilisant

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

et le fait que

$$i^2=-1,\quad i^3=i^2\times i=-i,$$

on obtient

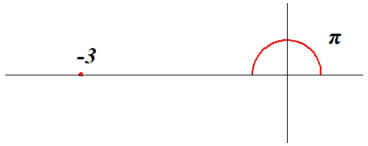
$$\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

et en identifiant parties réelles et imaginaires des deux membres:

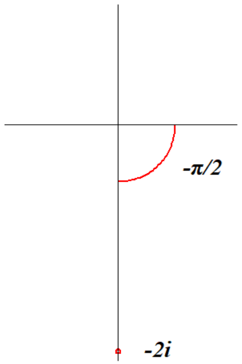
$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\
\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \\
&= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta \\
&= -4\sin^3\theta + 3\sin\theta.
\end{aligned}$$

Exercice 8 On écrira $\arg$ pour désigner un argument.

(1) $\arg(-3) = \pi$ (immédiat par interprétation géométrique)



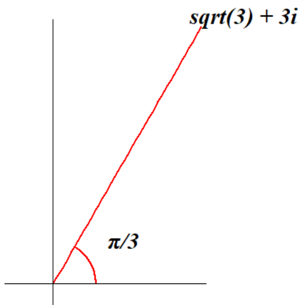
(2) $\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$ (immédiat par interprétation géométrique)



(3) $\left|\sqrt{3}+3i\right| = \sqrt{12}$ donc un argument θ de $\sqrt{3}+3i$ vérifie

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2},\quad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc $\arg(\sqrt{3}+3i) = \frac{\pi}{3}$.

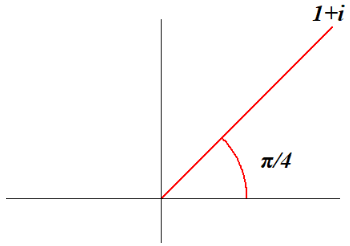


(4) $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ (immédiat par interprétation géométrique) ou encore:

- $|1+i| = \sqrt{2}$
- donc un argument θ de $1+i$ vérifie

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

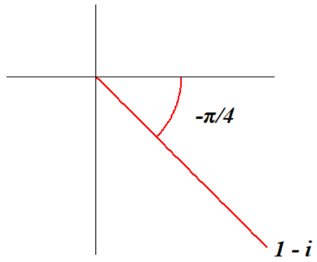


(5) $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ (immédiat par interprétation géométrique) ou encore:

- $|1-i| = \sqrt{2}$
- donc un argument θ de $1-i$ vérifie

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$.

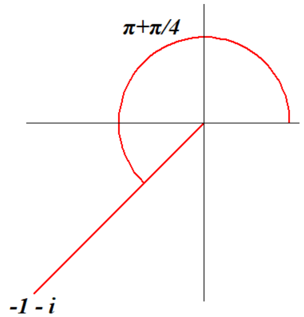


(6) $\arg(-1-i) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ (immédiat par interprétation géométrique) ou encore:

- $|-1-i| = \sqrt{2}$
- donc un argument θ de $-1-i$ vérifie

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $\arg(-1-i) = \pi + \frac{\pi}{4}$.



Exercice 9 On applique la formule du binôme:

$$\begin{aligned}(X^2+1)^n-2X^{2n}+(X^2-1)^n = \quad & X^{2n}+nX^{2(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}X^{2(n-2)}+\dots\\ -2X^{2n} & \\ & +X^{2n}-nX^{(2n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}X^{(2n-2)}+\dots\\ = \quad & n(n-1)X^{2(n-2)}+\dots.\end{aligned}$$

D'où la discussion suivante:

- si $n=1$, on a $P=X^2+1-2X^2+X^2-1=0$ i.e. P est le polynôme nul,
- si $n\neq 1$, $n(n-1)X^{2(n-2)}$ est le coefficient dominant de P qui est donc un polynm̂e de degré $2(n-2)$.

Exercice 10 On écrit

$$\frac{a}{x}+\frac{bx}{x^2+1}=\frac{a(x^2+1)+bx^2}{x(x^2+1)}=\frac{(a+b)x^2+a}{x(x^2+1)}$$

si bien que l'égalité a lieu si et seulement si

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad 1=(a+b)x^2+a$$

i.e.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad (a+b)x^2+a-1=0.$$

D'apr es le théorème d'identification des polynômes selon lequel un polynôme est nul sur un intervalle (par exemple $]0,+\infty[$ ici) si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, l'identité a lieu si et seulement si

$$\begin{cases} a+b=0\\ a-1=0\end{cases}$$

donc si et seulement si $a=1$ et $b=-1$.

Exercice 11 Il est clair que P ne peut être que le carré d'un polynôme Q de degré 2 dont le coefficient dominant vaut 1 ou -1; on le choisira égal à 1: cela ne restreint pas l'étude car s'il vaut -1, le polynôme $R=-Q$ est de coefficient dominant 1 et vérifie à son tour $R^2=P$.
Soit donc $Q=X^2+cX+d$. Alors

$$Q^2=X^4+2cX^3+(c^2+2d)+2cdX+d^2.$$

Par théorème d'identification, l'égalité $P=Q^2$ a lieu si et seulement si

$$\begin{cases} 2c=2a\\ c^2+2d=b\\ 2cd=2\\ d^2=1.\end{cases}$$

Donc:

- soit $d=1$ et alors $c=1$ par L_3 puis $a=1$ par L_1 et $b=3$ par L_2.
- Soit $d=-1$ et alors $c=-1$, $a=-1$ et $b=-1$.

On a donc deux couples de solutions pour (a,b), à savoir $(a,b)=(1,3)$ et $(a,b)=(-1,-1)$, ce qui donne au niveau des polynômes les solutions

$$\begin{aligned}P &= X^4+2X^3+3X^2+2X+1=(X^2+X+1)^2,\\ P &= X^4-2X^3-X^2+2X+1=(X^2-X-1)^2.\end{aligned}$$

Exercice 12

(1) Soit $n=\deg(P)$. Alors $\deg(P')=n-1$ et en conséquence $\deg(P'^2)=2(n-1)$. Puisque $4P$ est de degré n, l'égalité des degrés qui résulte de l'égalité $P'^2=4P$ donne $2(n-1)=n$, c'est à dire $n=2$.

(2) Évidemment, lepolynôme nul est solution. Mis à part ce cas, une solution de ce problème est de degré 2 d'après **(1)**. On pose alors $P=aX^2+bX+c$ et en conséquence

$$P'=2aX+b,\quad P'^2=4a^2X^2+4abX+b^2$$

d'où

$$P'^2=4P\iff 4a^2X^2+4abX+b^2=4aX^2+4bX+4c$$

ce qui a lieu, d'après le théorème d'identification des polynômes, si et seulement si

$$\begin{cases} 4a^2=4a\\ 4ab=4b\\ b^2=4c.\end{cases}$$

Puisque P n'est pas le polynôme nul et est de degré 2, on a $a\neq 0$ et alors

$$4a^2=4a\iff a=1$$

si bien que

$$\begin{cases} 4a^2=4a\\ 4ab=4b\\ b^2=4c\end{cases}\iff\begin{cases} a=1\\ c=\frac14 b^2.\end{cases}$$

Les polynômes solutions sont donc le ploynôme nul et les polynômes de la forme

$$X^2+bX+\frac14 b,$$

avec $b\in\mathbb{R}$.

Exercice 13 Tout entier n est donc racine du polynôme $P-Q$; ainsi, $P-Q$ possède une infinité de racines. Dès lors, $P-Q$ est le polynôme nul i.e. $P=Q$.

Exercice 14 Un carré n'est nul que si le nombre est nul. Ainsi,

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad P(\arctan t)=0.$$

Ensuite, lorsque le réel t décrit $\mathbb{R}$, le réel $\arctan t$ décrit la totalité de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi,

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad P(x)=0.$$

Tous les réels de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sont donc des racines du polynôme P; ainsi, P possède une infinité de racines et c'est pourquoi c'est le polynôme nul.

Exercice 15 Lorsque le réel t décrit $[0,\pi]$, le réel $\cos t$ décrit la totalité de l'intervalle $[-1,1]$. Ainsi,

$$\forall x\in[-1,1],\quad P'(x)=Q'(x)$$

et donc

$$\forall x\in[-1,1],\quad (P-Q)'(x)=0.$$

Tous les réels de l'intervalle $[-1,1]$ sont donc des racines du polynôme $(P-Q)'$; ainsi, $(P-Q)'$ possède une infinité de racines et c'est pourquoi $(P-Q)'$ est le polynôme nul. On en déduit que $P-Q$ est un polynôme constant, d'où l'existence d'un réel k tel que $P-Q=k$.

Exercice 16 Si P n'était pas le polynôme nul, notons d son degré: $d\in\mathbb{N}$. Alors P possèderait au maximum d racines et par hypothèse, $d\leq N$. Ainsi, P possèderait au grand maximum N racines; or les entiers

$$0,1,\dots,N$$

sont au nombre de $N+1$ et sont des racines de P. Il y a là contradiction et c'est pourquoi P est le polynôme nul.

Exercice 17

(1) On a bien $P(-2)=0$.

(2) On peut donc écrire $P=(X+2)(aX^2+bX+c)$. Après développement et identification, on trouve

$$P=(X+2)(X^2-4X+3).$$

Les racines de X^2-4X+3 sont 1 et 3. Ainsi, P admet les racines $-2,1,3$.

Exercice 18

(1) On a bien $P(-1) = 0$. On calcule

$$P' = 8X^3 - 15X^3 - 24X - 1,$$

puis $P'(-1) = 0$. Ensuite,

$$P'' = 24X^2 - 45X - 24$$

et $P''(-1) = 45 \neq 0$. Ainsi, -1 est une racine de multiplicité 2.

(2) On peut donc écrire $P = (X+1)^2 Q$ avec Q de degré 2, $Q = aX^2 + bX + c$. Après développement et identification, on trouve

$$P = (X+1)^2(2X^2 - 9X + 4).$$

Les racines de $2X^2 - 9X + 4$ sont $\frac{1}{2}$ et 4. Ainsi, P admet les racines -1, double et $\frac{1}{2}, 4$ toutes deux simples.

Exercice 19 Notons a, b, c les trois racines du polynôme $P = X^3 - X^2 - X - 2$. D'après les relations entre coefficients et racines, on a

$$a + b + c = -\frac{-1}{1} = 1$$

et par hypothèse, on a par exemple

$$a + b = -1.$$

C'est donc que $c = 2$. Ainsi, 2 est une racine de P. Deux méthodes pour poursuivre.

- *Première méthode.* Sachant que 2 est racine de P, on peut écrire

$$P = (X-2)Q = (X-2)(aX^2 + bX + c).$$

Après développement et identification, on trouve

$$P = (X-2)(X^2 + X + 1).$$

Les racines complexes de $X^2 + X + 1$ sont $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, après calcul de $\Delta = -3$. Ainsi, P admet les racines $2, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

- *Deuxième méthode.* Toujours d'après les relations entre coefficients et racines, on a

$$abc = -\frac{-2}{1} = 2,$$

d'où $ab = 1$. Puisque $a + b = -1$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = -1 \\ ab = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} b = -1 - a \\ a(-1-a) = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} b = -1 - a \\ a^2 + a + 1 = 0. \end{array} \right.$$

Or

$$a^2 + a + 1 = 0 \iff a \in \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

et puisque

$$a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow b = -1 - a = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \quad a = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow b = -1 - a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

on a

$$\{a, b\} = \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\},$$

qui sont donc les deux autres solutions de l'équation.

Exercice 20 En posant la division, on trouve aisément

$$X^3 + 2X^2 + aX + b = (1+X)(X^2 + X + 1) + (a-2)X + b - 1.$$

Le polynôme B divise le polynôme A si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul, donc si et seulement si $(a-2)X + b - 1$ est le polynôme nul i.e. pour $a = 2$ et $b = 1$.

Exercice 21

(1) $X^4 - X + b = (X^2 - aX + 1)(X^2 + aX + a^2 - 1) + (a^3 - 2a - 1)X + (b - a^2 + 1)$.

(2) -1 est racine évidente; après factorisation par $(a+1)$, on trouve les deux autres racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(3) Q divise P si et seulement si le reste $(a^3 - 2a - 1)X + (b - a^2 + 1)$ est nul donc si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ b - a^2 + 1 = 0 \end{array} \right.$$

donc si et seulement si

$$(a, b) \in \left\{ (-1, 0), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 5 - 2\sqrt{5} \right) \right\}.$$

Exercice 22

(1) La division euclidienne de A_n par B s'écrit

$$A_n = BQ_n + R_n, \quad \deg(R_n) < \deg(B) \quad \Longrightarrow \quad \exists (a_n, b_n) \,/\, R_n = a_n X + b_n.$$

En considérant les fonctions polynomiales associées que l'on applique en 2 et en 3, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(2) = B(2) \times Q_n(2) + R_n(2) \\ A_n(3) = B(3) \times Q_n(3) + R_n(3) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (-1)^n - 2 = 0 \times Q_n(2) + 2a_n + b_n \\ 1 - 2 = 0 \times Q_n(3) + 3a_n + b_n \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (-1)^n - 2 = 2a_n + b_n \\ -1 = 3a_n + b_n \end{array} \right.$$

ce qui donne facilement

$$a_n = 1 - (-1)^n, \quad b_n = -4 + 3(-1)^n.$$

Ainsi, le reste dans la division euclidienne de A_n par B est

$$R_n = \big(1 - (-1)^n\big)X - 4 + 3(-1)^n.$$

(2) La division euclidienne de A_n par B s'écrit

$$A_n = BQ_n + R_n, \quad \deg(R_n) < \deg(B) \quad \Longrightarrow \quad \exists (a_n, b_n) \,/\, R_n = a_n X + b_n.$$

En considérant les fonctions polynomiales associées que l'on applique en 1, on obtient

$$A_n(1) = B(1) \times Q_n(1) + R_n(1) \iff 2n = a_n + b_n.$$

L'égalités entre polynômes

$$A_n = BQ_n + R_n$$

entraîne l'égalité de leurs dérivées:

$$A_n' = B'Q_n + BQ_n' + R_n'.$$

En considérant les fonctions polynomiales associées que l'on applique en 1, on obtient, du fait que $A_n' = n(n+1)X^n - n^2X^n$, $R_n' = a_n$ et $B'(1) = 0$:

$$A_n'(1) = B'(1) \times Q_n'(1) + B(1) \times Q_n'(1) + R_n'(1) \iff n = a_n.$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n + b_n = 2n \\ a_n = n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_n = n \\ b_n = n. \end{array} \right.$$

Ainsi, le reste dans la division euclidienne de A_n par B est

$$R_n = n(X+1).$$

Exercice 23

(1) $S = \{(1, 0, 1)\}$

(2) $S = \emptyset$

(3) $S = \{(11y, y, -7y),\ y \in \mathbb{R}\}$

(4) $S = \{(x, x-1, -x+1),\ x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 24

(1) On applique la méthode de Gauß en ***opérant sur les lignes*** de A.

$$A \sim \begin{array}{c} a_{11}\ \text{pivot} \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - m\ell_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m+2 \\ 0 & -1-m & 1+m \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} a_{12}\ \text{pivot} \\ \ell_3 + (1+m)\ell_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m+2 \\ 0 & 0 & -(1+m)^2 \end{pmatrix}$$

donc:

- si $1+m \neq 0$ i.e. $m \neq -1$, la matrice du système possède 3 pivots et le système est de rang 3,
- si $1+m = 0$ i.e. $m = -1$, la matrice du système possède 2 pivots et le système est de rang 2.

(2) Par les mêmes opérations que celles opérées ci-dessus:

$$(S_m) \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+(m+2)z=0 \\ -(1+m)^2 z = 0. \end{cases}$$

- Si $m \neq -1$,

$$(S_m) \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+(m+2)z=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0. \end{cases}$$

- Si $m = -1$,

$$(S_m) \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+z=0. \end{cases}$$

L'inconnue z est alors prise comme paramètre et alors

$$(S_m) \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ y=z \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y+z \\ y=z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\{(0, z, z),\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Fonctions usuelles, inégalités: corrigés

Exercice 25

(1) 7

(2) $\frac{1}{8}$

(3) -1

(4) $\frac{1}{32}$

(5) 1

(6) 6

(7) $\frac{8}{9}$.

Exercice 26

(1) Faux

(2) Faux

(3) Vrai

(4) Vrai

(5) Faux

(6) Faux

(7) Faux

(8) Faux (vrai pour $y > 0$ uniquement; cela n'a pas de sens pour $y < 0$).

Exercice 27 1, 3 et 6.

Exercice 28 $\ln x$.

Exercice 29 x.

Exercice 30

(1) $e^{\frac{-7}{2}}$

(2) $10 \ln 2$

(3) $\ln 3$

(4) $\frac{e^5+2}{3}$

(5) $(E) \iff \ln \frac{x+1}{2x-1} = 1 \iff \frac{x+1}{2x-1} = e$, d'où la solution $\frac{e+1}{2e-1}$

(6) $\{e^5, \frac{1}{e}\}$

(7) $\{\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\}$.

Exercice 31

(1) $\frac{\ln 5 - 2}{3 + 2\ln 5}$

(2) $\{1, e^6\}$

(3) $\frac{1}{2} \ln 5$

(4) $\ln 3$

(5) $\{e, \frac{1}{e^4}\}$.

Exercice 32

(1) On a

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \\ &= \operatorname{sh}(x+y). \end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})}{4} + \frac{(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4} \\
&= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} \\
&= \operatorname{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

Exercice 33 $0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}.$

Exercice 34 $0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{7},\ \frac{\pi}{7}.$

Exercice 35 $0,\ \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6}.$

Exercice 36

(1) Par définition, dans le contexte où une application f établit une bijection d'un domaine I sur un domaine J, on a

$$f\circ f^{-1} = \mathrm{Id},$$

où Id est l'application identique de J i.e. l'application $x\mapsto x$. Le résultat de l'énoncé en découle, puisque $\sin$ établit une bijection de $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $J=[-1,1]$ et que $\arcsin$ en est son application réciproque. C'est donc que $\sin\circ\arcsin = \mathrm{Id}$ où Id est l'application identique de $[-1,1]$ i.e.

$$\forall x\in[-1,1],\ \sin(\arcsin x) = x.$$

(2) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

et donc $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$ et donc

$$\cos^2(\arcsin x) = 1-\sin^2(\arcsin x)$$

et de **(1)**, on déduit

$$\cos^2(\arcsin x) = 1-x^2.$$

Il est trop tôt pour conclure, car dans le contexte $X^2=a$ avec $a\geq 0$, on peut avoir $X=\sqrt{a}$, ce qui se produit lorque $X\geq 0$, ou $X=-\sqrt{a}$, ce qui se produit lorsque $X\leq 0$. Cependant, on a par définition même

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

et puisque $\cos t\geq 0$ pour tout $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\cos(\arcsin x)\geq 0$$

et c'est pourquoi

$$\cos x = \sqrt{1-x^2}.$$

(3) On a par définition

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}$$

et le résultat découle alors de **(1)** et **(2)**.

Exercice 37 On a

$$\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1 \Longrightarrow \lfloor x\rfloor + p \leq x+p < \lfloor x\rfloor + p + 1.$$

Or $N=\lfloor x\rfloor + p$ est un entier et on a

$$N\leq x+p < N+1.$$

C'est donc, par définition, que

$$N = \lfloor x+p\rfloor,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 38 Par définition,

$$\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^n x \leq \lfloor 10^n x\rfloor + 1.$$

En multipliant par 10^{-n}, on obtient

$$\lfloor 10^n x\rfloor\, 10^{-n} \leq x \leq \lfloor 10^n x\rfloor\, 10^{-n} + 10^{-n}$$

et donc

$$x - 10^{-n} \leq \lfloor 10^n x\rfloor\, 10^{-n} \leq x$$

et puisque $10^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ il découle du théorème d'encadrement que

$$\lfloor 10^n x\rfloor\, 10^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Exercice 39 Par définition, on a

$$\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1,\ \lfloor 2x\rfloor \leq 2x < \lfloor 2x\rfloor + 1, \ldots,,\ \lfloor nx\rfloor \leq nx < \lfloor nx\rfloor + 1.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor \leq x + 2x + \ldots + nx \leq \lfloor x\rfloor + 1 + \lfloor 2x\rfloor + 1 + \ldots + \lfloor nx\rfloor + 1,$$

c'est à dire

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor \leq x(1+2+\ldots+n) \leq (\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor) + n.$$

Or

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

et en divisant l'encadrement ci-dessus par n^2, on obtient

$$\frac{1}{n^2}(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor) \leq x\frac{n(n+1)}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2}(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor) + \frac{n}{n^2},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n^2}(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor) \leq x\frac{n+1}{2n} \leq \frac{1}{n^2}(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor) + \frac{1}{n}.$$

Posons

$$u_n = \frac{1}{n^2}(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \ldots + \lfloor nx\rfloor).$$

On a alors

$$x\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq x\frac{n+1}{2n}.$$

Puisque

$$x\frac{n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2},\quad x\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}$$

on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}$$

d'après le théorème d'encadrement.

Exercice 40

(1) $\dfrac{1}{2x-3} > 0 \iff 2x-3 > 0 \iff x\in\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$

(2) $\dfrac{1}{2-3x} > 0 \iff 2-3x < 0 \iff x\in\left]-\infty,\dfrac{2}{3}\right[$

(3) $\dfrac{1}{3x-4} < 0 \iff 3x-4 < 0 \iff x\in\left]-\infty,\dfrac{4}{3}\right[$

(4) $\dfrac{1}{1-4x} < 0 \iff 1-4x < 0 \iff x\in\left]\dfrac{1}{4},+\infty\right[$

(5) $\dfrac{1}{3x-2} \leq 2 \iff \dfrac{5-6x}{3x-2} < 0 \iff x\in\left]-\infty,\dfrac{2}{3}\right[\cup\left[\dfrac{5}{6},+\infty\right[.$

(6) $\dfrac{1}{3x-2} \geq -2 \iff \dfrac{6x-3}{3x-2} \geq 0 \iff x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

(7) $\dfrac{1}{1-2x} < 1 \iff -\dfrac{2x}{1-2x} < 0 \iff x \in]-\infty, 0[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

(8) $\dfrac{1}{1-2x} > -3 \iff \dfrac{6x-4}{1-2x} > 0 \iff x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

Exercice 41

(1) $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty[$.

(2) $x \in \mathbb{R}$.

(3) $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.

(4) $x \in]-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

(5) $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

(6) $\frac{1}{x^2-x+1} < 0 \iff x^2 - x + 1 < 0$: $\emptyset$

(7) $\frac{1}{x^2-x-1} > 1 \iff \frac{-x^2+x+2}{x^2-x-1} > 0 \iff x \in \left]-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right[$.

(8) $x + 1 > \frac{1}{x-1} \iff \frac{x^2-2}{x-1} > 0 \iff x \in \left]-\sqrt{2}, 1\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$.

(9) $2 - x \geq \frac{-3}{2x+1} \iff \frac{-2x^2+3x+5}{2x+1} \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup \left]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Exercice 42

(1) $|x-2| \leq 3 \iff -3 \leq x - 2 \leq 3 \iff x \in [-1, 5]$

(2) $|x+2| \geq 2 \iff x + 2 \geq 2$ ou $x + 2 \leq -2 \iff x \in]-\infty, 4] \cup [0, +\infty]$.

(3) $|2x-3| < 1 \iff -1 < 2x - 3 < 1 \iff x \in]1, 2[$.

(4) $\frac{1}{|x-2|} \leq 3 \iff (x - 2 \neq 0$ et $\frac{1}{3} \leq |x-2|)$ (pas de souci, tous les facteurs en jeu sont > 0) $\iff (x \neq 2)$ et $x - 2 \geq \frac{1}{3})$ ou $(x \neq 2$ et $x - 2 \leq -\frac{1}{3}) \iff x \in \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{3}, +\infty\right]$.

(5) $1 \leq \frac{1}{|3-2x|} \iff (3 - 2x \neq 0$ et $|3-2x| \leq 1)$ (pas de souci, tous les facteurs en jeu sont > 0) $\iff (x \neq \frac{3}{2}$ et $-1 \leq 3 - 2x \leq 1) \iff x \in \left[1, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, 2\right]$.

Exercice 43

(1) $\forall x \in [-2, 2]$, $|f_1(x)| \leq 13$.

(2) $\forall x \in [1, +\infty[$, $|f_2(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(3) $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $|f_3(x)| \leq 8$.

(4) $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $|f_4(x)| \leq 7(2 + 3\pi)$.

Exercice 44

(1) $(x-1)^2 \leq 4 \iff \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{4} \iff |x-1| \leq 2 \iff -2 \leq x - 1 \leq 2 \iff x \in [-1, 3]$. Ou encore, $(x-1)^2 \leq 4 \iff x^2 - 2x - 3 \leq 0$ et puisque les racines de $x^2 - 2x - 3$ sont -1 et 3, $\iff x \in [-1, 3]$ (signe d'un trinôme).

(2) $(x+3)^2 \geq 2 \iff \sqrt{(x+3)^2} \geq \sqrt{2} \iff |x+3| \geq \sqrt{2} \iff (x + 3 \geq \sqrt{2})$ ou $(x + 3 \leq -\sqrt{2})$ $\iff x \in \left]-\infty, -3 - \sqrt{2}\right[\cup \left]-3 + \sqrt{2}, +\infty\right[$. Ou encore, $(x+3)^2 \geq 2 \iff x^2 + 6x + 7 \leq 0$ et puisque les racines de $x^2 + 6x + 7$ sont $-3 - \sqrt{2}$ et $-3 + \sqrt{2}$, $\iff x \in \left]-\infty, -3 - \sqrt{2}\right[\cup \left]-3 + \sqrt{2}, +\infty\right[$ (signe d'un trinôme).

(3) $(2x-1)^2 \leq 1 \iff \sqrt{(2x-1)^2} \leq \sqrt{1} \iff |2x-1| \leq 1 \iff -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \iff x \in [0, 1]$. Ou encore, $(2x-1)^2 \leq 1 \iff 4x^2 - 4x \leq 0$ et puisque les racines de $4x^2 - 4x$ sont 0 et 1, $\iff x \in [0, 1]$ (signe d'un trinôme).

(4) $\frac{1}{(3x+2)^2} \geq 2 \iff (3x + 2 \neq 0$ et $\frac{1}{2} \geq (3x+2)^2)$ et on poursuit comme dans les inégalités précédentes pour parvenir à $\left[\frac{-4-\sqrt{2}}{6}, -\frac{2}{3}\right[\cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{-4+\sqrt{2}}{6}\right]$.

Exercice 45

(1) $\sqrt{4x^2-1} \leq 1 \iff (4x^2 - 1 \geq 0$ et $4x^2 - 1 \leq 1^2) \iff (4x^2 \geq 1$ et $4x^2 \leq 2) \iff (x \geq \frac{1}{2}$ ou $x \leq -\frac{1}{2})$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \iff x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

(2) $\sqrt{x^2-2} \geq 1 \iff (x^2 - 2 \geq 0$ et $x^2 - 2 \geq 1^2) \iff (x^2 \geq 2$ et $x^2 \geq 3) \iff x^2 \geq 3 \iff x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$.

(3) $\sqrt{x^2-4} \leq 2x - 4 \iff (x^2 - 4 \geq 0$ et $2x - 4 \geq 0$ et $x^2 - 4 \leq (2x-4)^2) \iff (x \geq 2$ ou $x \leq -2)$ et $x \geq 2$ et $0 \leq 3x^2 - 16x + 20 \iff (x \geq 2)$ et $(x \leq 2$ ou $x \geq \frac{10}{3}) \iff x \in \{2\} \cup \left[\frac{10}{3}, +\infty\right[$.

(4) $\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{2x-1} \iff (x^2 - 1 \geq 0, 2x - 1 \geq 0)$ et $(x^2 - 1 \geq 2x - 1) \iff (x \geq 1$ ou $x \leq -1)$ et $x \geq \frac{1}{2}$ et $x^2 - 1 \geq 2x - 1 \iff (x \geq 1$ et $x^2 - 1 \geq 2x - 1) \iff (x \geq 1$ et $x^2 - 2x \geq 0) \iff x \geq 1$ et $(x \leq 0$ ou $x \geq 2) \iff x \in [2, +\infty[$.

(5) $\sqrt{3x^2-4} \leq \sqrt{x^2-1} \iff (3x^2 - 4 \geq 0,\ x^2 - 1 \geq 0)$ et $3x^2 - 4 \leq x^2 - 1 \iff (x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}})$ et $(x \leq -1$ ou $x \geq 1)$ et $3x^2 - 4 \leq x^2 - 1 \iff (x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}})$ et $3x^2 - 4 \leq x^2 - 1$ $\iff (x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}})$ et $2x^2 \leq 3 \iff (x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}})$ et $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ $\iff x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

(6) $\sqrt{3x^2-1} \leq \sqrt{-x-1} \iff (3x^2 - 1 \geq 0,\ -x - 1 \leq 0)$ et $3x^2 - 1 \leq -x - 1 \iff (x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $x \leq -1$ et $3x^2 - 1 \leq -x - 1 \iff x \leq -1$ et $3x^2 - 1 \leq -x - 1 \iff x \leq -1$ et $3x^2 + x \leq 0 \iff x \leq -1$ et $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$: il n'y a donc pas de solution.

Exercice 46

(1) $]0, 3[$.

(2) $]-\infty, -4[$.

(3) $\left]\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.

(4) $]-\infty, -3[$.

(5) $\left[\frac{2-\ln 2}{3}, +\infty\right[$

(6) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(7) $\left[\frac{1-\sqrt[3]{2}}{2}, +\infty\right[$.

(8) $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$.

Exercice 47

(1) Pour tout $x \in [0, +\infty[$,
$$|f_1(x)| \leq \frac{5}{4}.$$

(2)(a) Pour tout $x \in [2, 10[$,
$$|f_2(x)| \leq \frac{20}{7}.$$

(b) Pour tout $x \in [2, b[$,
$$|f_2(x)| \leq \frac{2b}{7}.$$

(3)(a) Pour tout $x \in [1, +\infty[$,
$$|f_3(x)| \leq \frac{e^{-2}}{2}.$$

(b) Pour tout $x \in [a, +\infty[$,
$$|f_3(x)| \leq \frac{e^{-2a}}{2}.$$

(4) Pour tout $x \in [a, b]$,
$$|f_4(x)| \leq \frac{be^{-3a}}{1+a^2}.$$

Exercice 48

(1) $\left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

(2) $]-\infty, 1[$.

(3) $]-1, 1[$.

(4) $[0, 2]$.

(5) $[-1, 1]$.

(6) $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\setminus \{-1, 1\}$.

Exercice 49

(1) $[-2, 2]$

(2) $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$

(3) $[1, +\infty[$

(4) $]-\infty, -1]$

(5) $\left[-\sqrt[4]{8}, \sqrt[4]{8}\right]$

(6) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Exercice 50 Pour tout entier pair n , on a
$$\frac{(-1)^n}{2} + \frac{3}{n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$
et pour tout entier impair n, on a
$$\frac{(-1)^n}{2} + \frac{3}{n} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{n} \leq -\frac{1}{2} + \frac{3}{1} = \frac{5}{2}.$$
Puisque $\frac{5}{2} > 2$, pour tout $n \geq 1$ on a
$$\frac{(-1)^n}{2} + \frac{3}{n} \leq \frac{5}{2}$$
et puisque $\frac{5}{2}$ est un élément de A: c'est donc sa borne supérieure. On a ensuite, pour tout $n \geq 1$:
$$\frac{(-1)^n}{2} + \frac{3}{n} \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \geq \frac{1}{2}$$
donc A est minoré et $\frac{1}{2}$ est un minorant de A. Démontrons que $\frac{1}{2}$ est la borne inférieure de A i.e. que c'est le plus grand minorant de A. Dans le cas contraire, il existerait un réel c strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ et qui serait un minorant de A. Pour tout entier pair $n \in \mathbb{N}^*$, on aurait donc
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{n} \geq c \Longrightarrow \frac{3}{n} \geq c - \frac{1}{2}$$
et comme $c - \frac{1}{2} > 0$, en prenant l'inverse on aurait
$$n \leq \frac{3}{c - \frac{1}{2}}.$$
Ceci est absurde: il n'existe aucun réel majorant tous les entiers pairs $n \geq 1$. Il y a donc contradiction et c'est pourquoi $\inf A = \frac{1}{2}$.

Exercice 51

- Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$, donc $a \leq \sup B$. Ainsi, $\sup B$ est l'un des majorants de A et donc par définition, puisque $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, $\sup A \leq \sup B$.
- Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$, donc $\inf B \leq a$. Ainsi, $\inf B$ est l'un des minorants de A et donc par définition, puisque $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, $\inf B \leq \inf A$.
- Enfin, de façon évidente, $\inf A \leq \sup A$ et donc
$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Exercice 52

- Fixons un élément $b \in B$. Pour tout $a \in A$, on a $a \leq b$. Ceci prouve que A est majoré par b; ainsi, A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et c'est pourquoi A possède une borne supérieure et par définition, on a alors $\sup A \leq b$.
- La minoration $\sup A \leq b$ est valable pour tout $b \in B$: cela prouve que B est minoré; ainsi, B est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée et c'est pourquoi B possède une borne inférieure et par définition, $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 53

(1) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $|g(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(f(x))| \leq M,$$
ce qui prouve que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit m et M deux réels tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m \leq f(x) \leq M.$$
Notons I le segment $[m, M]$. La fonction g, définie et continue sur $\mathbb{R}$, est a fortiori définie et continue sur le segment I: elle est donc bornée sur I; soit alors un réel C tel que
$$\forall t \in I, \quad |g(t)| \leq C.$$
Puisque $f(x) \in I$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(f(x))| \leq C,$$
ce qui prouve que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 54 Notons I le segment $[0, T]$. Puisque f est définie et continue sur le segment I, elle y est bornée: soit C un réel tel que
$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq C.$$
Maintenant, soit $x \in \mathbb{R}$; effectuons la division euclidienne de x par T: il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ et un réel $r \in [0, T[$ tel que
$$x = nT + r$$
et par T-périodicité de f,
$$f(x) = f(nT + r) = f(r)$$
et puisque $r \in I$, $|f(r)| \leq C$ et c'est pourquoi $|f(x)| \leq C$. On a donc prouvé:
$$\forall x \in R, \quad |f(x)| \leq C,$$
ce qui prouve que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 55

(1) La fonction f est par hypothèse définie et continue sur le segment I; elle y possède donc un minimum: il existe un réel $x_0 \in I$ tel que
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0).$$
Ainsi, $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$ avec $m = f(x_0)$ qui, par hypothèse, est > 0.

(2) Sur $I =]0, +\infty[$, soit
$$f : x \mapsto \frac{1}{x}.$$
Il est clair que f est définie et continue sur I et que
$$\forall x \in I, \quad f(x) > 0.$$
Cependant, il n'existe aucun réel $m > 0$ tel que
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq m$$
car s'il existait un tel réel, on aurait
$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x} \geq m$$
c'est à dire
$$\forall x > 0, \quad x \leq \frac{1}{m},$$
ce qui est tout à fait absurde.

Exercice 56

(1) Soit $f : x \mapsto \ln(2+x^2) + 1 - 3x$. Alors f est définie et continue sur $I = [0, 1]$ et puisque $f(0) = \ln 2 + 1 > 0$ et $f(1) = \ln 3 - 2 < 0$[1], la fonction f s'annule au moins une fois sur I d'après le théorème des valeurs intermédiaires i.e. l'équation proposée possède au moins une solution sur I.

(2) Soit $f : x \mapsto e^x - x - 2$. Alors f est définie et continue sur $I = [\ln 2, 2\ln 2]$ et puisque $f(\ln 2) = -\ln 2 < 0$ et $f(2\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$, la fonction f s'annule au moins une fois sur I d'après le théorème des valeurs intermédiaires i.e. l'équation proposée possède au moins une solution sur I.

Exercice 57 Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$. Alors f est définie et continue sur $I = [-1, 1]$.

- Puisque $f(-1) = -3 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, la fonction f s'annule au moins une fois sur $[-1, 0]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires i.e. l'équation proposée possède au moins une solution sur $[-1, 0]$.
- Puisque $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$, la fonction f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires i.e. l'équation proposée possède au moins une solution sur $[0, 1]$.
- Puisque $f(0) = 1$, ces deux solutions sont distinctes et l'équation proposée possède donc effectivement au moins deux solutions sur $[-1, 1]$.

Exercice 58 La fonction g est définie et continue sur $[0, 1]$ avec $g(0) = f(0) \geq 0$ car $f(0) \in [0, 1]$ $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0, 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiares, g s'annule alors au moins une fois sur $[0, 1]$ et donc il existe au moins un réel x tel que $f(x) = x$.

Exercice 59

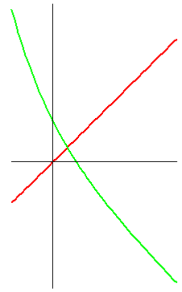
(1) Si f ne gardait pas un signe constant sur $\mathbb{R}$, il existerait (au moins) deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$. Il résulterait alors du théorème des valeurs intermédiaires que f s'annulerait au moins une fois sur $[x_1, x_2]$, ce qui est contradictoire puisque f n'est pas censée s'annuler sur $\mathbb{R}$.

(2)(a) Si l'on avait $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on aurait $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en conséquence on aurait
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
Mais une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ne peut pas avoir $+\infty$ comme limite en $+\infty$ puisque f est majorée sur $[0, +\infty[$ du fait que l'on a
$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq f(0).$$
Il y a donc contradiction, d'où le résultat.

(b) Si l'on avait $g(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on aurait $f(x)xx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en conséquence on aurait
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$
Mais une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ne peut pas avoir $-\infty$ comme limite en $-\infty$ puisque f est minorée sur $]-\infty, 0[$ du fait que l'on a
$$\forall x \leq 0, \quad f(x) \geq f(0).$$
Il y a donc contradiction, d'où le résultat.

(c) De (a) on déduit l'existence d'au moins un réel x_1 tel que $g(x_1) \leq 0$ et de (b) on déduit l'existence d'au moins un réel x_2 tel que $g(x_2) \geq 0$. La fonction g étant définie et continue sur le segment $[x_1, x_2]$, elle s'y annule au moins une fois et donc f possède au moins un point fixe.

(d) Supposons que f possède au moins deux points fixes distincts x_0 et x_0' avec, par exemple, $x_0 < x_0'$. On aurait
$$f(x_0) = x_0, \quad f(x_0') = x_0'$$
et puisque f est strictement décroissante,
$$f(x_0) > f(x_0'),$$
c'est à dire
$$x_0 > x_0',$$
ce qui est absurde. Ainsi, f possède un point fixe et un seul.
Interprétation graphique: le graphe de f coupe une fois et une seule la première bissectrice:



Exercice 60 La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$f'(x) = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2 \geq 0$$
et c'est pourquoi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque que si f' a un signe constant sur un intervalle I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement monotone sur I). Rappelons qu'une fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$ et a donc même limite que son terme de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$. Ainsi,
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$
Il résulte alors du théorème de la bijection que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 61 La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$f'(x) = e^x + 1 > 0$$
et c'est pourquoi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1,$$
il résulte alors du théorème de la bijection que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]1, +\infty[$.

Exercice 62 La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

[1] car par exemple $e > 2$, donc $e^2 > 4 > 3$ donc $\ln(e^2) > \ln 3$ i.e. $2 > \ln 3$.

- Pour $x \geq 0$,
$$f(x) = \frac{x}{1+x} \qquad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0.$$
Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- Pour $x \leq 0$,
$$f(x) = \frac{x}{1-x} \qquad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0.$$
Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

Il en résulte que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Rappelons qu'une fraction rationnelle est équivalente au rapport de ses termes de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$ et a donc même limite que ce rapport en $+\infty$ et en $-\infty$. C'est pourquoi

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = \frac{x}{1+x} \qquad \lim_{x \to +\infty} = 1$$
$$\forall x \leq 0,\ f(x) = \frac{x}{1-x} \qquad \lim_{x \to +\infty} = -1,$$

il résulte du théorème de la bijection que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 63

(1) Variations de f:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{5}}$		$\sqrt{\frac{3}{5}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$6\sqrt{\frac{3}{5}} + 1 > 0$	$\searrow$	$-6\sqrt{\frac{3}{5}} + 1 < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

Il résulte de la bijection que f s'annule une fois et une seule:

– sur $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right[$

– sur $\left]-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right[$

– sur $\left]\sqrt{\frac{3}{5}}, +\infty\right[$.

Donc f possède exactement 3 racines réelles.

(2) Variations de g:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Il résulte de la bijection que g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$. Donc g possède exactement une racine réelle.

Exercice 64

(1) On a
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
si bien que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \begin{cases} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \\ \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1. \end{cases}$$
Il en résulte que f est dérivable à droite en 0 et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

(2) On a
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
si bien que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \begin{cases} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \\ \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$
Il en résulte que f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 0$ et à gauche en 0 avec $f'_g(0) = 0$ et puisque ces nombres dérivés sont égaux, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Ensuite, il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{sur }]0, +\infty[\\ 2x & \text{sur }]-\infty, 0[\end{cases}$$
et il est donc clair que f' est continue sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. Manifestement,
$$f'(x) \begin{cases} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \\ \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$
et donc
$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0 = f'(0),$$
ce qui prouve que f' est continue en 0. Ainsi, f' est continue sur $\mathbb{R}$ et f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(3) On a
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$
On sait que
$$\frac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$
si bien que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \begin{cases} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1 \\ \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1. \end{cases}$$
Il en résulte que f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 1$ et à gauche en 0 avec $f'_g(0) = 1$ et puisque ces nombres dérivés sont égaux, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$. Ensuite, il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec
$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{sur }]0, +\infty[\\ 1 & \text{sur }]-\infty, 0[\end{cases}$$

et il est donc clair que f' est continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$. Manifestement,

$$f'(x) \quad \begin{cases} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 \\ \\ \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1 \end{cases}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 = f'(0),$$

ce qui prouve que f' est continue en 0. Ainsi, f' est continue sur $\mathbb{R}$ et f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(4) On a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puisque

$$\forall t\in\mathbb{R}, \quad |\sin t| \leq 1,$$

on a

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, \quad \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

ce qui prouve à l'aide du théorème d'encadrement que

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En conséquence, f est dérivable en 0 avec $f'(0)=0$. Ensuite, il est clair que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\forall x\neq 0, \quad f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, \quad \left|2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 2|x|$$

ce qui prouve à l'aide du théorème d'encadrement que

$$2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

mais du fait que $\frac{1}{x}$ tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $0^\pm$ et que la fonction $\cos$ ne possède pas de limite en $\pm\infty$, on voit que f' ne possède pas de limite lorsque x tend vers 0. Ainsi, f' n'est pas continue en 0; de ce fait, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 65 On a $f(0)=2$ et $f(1)=2$. Il résulte du théorème de Rolle qu'il existe un réel $c\in\,]0,2[$ tel que $f'(c)=0$. Ainsi, f' s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

Exercice 66 Soit $g : x\mapsto ax^4+bx^3+cx^2$. Alors g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $d\in\,]0,1[$ tel que

$$g(1)-g(0) = (1-0)g'(d)$$

c'est à dire tel que

$$a+b+c = 4ad^3+3bd^2+2cd,$$

d'où le résultat (on prendra garde aux notations!).

Exercice 67

(1) La fonction f' est par hypothèse définie et continue sur $[0,1]$; elle y possède donc un minimum: il existe un réel $x_0\in[0,1]$ tel que

$$\forall x\in[0,1], \quad f'(x)\geq f'(x_0).$$

Ainsi, $f'(x)\geq m$ pour tout $x\in[0,1]$ avec $m=f'(x_0)$ qui, par hypothèse, est >0.

(2) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x\in[0,1], \quad g(x) = f(x)-mx.$$

Il est clair que g est dérivable sur $[0,1]$ avec

$$g'(x) = f'(x)-m$$

et on a donc d'après *(1)*:

$$\forall x\in[0,1], \quad g'(x)\geq 0.$$

En conséquence, g est croissante sur $[0,1]$, si bien que

$$\forall x\in[0,1], \quad g(x)\geq g(0),$$

c'est à dire

$$\forall x\in[0,1], \quad f(x)-mx\geq 0,$$

d'où le résultat.

Exercice 68 Pour tout entier $n\geq 1$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition

soit f une fonction définie et de classe C^n sur un intervalle I et s'annulant en $n+1$ points deux à deux distincts $a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}$; alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I"

- $\mathcal{P}_1$ est vraie, car si f est de classe C^1 sur I et s'annule en deux points distincts a_1 et a_2, alors le théorème de Rolle assure que f' s'annule sur $]a_1,a_2[$.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier $n\geq 1$ et soit f une fonction définie et de classe C^{n+1} sur un intervalle I et s'annulant en $n+2$ points deux à deux distincts $a_1,\ldots,a_{n+1},a_{n+2}$; pour simplifier, supposons
$$a_1<a_2<\ldots<a_{n+1}<a_{n+2}.$$
Posons $g=f'$, qui est alors définie et de classe C^n sur $[0,1]$. Par hypothèse,
$$f(a_1)=f(a_2), \quad f(a_2)=f(a_3), \quad \ldots, \quad f(a_{n+1})=f(a_{n+2})$$
Si bien que le théorème de Rolle appliqué à f sur les intervalles $[a_1,a_2]$, $[a_2,a_3]$,...,$[a_{n+1},a_{n+2}$ permet d'affirmer qu'il existe des réels
$$c_1\in\,]a_1,a_2,[, \; c_2\in\,]a_2,a_3,[, \; \ldots, \; c_{n+1}\in\,]a_{n+1},a_{n+2},[$$
tels que
$$f'(c_1)=0, \; f'(c_2)=0, \; \ldots, \; f'(c_{n+1})=0$$
autrement dit,
$$g(c_1)=0, \; g(c_2)=0, \; \ldots, \; g(c_{n+1})=0.$$
Puisque
$$a_1<c_1<a_2<c_2<a_3<\ldots<a_{n+1}<c_{n+1}<a_{n+2},$$
on a la garantie que les réels $c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}$ sont deux à deux distincts. De l'hypothèse de récurrence, on déduit donc que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I i.e. $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur I.
- La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie et du prinicipe de récurrence, on déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n\geq 1$.

Exercice 69 Il est clair que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x)-(-f'(-x)) = f'(x)+f'(-x).$$

Fixons $x\in\mathbb{R}$; si $x=0$, le résultat est clair: tout réel c convient puisque les deux membres de l'égalité à prouver sont nuls. Si $x\neq 0$, le théorème des accroissements finis entre 0 et x appliqué à g assure qu'il existe un réel $c\in[0,x]$ (ou $[x,0]$ suivant que $x>0$ ou $x<0$) tel que

$$g(x)-g(0) = (x-0)g'(c).$$

Le résultat s'ensuit.

Exercice 70 Fixons un réel x; si $x=0$, le résultat est clair. Si $x \neq 0$, d'après le théorème des accroissements finis entre 0 et x appliqué à la fonction $\sin$ dont la dérivée est la fonction $\cos$, il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\sin x - \sin 0 = (x-0)\cos c,$$

c'est à dire $\sin x = x\cos c$. Ensuite,

$$|\sin x| = |x\cos c| = |x| \times |\cos c| \leq |x|$$

car $-1 \leq \cos c \leq 1 \Rightarrow |\cos c| \leq 1$. Le résultat s'ensuit.

Exercice 71

(1) Fixons deux réels x et y; si $x=y$, le résultat est clair. Si $x \neq y$, d'après le théorème des accroissements finis entre x et y appliqué à la fonction $\sin$ dont la dérivée est la fonction $\cos$, il existe $c \in]x,y[$ tel que

$$\sin x - \sin y = (x-y)\cos c,$$

c'est à dire $\sin x - \sin y = (x-y)\cos c$. Ensuite,

$$|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos c| = |x-y| \times |\cos c| \leq |x-y|$$

car $-1 \leq \cos c \leq 1 \Rightarrow |\cos c| \leq 1$. Le résultat s'ensuit.

(2) Fixons deux réels x et h; si $x=0$, le résultat est clair. Si $x \neq 0$, d'après le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ appliqué à la fonction $\cos$ dont la dérivée est la fonction $-\sin$, il existe $c \in]x,x+h[$ tel que

$$\cos(x+h) - \cos x = -(x+h-x)\sin c,$$

c'est à dire $\cos(x+h) - \cos h = -h\sin c$. Ensuite,

$$|\cos(x+h) - \cos h| = |-h\sin c| = |h| \times |\sin c| \leq |h|$$

car $-1 \leq \sin c \leq 1 \Rightarrow |\sin c| \leq 1$. Le résultat s'ensuit.

(3) Fixons un réel x; si $x=0$, le résultat est clair. Si $x \neq 0$, d'après le théorème des accroissements finis entre x et $2x$ appliqué à la fonction $t \mapsto e^t$ dont la dérivée est la fonction $t \mapsto e^t$, il existe $c \in]x,2x[$ (ou $]2x,x[$ suivant que $x>0$ ou $x<0$) tel que

$$e^{2x} - e^x = (2x-x)e^c,$$

c'est à dire $e^{2x} - e^x = xe^c$. Ensuite,

$$|e^{2x} - e^x| = |xe^c| = |x| \times |e^c|$$

puis que x soit >0 ou <0, on a dans les deux cas $c \leq 2|x|$ et par croissance de la fonction $t \mapsto e^t$,

$$0 \leq e^c \leq e^{2|x|}$$

et le résultat s'ensuit.

Exercice 72 Il est clair que f est déjà de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0 puisque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

D'autre part,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x>0 \\ 3x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

si bien que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x^2 = 0.$$

Ainsi, f' possède une limite finie en 0 égale à 0. On déduit alors du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0)=0$.

Exercice 73 Il est clair que f est déjà de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0 puisque par résultat de croissance comparée classique,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$$

alors qu'évidement

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

si bien que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

D'autre part,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\ln x + x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

si bien que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x + x = 0$$

(croissance comparée) et évidemment

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0.$$

Ainsi, f' possède une limite finie en 0 égale à 0. On déduit alors du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0)=0$.

Exercice 74

(1) D'une part, il est évident que f est continue sur $]0,+\infty[$. D'autre part,

$$x^x = e^{x\ln x}$$

et par croissance comparée classique

$$x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

si bien que par continuité de la fonction $t \mapsto e^t$ en 0:

$$e^{x\ln x} tend_{x\to 0^+} e^0 = 1.$$

En posant $f(0)=1$, on prolonge donc f en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

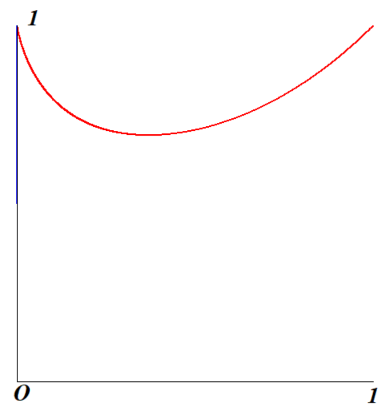
(2) Il est clair que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec

$$\forall x>0, \quad f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x} = (\ln x + 1)f(x)$$

et puisque $f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, on a donc

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty.$$

On déduit alors du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 que f n'est pas de classe C^1 sur $[0,+\infty[$; on déduit de ce théorème que le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse 0.



Exercice 75

(1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2 \geq 0$$

et c'est pourquoi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque que si f' a un signe constant sur un intervalle I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement monotone sur I). Rappelons qu'une fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$ et a donc même limite que son terme de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Il résulte alors du théorème de la bijection que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(2) g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection.

(3) La fonction g est dérivable en tout point y tel que $f'(g(y)) \neq 0$ i.e. tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Or on a

$$f'(x) = 0 \iff x \in \{0, 1\}.$$

Puisque $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$, c'est que

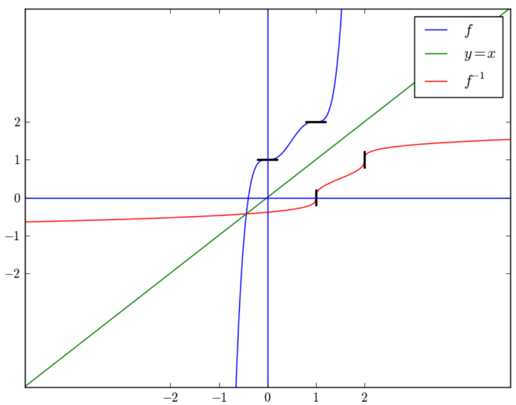
$$0 = f^{-1}(1), \quad 1 = f^{-1}(2)$$

si bien que g est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ sauf en 1 et en 2.

(4)
- f' s'annule en 0 et 1: en ces points, le graphe de f présente une tangente horizontale.
- f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$: aucun point du graphe de f ne présente de tangente verticale.
- On a vu que g est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ sauf en 1 et en 2 et en ces points, le graphe de g présente des tangentes verticales, images par la symétrie par rapport à la première bissectrice des tangentes horizontales au points d'abscisse 0 et 1 du graphe de f.
- Aux points y où g est dérivable, on a

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},$$

formule qui démontre que $g'(y) \neq 0$: le graphe de g ne présente donc pas de tangente horizontale.



Exercice 76

(1) $f'(x) = \ln x + 1$ et pour tout $x > \frac{1}{e}$,

$$\ln x + 1 > \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur I; étant continue sur I, elle réalise alors d'après le théorème de la bijection une bijection de I sur l'intervalle

$$J = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[.$$

(2) La fonction g est dérivable en tout point y tel que $f'(g(y)) \neq 0$ i.e. tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Or on a

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}.$$

Puisque $f((\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, c'est que

$$\frac{1}{e} = f^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

si bien que g est dérivable sur tout J sauf en $-\frac{1}{e}$.

(3) On a $f(1) = 0$ et donc

$$1 = f^{-1}(0) \Rightarrow g(0) = 1$$

et d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques,

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(1)} = 1.$$

On a ensuite $f(e) = e \ln e = e$, d'où

$$e = f^{-1}(e) \Rightarrow g(e) = e$$

et d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques,

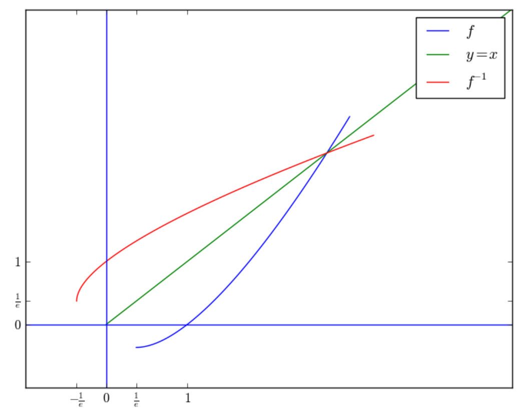
$$g'(e) = \frac{1}{f'(g(e))} = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{2}$$

et enfin $f(e^2) = e^2 \ln(e^2) = 2e^2$, d'où

$$e^2 = f^{-1}(2e^2) \Rightarrow g(2e^2) = e^2$$

et d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques,

$$g'(2e^2) = \frac{1}{f'(g(2e^2))} = \frac{1}{f'(e^2)} = \frac{1}{3}.$$



Exercice 77 Fixons un point $a \in I$ et soit
$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt.$$
La fonction f étant continue sur i, il résulte du théorème fondamental de l'analyse que F est définie et de classe C^1 sur I avec
$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$
Mais il résulte de l'hypothèse que F est la fonction nulle sur I; à plus forte raison, F' est la fonction nulle sur I et c'est pourquoi
$$\forall x \in I, \quad f(x) = 0.$$

Exercice 78

(1)(a) $H = F \circ v$.

(b) Il résulte du théorème fondamental de l'analyse que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = f(x)$$
et il résulte alors du théorème de composition des dérivées que H est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = v'(x) \times F'(v(x)) = 2 \times f(v(x)) = 2f(2x).$$

(c) D'après la relation de Chasles, on a
$$G(x) = H(x) - F(x)$$
et il en résulte que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = H'(x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

(2) Le changement de variable $u = x + t$ donne
$$du = dt, \quad \int_0^x f(x+t)\, dt = \int_x^{2x} f(u)\, du$$
et donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = G(x).$$
Le résultat de l'énoncé en découle.

Exercice 79 Considérons la fonction
$$F : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\, dt.$$
Écrivons à l'aide de la relation de Chasles
$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$
avec
$$F_1(x) = \int_0^{x+T} f(t)\, dt, \quad F_2(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

- Il résulte du théorème fondamental de l'analyse que F_2 est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_2'(x) = f(x).$$
- Soit $h : x \mapsto x + T$. Alors
$$F_1 = F_2 \circ h$$
et il résulte alors du théorème de composition des dérivées que F_2 est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_2'(x) = h'(x) \times F_1'(h(x)) = 1 \times f(h(x)) = f(x+T).$$

Ainsi, F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x+T) - f(x).$$
Mais, par hypothèse, F est constante si bien que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = 0$$
et c'est pourquoi
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) - f(x) = 0$$
i.e. f est périodique de période T.

Exercice 80 Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{3x}$. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x, \; u''(x) = 2, \quad k \geq 3, \; u^{(k)}(x) = 0$$
puis
$$\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 3e^{3x}, \; v''(x) = 9e^{3x}$$
et par une récurrence immédiate (laissée au soin du lecteur)
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}.$$
Écrivons la formule de Leibniz
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) \times v^{(n-k)(x)}$$
sous la forme
$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) \times v^{(n-k)(x)} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) \times v^{(n-k)(x)}.$$
Puisque $u^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \geq 3$, on a
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) \times v^{(n-k)(x)} \\ &= u(x)v^{(n)}(x) + nu'(x)v^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} u''(x)v^{(n-2)}(x) \\ &= x^2 e^{3x} + 6nxe^{3x} + 9n(n-1)e^{3x}. \end{aligned}$$

Exercice 81

(1) Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition
$$\forall x \in I, \quad h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$
On a $h'(x) = \frac{1}{1+x}$ et la proposition est donc vraie pour $n = 1$ (avec la convention habituelle $0! = 1$). Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie à un rang $n \geq 1$. Alors
$$h^{(n+1)} = \left(h^{(n)}\right)'.$$
Par hypothèse de récurrence on a
$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$
et donc
$$\left(h^{(n)}\right)'(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \times (-n)}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$
et on voit donc que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Du principe de récurrence, on déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

(2) Notons $g(x)=x^{n-1}$. Alors
$$g'(x)=(n-1)x^{n-2},\ g''(x)=(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
puis de façon immédiate
$$\forall k\leq n-1,\quad g^{(k)}(x)=(n-1)\times\ldots\times(n-k)x^{n-1-k}$$
et enfin,
$$g^{(n)}(x)=0.$$
De ce dernier résultat, la formule de Leibniz
$$f^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}\times h^{(n-k)}$$
donne
$$f^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}g^{(k)}\times h^{(n-k)}$$
et donc pour tout $x\in I$,
$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(n-1)\times\ldots\times(n-k)x^{n-1-k}\times\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{(1+x)^{n-k}}.$$
On voit que
$$(n-1)\times\ldots\times(n-k)(n-k-1)!=(n-1)!$$
puis pour $x\neq 0$,
$$x^{n-1-k}=\frac{1}{x}\times x^{n-k}$$
et
$$(-1)^{n-k-1}=-(-1)^{n-k}$$
et donc
$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=-\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}x^{n-k}\times\frac{1}{(1+x)^{n-k}}\\&=-\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\times\left(\frac{x}{(1+x)}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$
On reconnaît "presque" le développement de $\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^n$:
$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\times\times\left(-\frac{x}{(1+x)}\right)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\times\left(\frac{x}{(1+x)}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$
Il suffit de rajouter et retrancher le terme correspondant à $k=n$, qui vaut
$$\binom{n}{n}(-1)^0\times\left(\frac{x}{(1+x)}\right)^0=1,$$
si bien que
$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=-\frac{(n-1)!}{x}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\times\left(\frac{x}{(1+x)}\right)^{n-k}-1\right)\\&=-\frac{(n-1)!}{x}\left[\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^n-1\right]\\&=\frac{(n-1)!}{x}\left[1-\frac{1}{(1+x)^n}\right].\end{aligned}$$

Exercice 82 Appliquons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f:
$$f(x)\underset{x\to0}{=}f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+o(x^2).$$
On en déduit:
$$\frac{f(x)-f(0)}{x}\underset{x\to0}{=}f'(0)+\frac{x}{2}f''(0)+o(x).$$
Puisque f' est de classe C^1, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 1:
$$f'(x)\underset{x\to0}{=}f'(0)+xf'(0)+o(x).$$
On en déduit:
$$f'(x)-\frac{f(x)-f(0)}{x}\underset{x\to0}{=}\frac{x}{2}f''(0)+o(x)$$
puis
$$\frac{f'(x)-\frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}\underset{x\to0}{=}\frac{1}{2}f''(0)+o(1)$$
et en conséquence
$$\frac{f'(x)-\frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\frac{1}{2}f''(0).$$

Exercice 83 Appliquons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $a-h$ et en $a+h$:
$$\begin{aligned}f(a-h)&\underset{h\to0}{=}f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)\\f(a+h)&\underset{h\to0}{=}f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2)\end{aligned}$$
et en conséquence:
$$f(a-h)-2f(h)+f(a+h)\underset{h\to0}{=}h^2f''(a)+o(h^2)$$
(attention à la gestion des $o(h^2)$: l'un est une fonction négligeable devant h^2, l'autre en est une autre et leur somme donne évidemment une fonction négligeable devant $o(h^2)$) et c'est pourquoi
$$\frac{f(a-h)-2f(h)+f(a+h)}{h^2}=f''(a)+o(1)\underset{h\to0}{\longrightarrow}f''(a).$$

Exercice 84

(1) Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 entre 0 et x à la fonction $f:t\mapsto\cos t$:

- les dérivées successives de f sont
$$f'(t)=-\sin t,\ f''(t)=-\cos,\ f^{(3)}(t)=\sin t,\ f^{(4)}(t)=\cos t,\ f^{(5)}(t)=-\sin t$$
et on a donc
$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f^{(3)}(0)=0,\ f^{(4)}(t)=1$$
et pour tout réel t
$$|f^{(5)}(t)|=|-\sin t|\leq 1.$$
- L'inégalité de Taylor-Lagrange
$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{4}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)\right|\leq M_5\frac{|x|^5}{5!}$$
avec $M_5=1$, majorant de $|f^{(5)}|$, conduit alors immédiatement au résultat.

(2) On applique l'inégaité ci-dessus avec $a=\frac{1}{2}$. Après calculs, on aboutit au résultat.

Exercice 85

(1) Soit $f : t \mapsto \ln(1+t)$. Alors

$$f'(t) = \frac{1}{1+t},\ f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2},\ f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

si bien que pour tout $t \in [0,x]$ (et du fait que $x > 0$):

$$t \in [0,x] \Longrightarrow t \geq 0 \Longrightarrow 1+t \Longrightarrow (1+t)^3 \geq 1 \Longrightarrow |f'''(t)| \leq 2.$$

On a ensuite

$$f(0) = 0,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 2.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f à l'ordre 2 entre 0 et x:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq M_3 \frac{|x|^5}{5!}$$

avec $M_3 = 1$, majorant de $|f'''|$, conduit alors immédiatement au résultat.

(2) On a

$$\frac{1}{3}(0,003)^3 = 9 \times 10^{-9} \leq 10^{-8}.$$

Une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près est donc

$$0,003 - \frac{1}{2}(0,003)^2 = 0,0029955.$$

Exercice 86 On effectue un développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 6 (en appliquant la technique d'obtention du développement limité d'un produit: cf. chapitre suivant):

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{11}{72}x^6 + o(x^6).$$

La fonction f est clairement de classe C^6 (et même de classe C^∞ au voisinage de 0) donc *si on le voulait*, on pourrait appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 en 0; elle donnerait:

$$(\sin x)\ln(1+x) = f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6).$$

On a donc simultanément

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \underset{x\to 0}{=} & x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{11}{72}x^6 + o(x^6) \\ (\sin x)\ln(1+x) = f(x) & \underset{x\to 0}{=} & f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6). \end{array}$$

Mais la théorie affirme que lorsqu'il existe, le développement limité (à un ordre donné) est unique i.e. si on dispose de deux développements limités d'une même fonction au même ordre en 0, c'est que les coefficients respectifs de ces développements coïncident. C'est pourquoi:

$$\begin{array}{rcl} f'(0) & = & 0 : \text{ identification des coefficients de degré } 1 \\ \frac{f''(0)}{2!} & = & 1 : \text{ identification des coefficients de degré } 2 \\ \frac{f^{(3)}(0)}{3!} & = & -\frac{1}{2} : \text{ identification des coefficients de degré } 3 \\ \frac{f^{(4)}(0)}{4!} & = & \frac{1}{6} : \text{ identification des coefficients de degré } 4 \\ \frac{f^{(5)}(0)}{5!} & = & -\frac{1}{6} : \text{ identification des coefficients de degré } 5 \\ \frac{f^{(6)}(0)}{6!} & = & \frac{11}{72} : \text{ identification des coefficients de degré } 6. \end{array}$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl} f'(0) & = & 0 \\ f''(0) & = & 2 \\ f^{(3)}(0) & = & -3 \\ f^{(4)}(0) & = & 4 \\ f^{(5)}(0) & = & -20 \\ f^{(6)}(0) & = & 110.. \end{array}$$

Exercice 87

(1) On écrit

$$1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1) = \frac{1 \times 23 \times 4 \ldots \times (2n-1) \times 2n}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)} = \frac{(2n)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}$$

si bien que

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times \ldots \times (2n))^2}.$$

Enfin,

$$2 \times 4 \times \ldots \times (2n) = 2.1 \times 2.2 \times \ldots \times 2.n = 2^n \times (1.2 \ldots n) = 2^n n!,$$

d'où le résultat.

(2) On a

$$\begin{array}{rcl} \frac{u_{n+1}}{u_n} & = & \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} = (2n+2)(2n+1) \times \frac{1}{4(n+1)^2} \\ & = & \frac{2(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \end{array}$$

et on voit donc clairement que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Ainsi, (u_n) est décroissante. De plus, tous les termes de la suite sont > 0. Ainsi, (u_n) est minorée par 0 et étant décroissante, elle est alors convergente.

(3) On a

$$\begin{array}{rcl} \frac{v_{n+1}}{v_n} & = & \frac{n+2}{n+1} \times \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \times \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2} \\ & = & \frac{(n+2)(2n+1)^2}{(4(n+1)^3} = \frac{4n^3+12n^2+9n+2}{4n^3+12n^2+12n+4} \end{array}$$

et on voit donc clairement que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1.$$

Ainsi, (v_n) est décroissante. De plus, tous les termes de la suite sont > 0. Ainsi, (v_n) est minorée par 0 et étant décroissante, elle est alors convergente.

(4) Supposons $\ell \neq 0$. On aurait alors $\ell > 0$ et alors

$$\begin{array}{rcl} u_n^2 & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \ell^2 \\ n+1 & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \\ (n+1)u_n^2 & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & +\infty \end{array}$$

c'est à dire

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui est contradictoire avec le résultat obtenu en ***(3)***. Il y a contradiction et c'est donc pourquoi $\ell = 0$.

Exercice 88

(1) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$, d'où le résultat.

(2) On a donc
$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}.$$
Ensuite,
$$\sqrt{k+1} \geq \sqrt{k} \Longrightarrow \sqrt{k+1}+\sqrt{k} \geq 2\sqrt{k} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$$
puis
$$\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1} \Longrightarrow \sqrt{k+1}+\sqrt{k} \leq 2\sqrt{k+1} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}},$$
d'où le résultat.

(3) On a alors
$$S_n \geq 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right) = 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$
(en ayant reconnu une somme télescopique). Le résultat découle alors du théorème de minoration pour les suites.

(4) On a
$$S_{n+1}-S_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 0$$
ce qui démontre que la suite (u_n) est décroisssante et
$$S_n - 2\sqrt{n} \geq 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) - 2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) - 2$$
et puisque $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \geq 0$, on en déduit
$$S_n - 2\sqrt{n} \geq -2,$$
ce qui démontre que la suite (u_n) est minorée. On déduit ainsi du théorème de la limite monotone que la suite (u_n) est convergente.

(5) On écrit
$$S_n = u_n + 2\sqrt{n}.$$
Puisque la suite (u_n) est convergente et que $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, il est clair que
$$u_n + 2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n},$$
ce que l'on prouve formellement ainsi:
$$\frac{u_n+2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{u_n}{2\sqrt{n}} + \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{u_n}{2\sqrt{n}} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0+1 = 1.$$
On a donc prouvé:
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Exercice 89

(1) Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sont définies et continues sur $I = [1,+\infty[$. Du théorème fondamental de l'analyse, on déduit que F et G sont définies et de classe C^1 sur I. De plus,
$$F(x) = \left[-e^{-t}\right]_1^x = e^{-1} - e^{-x}.$$

(2) Du théorème fondamental de l'analyse, on déduit
$$\forall x \in [1,+\infty[,\quad G'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$
et puisque manifestement
$$\forall x \in [1,+\infty[,\quad G'(x) \geq 0,$$
c'est que G est croissante sur I.

(3) Soit $x \geq 1$. Alors pour tout $t \in [1,x]$ on a
$$t \geq 1 \Longrightarrow \frac{1}{t} \leq 1$$
et en conséquence, puisque $e^{-t} \geq 0$:
$$\forall \in [1,x],\quad \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}.$$
De la propriété suivante (dite de "croissance de l'intégrale"):

> soit a et b deux réels avec $a < b$ et deux fonctions f et g définies et continues sur $[a,b]$ telles que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$; alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$,

on déduit:
$$\forall x \in [1,+\infty[,\quad \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \leq \int_1^x e^{-t}\,dt,$$
c'est à dire
$$\forall x \in [1,+\infty[,\quad G(x) \leq F(x).$$
Or
$$\forall x \in [1,+\infty[,\quad F(x) = e^{-1} - e^{-x} \leq e^{-1}.$$
Ainsi,
$$\forall x \in [1,+\infty[,\quad G(x) \leq e^{-1}$$
ce qui démontre que G est bornée sur $[1,+\infty[$; étant croissante sur $[1,+\infty[$, on déduit du théorème de la limite monotone que G possède une limite finie en $+\infty$.

Exercice 90

(1) Soit $g : u \mapsto u - \ln(1+u)$. Alors g est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$ et
$$\forall u \geq 0,\quad g'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u} \geq 0.$$
Donc g est croissante sur $[0,+\infty[$

u	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(u)$	$+$
g	0 $\nearrow$

Ainsi,
$$\forall u \geq 0,\quad g(u) \geq g(0) = 0,$$
d'où le résultat.

(2) De *(1)*, on déduit
$$\forall x \in [0,1], \quad \ln(1+x^n) \leq x^n$$
et en conséquence,
$$I_n \leq \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}.$$
Par ailleurs,
$$\forall x \in [0,1], \quad x^n \geq 0 \Longrightarrow 1+x^n \geq 1 \Longrightarrow \ln(1+x^n) \geq 0$$
et en conséquence,
$$0 \leq I_n.$$
Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$
et du théorème d'encadrement on déduit que la suite (I_n) converge vers 0.

Exercice 91

(1) Pour tout $k \in [1,n]$, on a
$$1 \leq k \leq n \Longrightarrow n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n \Longrightarrow \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$$
et donc
$$1 \leq k \leq n \Longrightarrow \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$
puis
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}.$$
Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n}$ est constituée d'une somme de n termes tous identiques:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = n \times \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}.$$
De même,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = n \times \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$
Ainsi,
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n^2}{n^2+1},$$
d'où le résultat.

(2) Rappelons qu'une fraction rationnelle est équivalente au rapport de ses termes de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$ et a donc même limite que ce rapport en $+\infty$ et en $-\infty$. C'est pourquoi
$$\frac{n^2}{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \frac{n^2}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Du théorème d'encadrement, on déduit que la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 92

(1) On a
$$f'(t) = \cos t - 1 + \frac{1}{2}t^2, \; f''(t) = -\sin t + t, \; f'''(t) = -\cos t + 1.$$
Or
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos t \leq 1 \Longrightarrow f'''(t) \geq 0.$$
Ainsi,

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'''(t)$	$+$
f''	0 $\nearrow$

et alors
$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad f''(t) \geq f''(0) = 0$$
et donc
$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad t - \sin t \geq 0.$$
On a donc

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(t)$	$+$
f'	0 $\nearrow$

et alors
$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad f'(t) \geq f'(0) = 0.$$
On a donc

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
f	0 $\nearrow$

et alors
$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad f(t) \geq f(0) = 0,$$
ce qui prouve:
$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad t - \sin t \leq \frac{t^3}{6}.$$

(2)(a) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors pour tout $t \in [x, 2x]$,
$$x \leq t \leq 2x \Longrightarrow 0 < t < \pi \Longrightarrow \sin t > 0.$$
La fonction
$$t \mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$$
est alors parfaitement définie et continue sur le segment $[x, 2x]$. Dès lors, elle possède une intégrale sur ce segment i.e. $g(x)$ existe. Ainsi, g est définie sur J. Ensuite,
$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{t - \sin t}{t \sin t}\, dt.$$

D'après *(1)*, on a $t-\sin t\geq 0$ et puisque pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$t\in[x,2x]\Longrightarrow x\leq t\leq 2x\Longrightarrow 0<t<\pi\Longrightarrow \sin t>0,$$

on a

$$\forall t\in[x,2x],\quad \frac{t-\sin t}{t\sin t}\Longrightarrow\int_x^{2x}\frac{t-\sin t}{t\sin t}\,dt\geq 0$$

i.e. $g(x)\geq 0$. D'autre part, toujours d'après *(1)* on a $t-\sin t\leq\frac{t^3}{6}$ et donc

$$\int_x^{2x}\frac{t-\sin t}{t\sin t}\,dt\leq\int_x^{2x}\frac{\frac{t^3}{6}}{t\sin t}\,dt\leq\frac{1}{6}\int_x^{2x}\frac{t^2}{\sin t}\,dt$$

et de la croissance de la fonction $\sin$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, on a

$$t\in[x,2x]\Longrightarrow 0<x\leq t\leq 2x\leq\frac{\pi}{2}\Longrightarrow 0<\sin x\leq\sin t\Longrightarrow\frac{1}{\sin t}\leq\frac{1}{\sin x}$$

et en conséquence

$$\frac{t^2}{\sin t}\leq\frac{t^2}{\sin x}.$$

Ainsi,

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[,\quad 0\leq g(x)\leq\frac{1}{6}\int_x^{2x}\frac{t^2}{\sin x}\,dt=\frac{1}{6\sin x}\int_x^{2x}t^2\,dt.$$

Puisque

$$\int_x^{2x}t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^{2x}=\frac{1}{3}\left((2x)^3-x^3\right)=\frac{7}{3}x^3,$$

on a

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[,\quad 0\leq g(x)\leq\frac{7x^3}{18\sin x}.$$

Enfin, on sait que $\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x$. En conséquence,

$$\frac{7x^3}{18\sin x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{7x^2}{18}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$$

et du théorème d'encadrement, on déduit

$$\lim_{x\to 0}g(x)=0.$$

(b) On a

$$\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln t\right]_x^{2x}=\ln(2x)-\ln x=\ln 2.$$

On écrit

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_x^{2x}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)dt=\int_x^{2x}\frac{1}{\sin t}\,dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt\\&=\int_x^{2x}\frac{1}{\sin t}\,dt-\ln 2\\&\Longrightarrow\int_x^{2x}\frac{1}{\sin t}\,dt=g(x)+\ln 2\end{aligned}$$

et on déduit de (a):

$$\int_x^{2x}\frac{1}{\sin t}\,dt\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ln 2.$$

Exercice 93 De l'inégalité $v_n\leq 1$ que l'on multiplie par $u_n\geq 0$, on déduit

$$u_nv_n\leq u_n.$$

On a donc

$$u_nv_n\leq u_n\leq 1$$

et des hypothèse et du théorème d'encadrement, on déduit

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

Même chose pour (v_n).

Exercice 94

(1) On a $f_n'(x)=4x^4+n$, d'où les variations:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(t)$	$+$	
f_n	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

(Rappelons qu'une fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$ et a donc même limite que son terme de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$). Du théorème de la bijection, on déduit que f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dès lors, l'équation $f_n(x)=0$ possède une solution et une seule.

(2) De façon plus précise:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f_n'(t)$	$+$	$+$	$+$	
f_n	$-\infty$ $\nearrow$	-1 $\nearrow$	$\frac{1}{n^5}$ $\nearrow$	$+\infty$

et du théorème de la bijection, on déduit que $u_n\in[0,\frac{1}{n}]$. Du théorème d'encadrement, on déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

(3) On a

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{n}\Longrightarrow 0\leq\frac{u_n^5}{n}\leq\frac{1}{n^6}\Longrightarrow 0\leq\frac{\frac{u_n^5}{n}}{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n^5}.$$

En conséquence,

$$\frac{\frac{u_n^5}{n}}{\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

c'est à dire

$$\frac{u_n^5}{n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(4) De $f_n(u_n)=0$ i.e.

$$u_n^5+nu_n-1=0,$$

on déduit

$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{u_n^5}{n}$$

et puisque

$$\frac{u_n^5}{n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right),$$

c'est que par définition même,

$$\frac{1}{n}-\frac{u_n^5}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}.$$

Ainsi,

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}.$$

(5) De
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{u_n^5}{n},$$
on déduit
$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^5}{n},$$
et de
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$
on déduit alors
$$u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^5}$$
et en conséquence,
$$\frac{u_n^5}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^6}$$
d'où
$$u_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^6}.$$

Exercice 95 On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \\ v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante. De plus,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \quad \begin{aligned} &\geq 0 \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

si bien que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes et possèdent une limite commune.

Exercice 96

(1) On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq 0 \end{aligned}$$

donc (u_n) est une suite décroissante puis

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} \\ &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} \geq 0 \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite croissante. Ensuite,

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= -2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} = -2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq 0 \\ &= -2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

si bien que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes et possèdent une limite commune.

(2) On écrit
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n + 2\sqrt{n}.$$
Puisque la suite (u_n) est convergente et que $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, il est clair que
$$u_n + 2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n},$$
ce que l'on prouve formellement ainsi:
$$\begin{aligned} \frac{u_n+2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} &= \frac{u_n}{2\sqrt{n}} + \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \\ &= \frac{u_n}{2\sqrt{n}} + 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0+1 = 1. \end{aligned}$$
On a donc prouvé:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Exercice 97

(1) Étude de f et signe de $f(x) - x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗	

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les limites ℓ possibles de la suite (u_n) vérifient $f(\ell)=\ell$ donc $\ell=\frac{1}{4}$ ou $\ell=\frac{3}{4}$.

(2)

x	0		$\frac{1}{4}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{16}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

L'intervalle $I=\left[0,\frac{1}{4}\right]$ est un intervalle de stabilité de f, donc $u_n\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Puisque f est croissante sur I, la suite (u_n) est monotone et comme $u_1-u_0=f(u_0)-u_0\geq 0$, la suite (u_n) est croissante. Elle est donc convergente; sa limite ℓ vérifie $\ell\in I$, donc $\ell=\frac{1}{4}$.

(3)

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

L'intervalle $J=\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ est un intervalle de stabilité de f, donc $u_n\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Puisque f est croissante sur I, la suite (u_n) est monotone et comme $u_1-u_0=f(u_0)-u_0\leq 0$, la suite (u_n) est décroissante. Elle est donc convergente; sa limite ℓ vérifie $\ell\in J$, donc $\ell=\frac{3}{4}$.

(4)

x	$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

L'intervalle $K=\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$ est un intervalle de stabilité de f, donc $u_n\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Puisque f est croissante sur K, la suite (u_n) est monotone et comme $u_1-u_0=f(u_0)-u_0\geq 0$, la suite (u_n) est croissante. Si elle était convergente, elle convergerait vers $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$; mais comme (u_n) est croissante, sa limite ℓ vérifierait $\ell\geq u_0>\frac{3}{4}$. Il y a donc contradiction et c'est pourquoi elle tend vers $+\infty$ (rappelons qu'une suite croissante converge nécessairement vers un réel ou tend vers $+\infty$).

Exercice 98

(1) Avec $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a aisément

x	0		r		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d'où

x	0		r		$+\infty$
$f(x)-x$	0	$+$	0	$-$	

(2) On a aisément

x	0		r		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	r	$\nearrow$	$+\infty$

ce quid démontre que $I=[0,r]$ et $J=[r,+\infty[$ sont des intervalles de stabilité; donc:

- si $u_0\in I$, alors $u_n\in I$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et puisque f est croissante sur I, (u_n) est monotone et du fait que $u_1-u_0=g(u_0)\geq 0$, (u_n) est croissante;
- si $u_0\in J$, alors $u_n\in J$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et puisque f est croissante sur J, (u_n) est monotone et du fait que $u_1-u_0=g(u_0)\leq 0$, (u_n) est décroissante.

(3)
- Si $u_0\in I$, alors (u_n) est croissante et majorée (par r) donc convergente. Sa limite $\ell\in I$ vérifie $f(\ell)=\ell$ i.e. $g(\ell)=0$, d'où $\ell=r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Si $u_0\in J$, alors (u_n) est décroissante et minorée (par r) donc convergente. Sa limite $\ell\in J$ vérifie $f(\ell)=\ell$ i.e. $g(\ell)=0$, d'où $\ell=r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dans tous les cas, (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 99

(1) $u_{n+1}-u_n=u_n^2-u_n+1>0$ car $x^2-x+1>0$ pour tout réel x (discriminant <0).

(2) Si la suite (u_n) convergeait vers un réel ℓ, on aurait

$$u_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell,\quad u_n^2+1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ell^2+1$$

et par passage à la limite dans la relation

$$u_{n+1}=u_n^2+1,$$

on aurait

$$\ell=\ell^2+1,$$

ce qui est absurde puisque $x^2-x+1>0$ pour tout réel x. La suite (u_n) ne converge donc pas vers un réel; étant croissante, elle tend vers $+\infty$ (rappelons qu'une suite croissante converge nécessairement vers un réel ou tend vers $+\infty$).

Exercice 100

(1) $u_n = 2^n - 1$

(2) $u_n = \frac{n}{3}3^n$

(3) $u_n = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 101

(1) $\frac{n(n+1)}{2} - 3$

(2) n^2

(3) $\frac{3}{2}n^2 + \frac{23}{2}n - 29$

(4) $\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exercice 102

(1) On a

$$0,\underbrace{1\dots1}_{n\text{decimales}} = \sum_{k=1}^{n} 10^{-k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{10}\times\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Ainsi,

$$0,111\dots = \frac{1}{9}.$$

(2) On a

$$0,\underbrace{9\dots9}_{n\text{decimales}} = \sum_{k=1}^{n} 9.10^{-k} = 9\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10}\times\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{10}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Ainsi,

$$0,999\dots = 1.$$

(3) Le réel $0,121212\dots$ a ses décimales d'ordre impair, donc de la forme $2k+1$ avec $k \geq 0$ égales à 1 et ses décimales de rang pair, donc de la forme $2k$ avec $k \geq 1$égales à 2. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 1\times 10^{-(2k+1)} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{2k+1} = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10^2}\right)^k = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{100}\right)^k \\ &= \frac{1}{10}\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10}\times\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{10}{99} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 2\times 10^{-(2k)} &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{2k} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10^2}\right)^k = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{100}\right)^k \\ &= 2\times\frac{1}{100}\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{100}\times\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{2}{99} \end{aligned}$$

d'où

$$0,121212\dots = \frac{10}{99} + \frac{2}{99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

Exercice 103

(1) Soit $v_n = u_n - a$. Alors $v_{n+1} = u_{n+1} - a = 2u_n + 1 - a = 2(v_n + a) + 1 - a = 2v_n + a + 1$ donc en prenant $a = -1$ (appelé point fixe), la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et comme alors $v_0 = 1$, on a $v_n = 2^n$ puis $u_n = 2^n - 1$.

(2) En procédant comme en **1**, on prendra $a = -1$ et alors (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.

(3) En procédant comme en **1**, on prendra $a = -3$ et alors

$$v_{n+2} = -\frac{1}{6}v_{n+1} + \frac{1}{6}v_n.$$

Les racines de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{1}{6}r - \frac{1}{6}$ sont $-\frac{1}{2}$ donc

$$\exists A, B \ / \ v_n = A(-\frac{1}{2})^n + B(\frac{1}{3})^n$$

et $v_0 = -3$, $v_1 = -2$ donne $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{9}{2}$. Finalement,

$$u_n = 3 + \frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^n - \frac{9}{2}(\frac{1}{3})^n.$$

Exercice 104

(1) $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{9}, c = \frac{19}{27}$.

(2) $v_n = \frac{73}{27}(-2)^n$.

(3) $u_n = \frac{73}{27}(-2)^n + \frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{9}n - \frac{19}{27}$.

Exercice 105

(1) $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}$.

(2) $w_n = v_n - 1$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ d'où $w_n = w_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$ puis $v_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et enfin

$$u_n = 3^n v_n = 3^n - 2^n.$$

Exercice 106 On a

$$\rho_n e^{i\theta_n} = \rho_n\cos\theta_n + i\rho_n\sin\theta_n.$$

Notons

$$r = \lim_{n\to+\infty}\rho_n, \quad \alpha = \lim_{n\to+\infty}\theta_n.$$

Par continuité des fonctions $\cos$ et $\sin$ en α, on a

$$\cos\theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos\alpha, \quad \sin\theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin\alpha$$

et en conséquence

$$\rho_n\cos\theta_n + i\rho_n\sin\theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r\cos\alpha + ir\sin\alpha = re^{i\alpha}.$$

Exercice 107

(1) $u_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\theta}\right)$.

(2) $r^k e^{ik\theta} = r^k\left(e^{i\theta}\right)^k = \left(re^{i\theta}\right)^k$ et puisque

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1,$$

on a

$$|r| < 1 \Longrightarrow \left|re^{i\theta}\right| = |r| < 1.$$

La raison $re^{i\theta}$ de la suite géométrique $\left(\left[re^{i\theta}\right]^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant $\neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} r^k\left(e^{i\theta}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\left(re^{i\theta}\right)^k = \frac{1-\left(re^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-re^{i\theta}}.$$

Puisque $|r| < 1$, on

$$|r^n| = |r|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où

$$\begin{aligned}\left|\left(re^{i\theta}\right)^{n+1}\right| &= \left|re^{i\theta}\right|^{n+1} = |r^{n+1}|\left|e^{i\theta}\right|^{n+1} = |r^{n+1}| \times 1^{n+1}\\ &= |r^{n+1}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

et du théorème de comparaison, on déduit que

$$\left|\left(re^{i\theta}\right)^{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et en conséquence,

$$\left(re^{i\theta}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1-\left(re^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-re^{i\theta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-re^{i\theta}}$$

en conséquence de quoi

$$u_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} r^k \left(e^{i\theta}\right)^k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right).$$

La quantité conjuguée de $1-re^{i\theta}$ est $1-re^{-i\theta}$ d'où

$$\frac{1}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta}}{\left(1-re^{i\theta}\right)\left(1-re^{-i\theta}\right)} = \frac{1-re^{-i\theta}}{\left|1-re^{i\theta}\right|^2}$$

et

$$\begin{aligned}\left|1-re^{i\theta}\right|^2 &= |1-r\cos\theta - ir\sin\theta|^2 = (1-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\\ &= 1-2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\\ &= 1-2r\cos\theta + r^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-re^{-i\theta}}{\left|1-re^{i\theta}\right|^2}\right)\\ &= \mathrm{Re}\frac{1-r\cos\theta + ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta + r^2}\\ &= \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\end{aligned}$$

si bien que finalement

$$\sum_{k=0}^{n} r^k\cos(k\theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

Exercice 108 On a et en conséquence,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \operatorname{sh} x \, dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{(i+1)x} - e^{(i-1)x}\right) dx\right).$$

On calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{(i+1)x} - e^{(i-1)x}\right) dx = \left[\frac{e^{(i+1)x}}{i+1} - \frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Or

$$\frac{e^{(i+1)x}}{i+1} = \frac{e^{ix}\times e^x}{i+1} = e^x\,\frac{e^{ix}}{i+1}$$

puis

$$\frac{e^{ix}}{1+i} = \frac{e^{ix}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{e^{ix}(1-i)}{|1+i|^2} = \frac{e^{ix}(1-i)}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}}{1+i}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}(1-i)}{2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\cos x + i\sin x - i\cos x + \sin x}{2}\right)\\ &= \frac{\cos x+\sin x}{4}\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(i+1)x}}{i+1}\right) &= \mathrm{Re}\left(e^x\frac{e^{ix}}{i+1}\right) = e^x\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}}{i+1}\right)\\ &= e^x\frac{\cos x+\sin x}{2}.\end{aligned}$$

Par des calculs analogues,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right) = e^{-x}\frac{-\cos x+\sin x}{2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i+1)x}}{i+1} - \frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(i+1)x}}{i+1} - \frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{1}{2}\left[e^x\frac{\cos x+\sin x}{2} - e^{-x}\frac{-\cos x+\sin x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] - e^{-\frac{\pi}{3}}\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] - 2\right).\end{aligned}$$

Exercice 109 Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(0) = 0$, on a

$$|f(x)-f(0)| \le \varepsilon \iff |x^2| \le \varepsilon \iff |x| \le \sqrt{\varepsilon} \iff |x-0| \le \sqrt{\varepsilon}$$

si bien qu'en posant $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$, on a

$$|x-0| \le \alpha \implies |f(x)-f(0)| \le \varepsilon$$

ce qui prouve que f est continue en 0.

Exercice 110 Soit $A > 0$. On a

$$f(x) \ge A \iff \frac{1}{x^2} \ge A \iff x^2 \le \frac{1}{A} \iff |x| \le \sqrt{\frac{1}{A}} \iff |x-0| \le \sqrt{\frac{1}{A}}$$

si bien qu'en posant $\alpha = \sqrt{\frac{1}{A}}$, on a

$$|x-0| \le \alpha \implies f(x) \ge A,$$

ce qui prouve que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 111 Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|f(x) - 0| \leq \varepsilon \iff \left|\frac{1}{x}\right| \leq \varepsilon \iff |x| \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Posons $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout $x \geq x_0$, on a en particulier $x \geq 0$, donc la condition $|x| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ est réalisée si bien que

$$x \geq x_0 \implies |f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 112 Soit $A > 0$. On a

$$f(x) \geq A \iff \ln x \geq A \iff x \geq e^A$$

si bien qu'en posant $x_0 = e^A$, on a

$$x \geq x_0 \implies f(x) \geq A,$$

ce qui prouve que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 113 Prenons $\varepsilon = 1$ (ou tout autre nombre > 0 "concret" comme $\frac{1}{3}$ ou 2 ou $\pi \ldots$) dans la définition formelle de la convergence vers ℓ de la suite (u_n). Il existe alors un entier N_1 tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell| \leq 1.$$

Rappelons l'inégalité triangulaire, valable pour tout couple (a, b) de nombres réels ou complexes:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

On écrit alors, pour tout $n \geq N_1$:

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|.$$

Ensuite, la liste de réels

$$|u_0|,\ |u_1|, \ldots, |u_{N_1-1}|$$

étant finie, elle possède un plus grand élément; notons le M_1. On a alors:

$$|u_0| \leq M_1,\ |u_1| \leq M_1, \ldots |u_{N_1-1}| \leq M_1.$$

Notons d'autre part $M_2 = 1 + |\ell|$. Évidemment, $1 \leq M_2$ et en conséquence on a

$$\forall n \geq N_1,\ \ |u_n| \leq M_2.$$

Notons enfin $M = \max\{M_1, M_2\}$; puisque $M_1 \leq M$ et $M_2 \leq M$, on peut aussi bien écrire

$$|u_0| \leq M,\ |u_1| \leq M, \ldots |u_{N_1-1}| \leq M$$

que

$$\forall n \geq N_1,\ |u_n| \leq M.$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M,$$

ce qui démontre que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 114

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. L'énoncé nous dit: "à chaque fois que l'on se donne un nombre positif, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite ne s'écartent pas de ℓ de plus du double de ce nombre." Il existe donc un rang N tel que

$$\forall n \geq N,\ \ |u_n - \ell| \leq 2\varepsilon'$$

c'est à dire

$$\forall n \geq N,\ \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

La preuve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre ℓ est donc apportée.

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$. L'énoncé nous dit: "à chaque fois que l'on se donne un nombre positif, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite ne s'écartent pas de ℓ de plus de ce nombre multiplié par C." Il existe donc un rang N tel que

$$\forall n \geq N,\ \ |u_n - \ell| \leq C\varepsilon'$$

c'est à dire

$$\forall n \geq N,\ \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

La preuve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre ℓ est donc apportée.

Remarque. On pourrait interpréter ces résultats de la manière suivante: en France, l'unité de mesure légale des longueurs est le mètre et au Royaume Uni, le mile. Entre ces deux unités, on a un facteur $C = 1609$:

$$1 \text{ mile} = C \times 1609 \text{ mètres.}$$

Cet exercice nous dit que si une suite converge vers ℓ en évaluant la distance en mile, alors cette suite converge vers ℓ en évaluant la distance en mètre: trivial, non?

Exercice 115 Soit $\varepsilon > 0$. L'énoncé nous dit: "à chaque fois que l'on se donne un nombre positif, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite (u_n) ne s'écartent pas de ℓ de plus de ce nombre." Appliquons ce principe avec le nombre positif $\frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc un entier $N_1 \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N_1,\ \ |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe un entier $N_2 \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N_2,\ \ |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Puisque $N \geq N_1$ et $N \geq N_2$, on a

$$\forall n \geq N,\ \ |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\forall n \geq N,\ \ |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $n \geq N$, on a alors

$$\begin{aligned}
|u_n + v_n - (\ell + \ell')| &= |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \\
&\leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \geq N,\ \ |u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.

Exercice 116

(1) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \cos x \leq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^{n+1} x \leq \cos^n x$ et en intégrant, il vient $I_{n+1} \leq I_n$: la suite (I_n) est donc décroissante.

(2)(a) On écrit

$$I_n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n x\, dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx.$$

Puisque $0 \leq \cos^n x \leq 1$ et que $x \mapsto \cos x$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
0 \ \leq\ I_n &\leq \int_0^{\varepsilon} dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varepsilon\, dx = \varepsilon + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \cos^n \varepsilon \\
&\leq \varepsilon + \frac{\pi}{2} \cos^n \varepsilon.
\end{aligned}$$

(b) On a $0 \le \cos\varepsilon < 1$ et la suite géométrique $(\cos^n \varepsilon)$ converge alors vers 0. Il existe donc un entier N tel que pour tout $n \ge N$, $\cos^n \varepsilon \le \varepsilon$. Notons que les valeurs absolues ne servent à rien ici puisque I_n est ≥ 0; elles sont là pour la forme. Ainsi,

$$\forall n \ge N, \quad |I_n| = I_n \le \varepsilon + \frac{\pi}{2}\varepsilon = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon.$$

(3) On se ramène à la définition formelle: on va démontrer que pout tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \ge N,\ |I_n| \le \varepsilon.$$

Supposons dans un premier temps que $\varepsilon \le \frac{\pi}{2}$. En appliquant (b) en prenant $\frac{\varepsilon}{1+\frac{\pi}{2}}$ à la place de ε (qui est bien $\le \frac{\pi}{2}$ puisque $\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} \le 1$), il existe un rang N tel que pour tout $n \ge N$

$$|I_n| \le \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\varepsilon}{1+\frac{\pi}{2}} = \varepsilon.$$

Si $\varepsilon > \frac{\pi}{2}$, on a d'emblée

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |I_n| \le \varepsilon,$$

(si bien que l'on peut poser $N = 0$) puisque du fait que $0 \le \cos^n x \le 1$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$|I_n| \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \le \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$\forall n \ge N,\ |I_n| \le \varepsilon.$$

ce qui, d'après la définition formelle, démontre que la suite (I_n) converge vers 0.

Limites, équivalents: corrigés

Exercice 117

(1) 1 par composition des limites car $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$.

(2) 0 par composition des limites car $1+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\ln t \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$.

(3) $+\infty$ par composition des limites car $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(4) 0 par composition des limites car $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$ et $e^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

(5) e par composition des limites appliqué deux fois car $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $e^t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$.

(6) $+\infty$ par composition des limites appliqué deux fois car $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, $\ln t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sqrt{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(7) 1 par composition des limites car $1+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $t^3 \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 118

(1) $+\infty$ par croissance comparée.

(2) $+\infty$ par croissance comparée et composition des limites: en posant $X = x^2$, on a $X \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et

$$\frac{e^{x^2}}{x} = \frac{e^X}{\sqrt{X}} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

par croissance comparée.

(3) 0 par croissance comparée et composition des limites: en posant $X = -x$, on a $X \to +\infty$ lorsque $x \to -\infty$ et

$$x^2 e^x = X^2 e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée.

(4) $-\infty$ par croissance comparée et composition des limites: en posant $X = x^2$, on a $X \to +\infty$ lorsque $x \to -\infty$ et puisque $x = -\sqrt{X}$,

$$\frac{e^{x^2}}{x^5} = \frac{e^X}{(-\sqrt{X})^5} = -\frac{e^X}{X^{\frac{5}{2}}} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

par croissance comparée.

(5) $+\infty$ par croissance comparée et composition des limites: en posant $X = \frac{1}{x^2}$, on a $X \to +\infty$ lorsque $x \to 0$ et

$$x^4 e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{e^X}{X^2} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

par croissance comparée.

(6) 0 par croissance comparée et composition des limites: en posant $X = \frac{1}{x^2}$, on a $X \to +\infty$ lorsque $x \to 0$ et

$$\frac{e^{-\frac{3}{x^2}}}{x^4} = X^2 e^{-3X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée.

(7) $+\infty$ par croissance comparée et composition des limites: en posant $X = \frac{1}{x}$, on a $X \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$ et

$$x^2 e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^X}{X^2} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

par croissance comparée.

(8) 0 par croissance comparée et composition des limites: en posant $X = -\frac{1}{x}$, on a $X \to +\infty$ lorsque $x \to 0^-$ et

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = X^2 e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée.

Exercice 119

(1) 0 par croissance comparée.

(2) 0:

$$\sqrt{x}\ln(2x) = \sqrt{x}\ln 2 + \sqrt{x}\ln x.$$

Or $\sqrt{x}\ln 2 \to 0$ lorsque $x \to 0$ et $\sqrt{x}\ln x \to 0$ lorsque $x \to 0$ par croissance comparée, d'où le résultat. Ou encore par croissance comparée et composition des limites: en posant $X = 2x$, on a $X \to 0$ lorsque $x \to 0^+$ et

$$\sqrt{x}\ln(2x) = \sqrt{\frac{X}{2}}\ln X = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{X}\ln X \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée.

(3) $+\infty$ par croissance comparée.

(4) 0 par croissance comparée:

$$\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(5) 0 par croissance comparée:

$$\frac{\left(\ln(x^3)\right)^2}{x} = \frac{(3\ln x)^2}{x} = 9\frac{\left(\ln(x^3)\right)^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 120

(1) Lorsque x tend vers 0,

$$\sin x \sim x$$

donc

$$\frac{\sin x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

(2) On a

$$\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$$

et $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc

$$\sin \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

d'où $x^3 \sin \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \times \frac{1}{x^2} = x$.

(3) Lorsque x tend vers 0:

$$\begin{aligned}
&e^{2x} \longrightarrow e^0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow e^{2x} \sim 1\\
&\ln(1+x^2) \sim x^2\\
&\ln(1-x) \sim -x\\
&\frac{e^{2x}\ln(1+x^2)}{\ln(1-x)} \sim \frac{1\times x^2}{-x} = -x.
\end{aligned}$$

(4) On a

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

et lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\frac{1}{x} \to 0$, donc

$$\frac{1}{x} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$$

d'où

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

(5) Lorsque x tend vers 0,

$$\sin x \sim x$$

donc

$$\operatorname{sh} x \sim x \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \underset{x_t o0}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

(6) Lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned}
&\sin x \sim x \Longrightarrow (\sin x)^3 \sim x^3\\
&\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u \Longrightarrow \sin(x^4) \sim x^4
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{(\sin x)^3}{\sin(x^4)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}.$$

(7) Lorsque x tend vers 0,

$$\sqrt{1-x} \longrightarrow 1 \neq 0 \Longrightarrow \sqrt{1-x} \sim 1$$

puis

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x) \Longrightarrow 1 - e^x \underset{x\to 0}{=} -x + o(x) \Longrightarrow 1 - e^x \underset{x\to 0}{\sim} -x$$

alors que

$$\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$$

et puisque $3x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on a

$$\sin(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x \Longrightarrow \sin^2(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 9x^2$$

d'où

$$\frac{\sqrt{1-x}(1-e^x)}{\sin^2(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} = \frac{1\times(-x)}{9x^2} = -\frac{1}{9x}.$$

(8) Lorsque x tend vers 0,

$$\sin x \sim x \Longrightarrow (\sin x)^3 \sim x^3$$

donc

$$\frac{x^2 \ln x}{(\sin x)^3} \underset{x\to 0+}{\sim} \frac{x^2 \ln x}{x^3} = \frac{\ln x}{x}.$$

(9) On a

$$x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x \Longrightarrow \sqrt{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$$

d'où

$$\frac{e^x}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 121

(1) On a

$$\arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \neq 0 \Longrightarrow \arctan x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

et puisque

$$\begin{aligned}
&\cos u \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0 \Longrightarrow \cos u \underset{u\to 0}{\sim} 1\\
&\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u,
\end{aligned}$$

on a

$$\tan u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u}{1} = u.$$

Enfin, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc

$$\tan \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x},$$

d'où

$$\arctan x \times \tan \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

(2) On a

$$\cos \frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \cos 0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow \cos \frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\sim} 1$$

D'autre part,

$$\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$$

et puisque $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$,

$$\sin \frac{1}{x^2} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

d'où

$$\cos \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^2} \underset{x\to-\infty}{\sim} 1 \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

(3) On a

$$e^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow e^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1,$$

d'où

$$x e^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

(4) On a

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x) \implies e^x-1 \underset{x\to 0}{=} x+o(x) \implies e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1+2x+o(x) \implies e^{2x}-1 \underset{x\to 0}{=} 2x+o(x) \implies e^{2x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x$$

d'où

$$\frac{e^x-1}{e^{2x}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

(5) On a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+o(x) \implies \sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+o(x) \implies \sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

puis

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \implies \cos x - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+o(x^2) \implies \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

D'où

$$\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{\cos x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2 \times \frac{x}{2}}{-\frac{x^2}{2}} = -x.$$

(6) On a

$$2x^3 - x \underset{x\to +\infty}{\sim} 2x^3$$

$$\sqrt{2-\frac{1}{x}} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2} \neq 0 \implies \sqrt{2-\frac{1}{x}} \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{2}$$

$$1-x^2 \underset{x\to +\infty}{\sim} -x^2$$

d'où

$$\frac{(2x^3-x)\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{1-x^2} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{2x^3 \times \sqrt{2}}{-x^2} = -2\sqrt{2}x.$$

(7) On a

$$2x^3 - x \underset{x\to 0}{\sim} -x$$

$$\sqrt{2-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{2} \neq 0 \implies \sqrt{2-x} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2}$$

$$1-x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0 \implies 1-x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

d'où

$$\frac{(2x^3-x)\sqrt{2-x}}{1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(-x)\times\sqrt{2}}{1} = -x\sqrt{2}.$$

Exercice 122

(1) $\sin^2(2x) \underset{x\to 0}{\sim} (2x)^2$ donc $\dfrac{x^2}{\sin^2(2x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{(2x)^2} = \dfrac{1}{4}$ donc la limite vaut $\frac{1}{4}$.

(2) $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ donc $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to +\infty}{\sim} 1$ puis

$$x^2+1 \underset{x\to +\infty}{\sim} x^2 \implies \sqrt{x^2+1} \underset{x\to +\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = x$$

donc

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^3+1}}{x^2} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1\times x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la limite vaut 0.

(3) $\sin(3x^2) \underset{x\to 0}{\sim} 3x^2$ puis

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x) \implies e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$$

et en conséquence

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

d'où

$$(e^x-1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

Finalement,

$$\frac{\sin(3x^2)}{(e^x-1)^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

donc la limite vaut 3.

(4) $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ puis

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x) \implies e^x - 1 \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$$

et en conséquence

$$1-e^x \underset{x\to 0}{\sim} -x$$

. Finalement,

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1-e^x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^2}{x^2\times(-x)} = -\frac{1}{x}$$

donc la limite vaut $-\infty$.

(5) $\sqrt{2+x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{2} \neq 0$ donc $\sqrt{2+x} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2}$; de même, $e^{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ donc $e^{2x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$. Enfin, $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$, d'où

$$\frac{x\sqrt{2+x}}{e^{2x}\operatorname{sh} x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\times\sqrt{2}}{1\times x} = \sqrt{2}$$

donc la limite vaut $\sqrt{2}$.

(6) $x^6+1 \underset{x\to +\infty}{\sim} x^6$ et $x^4-1 \underset{x\to +\infty}{\sim} x^4$ donc

$$\frac{x^6+1}{x^4-1}e^{-x} \underset{x\to -\infty}{\sim} \frac{x^6}{x^2}e^{-x} = x^2e^{-x}.$$

Enfin,

$$x^2e^{-x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée; donc la limite vaut 0.

(7) $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Ainsi,

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^2 \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{(\ln x)^2}{x^2}.$$

Enfin,

$$\frac{(\ln x)^2}{x^2} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. La limite vaut donc 0.

Exercice 123

(1) On a donc

$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left[1+\frac{1}{n}\right].$$

Mais $\ln\left[1+\frac{1}{n}\right]$ tend vers $\ln 1 = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$ alors que $\ln n$ tend vers $+\infty$; il en résulte que $\ln\left[1+\frac{1}{n}\right]$ est négligeable devant $\ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left[1+\frac{1}{n}\right] \underset{n\to +\infty}{=} \ln n + o(\ln n)$$

et c'est pourquoi (cf. caractérisation dans le rappel)

$$\ln(n+1) \underset{n\to +\infty}{\sim} \ln n.$$

(2) De $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, on déduit

$$\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{=} \ln(x+o(x)) = \ln\left[x(1+o(1)\right] = \ln x + \ln\left[1+o(1)\right].$$

Mais $\ln\left[1+o(1)\right]$ tend vers $\ln 1 = 0$ lorsque x tend vers 0 alors que $\ln x$ tend vers $-\infty$; il en résulte que $\ln\left[1+o(1)\right]$ est négligeable devant $\ln x$ lorsque x tend vers 0. Ainsi,

$$\ln x + \ln\left[1+o(1)\right] \underset{x\to 0}{=} o(\ln x)$$

et c'est pourquoi (cf. caractérisation dans le rappel)

$$\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x.$$

Exercice 124

(1) Lorsque $\dfrac{u(x)}{v(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

(2) Il existe donc un réel $M>0$ tel que

$$\forall x, \quad |u(x)| \leq M$$

et alors

$$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right| \leq \frac{M}{|v(x)|} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui démontre par théorème d'encadrement que $\dfrac{u(x)}{v(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

(3) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

(4) Lorsque x tend vers $+\infty$, $\sin x$ est négligeable devant x car $\sin$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$x + \sin x \underset{x\to+\infty}{=} x + o(x)$$

et c'est pourquoi

$$x + \sin x \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

(5)(a) Toute fonction définie et continue h sur un segment I est bornée sur ce segment; plus précisément, elle possède un max et un min sur I: il existe x_0 et x_1 dans I tels que

$$h(x_0) = \inf_{x\in I} h(x), \quad h(x_1) = \sup_{x\in I} h(x).$$

(b) La fonction h est bornée sur $[0,1]$ et puisque $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, $h(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0 d'après ***(2)*** et donc

$$h(x) + \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

d'après ***(3)***.

Exercice 125

(1) On a

$$\begin{aligned}
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\
e^x &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\
xe^x &\underset{x\to 0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\
\cos x - xe^x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - x - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\
&= 1 - x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\
(e^x-1)\sin x &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)\\
&= x\times x + \frac{x^2}{2}\times x + o(x^3)\\
&= x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

(3) On a

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\\
\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\\
(\sin x)\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + o(x^4)\\
&= -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\\
&= -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\\
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\
x^2\cos x &\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^2)\\
(\sin x)\ln(1-x) + x^2\cos x &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

(4) On a

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\\
\frac{\sin x}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)(1 - x + x^2 - x^3) + o(x^3)\\
&= x - x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\
&= x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

(5) On a

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\\
\ln(1+u) &\underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)\\
\ln(1+\sin x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{3} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4}{4} + o(x^4)\\
&= x - \frac{x^2 - \frac{x^4}{3}}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

(6) On a

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\
\frac{1}{1-u} &\underset{u\to 0}{=} u+u^2+u^3+o(u^3)\\
\frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\
\frac{\sin x}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

(7) On a

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\
\frac{1}{1-u} &\underset{u\to 0}{=} u+u^2+u^3+o(u^3)\\
\frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\
\frac{e^x}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}+x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= 1+x+x^2\frac{2}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

(8) On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\\
(1-x)^frac13 &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}x^3+o(x^3)\\
\sqrt{1+x}\,(1-x)^{\frac{1}{3}} &= \left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\right)\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}x^3\right)+o(x^3)\\
&= 1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}x^3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\\
&= 1+\frac{1}{6}x-\frac{29}{72}x^2-\frac{17}{1296}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

(9) $\arctan x$ a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$ et

$$\frac{1}{1+x^2}\underset{x\to 0}{=}1-x^2+o(x^3)$$

par théorème d'intégration terme à terme des développements limités:

$$\begin{aligned}
\arctan x &\underset{x\to 0}{=} \arctan 0+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&= x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

(10) $\arcsin x$ a pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\
(1+u)^{-\frac{1}{2}} &\underset{u\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}u+o(u)\\
(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}(-x^2)+o(x^2)\\
&= 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

et par théorème d'intégration terme à terme des développements limités:

$$\begin{aligned}
\arcsin x &\underset{x\to 0}{=} \arcsin 0+x+\frac{x^3}{36}+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^3}{36}+o(x^3).
\end{aligned}$$

(11) On a

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\frac{\sin x}{x}\underset{x\to 0}{=}1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$

alors que

$$\ln(1+u)\underset{u\to 0}{=}u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+o(u^4).$$

En substituant u par $-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{24}$, en développant et en ne conservant que les termes de degré ≤ 4, on obtient

$$\ln\frac{\sin x}{x}\underset{x\to 0}{=}-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+o(x^4).$$

Exercice 126 Les équivalents ci-dessous ont été obtenus en suivant scrupuleusement le protocole:

- en présence de produit ou quotient, on effectue le produit ou le quotient des équivalents
- en présence de somme ou de différence, on effectue d'abord un développement limité qui nous sert ensuite àprodire un équivalent.

(1) On a

$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
\sin x - x &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
\sin x - x &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}\\
\frac{\sin x - x}{x^2} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2}\\
&= -\frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
e^x-1-x &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
e^x-1-x &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\\
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
1-\cos x &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
1-\cos x &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\\
(1-\cos x)^2 &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4}\\
\frac{e^x-x-1}{(1-\cos x)^2} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^4}{4}}\\
&= \frac{2}{x^2}.
\end{aligned}$$

(3) En effectuant des développements limités à l'ordre 2 (il faut bien se lancer!), on a

$$\begin{aligned}
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}}\\
(1+x)^{\frac{1}{2}} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\\
\cos x-\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}-1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\\
&= -\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+o(x^2)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

et l'on s'aperçoit rétrospectivement que des développements à l'ordre 1 auraient suffi!

(4) En effectuant des développements limités à l'ordre 1, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+u) &\underset{u\to 0}{=} u+o(u)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\
e^u &\underset{u\to 0}{=} 1+u+o(u)\\
-e^u+1 &\underset{u\to 0}{=} -u+o(u)\\
-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Cette première tentative ne permet pas de produire un équivalent. En effectuant alors des développements limités à l'ordre 2, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+u) &\underset{u\to 0}{=} u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
e^u &\underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\\
-e^u+1 &\underset{u\to 0}{=} -u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\\
-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= -\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}+1 &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

(5) On a

$$\begin{aligned}
\sin u &\underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^3}{6}+o(u^3)\\
\sin\frac{1}{x^2} &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{6x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\\
\frac{1}{x^2}-\sin\frac{1}{x^2} &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{6x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^6}.
\end{aligned}$$

(6) On a

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{sh}(u) & \underset{u\to 0}{=} & u+\dfrac{u^3}{6}+o(u^3)\\
\operatorname{sh}(2x) & \underset{x\to 0}{=} & 2x+\dfrac{8x^3}{6}+o(x^3)\\
\sin(u) & \underset{u\to 0}{=} & u-\dfrac{u^3}{6}+o(u^3)\\
\sin(2x) & \underset{x\to 0}{=} & 2x-\dfrac{8x^3}{6}+o(x^3)\\
\operatorname{sh}(2x)-\sin(2x) & \underset{x\to 0}{=} & 2x+\dfrac{8x^3}{6}-2x+\dfrac{8x^3}{6}+o(x^3)\\
 & = & \dfrac{8}{3}x^3+o(x^3)\\
 & \underset{x\to 0}{\sim} & \dfrac{8}{3}x^3.
\end{array}$$

(7) On a

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x} & = & \dfrac{\sin x - x}{x\sin x}\\
\sin x & \underset{x\to 0}{=} & x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\\
\sin x - x & \underset{x\to 0}{=} & -\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\\
\sin x - x & \underset{x\to 0}{\sim} & -\dfrac{x^3}{6}\\
\sin x & \underset{x\to 0}{\sim} & x\\
x\sin x & \underset{x\to 0}{\sim} & x^2\\
\dfrac{\sin x - x}{x\sin x} & \underset{x\to 0}{\sim} & \dfrac{\frac{-x^3}{6}}{x^2}\\
\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x} & \underset{x\to 0}{\sim} & -\dfrac{1}{6}x.
\end{array}$$

Exercice 127

(1) On a

$$\begin{array}{rcl}
\ln(1+u) & \underset{u\to 0}{=} & u-\dfrac{1}{2}u^2+o(u^2)\\
\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \underset{x\to+\infty}{=} & \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\\
x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \underset{x\to+\infty}{=} & x-\dfrac{1}{2}+o(1)\\
x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \underset{x\to+\infty}{=} & x-x+\dfrac{1}{2}+o(1)\\
 & = & \dfrac{1}{2}+o(1)\\
 & \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{1}{2}.
\end{array}$$

(2) On a

$$\begin{array}{rcl}
e^x & \underset{x\to 0}{=} & 1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\\
\cos x & \underset{x\to 0}{=} & 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\\
e^x-x-\cos x & \underset{x\to 0}{=} & 1+x+\dfrac{x^2}{2}-x-1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\\
 & = & x^2+o(x^2)\\
 & \underset{x\to 0}{\sim} & x^2\\
\dfrac{e^x-x-\cos x}{x^2} & \underset{x\to 0}{\sim} & \dfrac{x^2}{x^2}\\
 & = & 1\\
 & \underset{x\to 0}{\longrightarrow} & 1.
\end{array}$$

(3) On a

$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x} = \frac{\sin^3 x - x^3}{x^3\sin^3 x}$$

et en effectuant un développement limité à l'ordre 3:

$$\begin{array}{rcl}
\sin x & \underset{x\to 0}{=} & x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\\
(\sin x)^3 & \underset{x\to 0}{=} & \left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)^3+o(x^3)
\end{array}$$

puis en se basant sur

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

et en appliquant la règle de la poubelle:

$$\begin{array}{rcl}
(\sin x)^3 & \underset{x\to 0}{=} & x^3+o(x^3)\\
\sin^3 x - x^3 & \underset{x\to 0}{=} & x^3-x^3+o(x^3)\\
 & = & o(x^3)
\end{array}$$

ce qui ne permet pas de produire un équivalent. En effectuant un développement limité à l'ordre 5:

$$\begin{array}{rcl}
\sin x & \underset{x\to 0}{=} & x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)\\
(\sin x)^3 & \underset{x\to 0}{=} & \left(x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}\right)^3+o(x^5)
\end{array}$$

puis en se basant sur

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

et en appliquant la règle de la poubelle:

$$\begin{aligned}(\sin x)^3 &\underset{x\to 0}{=} x^3-3\frac{x^5}{6}+o(x^5)\\ \sin^3 x - x^3 &\underset{x\to 0}{=} -3\frac{x^5}{6}+o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -3\frac{x^5}{6}\\ &= -\frac{x^5}{2}\\ \sin x &\underset{x\to 0}{\sim} x\\ \sin^3 x &\underset{x\to 0}{\sim} x^3\\ x^3\sin^3 x &\underset{x\to 0}{\sim} x^6\\ \frac{\sin^3 x - x^3}{x^3\sin^3 x} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^5}{2}}{x^6}\\ &= -\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

et en conséquence

$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}-\infty \quad \frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}+\infty.$$

(4) On a

$$\frac{\arctan x}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2\arctan x-\sin^3 x}{x^2\sin^3 x}.$$

Ensuite, $\arctan x$ a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$ et

$$\frac{1}{1+x^2}\underset{x\to 0}{=}1-x^2+o(x^3)$$

par théorème d'intégration terme à terme des développements limités:

$$\begin{aligned}\arctan x &\underset{x\to 0}{=} \arctan 0 + x - \frac{x^3}{3}+o(x^3)\\ &= x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

d'où

$$x^2\arctan x \underset{x\to 0}{=} x^3-\frac{1}{3}x^5+o(x^5).$$

Puis

$$\begin{aligned}\sin x &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\\ (\sin x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3+o(x^5)\end{aligned}$$

puis en se basant sur

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

et en appliquant la règle de la poubelle:

$$\begin{aligned}(\sin x)^3 &\underset{x\to 0}{=} x^3-3\frac{x^5}{6}+o(x^5)\\ &= x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}x^2\arctan x-\sin^3 x &\underset{x\to 0}{=} x^3-\frac{1}{3}x^5-x^3+\frac{1}{2}x^5+o(x^5)\\ &= \frac{1}{6}x^5+o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6}x^5\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\sin x &\underset{x\to 0}{\sim} x\\ \sin^3 x &\underset{x\to 0}{\sim} x^3\\ x^2\sin^3 x &\underset{x\to 0}{\sim} x^5\end{aligned}$$

ce qui donne au bout du compte

$$\begin{aligned}\frac{x^2\arctan x-\sin^3 x}{x^2\sin^3 x} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{6}x^5}{x^5}\\ &= \frac{1}{6}\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 128

(1) On a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

et

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+o(1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

On en déduit:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^1=1.$$

(2) De même,

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]$$

et

$$n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\left(-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-2+o(1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-2.$$

On en déduit:

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

(3) On a

$$(\sin x)^{\tan x}=e^{\tan x\ln(\sin x)}$$

et

$$\begin{aligned}&\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{1}=x\\ &\ln(\sin x)\underset{x\to 0}{=}\ln(x+o(x))=\ln\left[x(1+o(1)\right]=\ln x+\ln\left[1+o(1)\right]\end{aligned}$$

et c'est pourquoi (cf. définition des équivalents)

$$\ln(\sin x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\ln x$$

En conséquence
$$\tan x\ln(\sin x)\underset{x\to 0^+}{\sim} x\ln x.$$
On sait par croissance comparée que
$$x\ln x\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
On en déduit:
$$e^{\tan x\ln(\sin x)}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} e^0=1.$$

Exercice 129

(1) On écrit
$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+3n+2} &= \sqrt{n^2\left[1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right]}\\ &= \sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\\ &= n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\\ &= n\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac12}\end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac12} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac12 x+\frac12\left(\frac12-1\right)\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ &= 1+\frac12 x-\frac18 x^2+o(x^2)\\ \left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac12} &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac12\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)-\frac18\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{n^2}-\frac18\times\frac{9}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 1+\frac{3}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ n\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac12} &\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac32-\frac{1}{8n}+o\left(\frac1n\right)\\ \sqrt{n^2+3n+2}-n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac32-\frac{1}{8n}+o\left(\frac1n\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac32.\end{aligned}$$

(2) On écrit
$$\begin{aligned}\sqrt{e^n+1} &= \sqrt{e^n\left(1+e^{-n}\right)}\\ &= \sqrt{e^n}\sqrt{1+e^{-n}}\\ &= e^{\frac n2}\left(1+e^{-n}\right)^{\frac12}\\ \sqrt{e^n+2} &= \sqrt{e^n\left(1+2e^{-n}\right)}\\ &= \sqrt{e^n}\sqrt{1+2e^{-n}}\\ &= e^{\frac n2}\left(1+2e^{-n}\right)^{\frac12}\end{aligned}$$
puis
$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac12} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac12 x+\frac12\left(\frac12-1\right)\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ &= 1+\frac12 x-\frac18 x^2+o(x^2)\\ \left(1+e^{-n}\right)^{\frac12} &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac12 e^{-n}-\frac18 e^{-2n}+o\left(e^{-2n}\right)\\ e^{\frac n2}\left(1+e^{-n}\right)^{\frac12} &\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac n2}+\frac12 e^{\frac{-n}{2}}-\frac18 e^{-\frac32 n}+o\left(e^{-\frac32 n}\right)\\ \left(1+2e^{-n}\right)^{\frac12} &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac12\times 2e^{-n}-\frac18\times 4e^{-2n}+o\left(e^{-2n}\right)\\ &= 1+e^{-n}-\frac12 e^{-2n}+o\left(e^{-n}\right)\\ e^{\frac n2}\left(1+2e^{-n}\right)^{\frac12} &\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac n2}+e^{\frac{-n}{2}}-\frac12 e^{-\frac32 n}+o\left(e^{-\frac32 n}\right)\\ \sqrt{e^n+1}+\sqrt{e^n+2}-2e^{\frac n2} &\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac n2}+\frac12 e^{\frac{-n}{2}}-\frac18 e^{-\frac32 n}+e^{\frac n2}+e^{\frac{-n}{2}}-\frac12 e^{-\frac32 n}+o\left(e^{-\frac32 n}\right)-2e^{\frac n2}\\ &= \frac32 e^{\frac{-n}{2}}-\frac58 e^{-\frac32 n}+o\left(e^{-\frac32 n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac32 e^{\frac{-n}{2}}\end{aligned}$$
et c'est pourquoi
$$\sqrt{e^n+1}+\sqrt{e^n+2}-2e^{\frac n2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(3) On écrit
$$\begin{aligned}\ln(n^2+3) &= \ln\left(n^2\left[1+\frac{3}{n^2}\right]\right)\\ &= \ln(n^2)+\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\\ &= 2\ln n+\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\\ \ln(n+1) &= \ln\left(n\left[1+\frac1n\right]\right)\\ &= \ln n+\ln\left(1+\frac1n\right)\end{aligned}$$
puis
$$\ln(1+x)\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
et donc
$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac1n\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac1n-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ \ln(n^2+3)-2\ln(n+1) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{n^2}-\frac2n+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= -\frac2n+\frac{4}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ n\left(\ln(n^2+3)-2\ln(n+1)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -2+\frac4n+o\left(\frac1n\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -2\end{aligned}$$

et c'est pourquoi

$$n\left(\ln(n^2+3)-2\ln(n+1)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-2.$$

Exercice 130 On écrit

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1} &= \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\\
&= \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\\
\sqrt{x^2-1} &= \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\\
&= \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\\
\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} &= \sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)
\end{aligned}$$

et on fait attention au fait que

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x<0.\end{cases}$$

On a donc

$$f(x)=\begin{cases}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x\geq 0\\ -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
(1+u)^{\frac{1}{2}} &\underset{u\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{u^2}{2}+o(u^2)\\
&= 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o(u^2)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} &\underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\\
\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} &\underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\\
\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} &\underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\\
&= 2-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)
\end{aligned}$$

et en conséquence

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{=}\begin{cases}x\left(2-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) & \text{si } x\geq 0\\ -x\left(2-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) & \text{si } x<0.\end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} 2x-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\
f(x) &\underset{x\to-\infty}{=} -2x-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).
\end{aligned}$$

Les droites d'équation

$$y=2x,\qquad y=-2x$$

sont donc des asymptotes lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ respectivement. Enfin,

$$\begin{aligned}
f(x)-2x &\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{4x^3}
\end{aligned}$$

et donc

$$f(x)-2x<0$$

au voisinage de $+\infty$. De même,

$$\begin{aligned}
f(x)+2x &\underset{x\to-\infty}{=} -\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\
&\underset{x\to-\infty}{=} -\frac{1}{4x^3}
\end{aligned}$$

et donc

$$f(x)+2x>0$$

au voisinage de $-\infty$. C'est pourquoi le graphe de f est situé en-dessous de son asymptote et au-dessus respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.

Dérivées et primitives: corrigés

Exercice 131

(1) $2\sin x\cos x$

(2) $-6\sin(3x)\cos(3x)=-3\sin(6x)$

(3) $\dfrac{-\cos x}{(\sin x)^2}$

(4) $\dfrac{1}{(\cos x)^2}$

(5) $\dfrac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$

(6) $-\dfrac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

Exercice 132

(1) $2\mathrm{ch}\,(2x)$

(2) $\mathrm{ch}\,^2x+\mathrm{sh}\,^2x$

(3) $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,^2x}$

(4) $\dfrac{\mathrm{sh}\,x(2\mathrm{ch}\,^2x-3\mathrm{sh}\,^2x)}{\mathrm{ch}\,^4x}$.

Exercice 133

(1) $-\dfrac{4}{3x^5}$

(2) $\dfrac{3}{(1-x)^4}$

(3) $\dfrac{-9}{(3x-2)^4}$

(4) $\dfrac{3}{x^5}$

(5) $\dfrac{-6x^2}{(1+x^3)^3}$

(6) $\dfrac{32x}{(2-4x^2)^3}$.

Exercice 134

(1) $f'(x) = \dfrac{-2(8x+1)}{(2x-1)^2(4x+3)^2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{8}{25}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

(2) $f'(x) = \dfrac{-8(3x+1)}{(2x-1)^3(4x+3)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0
f	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{125}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

(3) $f'(x) = \dfrac{-10(4x+1)}{(2x-1)^4(4x+3)^3}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0
f	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{27}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

(4) $f'(x) = \dfrac{x-3}{(1+x)^3}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	0

(5) $f'(x) = \dfrac{2(1+x^2)(x^2-2x-3)}{((2x-1)^4}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{4}{27}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 135

(1) $-\dfrac{4}{x^5}$

(2) $\dfrac{-3}{(2+x)^4}$

(3) $\dfrac{4}{(1-x)^5}$

(4) $-\dfrac{6}{(3x-2)^2}\sqrt{2x+3} + \dfrac{1}{(3x-2)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}} = \dfrac{-6(2x+3)+(3x-2)}{(3x-2)^3\sqrt{2x+3}} = -\dfrac{9x+20}{(3x-2)^2\sqrt{2x+3}}$

(5) $\dfrac{-3}{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}$

(6) $\dfrac{4x^3}{(1-x^4)^2}$

Exercice 136

(1) $(\ln x + 1)x^x$

(2) $-(\ln x + 1)x^{-x}$

(3) $2\dfrac{\ln x}{x}x^{\ln x}$

(4) $-\dfrac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$

(5) $-\dfrac{3x+2}{2x^2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

(6) $\dfrac{2x}{(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice 137

(1) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}$

(2) $\dfrac{3}{1+9x^2}$

(3) $\dfrac{2x}{1+(1+x)^2}$

(4) $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+(\arctan x)^2)}$

(5) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

(6) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 138

(1) $\dfrac{2x^3}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}}$

(2) $\dfrac{2}{1+(2x+3)^2}$

(3) $\dfrac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}$

(4) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

(5) $-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

(6) $(1+\tan^2 x)e^{\tan x}$

(7) $\dfrac{2}{1-x}\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

Exercice 139

(1) $\dfrac{-1}{3t^3}$.

(2) $\dfrac{-1}{4t^4}$.

(3) $\dfrac{-1}{9(3t+1)^3}$.

(4) $\dfrac{-1}{3(3t+1)}$.

(5) $\dfrac{1}{9(2-3t)^3}$.

(6) $\dfrac{1}{2(1-t)^2}$.

(7) $\dfrac{2}{5}(\dfrac{1}{2}t+3)^5$.

(8) $\dfrac{-2}{3(\frac{1}{2}t+3)^3}$.

(9) $\dfrac{1}{3}\ln(3t+2)$.

(10) $-4\ln\left(-\dfrac{1}{4}t+2\right)$.

(11) $\dfrac{-3}{2t^2}$.

(12) $\dfrac{1}{4(4t+1)^2}$.

Exercice 140

(1) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

(2) $2\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}$

(3) $\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

(4) $2\sqrt{x}$

(5) $\dfrac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$

(6) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}$

(7) $-4\sqrt{1-x}$.

Exercice 141

(1) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$

(2) $-\dfrac{1}{2}\sin(3-2x)$

(3) $\dfrac{1}{2}e^{2x}$

(4) $-3e^{-\frac{1}{3}x}$

(5) $\dfrac{1}{3}e^{3x-1}$.

Exercice 142

(1) $\sin(x^2)$

(2) $-\dfrac{1}{2}\cos(x^2)$

(3) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

(4) $\dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2+1}$

(5) $\ln(e^x+1)$

(6) $\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$

(7) $\dfrac{1}{\cos x}$

(8) $\arctan(e^x)$

(9) $-\ln|\cos(x)|$

(10) $-\dfrac{1}{2}\ln|\cos(2x)|$.

Exercice 143

(1) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

(2) $-\dfrac{1}{\ln x}$

(3) $\ln|\ln x|$

(4) $\dfrac{1}{6}\ln\left|3e^{2x}-1\right|$

Exercice 144

(1) $\dfrac{1}{16}\left(1+3e^4\right)$

(2) -2π

(3) $\dfrac{1}{27}\left(2-17e^{-3}\right)$.

Exercice 145

(1) $I_1 = \int_0^1 2(t^2+4)t^2\,dt = \frac{46}{15}$.

(2) $I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}[\arctan u]_0^1 = \frac{\pi}{8}$

(3) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos^2 u\,du = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2u)\,du = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4u)}{2}\,du = \frac{\pi}{16}$.

Exercice 146

(1) $x\ln x - x$

(2) $\frac{1}{2}(2x+3)\ln(2x+3) - x - \frac{3}{2}$

(3) $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$

(4) $\cos x + x\sin x$

(5) $xe^x - e^x$

(6) $\frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x}$

(7) $\frac{1}{2}(x-1)^2e^{2x} - \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$.

Exercice 147

(1) $\frac{1}{2}\arctan(2x)$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x)$

(3) $\frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}x)$

(4) $-(\cos\theta)^4 - 4(\cos\theta)^3 - \frac{9}{2}(\cos\theta)^2$

(5) $2\ln(\sqrt{x}+1)$.

Démonstrations de certains théorèmes

Retour vers le théorème 1 De $P(z)=\sum a_k z^k=0$, on déduit $\overline{P(z)}=\overline{0}=0$; mais

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{\sum a_k z^k}\\ &= \sum \overline{a_k z^k} \text{ (conjugué de la somme = somme des conjugués)}\\ &= \sum \overline{a_k}\times \overline{z}^k \text{ (conjugué d'un produit = produit des conjugués)}\\ &= \sum a_k \overline{z}^k \text{ (les } a_k \text{ sont réels),}\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\overline{z}$ est également une racine de P. Ensuite, si z est une racine de multiplicité 2 de P, alors $P(z)=0$, $P'(z)=0$ et $P''(z)\neq 0$. Puisque P' et P'' sont eux aussi à coefficients réels, $\overline{z}$ est une racine de P' mais n'est pas une racine de P'', sans quoi $\overline{\overline{z}}=z$ serait une racine de P''. Donc $\overline{z}$ est bien une racine de multiplicité 2 de P.

Retour vers le théorème 2 Supposons pour fixer les idées que $I=[a,b[$. Soit $x\in I$. La relation de Chasles pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment donne

$$\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^x f(t)\,dt.$$

Par hypothèse et par définition,

$$\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Donc

$$\int_c^x f(t)\,dt$$

possède une limite lorsque x tend vers b, ce qui prouve que

$$\int_c^b f(t)\,dt$$

converge, et cette limite, donc cette intégrale, vaut

$$\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^c f(t)\,dt,$$

d'où le résultat.

Retour vers le théorème 3 Par hypothèse,

$$\frac{f(t)}{g(t)}\underset{t\to b}{\longrightarrow}1.$$

Posons $\lambda(t)=\frac{f(t)}{g(t)}$, si bien que $f(t)=\lambda(t)g(t)$ avec

$$\lim_{t\to b}\lambda(t)=1.$$

On a donc $0,9\leq\lambda(t)\leq 1,1$ sur un certain intervalle $[d,b[$. Les fonctions f et g étant ≥ 0, on a alors $0,9g(t)\leq f(t)\leq 1,1g(t)$. On conclut grâce au théorème de comparaison par majoration. (étant entendu que si g possède une intégrale, alors $1,1\times g$ aussi, etc.).

Retour vers le théorème 4

- *Cas où f est à valeurs réelles.* Pour tout $y\in\mathbb{R}$, notons $y^+=\sup\{y,0\}$ et $y^-=\sup\{-y,0\}$ i.e. $y^+=y$ et $y^-=0$ lorsque $y\geq 0$ alors que $y^+=0$ et $y^-=-y$ lorsque $y\leq 0$. Il est immédiat de vérifier que
$$y=y^+-y^-,\quad |y|=y^++y^- \tag{2.1}$$
$$0\leq y^+\leq|y|,\quad 0\leq y^-\leq|y| \tag{2.2}$$
$$y^+=\frac{1}{2}(|y|+y),\quad y^-=\frac{1}{2}(|y|-y) \tag{2.3}$$
Considérons sur I les fonctions $f^+:t\mapsto(f(t))^+$ et $f^-:t\mapsto(f(t))^-$. Les fonctions f^+ et f^- sont des fonctions ≥ 0 et continues car f étant continue, $|f|$ l'est aussi et on a $f^+:t\mapsto\frac{1}{2}(|f(t)|-f(t))$, qui est donc la somme de deux fonctions continues; idem pour f^-. De plus, f^+ et f^- sont toutes deux $\leq|f|$. Il résulte du théorème de comparaison par majoration, et du fait que par hypothèse $\int_a^b|f(t)|\,dt$ converge, que les intégrales $\int_a^b f^+(t)\,dt$ et $\int_a^b f^-(t)\,dt$ sont convergentes et donc $\int_a^b(f^+(t)-f^-(t))\,dt$ est convergente autrement dit $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.
- *Cas où f est à valeurs complexes.*
On écrit: $f=\mathrm{Re}\,f+\mathrm{i}\mathrm{Im}\,f$. Pour tout $z=a+ib\in\mathbb{C}$, on a
$$|\mathrm{Re}\,z|=|a|=\sqrt{a^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}=|z|$$
et de même $|\mathrm{Im}\,z|\leq|z|$. Donc les fonctions $|\mathrm{Re}\,f|$ et $|\mathrm{Im}\,f|$ sont des fonctions ≥ 0 et $\leq|f|$. Puisque $\int_a^b|f(t)|\,dt$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison par majoration que $\int_a^b|\mathrm{Re}\,f(t)|\,dt$ et $\int_a^b|\mathrm{Im}\,f(t)|\,dt$ sont convergentes.
Ainsi, les fonctions à valeurs réelles $\mathrm{Re}\,f$ et $\mathrm{Im}\,f$ sont intégrables sur I. D'après la première partie de la démonstration, on en déduit que les intégrales $\int_a^b\mathrm{Re}\,(f(t))\,dt$ et $\int_a^b\mathrm{Im}\,(f(t))\,dt$ sont convergentes. Donc $f=\mathrm{Re}\,f+\mathrm{i}\mathrm{Im}\,f$ a elle aussi son intégrale convergente.
- Pour l'inégalité triangulaire, supposons par exemple que $I=]a,b]$; pour tout $x\in]a,b]$, on a l'inégalité triangulaire pour les intégrales propres:
$$\left|\int_x^b f(t)\,dt\right|\leq\int_x^b|f(t)|\,dt$$
Par définition,
$$\int_x^b f(t)\,dt\underset{x\to a}{\longrightarrow}\int_a^b f(t)\,dt$$
et on a donc
$$\left|\int_x^b f(t)\,dt\right|\underset{x\to a}{\longrightarrow}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$$
alors que
$$\int_x^b|f(t)|\,dt\underset{x\to a}{\longrightarrow}\int_a^b|f(t)|\,dt.$$
L'inégalité triangulaire s'obtient donc par passage à la limite, sachant qu'en cas d'existence de limites (ce qui est le cas ici!), il y a conservation des inégalités larges.

Retour vers le théorème 5 Il existe donc une constante $C>0$ telle que $|f(t)|\leq C|g(t)|$ sur un voisinage de b.

- Par hypothèse d'intégrabilité de g, $\displaystyle\int_a^b|g(t)|\,dt$ converge et donc $\displaystyle\int_a^b C|g(t)|\,dt$ aussi
- Par théorème de comparaison par majoration, $\displaystyle\int_a^b|f(t)|\,dt$ converge.

Retour vers le théorème 6 Par hypothèse, $\displaystyle\lim_b\frac{f}{g}=0$, donc sur un certain voisinage de b (en prenant $\varepsilon=1$ dans la définition formelle d'une limite nulle), on a $\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|\leq 1$ et donc $|f(t)|\leq|g(t)|$ sur un voisinage de b et on est ramenés au théorème précédent.

Retour vers le théorème 7

Soit $(f, g) \in L_1(I) \times L_1(I)$ et α, β des scalaires. De l'inégalité triangulaire

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, |u + v| \le |u| + |v|,$$

on déduit

$$\forall t \in I, \quad |\alpha f(t) + \beta g(t)| \le |\alpha||f(t)| + |\beta||g(t)|$$

(que les fonctions soient à valeurs réelles ou complexes). Par hypothèse, les intégrales

$$\int_I |f(t)|\, dt$$

et

$$\int_I |g(t)|\, dt$$

sont convergentes; il en est donc de même pour

$$\int_I |\alpha||f(t)| + |\beta||g(t)|\, dt$$

et en conséquence,

$$\alpha f + \beta g$$

est intégrable d'après le théorème de comparaison pour les fonctions à valeurs ≥ 0, en l'occurrence

$$|\alpha f(t) + \beta g(t)|$$

et

$$|\alpha||f(t)| + |\beta||g(t)|.$$

Ainsi, $\alpha f + \beta g \in L_1(I, \mathbb{K})$, ce qui prouve que $L_1(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur I).

Retour vers le théorème 8 Il existe donc $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$ et on supposera x_0 intérieur à I (si x_0 est une extrémité de I, on adapte facilement la démonstration). Prenons alors $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$ dans la définition formelle de la continuité de f en x_0: il existe alors $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

On a donc

$$-\varepsilon \le f(x) - f(x_0) \le \varepsilon$$

et donc

$$-\varepsilon + f(x_0) \le f(x) \le \varepsilon + f(x_0),$$

c'est à dire

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad \frac{1}{2} f(x_0) \le f(x) \le \frac{3}{2} f(x_0).$$

D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\, dt &= \int_a^{x_0-\alpha} f(t)\, dt + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)\, dt + \int_{x_0+\alpha}^{b} f(t)\, dt \\
&\ge 0 + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{1}{2} f(x_0)\, dt + 0 \\
&= \frac{1}{2} f(x_0) \times 2\alpha > 0.
\end{aligned}$$

On a prouvé que si f est non identiquement nulle sur I, alors $\int_I f(t)\, dt > 0$ ce qui prouve le résultat voulu par par contraposition.

Retour vers le théorème 9 Rappelons que par convention, le polynôme nul a un degré égal à $-\infty$. La condition $0 \le \deg(P_1)$ assure donc que les polynômes sont distincts du polynôme nul. Pour prouver la liberté, soit $\alpha_1, \ldots \alpha_N$ des scalaires tels que

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_N P_N = 0$$

(le membre de droite désignant le polynôme nul). Si l'on avait $\alpha_N \neq 0$, on aurait

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{N-1} P_{N-1} = -\alpha_N P_N \tag{2.4}$$

et puisque

$$\alpha_N \neq 0 \implies \deg(-\alpha_N P_N) = \deg(P_N),$$

on aboutirait à une absurdité puisque par hypothèse, le membre de gauche de (2.4) est de degré strictement inférieur à celui de P_N. Ainsi, $\alpha_N = 0$ et de proche en proche tous les α_i sont nuls.

Retour vers le théorème 10 Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie n et $f : E \to F$ une application linéaire. Démontrons que

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E.$$

- Posons $p = \dim(\operatorname{Ker} f)$ et considérons une base

  $$(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$$

  de $\operatorname{Ker} f$.
- Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, qui est donc de dimension $n - p$ et soit

  $$(\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n)$$

  une base de S, de sorte que

  $$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n)$$

  constitue une base de E.
- On a vu que quelle que soit la base, son image par f engendre $\operatorname{Im} f$:

  $$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_p), f(\vec{e}_{p+1}), \ldots, f(\vec{e}_n)\big)$$

  et puisque

  $$f(\vec{e}_1) = \ldots = f(\vec{e}_p) = \vec{0},$$

  on en déduit

  $$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(\vec{e}_{p+1}), \ldots, f(\vec{e}_n)\big).$$

- Démontrons que

  $$\operatorname{Vect}\big(f(\vec{e}_{p+1}), \ldots, f(\vec{e}_n)\big)$$

  est une famille libre. Soit alors $(\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)$ des scalaires tels que

  $$\alpha_{p+1} f(\vec{e}_{p+1}) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}.$$

  Par linéarité de f, on a alors

  $$f\big(\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n\big) = \vec{0}.$$

  C'est donc que

  $$\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n \in \operatorname{Ker} f$$

  et qu'alors $\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$ est une combinaison des vecteurs $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$: il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que

  $$\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_p \vec{e}_p$$

  et donc

  $$-\alpha_1 \vec{e}_1 - \ldots - \alpha_p \vec{e}_p + \alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}.$$

  La famille

  $$(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n)$$

étant libre, cela implique que tous les coefficients de cette combinaison sont nuls. En particulier,

$$\alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_n = 0.$$

C'est exactement ce qu'il fallait obtenir pour prouver la liberté de la famille

$$\mathrm{Vect}\big(f(\vec{e}_{p+1}), \ldots, f(\vec{e}_n)\big).$$

Puisqu'elle engendre $\mathrm{Im}\, f$, c'est alors une base de $\mathrm{Im}\, f$ et elle comporte $n-p$ vecteurs. C'est pourquoi

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}\, f) &= n - p \\ &= n - \dim(\mathrm{Ker}\, f) \end{aligned}$$

et le théorème du rang est démontré. Remarquons que la restriction de f à S engendre alors un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, f$ (son noyau est réduit au vecteur nul: c'est la preuve de la liberté ci-dessus donc cette restriction est injective et on a vu que son image est justement $\mathrm{Im}\, f$).

Retour vers le théorème 11 Notons P'' la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$. Soit $\vec{x} \in E$ et X, X', X'' respectivement les matrices colonnes de ses composantes dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$. Des formules de changement de base, on a

$$X = PX'$$

et toujours d'après ces formules

$$X' = P'X''$$

si bien que

$$X = (P \times P')X''.$$

Enfin, toujours d'après ces formules

$$X = P''X''$$

et en conséquence,

$$P''X'' = (P \times P')X''$$

et ce, quel que soit le vecteur $\vec{x}$ de E et donc quel que soit le vecteur colonne X''. Il n'est évidemment pas possible de "simplifier" par X'', même s'il est non nul car "simplifier" par un éleement, c'est en réalité multiplier les deux membres d'une égalité par l'inverse de cet élément. Or les matrices colonnes, quelles qu'elles soient, ne sont pas inversibles. *La notion d'inversibilité n'a de sens que pour les matrices carrées.* Un bon raisonnement est le suivant: on a donc

$$\forall X'' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (P'' - P \times P')X'' = 0$$

(où $n = \dim E$). Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $P'' - P \times P'$. La relation ci-dessus montre que u est l'endomorphisme nul et c'est pourquoi sa matrice associée $P'' - P \times P'$ dans la base canonique est nulle, ce qui achève la démonstration.

Retour vers le théorème 12 On va démontrer dans un premier temps que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ en prouvant

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p \\ \Im p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{\vec{0}\}. \end{array} \right.$$

- Soit $z \in \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(p)$; alors il existe $y \in E$ tel que

  $$z = p(y)$$

  (car $z \in \mathrm{Im}\,(p)$ et

  $$p(z) = \vec{0}$$

  (car $z \in \mathrm{Ker}\,(p)$). Mais

  $$\begin{aligned} p(z) &= p(p(y)) \\ &= p(y) \end{aligned}$$

  (car $p \circ p = p$). Ainsi,

  $$\vec{0} = p(y)$$

  i.e.

  $$\vec{0} = z.$$

  On a donc prouvé que

  $$\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(p) = \{\vec{0}\}.$$

- Soit $x \in E$; écrivons

  $$x = p(x) + x - p(x).$$

  Par définition même,

  $$p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$$

  alors que

  $$\begin{aligned} p(x - p(x)) &= p(x) - p(p(x)) \\ &= p(x) - p(x) \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

  ce qui prouve que

  $$x - p(x) \in \mathrm{Ker}\,(p).$$

  On a donc prouvé que tout x de E appartient à

  $$\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}\,(p)$$

  i.e.

  $$E = \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}\,(p),$$

  ce qui achève la preuve du fait que

  $$E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p.$$

Enfin, l'écriture

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\,(p)} + \underbrace{x - p(x))}_{\in \mathrm{Ker}\,(p)}$$

montre par définition même, du fait que $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p)$, que $p(x)$ est le projeté de x sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$.

Retour vers le théorème 13

- Observons que

  $$\begin{aligned} y \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) &\iff (s - \mathrm{Id}_E)(y) = \vec{0} \iff s(y) - y = \vec{0} \iff s(y) = y \\ y \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E) &\iff (s + \mathrm{Id}_E)(y) = \vec{0} \iff s(y) + y = \vec{0} \iff s(y) = -y. \end{aligned}$$

  Soit $z \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$; alors $s(z) = z$ et $s(z) = -z$. En effectuant la différence, il vient $-2z = \vec{0}$, d'où $z = \vec{0}$. On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$. Soit $x \in E$; écrivons

  $$x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x)).$$

  Alors $s(x + s(x)) = s(x) + s(s(x)) = s(x) + x$ (car $s \circ s = \mathrm{Id}_E$), donc $x + s(x) \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\frac{1}{2}(x + s(x))$ aussi. De même, $s(x - s(x)) = s(x) - s(s(x)) = s(x) - x = -(x - s(x))$; donc $x - s(x) \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ et $\frac{1}{2}(x - s(x))$ aussi.
  On a donc prouvé que tout x de E appartient à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ i.e. $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ et finalement $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. De plus, l'écriture

  $$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{\in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{\in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)}$$

  qui donne d'après ci-dessus

  $$s(x) = \frac{1}{2}(x + s(x)) - \frac{1}{2}(x - s(x))$$

  montre par définition même, du fait que $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$, que $s(x)$ est le symétrique de x par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

Retour vers le théorème 14 L'aspect linéaire de l'application trace est à peu près clair. D'autre part, si $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$, alors $MN = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ et $NM = (d_{ij})$ avec $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$ si bien que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(MN) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\\ \mathrm{Tr}(NM) &= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik}\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire $\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}b_{qp}$. On reconnaît bien $\mathrm{Tr}(NM)$.

Enfin, si M et N sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $N = P^{-1}MP$, et alors:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(N) &= \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}((P^{-1}M)P) = \mathrm{Tr}(P(P^{-1}M))\\ &= \mathrm{Tr}((PP^{-1}M) = \mathrm{Tr}(I_nM) = \mathrm{Tr}(M).\end{aligned}$$

Retour vers le théorème 15

- Il a été établi dans l'étude des projections:

$$p(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in A, \quad p(\vec{v}) = \vec{0} \iff \vec{v} \in B$$

autrement dit

$$p(\vec{v}) = 1 \times \vec{v} \iff \vec{v} \in A, \quad p(\vec{v}) = 0 \times \vec{v} \iff \vec{v} \in B.$$

Ceci prouve donc que 1 et 0 sont des valeurs propres de p et que les sous-espaces propres associés sont respectivement A et B.
Il reste à démontrer que p ne possède pas d'autre valeur propre.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de p et $\vec{x} \neq 0$ un vecteur propre associé:

$$p(\vec{x}) = \lambda\vec{x}.$$

Écrivons

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in A \times B$$

de sorte que par définition,

$$p(\vec{x}) = \vec{x}_1.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \lambda\vec{x}\\ &= \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2,\end{aligned}$$

c'est à dire

$$(1-\lambda)\vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_2.$$

Or A et B étant des sous-espaces vectoriels,

$$(1-\lambda)\vec{x}_1 \in A, \quad \lambda\vec{x}_2 \in B$$

et cette égalité entre un vecteur de A et un vecteur B n'est possible, du fait que A et B sont en somme directe, que si ces vecteurs sont nuls:

$$(1-\lambda)\vec{x}_1 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{x}_2 = \vec{0}.$$

Or $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \neq 0$, donc soit $\vec{x}_1 \neq 0$ et on en déduit $1 - \lambda = 0$, soit $\vec{x}_2 \neq 0$ et on en déduit $\lambda = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

- Il a été établi dans l'étude des symétries:

$$s(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in A, \quad s(\vec{v}) = -\vec{v} \iff \vec{v} \in B$$

autrement dit

$$s(\vec{v}) = 1 \times \vec{v} \iff \vec{v} \in A, \quad s(\vec{v}) = -1 \times \vec{v} \iff \vec{v} \in B.$$

Ceci prouve donc que 1 et -1 sont des valeurs propres de s et que les sous-espaces propres associés sont respectivement A et B.
Il reste à démontrer que s ne possède pas d'autre valeur propre.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de s et $\vec{x} \neq 0$ un vecteur propre associé:

$$s(\vec{x}) = \lambda\vec{x}.$$

Écrivons

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in A \times B$$

de sorte que par définition,

$$s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 - \vec{x}_2 &= \lambda\vec{x}\\ &= \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2,\end{aligned}$$

c'est à dire

$$(1-\lambda)\vec{x}_1 = (1+\lambda)\vec{x}_2.$$

Or A et B étant des sous-espaces vectoriels,

$$(1-\lambda)\vec{x}_1 \in A, \quad (1+\lambda)\vec{x}_2 \in B$$

et cette égalité entre un vecteur de A et un vecteur B n'est possible, du fait que A et B sont en somme directe, que si ces vecteurs sont nuls:

$$(1-\lambda)\vec{x}_1 = \vec{0} \quad \text{et} \quad (1+\lambda)\vec{x}_2 = \vec{0}.$$

Or $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \neq 0$, donc soit $\vec{x}_1 \neq 0$ et on en déduit $1 - \lambda = 0$, soit $\vec{x}_2 \neq 0$ et on en déduit $1 + \lambda = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Retour vers le théorème 16 L'un des sens est évident: si F est stable par u, alors l'image de chaque e_i appartient à F. Dans l'autre sens, si chaque $u(e_i)$ appartient à F, soit $x \in F$; alors il existe des scalaires $x_1, \ldots, x_r$ tels que $x = x_1e_1 + \ldots + x_re_r$ et alors

$$u(x) = x_1u(e_1) + \ldots + x_ru(e_r) \in F.$$

Retour vers le théorème 17 En effet, en notant $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r1} & \ldots & a_{rr}\end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned}u(e_1) &= a_{11}e_1 + \ldots + a_{r1}e_r \in F\\ &\vdots\\ u(e_r) &= a_{1r}e_1 + \ldots + a_{rr}e_r \in F.\end{aligned}$$

La stabilité de f est alors conséquence du théorème IX.7.18

Retour vers le théorème 18 Deux lois confèrent à un ensemble E une structure d'espace vectoriel lorsqu'elles vérifient certaines propriétés, notamment celle-ci:

$$\forall\lambda \in \mathbb{K},\ \forall(x, y) \in E \times E,\ \lambda \times (x + y) = \lambda \times x + \lambda \times y.$$

Contentons-nous de démontrer celle-ci pour notre produit cartésien.

Soit donc $\lambda \in K$ et deux éléments $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ de E. Alors

$$\begin{aligned}\lambda \times \big((x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p)\big) &= \lambda \times (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p) \text{ (définition de la loi interne)}\\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_p + y_p)) \text{ (définition de la loi externe)}\\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \ldots, \lambda x_p + \lambda y_p) \text{ (propriété de chaque loi externe)}\\ &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) + (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_p) \text{ (définition de la loi interne)}\\ &= \lambda(x_1, \ldots, x_p) + \lambda(y_1, \ldots, y_p) \text{ (définition de la loi externe)}\end{aligned}$$

ce qui est exactement ce qu'il fallait démontrer.

Retour vers le théorème 19 Il est assez évident que si

$$\begin{cases} (e_{1,1},\dots,e_{1,n_1}) & \text{est une base de } E_1 \\ (e_{2,1},\dots,e_{2,n_2}) & \text{est une base de } E_2 \\ \vdots & \\ (e_{p,1},\dots,e_{p,n_p}) & \text{est une base de } E_p, \end{cases}$$

alors

$$((e_{1,1},\vec{0}_2,\dots,\vec{0}_p),\dots,(e_{1,n_1},\vec{0}_2,\dots,\vec{0}_p),\dots,(\vec{0}_1,\dots,\vec{0}_{p-1},e_{p,1}),\dots,(\vec{0}_1,\dots,\vec{0}_{p-1},e_{p,n_p}))$$

est une famille libre et génératrice et donc une base de $E_1\times\dots\times E_p$. Et il est clair que cette famille comporte

$$n_1+\dots+n_p$$

vecteurs.

Retour vers le théorème 20 Puisque chaque F_i est un sous-espace vectoriel, le vecteur nul appartient à chaque F_i et dans la mesure où

$$\underbrace{\vec{0}}_{\in F_1}+\dots+\underbrace{\vec{0}}_{\in F_r}=\vec{0},$$

on en déduit que $\vec{0}\in F$.

D'autre part, soit

$$x=x_1+x_2+\dots+x_r$$

et

$$x'=x'_1+x'_2+\dots+x'_r$$

deux éléments de F, avec $x_1,x'_1\in F_1$,...,$x_r,x'_r\in F_r$ et λ,μ deux scalaires. Alors du fait que $F_1,\dots,F_r$ sont des sous-espaces vectoriels, on a $\lambda x_1+\mu x'_1\in F_1$,...,$\lambda x_r+\mu x'_r\in F_r$, on a

$$\begin{aligned}\lambda x+\mu x' &= \underbrace{\lambda x_1+\mu x'_1}_{\in F_1}+\dots+\underbrace{\lambda x_r+\mu x'_r}_{\in F_r}\\ &\in F.\end{aligned}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

Retour vers le théorème 21 Soit $x\in F$ pouvant s'écrire

$$x=x_1+\dots+x_r$$

et

$$x=y_1+\dots+y_r,$$

avec x_1 et y_1 dans F_1, ..., x_r et y_r dans F_r. Alors

$$\vec{0}=(x_1-y_1)+\dots+(x_r-y_r)$$

et comme $(x_1-y_1)\in F_1$, ..., $(x_r-y_r)\in F_r$, c'est une décomposition du vecteur nul; celle-ci étant supposée être unique, c'est que

$$x_1-y_1=\vec{0},\dots,x_r-y_r=\vec{0}$$

i.e. $x_1=y_1$, ..., $x_r=y_r$ et x admet une décomposition unique.

Retour vers le théorème 22 Démontrons que $\mathcal{B}$ est une base de F en prouvant qu'elle est libre et qu'elle engendre F.

- Soit $x\in F$; il existe alors $x_1\in F_1$, ..., $x_r\in F_r$ tels que

  $$x=x_1+\dots+x_r$$

  et comme x_1 est combinaison de vecteurs de $\mathcal{B}_1$,..., x_r est combinaison de vecteurs de $\mathcal{B}_r$, on en déduit que x est combinaison de vecteurs de $\mathcal{B}$, ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F.
- Démontrons que cette famille est libre. Si

  $$\alpha_{1,1},\dots,\alpha_{1,d_1},\dots,\alpha_{r,1},\dots,\alpha_{r,d_r}$$

  sont des scalaires tels que

  $$\underbrace{\alpha_{1,1}e_{1,1}+\dots+\alpha_{1,d_1}e_{1,d_1}}_{\in F_1}+\dots+\underbrace{\alpha_{r,1}e_{r,1}+\dots+\alpha_{r,d_r}e_{r,d_r}}_{\in F_r}=\vec{0},$$

  alors on a là une décomposition du vecteur nul. Du fait que la somme $F_1+\dots+F_r$ est directe, c'est donc par définition même que

  $$\begin{cases}\alpha_{1,1}e_{1,1}+\dots+\alpha_{1,d_1}e_{1,d_1}=\vec{0}\\ \vdots\\ \alpha_{r,1}e_{r,1}+\dots+\alpha_{r,d_r}e_{r,d_r}=\vec{0}.\end{cases}$$

  Enfin, puisque

  $$\begin{cases}(e_{1,1},\dots,e_{1,d_1})\\ \vdots\\ (e_{r,1},\dots,e_{r,d_r})\end{cases}$$

  sont des familles libres, on a

  $$\begin{cases}\alpha_{1,1}=0,\dots,\alpha_{1,d_1}=0\\ \vdots\\ \alpha_{r,1}=0,\dots,\alpha_{r,d_r}=0,\end{cases}$$

  ce qui prouve finalement que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

En définitive, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F et libre et c'est donc une base de F.

Le dernier point est évident: de manière générale, si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a

$$F=E\iff\dim(F)=\dim(E)$$

car dans le contexte

$$\begin{cases}A\subset B\\ \dim A=\dim B,\end{cases}$$

on sait que l'on a $A=B$.

Retour vers le théorème 23 Il s'agit de démontrer la propriété suivante: si $x_1\in E_1$,...,$x_N\in E_N$ sont tels que

$$x_1+\dots+x_N=\vec{0},$$

alors $x_1=\dots=x_N=\vec{0}$. On le fait par récurrence sur N.

- Cas où $N=2$: si on a

  $$x_1+x_2=\vec{0}, \tag{2.5}$$

  on compose (2.5) par u et on obtient:

  $$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=\vec{0}. \tag{2.6}$$

  En multipliant 2.5 par λ_2 et en lui retranchant 2.6, il vient alors

  $$(\lambda_2-\lambda_1)x_1=\vec{0}$$

  et puisque $\lambda_2-\lambda_1\neq 0$, on en déduit $x_1=0$ puis, en revenant à (2.5), $x_2=0$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $N \geq 2$. Soit
$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, \lambda_{N+1}$$
des valeurs propres de u et
$$x_1 \in E_1, \ldots, x_N \in E_N, x_{N+1} \in E_{N+1}$$
tels que
$$x_1 + \ldots + x_N + x_{N+1} = \vec{0}. \tag{2.7}$$
On compose par u, on obtient:
$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} = \vec{0}. \tag{2.8}$$
En multipliant (2.7) par λ_{N+1} et en lui retranchant (2.8), il vient alors
$$\underbrace{(\lambda_{N+1} - \lambda_1)x_1}_{y_1} + \ldots + \underbrace{(\lambda_{N+1} - \lambda_N)x_N}_{y_N} = \vec{0}.$$
On a
$$y_1 \in E_1, \ldots, y_N \in E_N$$
et ces vecteurs ont une somme nulle: d'après l'hypothèse de récurrence,
$$y_1 = \ldots = y_N = \vec{0}$$
et comme
$$\lambda_{N+1} - \lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_{N+1} - \lambda_N \neq 0,$$
on a
$$x_1 = \ldots = x_N = \vec{0}$$
et de (2.7) on déduit
$$x_{N+1} = \vec{0}.$$
La propriété est donc démontrée au rang $N+1$.

Pour le dernier point, supposons que u possède un nombre N de valeurs propres qui soit strictement supérieur à n:
$$N > n.$$
On sait d'après le théorème précédent qu'en notant
$$F = E_1 + \ldots + E_N$$
on a alors
$$\dim(F) = \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_N).$$
Mais un sous-espace propre, par définition, n'est pas réduit au seul vecteur nul. C'est pourquoi
$$\dim(E_1) \geq 1, \ldots, \dim(E_N) \geq 1$$
et en conséquence
$$\begin{array}{rcl}\dim(E_1) + \ldots + \dim(E_N) & \geq & 1 + \ldots + 1 \\ & = & N\end{array}$$
i.e.
$$\dim(F) \geq N.$$
Or $F \subset E$ et donc
$$\dim(F) \leq \dim(E),$$
d'où
$$N \leq \dim(F) \leq \dim(E) = n$$
et donc
$$N \leq n,$$
ce qui est absurde.

Retour vers le théorème 24 Pour la supplémentarité, il faut apporter la preuve que
$$\begin{cases} \dim(H) + \dim(\mathrm{Vect}(v)) = n \\ H \cap \mathrm{Vect}(v) = \{\vec{0}\} \end{cases}$$
(cf. critères de supplémentarité en dimension finie).

- On a évidemment
$$\dim(\mathrm{Vect}(v)) = 1$$
et donc
$$\dim(H) + \dim(\mathrm{Vect}(v)) = n - 1 \ + \ 1 = n.$$
- Si
$$w \in H \cap \mathrm{Vect}(v),$$
alors il existe un scalaire λ tel que
$$w = \lambda v$$
(car $w \in \mathrm{Vect}(v)$) et si l'on avait $\lambda \neq 0$, on aurait
$$v = \frac{1}{\lambda} w$$
et donc $v \in H$ (car H est un sous-espace vectoriel), ce qui est absurde. Ainsi, $H \cap \mathrm{Vect}(v) = \{\vec{0}\}$.

Voici une autre preuve: par hypothèse, H admet une droite comme supplémentaire; il existe donc un vecteur v_1 tel que
$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(v_1).$$
Maintenant, soit $v \notin H$. De la supplémentarité, il existe $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que
$$v = h + \mu v_1$$
et puisque $v \notin H$, on a $\mu \neq 0$ (sans quoi, on aurait $v = h \in H$, ce qui est absurde) et on a donc
$$v_1 = \frac{1}{\mu}(v - h).$$
Ensuite, soit x un vecteur quelconque. De la supplémentarité, il existe $h' \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que
$$x = h' + \lambda v_1$$
et on écrit
$$\begin{array}{rcl} x & = & h' + \lambda v_1 \\ & = & h' + \lambda \times \dfrac{1}{\mu}(v - h) \\ & = & h' - \dfrac{\lambda}{\mu} h + \dfrac{\lambda}{\mu} v. \end{array}$$
Or $h' - \frac{\lambda}{\mu} h \in H$ car h' et h appartiennent à H et que H est un sous-espace vectoriel et $\frac{\lambda}{\mu} v \in \mathrm{Vect}(v)$. Ceci prouve que tout vecteur de E est la somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de $\mathrm{Vect}(v)$. Cela prouve
$$E = H + \mathrm{Vect}(v).$$
On démontre ensuite comme ci-dessus que $H \cap \mathrm{Vect}(v) = \{\vec{0}\}$. De tout cela, on déduit que
$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(v).$$

Si $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Vect}(v_n)$ est un supplémentaire de H (cf. critères de supplémentarité en dimension finie: is la réunion d'une base d'un sous-espace et dune base d'un autre sous-espace constitue une base de l'espace, alors ces deux sous-espaces sont supplémentaires).

Retour vers le théorème 25 D'après le théorème du rang,
$$\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = \dim(E).$$

- Mais $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$, qui est un espace vectoriel de dimension 1;
- donc $\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = 0$ ou $\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = 1$ et donc $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \mathbb{K}$.
- Comme φ n'est pas la forme linéaire nulle, on n'a pas $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \{0\}$; c'est donc que $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \mathbb{K}$ et en conséquence $\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = 1$.
- C'est pourquoi $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) = n-1$ et $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est bien un hyperplan de E.

Le fait que $\mathrm{Vect}(v)$ soit un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ lorsque $v \notin \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ relève du théorème précédent.

Retour vers le théorème 26

- Soit $v \in E$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$. Tout x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = y+z$ avec $y \in H$ et $z \in \mathrm{Vect}(v)$; il existe donc un unique scalaire α_x tel que
$$x = y + \alpha_x v.$$
L'application φ qui à tout x de E fait correspondre le scalaire α_x est linéaire: soit $x' \in E$ s'écrivant $x' = y' + \alpha_{x'} v$ avec $y' \in H$ et λ un scalaire. Alors
$$x + \lambda x' = \underbrace{y + \lambda y'}_{\in H} + (\alpha_x + \lambda \alpha_{x'})v,$$
ce qui prouve que $\varphi(x+\lambda x') = \alpha_x + \lambda\alpha_{x'}$ c'est à dire $\varphi(x+\lambda x') = \varphi(x) + \lambda\varphi(x')$. Et φ est une forme linéaire, puisque φ fabrique des scalaires. Enfin, un vecteur x appartenant à H s'écrit $x = x + \vec{0} = x + 0 \times v$: donc $\varphi(x) = 0$ et réciproquement si $\varphi(x) = 0$, c'est que x s'écrit $x = y + 0 \times v = y$ avec $y \in H$ et donc $x \in H$. Ainsi, $x \in H \iff \varphi(x) = 0$; autrement dit,
$$H = \mathrm{Ker}\,(\varphi).$$
- Si ψ est une autre forme linéaire telle que $H = \mathrm{Ker}\,(\psi)$, posons $k = \psi(v)$ (on a $\psi(v) \neq 0$ car si $\psi(v) = 0$, ayant déjà $\mathrm{Ker}\,(\psi) = H$, on aurait $\psi(x) = 0$ pour tout x de E; on aurait alors $\mathrm{Ker}\,(\psi) = E$ et non $\mathrm{Ker}\,(\psi) = H$). Soit $x \in E$, que l'on écrit par définition même de φ:
$$x = y + \varphi(x)v, \quad y \in H.$$
Par linéarité de ψ, on a alors ($\varphi(x)$ étant un scalaire):
$$\psi(x) = \psi(y) + \varphi(x)\psi(v)$$
et comme $\mathrm{Ker}\,(\psi) = H$, on a $\psi(y) = 0$ et comme $\psi(v) = k$, on a
$$\psi(x) = \varphi(x) \times k = k\varphi(x),$$
d'où le résultat.

Ensuite, soit φ une forme linéaire telle que $H = \ker(\varphi)$; notons
$$\alpha_1 = \varphi(\vec{e}_1), \ldots, \alpha_n = \varphi(\vec{e}_n)$$
et soit $\vec{x} \in E$, de composantes $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathcal{B}$:
$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$
et par linéarité de φ,
$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= x_1\varphi(\vec{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\vec{e}_n) \\ &= x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \end{aligned}$$
si bien que
$$\begin{aligned} \vec{x} \in H &\iff \vec{x} \in \mathrm{Ker}\,\varphi \\ &\iff \varphi(\vec{x}) = 0 \\ &\iff \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0. \end{aligned}$$
Enfin, la proportionnalité des équations de H dans $\mathcal{B}$ résulte de la première partie du théorème.

Retour vers le théorème 27 Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E telles que
$$H_1 = \mathrm{Ker}\,(\varphi_1),\ H_2 = \mathrm{Ker}\,(\varphi_2), \ldots, H_p = \mathrm{Ker}\,(\varphi_p).$$
Considérons l'application ψ suivante:
$$\begin{array}{rcl} \psi : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_p(x)). \end{array}$$
Il est immédiat que ψ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^p$. D'autre part, un vecteur x de E appartient à $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_p$ si et seulement si x appartient à tous les H_i donc si et seulement si x annule tous les φ_i donc si et seulement si $\psi(x) = (0,0,\ldots,0)$ i.e. $x \in \mathrm{Ker}\,(\psi)$. Autrement dit,
$$H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_p = \mathrm{Ker}\,(\psi).$$
Puisque ψ est à valeurs dans $\mathbb{K}^p$, qui est de dimension p, on a $\mathrm{rg}(\psi) \leq p$ (rappelons que le rang est la dimension de l'image est qu'ici l'image est incluse dans $\mathbb{K}^p$). Du théorème du rang on déduit alors
$$\dim(\mathrm{Ker}\,(\psi)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(\psi) \geq n - p,$$
d'où le résultat.

Retour vers le théorème 28

- Soit $(e_1, \ldots, e_{n-r})$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \ldots, e_n)$ de E. On note
  - H_1 le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-r}, e_{n-r+2}, \ldots, e_n)$: il est constitué des vecteurs de E qui sont des combinaisons des vecteurs de $\mathcal{B}$ sauf de e_{n-r+1},
  - $H_2 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, e_{n-r+3}, \ldots, e_n)$, : il est constitué des vecteurs de E qui sont des combinaisons des vecteurs de $\mathcal{B}$ sauf de $e_{n-r+2}, \ldots,$
  - $H_r = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \ldots, e_{n-1})$, : il est constitué des vecteurs de E qui sont des combinaisons des vecteurs de $\mathcal{B}$ sauf de e_n.

  Tous ces sous-espaces sont des hyperplans (chacun est engendré par une famille libre comportant $n-1$ vecteurs) et leur intersection est constituée des vecteurs de E qui sont des combinaisons des vecteurs de $\mathcal{B}$ sauf de e_{n-r+1}, $e_{n-r+2}, \ldots, e_n$, donc seulement de $(e_1, \ldots, e_{n-r})$: cette intersection est donc F.
- Chaque hyperplan H_i est défini par une équation du type $\varphi_i(x) = 0$ où φ_i est une forme linéaire sur E; donc un vecteur x appartient à F si et seulement s'il vérifie
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_1(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \varphi_r(x) & = & 0. \end{array} \right.$$
Autrement dit, F est défini par un système de r équations.

Retour vers le théorème 29

- En posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$, on écrit classiquement
$$\begin{aligned} S_n &= 1 + r + \ldots + r^{n-1} + r^n \\ rS_n &= r + r^2 + \ldots + r^n + r^{n+1} \\ S_n - rS_n &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$
car tous les termes se sont élilminés, sauf les termes extrêmes. D'où le résultat.
- En posant $i = k - n_0$, on a
$$\sum_{k=n_0}^{n} r^k = \sum_{i=0}^{n-n_0} r^{n_0+i} = \sum_{i=0}^{n-n_0} r^{n_0} \times r^i = r^{n_0} \sum_{i=0}^{n-n_0} r^i = r^{n_0} \frac{1 - r^{n-n_0+1}}{1-r}.$$

- Par définition, la série $\sum r^n$ est convergente si et seulement si $\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ possède une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ donc si et seulement si r^{n+1} possède une limite finie.
  1. Si $|r|>1$, on a $|r^n|=|r|^n \longrightarrow +\infty$ donc la suite (r^n) n'est pas convergente.
  2. Si $|r|<1$, on a $|r^n|=|r|^n \longrightarrow 0$ donc la suite (r^n) converge vers 0. Dans ce cas
  $$\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-r},$$
  ce qui prouve que la série $\sum r^n$ est convergente et que sa somme vaut $1-r$.
  3. Si $r=1$, on a $\sum_{k=0}^n r^k = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$ et la série est évidemment divegente.
  4. Si $|r|=1$ avec $r\neq 1$, la suite (r^n) est divergente car si elle convergeait vers un nombre complexe L, alors d'une part $|L|=1$ (car si une suite complexe (v_n) converge vers l, alors la suite $(|v_n|)$ converge vers $|l|$) et d'autre part la suite (r^{n+1}) convergerait aussi vers L mais
  $$r^{n+1} = r\times r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r\times L$$
  et par unicité de la limite, on aurait $L=r\times L$. Puisque $L\neq 0$, c'est que l'on a $r=1$, ce qui est absurde.

  On a donc prouvé que la convergence de la série géométrique de raison r a lieu si et seulement si $|r|<1$.

Retour vers le théorème 30 Supposons les inégalités vraies à partir du rang 0. Notons
$$S_n=\sum_{k=0}^n u_k, \qquad T_n=\sum_{k=0}^n v_k.$$
Les séries étant à termes ≥ 0, on a en utilisant la proposition précédente:

la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\overset{prop.}{\Longrightarrow}$ la suite (T_n) est bornée $\Longrightarrow$ la suite (S_n) est bornée $\overset{prop}{\Longrightarrow}$ la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Le reste s'en déduit par contrapposition.

Si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang $n_0>0$, on pose
$$S'_n=\sum_{k=n_0}^n u_k$$
pour tout $n\geq n_0$. En notant A la constante $\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$, on a $S_n=A+S'_n$ pour tout $n\geq n_0$ si bien que que la *suite* $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente *si et seulement si* la *suite* $(S'_n)_{n\geq n_0}$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente *si et seulement si* la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente. On est donc ramenés à la première partie de la démonstration.

Retour vers le théorème 31 En tout point similaire à la démonstration du théorème de comparaison par équivalence des intégrales.

Retour vers le théorème 32 ***La technique employée dite de comparaison avec une intégrale est importante: il faut la maîtriser.***

Soit k un entier. Du fait de la décroissance de f, on a
$$\forall t\in[k,k+1], \quad f(k+1)\leq f(t)\leq f(k).$$
En intégrant ces inégalités, il vient alors
$$(k+1-k)f(k+1)\leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq (k+1-k)f(k)$$
c'est à dire
$$f(k+1)\leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt\leq f(k)$$
ou encore
$$u_{k+1}\leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt\leq u_k\,. \tag{2.9}$$
Enfin, donnons-nous un entier n et sommons toutes ces inégalités de $k=0$ à $k=n$:
$$\sum_{k=0}^n u_{k+1}\leq \int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^2 f(t)\,dt+\ldots+\int_n^{n+1} f(t)\,dt\leq \sum_{k=0}^n u_k.$$
La relation de Chasles donne alors
$$\boxed{\sum_{k=0}^n u_{k+1}\leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt\leq \sum_{k=0}^n u_k}$$
et en effectuant un changement d'indice à gauche:
$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k\leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt\leq \sum_{k=0}^n u_k$$
et en appliquant la première inégalité au rang $n-1$:
$$\sum_{k=1}^n u_k\leq \int_0^n f(t)\,dt.$$
Considérons
$$F: x\mapsto \int_0^x f(t)\,dt.$$
La fonction f étant à valeurs positives, F est *croissante*.

1^{er} ***cas:*** Supposons $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ convergente.

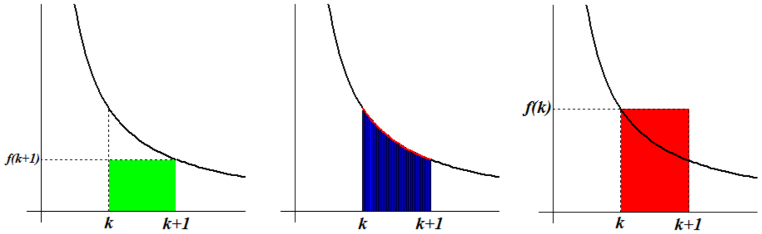
Alors par définition, F possède une limite finie L lorsque $x\to+\infty$; on a donc $F(x)\leq L$ pour tout x puisque F est croissante. En notant $S_n=\sum_{k=0}^n u_k$, on a alors
$$\begin{aligned} S_n &= u_0+\sum_{k=1}^n u_k\leq u_0+\int_0^n f(t)\,dt \\ &\leq u_0+L. \end{aligned}$$
Il en résulte que la suite (S_n) est majorée. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est donc convergente en vertu du théorème X.3.7

$2^{ème}$ ***cas:*** Supposons la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ convergente.

D'après le théorème IX.3.6, la suite (S_n) est majorée par un certain réel M. On se donne à présent un réel $x\geq 0$ et on prend $n=[x]$, si bien que $n\leq x<n+1$. La fonction f étant à valeurs positives et x étant $<n+1$, on a
$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt\leq \sum_{k=0}^n u_k=S_n\leq M.$$
Ainsi, F est croissante et majorée; on déduit alors du théorème de la limite monotone qu'elle possède une limite finie en $+\infty$. Donc, par définition, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

Remarques

- L'interprétation en termes d'aire de l'encadrement 2.9 est claire:



La portion de surface sous la courbe entre les points d'abscisse k et $k+1$ est comprise entre deux rectangles, dont l'un a pour hauteur $u_{k+1} = f(k+1)$ et l'autre $u_k = f(k)$ et les deux ayant pour base $1 = k+1-k$, d'où l'encadrement

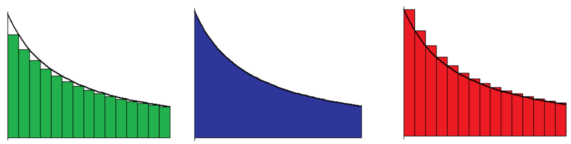
$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq u_k$$

au niveau des aires.

En sommant de 0 à n, la surface sous la courbe entre les points d'abscisse 0 et $n+1$ est comprise entre deux familles de rectangles, d'où l'encadrement

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_{k+1} \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

au niveau des aires.



Retour vers le théorème 33 De la décroissance de f on déduit:

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

et, par Chasles, pour tous entiers n et p avec $p \geq n$:

$$\int_{n+1}^{p} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{p} f(k) \leq \int_n^{p+1} f(t)dt.$$

Les trois quantités intervenant dans cette intégrale ont une limite finie lorsque p tend vers $+\infty$ (grâce à la convergence de l'intégrale et de la série) et tendent respectivement vers

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k), \quad \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

d'où le résultat, en tenant compte du fait que les inégalités larges se conservent après passage à la limite.

Retour vers le théorème 34

- On procède comme pour les intégrales impropres en commençant par le cas réel en écrivant $u_n = u_n^+ - u_n^-$ etc.
- Pour tout entier N, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$$

d'après l'inégalité triangulaire entre nombres réels ou complexes. Les deux membres de cette inégalité possèdent des limites lorsque N tend vers $+\infty$, égales par défintion à $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right|$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ respectivement. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, il vient

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Retour vers le théorème 35 Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $|u_n| \leq Cv_n$ au voisinage de $+\infty$. Le théorème est donc une conséquence immédiate du théorème de comparaison par majoration puis du théorème de convergence absolue.

Retour vers le théorème 36 Une suite de limite nulle en un point (en l'occurrence le quotient $\frac{u_n}{v_n}$) est en particulier borné au voisinage de ce point; ce résultat est donc une conséquence du précédent.

Retour vers le théorème 37 Une suite de limite égale à 1 (ou toute valeur finie) en un point (en l'occurrence le quotient $\frac{u_n}{v_n}$) est en particulier borné au voisinage de ce point; ce résultat est donc une conséquence du premier théorème.

Retour vers le théorème 38 Pour tout entier p, posons

$$\begin{aligned} a_p &= S_{2p} \\ &= u_0 - u_1 + \ldots + u_{2p} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_p &= S_{2p+1} \\ &= u_0 - u_1 + \ldots + u_{2p} - u_{2p+1}. \end{aligned}$$

On a alors les propriétés suivantes:

- la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante car

$$\begin{aligned} a_{p+1} - a_p &= S_{2p+2} - S_{2p} \\ &= u_0 - u_1 + \ldots + u_{2p} - u_{2p+1} + u_{2p+2} - (u_0 - u_1 + \ldots + u_{2p}) \\ &= u_{2p+2} - u_{2p+1} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car la suite (u_n) est décroissante,

- la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante car

$$\begin{aligned} b_{p+1} - b_p &= S_{2p+3} - S_{2p+1} \\ &= u_0 - u_1 + \ldots - u_{2p+1} + u_{2p+2} - u_{2p+3} - (u_0 - u_1 + \ldots + u_{2p} - u_{2p+1}) \\ &= -u_{2p+3} + u_{2p+2} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

car la suite (u_n) est décroissante.

- Ensuite,

$$\begin{aligned} a_p - b_p &= S_{2p} - S_{2p+1} \\ &= u_{2p+1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

par hypothèse.

Les suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont donc *adjacentes* et sont alors toutes deux convergentes. De plus

$$\begin{aligned} a_p - b_p &= u_{2p+1} \\ &\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

par hypothèse. Elles convergent donc vers la même limite S.
Montrons à présent que $\sum u_n$ est convergente et que sa somme est S, c'est à dire que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S,$$

où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Ceci semble naturel puisque $S_n \to S$ parmi les n qui tendent vers $+\infty$ de rang pair (les a_p) et parmi ceux de rang impair (les b_p).

Rigoureusement, soit $\varepsilon > 0$, N_1 un rang à partir duquel $|a_p - S| \leq \varepsilon$ et N_2 un rang à partir duquel $|b_p - S| \leq \varepsilon$. Posons

$$N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}.$$

Alors pour tout $n \geq N$, on a $|S_n - S| \leq \varepsilon$, car

- si n est pair, avec $n = 2p$, on a $n \geq 2N_1$, donc $p \geq N_1$ d'où

$$|a_p - S| \leq \varepsilon,$$

  c'est à dire

$$|S_n - S| \leq \varepsilon$$

- et si n est impair, avec $n = 2p+1$, on a $n \geq 2N_2 + 1$, donc $p \geq N_2$ d'où

$$|b_p - S| \leq \varepsilon,$$

  c'est à dire

$$|S_n - S| \leq \varepsilon.$$

On a donc prouvé formellement la convergence de (S_n) vers S.

Ensuite, on a

$$S \leq S_{2p}$$

car $S_{2p} = a_p$ et la suite (a_p) décroît vers S. De même,

$$S_{2p+1} \leq S$$

car $S_{2p+1} = b_p$ et la suite (b_p) croît vers S. On a alors

$$\begin{aligned} R_{2p} &= S - S_{2p} \\ &\geq S_{2p+1} - S_{2p} \\ &= -u_{2p+1} \end{aligned}$$

et comme $S - S_{2p} \leq 0$, on a

$$-u_{2p+1} \leq R_{2p} \leq 0$$

et l'on en déduit

$$|R_{2p}| \leq u_{2p+1}.$$

De la même manière,

$$|R_{2p+1}| \leq u_{2p+2}.$$

Ces deux situations peuvent se résumer en écrivant:

$$\forall N \in \mathbb{N},\ |R_N| \leq u_{N+1}.$$

Enfin, pour tout $N \in N$, on a

$$S = S_N + R_N$$

et donc

$$\begin{aligned} |S - S_N| &= |R_N| \\ &\leq u_{N+1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que S_N est une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à u_{N+1}.

Retour vers le théorème 39 Appartenir à

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B,$$

c'est appartenir à l'un des A_i et appartenir aussi à B alors qu'appartenir à

$$(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$

c'est appartenir à l'un des $A_i \cap B$, ce qui veut dire appartenir à l'un des A_i et appartenir à B; d'où l'égalité

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B).$$

Qu'il y en ait un nombre infini ne change rien au raisonnement.

Soit un élément x appartenant à

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B.$$

Alors

- soit il appartient à B, auquel cas il appartient à plus forte raison à chaque $A_i \cup B$ et donc à l'intersection, c'est à dire à

$$(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B)$$

- soit il appartient à $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$, c'est à dire qu'il appartient à tous les A_i; à plus forte raison, il appartient à tous les $A_i \cup B$, c'est à dire à

$$(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B).$$

Cette première partie de raisonnement prouve l'inclusion

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B \subset (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B).$$

Soit un élément x appartenant à

$$(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B)$$

et donc appartenant à tous les $A_i \cup B$. De deux choses l'une:

- soit il appartient à B et alors il appartient à plus forte raison à

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B$$

- soit il n'appartient pas à B, auquel cas l'appartenance à tous les $A_i \cup B$ se traduit en fait pas l'appartenance à tous les A_i c'est à dire à

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

  et à plus forte raison à

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B.$$

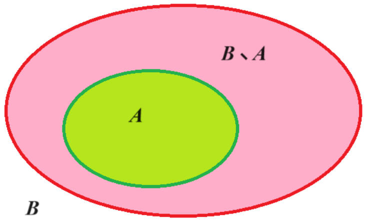
Cette deuxième partie de raisonnement prouve l'inclusion
$$(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B) \subset (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B$$
et finalement à l'égalité
$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cup B).$$
Qu'il y en ait un nombre infini ne change rien au raisonnement.

Appartenir à
$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n},$$
c'est ne pas appartenir à
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$
c'est à dire n'appartenir à aucun des A_i autrement dit appartenir à chacun de leurs complémentaires i.e. appartenir à
$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n.$$

Appartenir à
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n},$$
c'est ne pas appartenir à
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$
c'est à dire ne pas appartenir à l'un des A_i autrement dit appartenir au complémentaire de l'un des A_i i.e. appartenir à
$$\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_n.$$
Plus généralement,
$$\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$$
si et seulement si ω appartient à au moins l'un des A_n, donc
$$\omega \in \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n}$$
si et seulement si ω n'appartient à aucun A_n donc si et seulement si ω appartient à tous les $\overline{A}_n$ donc si et seulement si
$$\omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}.$$
C'est pourquoi
$$\overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A}_n.$$
De même,
$$\omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$$
si et seulement si appartient à tous les A_n, donc
$$\omega \in \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}$$
si et seulement si ω n'appartient pas à *tous* les A_n, c'est à dire s'il existe au moins un A_n tel que ω appartienne à $\overline{A}_n$ i.e. si et seulement si
$$\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}.$$
C'est pourquoi
$$\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{A}_n.$$

Retour vers le théorème 40

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \emptyset$. Évidemment, techniquement, la suite (A_n) est constituée d'événements deux à deux incompatibles et en conséquence, la série
$$\sum_{n \geq 0} P(\emptyset)$$
est convergente; en particulier, son terme général tend vers 0 (condition *nécessaire* de convergence d'une série) mais comme ce terme général est constant égal à $P(\emptyset)$, c'est que
$$P(\emptyset) = 0.$$
- Soit $A_1, \ldots, A_N$ des événements deux à deux incompatibles. Pour tout entier $n \geq N+1$, posons
$$A_n = \emptyset.$$
Alors il est évident que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles. En conséquence,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$
Mais
$$\begin{aligned} \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n &= \bigcup_{n=0}^{N} A_n \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A_n \\ &= \bigcup_{n=0}^{N} A_n \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} \emptyset \\ &= \bigcup_{n=0}^{N} A_n \cup \emptyset \\ &= \bigcup_{n=0}^{N} A_n \end{aligned}$$
alors que
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) &= \sum_{n=0}^{N} P(A_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(A_n) \\ &= \sum_{n=0}^{N} P(A_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 0 \\ &= \sum_{n=0}^{N} P(A_n) + 0 \\ &= \sum_{n=0}^{N} P(A_n) \end{aligned}$$
et on a donc bien
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n).$$
- $\Omega = A \cup \overline{A}$ et comme A et $\overline{A}$ sont incompatibles, il résulte de la formule précédente (donc avec $N = 2$) que
$$P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}),$$
d'où le résultat.
- Lorsque $A \subset B$, on a
$$B = A \cup (B \setminus A),$$

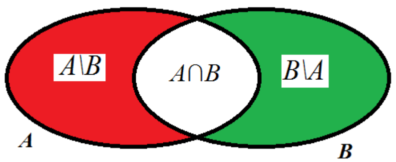


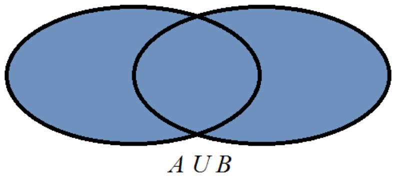
où $B \setminus A$ est le complémentaire de A dans B i.e. l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A. Comme A et $B \setminus A$ sont incompatibles, on a

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) + P(B \setminus A) \\ &\geq P(A) \end{aligned}$$

puisque $P(B \setminus A) \geq 0$.

- On écrit
$$A \cup B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$$
et aussi
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B), \quad A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$





et comme tous ces ensembles sont deux à deux disjoints, la σ-additivité donne

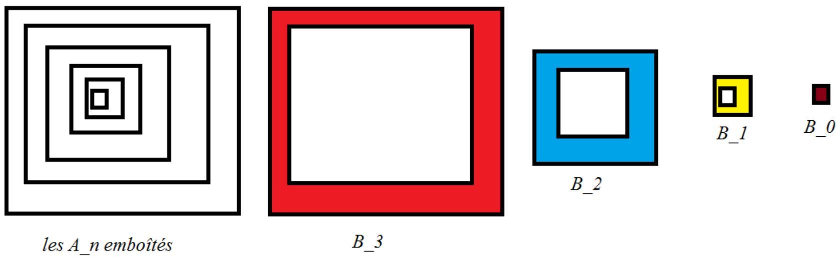
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(B \setminus A) + P(A \setminus B) \\ &= P(A \cap B) + (P(B) - P(A \cap B)) + (P(A) - P(A \cap B)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

L'inégalité s'ensuit.
- La récurrence est immédiate.

- Pour tout entier $m \geq n+1$, on pose
$$A_m = \emptyset.$$

Retour vers le théorème 41 Posons $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ de sorte que

$$A_n = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n.$$



Les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors deux à deux disjoints; donc d'une part la série $\sum_{k\geq 0} P(B_k)$ est convergente et d'autre part:

$$P(A_n) = P(B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \sum_{k=0}^{n} P(B_k).$$

Par définition d'une série convergente,

$$\sum_{k=0}^{n} P(B_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k)$$

et la valeur de cette somme est $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right)$ par σ-additivité. D'où le résultat, puisque

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k.$$

Retour vers le théorème 42 Pour l'intersection, on se ramène à la situation précédente, en posant $A'_n = \overline{A_n}$; puisque $A_{n+1} \subset A_n$, on a $\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$: la suite (A'_n) est donc croissante et on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} P(A'_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n\right).$$

Ensuite, $P(A'_n) = 1 - P(A_n)$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n\to+\infty} A'_n = 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n\right).$$

Enfin,

$$\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A'_k,$$

d'où

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n\right) = P\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right),$$

et le résultat s'ensuit.

Retour vers le théorème 43

- Posons $B_n = A_0 \cup \ldots \cup A_n$. On a bien sûr
$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$$
et la suite (B_n) est croissante; ainsi, à l'aide du principe de continuité croissante,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$
- Or, à n fixé, on a d'après une proposition antérieure:
$$P(B_n) = P\left(A_0 \cup \ldots \cup A_n\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$
- En cas de convergence de la série, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$S_n = \sum_{k=0}^{k} P(A_k),$$

(qui est une suite croissante du fait que $S_{n+1} - S_n = P(A_{n+1}) \geq 0$) converge par définition vers $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$ et est constamment en-dessous de sa limite. On a donc

$$P(B_n) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k),$$

d'où le résultat.

- Lorsque la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ est divergente, c'est que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$$

ne possède pas de limite finie. Puisqu'elle est croissante (du fait que $S_{N+1} - S_N = P(A_{N+1}) \geq 0$), il résulte du théorème de la limite monotone que S_N tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$ et il est alors légitime de poser

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$$

et le résultat

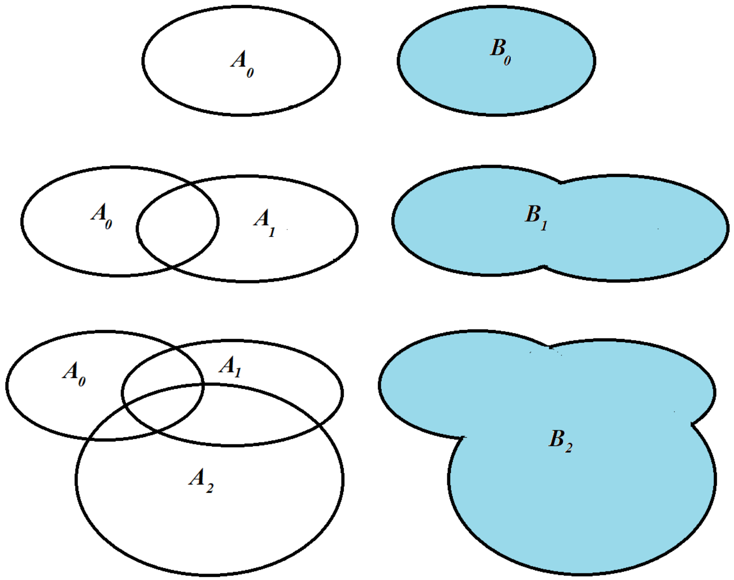
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

est trivial et sans aucun intérêt!

Retour vers le théorème 44 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k.$$

Par exemple:



Il est clair que la suite (B_n) est croissante: puisque

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= A_0 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} \\ &= B_n \cup A_{n+1}, \end{aligned}$$

on voit que B_{n+1} est plus gros que B_n. Du fait de la croissance de la suite (B_n), on a

$$B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1} \cup B_n = B_n$$

(B_n contient déjà $B_0, B_1, \ldots B_{n-1}$ donc les rajouter à B_n ne change pas B_n) et en conséquence

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{n} B_k &= B_n \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} A_k \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k.$$

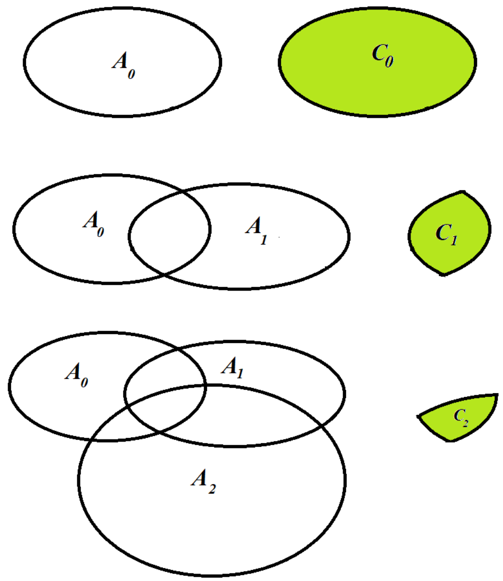
Avec tout ça, on a

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(B_n) \text{ (principe de continuité croissante)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \text{ (par définition de } B_n\text{).} \end{aligned}$$

Pour la deuxième propriété, posons

$$C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k.$$

Par exemple:



Il est clair que la suite (C_n) est décroissante: puisque

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= A_0 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1} \\ &= C_n \cap A_{n+1}, \end{aligned}$$

on voit que C_{n+1} est plus petit que C_n. Du fait de la décroissance de la suite (C_n), on a

$$C_0 \cap C_1 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap C_n = C_n$$

(C_n est déjà contenu dans $C_0, C_1, \ldots C_{n-1}$ donc les couper avec C_n ne change pas C_n) et en conséquence

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^{n} C_k &= C_n \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} A_k \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k = \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k.$$

Avec tout ça, on a

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(C_n) \text{ (principe de continuité décroissante)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap \infty_{k=0}^{n} A_k\right) \text{ (par définition de } C_n). \end{aligned}$$

Retour vers le théorème 45 Vérifions les deux axiomes.

- Puisque

  $$\Omega \cap B = B,$$

  on a

  $$\begin{aligned} P_B(\Omega) &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

  Ensuite, soit (A_n) une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors

  $$\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (A_i \cap B)$$

  (cf. "Opérations entre réunion et intersection" plus haut dans ce chapitre) et dans la mesure où lorsque $i \neq j$, on a par hypothèse

  $$A_i \cap A_j = \emptyset,$$

  on a

  $$\begin{aligned} (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) &= A_i \cap B \cap A_j \cap B \\ &= A_i \cap A_j \cap B \cap B \\ &= A_i \cap A_j \cap B \\ &= (A_i \cap A_j) \cap B \\ &= \emptyset \cap B \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

  et on en déduit que la famille $(A_n \cap B)$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles. C'est pourquoi, par σ-additivité,

  $$P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i \cap B)$$

  c'est à dire en fait

  $$P\left(\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \cap B\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i \cap B)$$

  en conséquence de quoi

  $$\begin{aligned} P_B\left(\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \cap B\right) &= \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} P_B(A_i), \end{aligned}$$

  ce qui prouve la σ-additivité de l'application P_B et achève la démonstration.

Retour vers le théorème 46 On se ramène à la définition formelle. On sait par hypothèse que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Montrons que $\overline{A}$ et B sont indépendants. Puisque

$$A \cup \overline{A} = \Omega,$$

on a évidemment

$$B = (A \cap B) \,\cup\, (\overline{A} \cap B)$$

et comme

$$A \cap \overline{A} = \emptyset,$$

on a

$$(A \cap B) \,\cap\, (\overline{A} \cap B) = \emptyset$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned} P(B) &= P\big((A \cap B) \,\cup\, (\overline{A} \cap B)\big) \\ &= P(A \cap B) \,+\, P(\overline{A} \cap B) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \text{ (hypothèse)} \\ &= P(B)\big(1 - P(A)\big) \\ &= P(B) \times P(\overline{A}), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'indépendance de $\overline{A}$ et B.
Les deux autres en découlent: en permutant A et B d'une part et en appliquant le résultat que l'on vient de démontrer au couple de variables indépendantes $(B, \overline{A})$ d'autre part.

Retour vers le théorème 47

- Puisque $(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) \subset A_1$, $(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) \subset A_1 \cap A_2$, on a
$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) \leq P(A_1),\ P(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) \leq P(A_1 \cap A_2), \ldots$$
et comme $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) > 0$ on a $P(A_1) > 0$, $P(A_1 \cap A_2) > 0$, etc.
- La considération des probabilités conditionnelles est donc possible.
- Le membre de droite de la formule vaut alors par définition
$$P(A_1) \times \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_3 \cap A_2 \cap A_1)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \ldots \times \frac{P(A_m \cap \ldots \cap A_1)}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1})}.$$
Tous les facteurs s'éliminent, sauf le facteur $P(A_m \cap \ldots \cap A_1)$, d'où le résultat.

Retour vers le théorème 48 Puisque (A_n) est une partition de Ω, on a
$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{N} (B \cap A_n). \end{aligned}$$
Les événements $(B \cap A_n)$ sont deux à deux disjoints (car les (A_n) le sont), on a alors
$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B \cap A_n).$$
Enfin,
$$P(B \cap A_n) = P(B|A_n)P(A_n),$$
d'où la deuxième égalité.

Retour vers le théorème 49

- Puisque (A_n) est une partition de Ω, on a
$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (B \cap A_n).$$
- Les événements $(B \cap A_n)$ sont deux à deux disjoints (car les (A_n) le sont) et par σ-additivité, on a alors
$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B \cap A_n).$$
- Si $P(A_n) \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(B \cap A_n) = P(B|A_n)P(A_n)$, d'où le résultat. On admet que le résultat est encore valable si l'on a $P(A_n) = 0$ pour certains A_n.

  Plus généralement:
  - Posons
  $$C = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n}$$
  de sorte que $(C, (A_n)_{n \in \mathbb{N}})$ constitue une partition de Ω.
  - Le théorème ci-dessus donne donc
  $$P(B) = P(B \cap C) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n).$$
  - Par σ-additivité, on a
  $$P(C) = 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1 - 1 = 0.$$
  - Puisque $B \cap C \subset C$, on a $P(B \cap C) \leq P(C)$ et donc $P(B \cap C) = 0$ et le résultat s'ensuit.

Retour vers le théorème 50

- On a par définition même:
$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}.$$
- Il suffit ensuite d'appliquer au dénominateur la formule des probabilités totales.

Retour vers le théorème 51

- Une loi de probabilité fabrique des réels dans $[0,1]$ on a donc bien $p_n \geq 0$. En notant ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$A_n = \{n\}$$
la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est évidemment constituée d'événements deux à deux incompatibles et
$$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} A_n$$
si bien que la σ-additivité donne
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \\ &= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} A_n \right) \\ &= P(\mathbb{N}) \\ &= 1 \end{aligned}$$
(par définition d'une loi de probabilité).
- On a alors
$$\begin{aligned} P(\mathbb{N}) &= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} \{n\} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \\ &= 1 \end{aligned}$$
et l'axiome de σ-additivité, intuitivement assez évident, sera admis.

Retour vers le théorème 52

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\Omega \in \mathcal{A}$ et par stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire.
- Pour tout $n \geq N+1$, on pose $A_n = \emptyset$. Puisque $\emptyset \in \mathcal{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient également à $\mathcal{A}$ (stabilité par réunion dénombrable). Mais de façon évidente,
$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} A_n.$$

Donc $\bigcup_{n=0}^{N} A_n \in \mathcal{A}$.

Ensuite, on a $\overline{A}_n \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire) et donc

$$\bigcup_{n=0}^{N} \overline{A}_n \in \mathcal{A}$$

d'après la proposition qui vient d'être démontrée. Enfin,

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=0}^{N} A_n &= \overline{\bigcup_{n=0}^{N} \overline{A}_n} \\ &\in \mathcal{A} \text{ (stabilité par passage au complémentaire)} \end{aligned}$$

- Même méthode:

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n &= \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A}_n} \\ &\in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Retour vers le théorème 53 On a

$$\text{dét}(\lambda I_n - D) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{dét}(\lambda I_n - T) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & & termes \\ & \ddots & qcq \\ & 0 & \ddots \\ & & & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

et dans la mesure où le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux, le résultat s'ensuit.

Retour vers le théorème 54 Avec des notations évidentes, on a

$$\chi_T(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \times (\lambda - a_{22}) \times \dots \times (\lambda - a_{nn})$$

et les valeurs propres de T sont ses éléments diagonaux $a_{11}, \dots, a_{nn}$. De plus, si m est la multiplicité de a_{11} autrement dit si le facteur $(\lambda - a_{11})$ apparaît exactement (ni plus ni moins) m fois dans $\chi_T(\lambda)$, c'est que a_{11} est présent exactement m fois sur la diagonale de T. Même raisonnement pour une matrice diagonale.

Retour vers le théorème 55 Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ une base du sous-espace propre associé à λ_0. Considérons des vecteurs $\vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$ tels que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n)$ soit une base de E (théorème de la base incomplète). La matrice N de u dans $\mathcal{B}$ est alors de la forme

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & termes \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & termes \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

car $u(\vec{e}_1) = \lambda_0 \vec{e}_1, \dots, u(\vec{e}_r) = \lambda_0 \vec{e}_r$, ce qui explique les r premières colonnes et "termes" car les vecteurs $u(\vec{e}_{r+1}), \dots, u(\vec{e}_n)$ s'expriment d'une certaine manière dans $\mathcal{B}$ (et les valeurs des composantes de ces vecteurs n'auront pas d'influence dans la suite de la démonstration).

On sait que u et N ont le même polynôme caractéristique (définition XI.2.4) mais en développant le polynôme caractéristique

$$\text{dét}\,(\lambda I_n - N) = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \lambda - \lambda_0 & \dots & 0 & termes \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - \lambda_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & qcq \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \end{vmatrix}$$

successivement suivant la première colonne jusqu'à la $d^{\text{ième}}$, on voit que ce polynôme est factorisable par $(\lambda - \lambda_0)^d$ i.e. $\chi_u(\lambda)$ est de la forme $(\lambda - \lambda_0)^d Q(\lambda)$ avec $Q(\lambda)$ provenant de la suite du développement de ce déterminant; ceci prouve, par définition même, que la multiplicité de la valeur propre λ_0 vaut au moins d (au moins, car il serait pourrait que $Q(\lambda)$ soit factorisable par une puissance de $\lambda - \lambda_0$).

Retour vers le théorème 56

- Supposons u diagonalisable; il existe alors une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice D de u est diagonale. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$, on a
$$D = P^{-1} M P$$
d'après les formules de changement de base et M est donc par définition diagonalisable.
- Réciproquement, supposons que M soit semblable à une matrice diagonale:
$$D = P^{-1} M P.$$
Notons $\mathcal{C}$ la base de $\mathbb{K}^n$ constituée des (transposées) des vecteurs colonnes de P, si bien que P est la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base $\mathcal{C}$. On déduit alors des formules de changement de base que la matrice de u dans $\mathcal{C}$ est $P^{-1}MP$, c'est à dire justement D. Ainsi, il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale et u est donc par définition diagonalisable.

Retour vers le théorème 57 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.

- Si M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable (théorème précédent). Soit alors
$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$
une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres pour u, resp. associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit
$$(X_1, \dots, X_n)$$
les vecteurs colonnes, dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, des vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Alors $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et de
$$u(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i,$$
on déduit, par définition de la représentation matricielle d'un endomorphisme dans une base,
$$M X_i = \lambda_i X_i$$
si bien que $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres pour M.
- Si
$$(X_1, \dots, X_n)$$
est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres pour M, resp. associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit alors
$$(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$
les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dont les matrices colonnes dans la base canonique sont $(X_1, \dots, X_n)$[2] Alors

[2] Par exemple, si

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\vec{v}_1 = (a_1, \dots, a_n).$$

$(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et de

$$MX_i = \lambda_i X_i,$$

on déduit, par définition de la représentation matricielle d'un endomorphisme dans une base,

$$u(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i,$$

si bien que $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres pour u si bien que u est diagonalisable. Du théorème précédent, on déduit que M est diagonalisable.

Retour vers le théorème 58 *Rappels:* soit $F_1,\ldots,F_r$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

- Les éléments du sous-espace vectoriel $F = F_1 + \ldots + F_r$ sont tous les éléments de la forme $x_1 + \ldots + x_r$ où $x_1 \in F_1,\ldots,x_r \in F_r$.
- Dire que $E = F_1 + \ldots + F_r$ revient donc à dire que tout x de E peut s'écrire comme une somme $x = x_1 + \ldots + x_r$ où $x_1 \in F_1,\ldots,x_r \in F_r$.
- La somme $F_1+\ldots+F_r$ est directe lorsque tout élément x de $F_1+\ldots+F_r$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x_1+\ldots+x_r$ avec $x_1 \in F_1,\ldots,x_r \in F_r$, ce qui se produit si et seulement si $\vec{0} = x_1+\ldots+x_r$ avec $x_1 \in F_1,\ldots,x_r \in F_r$ entraîne $x_1 = \ldots = x_r = \vec{0}$.
- Si $E = \oplus_{i=1}^r F_i$, alors le regroupement de bases des F_i forme une base de E, dite adaptée à cette décomposition.
- Si $F_1,\ldots,F_r$ sont des sous-espaces vectoriels dont on sait déjà qu'ils sont en somme directe, alors E en est la somme si et seulement si $\dim(F_1)+\ldots+\dim(F_r) = \dim(E)$.
- On sait d'autre part que des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Ainsi,

- Si u est diagonalisable, soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de veteurs propres de u. Tout x de E est donc combinaison linéaire de vecteurs propres, ce qui prouve que tout x de E appartient à $E_1+\ldots+E_p$. On a donc $E = E_1+\ldots+E_p$ et comme on sait déjà que la somme est directe, alors on a bien

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i.$$

- Si E est la somme directe des sous-espaces propres, on considère une base adaptée à cette somme: c'est une base de E d'après le rappel constituée de vecteurs propres. Donc u est par définition diagonalisable. L'équivalence entre les deux premiers points est donc établie.
- La somme des sous-espaces propres étant directe, E en est la somme si et seulement si , d'après le rappel, $\dim(E)$ égale la somme des dimensions de ces sous-espaces. L'équivalence entre les deux derniers points est donc établie.
- L'équivalence entre ces trois propositions est donc entièrement démontrée.

Retour vers le théorème 59 Immédiat à l'aide du théorème précédent et du rappel.

Retour vers le théorème 60

- Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et qu'il existe des racines complexes non réelles; décomposons le polynôme caractéristique χ_u en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ en distinguant suivant racines réelles et complexes:

$$\chi_u(\lambda) = \prod(\lambda - \underbrace{\lambda_i}_{\in\mathbb{R}})^{m_i} \prod(\lambda - \underbrace{\lambda_k}_{\in\mathbb{C}})^{m_k}.$$

Alors le degré n de χ, qui est aussi la dimension de E, est la somme des multiplicités de ses racines réelles et de ses racines complexes, qui est donc strictement supérieure à la somme des multiplicités de ses racines réelles, donc à la somme des dimensions des sous-espaces propres de u (d'après la propriété $m \geq d$) et donc u n'est pas diagonalisable d'après le théorème précédent, qui exige que $\dim(E)$ soit la somme des dimensions des sous-espaces propres de u.

- Donc si u est diagonalisable et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors toutes les racines sont dans $\mathbb{R}$.
- Si u est diagonalisable ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) alors $m_1+\ldots+m_p = n$ pour des raisons de degré. Ensuite, d'après le théorème XI.3.12, on a $d_1+\cdots+d_p = n$ et d'après le théorème XI.2.6, on a $d_i \leq m_i$ pour tout i; si l'on avait par exemple $d_1 < m_1$, on aurait alors

$$n = d_1+\cdots+d_p < m_1+d_2+\ldots+d_p \leq m_1+\ldots+m_p = n$$

ce qui est contradictoire.

- Réciproquement, si $d_i = m_i$ pour tout i, alors

$$d_1+\cdots+d_p = m_1+\ldots+m_p.$$

Et si toutes les racines du polynôme caractéristique sont dans $\mathbb{K}$, alors

$$m_1+\ldots+m_p = n$$

pour des raisons de degré (ce qui est évidemment toujours vérifié dans $\mathbb{C}$), d'où $d_1+\cdots+d_p = n$ et u est diagonalisable d'après le théorème XI.3.12.

Retour vers le théorème 61 Envisageons d'abord le cas d'une matrice triangulaire:

- si

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & & \textit{termes} & \\ & \ddots & \textit{qcq} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est

$$\chi(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\ldots(\lambda - a_{nn}).$$

Les racines de ce polynôme, autrement dit les valeurs propres de T, sont les scalaires

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}.$$

Dans cette liste, la valeur propre a_{11} (par exemple) apparaît par définition même un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité puisque par exemple si $n = 6$ et les a_{ii} sont les scalaires

$$2, 4, 2, 4, -1, 2,$$

c'est que le polynôme caractéristique de T est

$$(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda-2),$$

c'est à dire

$$(\lambda-2)^3(\lambda-4)^2(\lambda+1).$$

Les scalaires $2, 4, -1$ sont des racines de multiplicité respective

$$3, 2, 1$$

qui sont bien les nombres de fois où apparaissent ces scalaires sur la diagonale de T.
Ainsi, la trace

$$a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

de T est bien la somme de ses valeurs propres, chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité. Enfin, puisque T est triangulaire, son déterminant est le produit

$$a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}$$

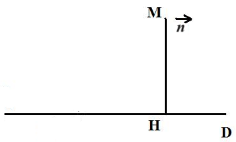
des éléments figurant sur la diagonale et ce produit est bien le produit de ses valeurs propres, chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité.

- Maintenant, soit M une matrice carrée quelconque, à coefficients réels ou complexes; alors M est semblable à une matrice triangulaire T, éventuellement à coefficients complexes. Puisque deux matrices semblables ont même trace, même déterminant, et même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités:

– la somme des valeurs propres (y compris complexes) de M, chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité est égale à la somme des valeurs propres de T, chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité, c'est à dire la trace de T (première partie de la démonstration), qui est égale à la trace de M.

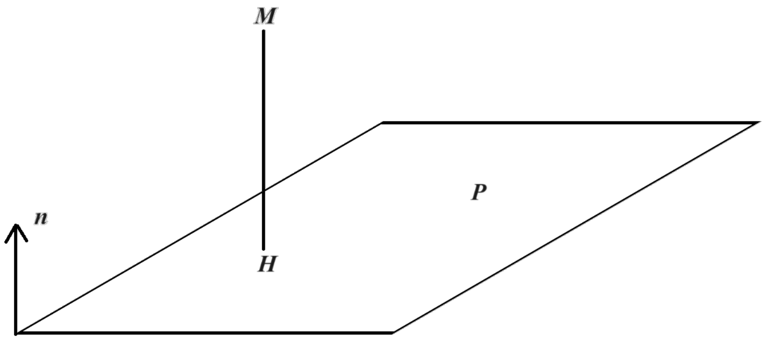
– Le déterminant de M est égal au déterminant de T qui, en tant que matrice triangulaire, est égal au produit de ses éléments diagonaux, c'est à dire au produit des valeurs propres de M, chacune étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité.

Retour vers le théorème 62 Il s'agit d'exprimer la distance $HM = \|\overrightarrow{HM}\|$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.



- Le vecteur $\vec{n} = (a, b)$ étant normal à D, il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{MH} = \lambda\vec{n}$.
- En notant (x, y) les coordonnées de H, on a donc $(x - x_0, y - y_0) = (\lambda a, \lambda b)$ et donc
$$x = x_0 + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b.$$
- Le point H est un point de D; ses coordonnées (x, y) en satisfont donc l'équation de D, d'où
$$a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0,$$
ce qui donne
$$\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$
- Finalement,
$$\begin{aligned} HM &= \|\overrightarrow{HM}\| \\ &= \|\lambda\vec{n}\| \\ &= |\lambda|\,\|\vec{n}\| \\ &= \left|-\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right| \times \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Retour vers le théorème 63 Il s'agit d'exprimer la distance $HM = \|\overrightarrow{HM}\|$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.



- Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ étant normal au plan P, il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{MH} = \lambda\vec{n}$.
- En notant (x, y, z) les coordonnées de H, on a donc
$$(x - x_0, y - y_0), z - z_0 = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$
et donc
$$x = x_0 + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b, \quad z = z_0 + \lambda c.$$
- Le point H est un point de P; ses coordonnées (x, y, z) en satisfont donc l'équation de P, d'où
$$a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c(z_0 + \lambda c) + d = 0,$$
ce qui donne
$$\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$
- Finalement,
$$\begin{aligned} HM &= \|\overrightarrow{HM}\| \\ &= \|\lambda\vec{n}\| \\ &= |\lambda|\,\|\vec{n}\| \\ &= \left|-\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right| \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Retour vers le théorème 64

- Supposons $f'(t_0) = \vec{0}$ et que f soit de classe C^2 sur D. La droite $(M(t_0)M(t))$ est aussi dirigée par le vecteur $\frac{1}{(t-t_0)^2}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$.
- La formule de Taylor à l'ordre 2 donne
$$f(t) \underset{t\to t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + \vec{o}(t - t_0)^2,$$
autrement dit
$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} \underset{t\to t_0}{=} (t - t_0)\underbrace{f'(t_0)}_{\vec{0}} + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + \vec{o}(t - t_0)^2$$
et donc
$$\frac{1}{(t - t_0)^2}\overrightarrow{M(t_0)M(t)} \underset{t\to t_0}{=} \frac{1}{2}f''(t_0) + \vec{0}(1).$$
- Donc si $f''(t_0) \neq 0$, la direction limite de la droite $(M(t_0)M(t))$ est celle du vecteur $\frac{1}{2}f''(t_0)$, ou encore $f''(t_0)$.
- En conclusion, si $f'(t_0) = \vec{0}$ et $f''(t_0) \neq 0$, γ présente une tangente au point $M(t_0)$, celle-ci étant dirigée par le vecteur $f''(t_0)$.
- On obtient plus généralement le résultat en appliquant la formule de Taylor à l'ordre ad hoc.

Retour vers le théorème 65 Observons tout d'abord que les vecteurs $\left(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)\right)$ étant linéairement indépendants, ils constituent une base du plan et $(M(t_0); f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est alors un repère du plan.

Apportons déjà la preuve lorsque $p = 1$ et $q = 2$ et ramenons-nous au cas $t_0 = 0$ (ce que l'on peut toujours faire au prix d'une translation en posant $u = t - t_0$).
La formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 donne
$$f(t) \underset{t\to 0}{=} f(0) + tf'(0) + \frac{1}{2}t^2 f''(0) + \vec{o}\left(t^2\right).$$

N'oublions pas que f est une machine à fabriquer les coordonnées: $M(t)$ est le point de coordonnées $f(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$ dont le plan est muni. Ainsi,

$$\overrightarrow{M(0)M(t)} = f(t) - f(0)$$

et en conséquence,

$$\overrightarrow{M(0)M(t)} \underset{t\to 0}{=} tf'(0) + \frac{1}{2}t^2 f''(0) + \vec{o}\left(t^2\right).$$

En d'autres termes, la composante du vecteur $\overrightarrow{M(0)M(t)}$ suivant $f'(0)$, respectivement $f'(0)$, est

$$t + o(t^2),$$

respectivement

$$\frac{1}{2}t^2 + o(t^2).$$

Ou encore, de manière équivalente, les coordonnées du point $M(t)$ dans le repère

$$\mathcal{R}_0 = \big(M(0); f'(0), f''(0)\big),$$

dont l'axe des abscisses est formé par la tangente à γ en $M(0)$, sont

$$\left(t + o(t^2), \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right)$$

et sont donc équivalentes à

$$\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$$

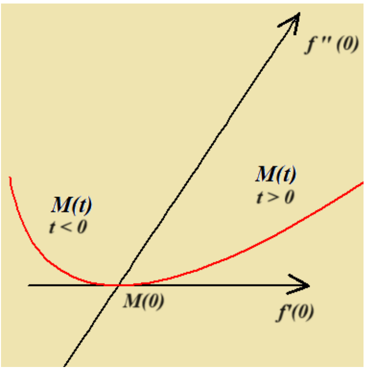
lorsque t tend vers 0. Ainsi, au voisinage de 0,

- l'abscisse du point $M(t)$ est du signe de t et donc positive pour $t > 0$ et < 0 pour $t < 0$,
- l'ordonnée du point $M(t)$ est du signe de $\frac{1}{2}t^2$ et donc positive pour $t > 0$ comme pour $t < 0$.

C'est pourquoi, dans le repère $\mathcal{R}_0$, le point $M(t)$ se trouve, au voisinage de 0 :

- dans le demi-plan $Y > 0$ et donc au-dessus de la tangente à γ au point $M(0)$,
- dans le quart de plan $X > 0, Y > 0$ lorsque $t > 0$
- et dans le quart de plan $X < 0, Y > 0$ lorsque $t < 0$,

d'où l'allure suivante:



Dans le cas général, a formule de Taylor à l'ordre q donne

$$\begin{aligned} f(t) \quad &\underset{t\to t_0}{=} \quad f(t_0) + \frac{1}{p!}(t-t_0)^p f^{(p)}(t_0) \\ &+ \quad \frac{1}{(p+1)!}(t-t_0)^{p+1} f^{(p+1)}(t_0) + \ldots + \frac{1}{(q-1)!}(t-t_0)^{q-1} f^{(q-1)}(t_0) \\ &+ \quad \frac{1}{q!}(t-t_0)^q f^{(q)}(t_0) + \vec{o}(t-t_0)^q. \end{aligned}$$

Par hypothèse, tous les vecteurs $f^{(p+1)}(t_0), \ldots, f^{(q-1)}(t_0)$ sont colinéaires à $f^{(p)}(t_0)$; il existe donc des scalaires $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q-1}$ tels que

$$f^{(p+1)}(t_0) = \lambda_{p+1} f^{(p)}(t_0), \ldots, f^{(q-1)}(t_0) = \lambda_{q-1} f^{(p)}(t_0)$$

et en tenant compte des puissances $(t-t_0)^{p+1}, \ldots, (t-t_0)^{q-1}$, on a alors

$$\begin{aligned} &\frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}(t_0) \\ &= \frac{(t-t_0)^p}{p!} \left(1 + \underbrace{\frac{\lambda_{p+1}(t-t_0)}{p+1} + \ldots + \frac{\lambda_{q-1}(t-t_0)^{q-p-1}}{(p+1)\ldots(q-1)}}_{\varepsilon(t-t_0)} \right) f^{(p)}(t_0) \\ &= \frac{(t-t_0)^p}{p!} \left(1 + \varepsilon(t-t_0)\right) f^{(p)}(t_0). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(t) \underset{t\to t_0}{=} f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} \left(1 + \varepsilon(t-t_0)\right) f^{(p)}(t_0) + \frac{1}{q!}(t-t_0)^q f^{(q)}(t_0) + \vec{o}(t-t_0)^q$$

autrement dit

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} \underset{t\to t_0}{=} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \left(1 + \varepsilon(t-t_0)\right) f^{(p)}(t_0) + \frac{1}{q!}(t-t_0)^q f^{(q)}(t_0) + \vec{o}(t-t_0)^q.$$

On voit que $\varepsilon(t-t_0) \to 0$ lorsque $t \to t_0$. En première approximation, la composante de $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ suivant $f^{(p)}(t_0)$ est $\frac{(t-t_0)^p}{p!}$; au voisinage de t_0, elle est donc

- positive lorsque $t > t_0$ quel que soit p,
- négative lorsque $t < t_0$ et p impair,
- positive lorsque $t < t_0$ et p est pair.

De même, la composante de $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ suivant $f^{(q)}(t_0)$ est $\frac{(t-t_0)^q}{q!}$; au voisinage de t_0, elle est donc

- positive lorsque $t > t_0$ quel que soit q,
- négative lorsque $t < t_0$ et q impair,
- positive lorsque $t < t_0$ et q est pair.

Dans le repère $(M(t_0); f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$, le point $M(t)$ est donc

- dans le quart de plan $X > 0$, $Y > 0$ pour $t > t_0$ quels que soient p et q,
- dans le quart de plan $X < 0$, $Y > 0$ pour $t < t_0$ lorsque p est impair (car alors $(t-t_0)^p < 0$) et q pair (car alors $(t-t_0)^q > 0$),
- dans le quart de plan $X < 0$, $Y < 0$ pour $t < t_0$ lorsque p est impair et q est impair (car alors $(t-t_0)^q < 0$),
- dans le quart de plan $X > 0$, $Y < 0$ pour $t < t_0$ lorsque p est pair (car alors $(t-t_0)^p > 0$) et q est impair,
- dans le quart de plan $X < 0$, $Y > 0$ pour $t < t_0$ lorsque p est pair et q est pair.

Retour vers le théorème 66 On supposera $\vec{x} \neq 0$ et $\vec{y} \neq 0$, sans quoi il n'y a rien démontrer puisque tout est nul. Considérons alors

$$\begin{aligned} P : \lambda \quad &\mapsto \quad \left\|\vec{x} + \lambda\vec{y}\right\|^2 \\ &= \quad \langle \vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x} + \lambda\vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

En développant comme dans la proposition XV. 1.1, on a

$$\begin{aligned} P(\lambda) \quad &= \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \lambda\vec{y}, \lambda\vec{y} \rangle + 2\langle \vec{x}, \lambda\vec{y} \rangle \\ &= \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \lambda^2 \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + 2\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\ &= \quad \left\|\vec{x}\right\|^2 + \lambda^2 \left\|\vec{y}\right\|^2 + 2\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Mais $P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 \geq 0$ car c'est le carré d'une norme. Le trinôme ci-dessus en λ est donc ≥ 0 pour tout λ. Son discriminant est donc ≤ 0, c'est à dire

$$4\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0,$$

c'est à dire $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$. Les quantités en jeu étant ≥ 0, on peut en prendre la racine carrée, ce qui donne

$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|,$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- Si on a égalité, c'est que le discriminant est nul et P possède alors une unique racine λ_0 i.e. il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que
$$\|\vec{x} + \lambda_0\vec{y}\|^2 = 0.$$
De la propriété de définie positivité on déduit alors $\vec{x} + \lambda_0\vec{y} = \vec{0}$, ce qui prouve que $(\vec{x},\vec{y})$ est liée.
- Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont liés, il existe un scalaire k tel que $\vec{y} = k\vec{x}$. On a alors
$$\begin{aligned} |\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| &= |\langle\vec{x},k\vec{x}\rangle| \\ &= |k\langle\vec{x},\vec{x}\rangle| \\ &= |k|\,|\langle\vec{x},\vec{x}\rangle| \\ &= |k|\,\|\vec{x}\| \times \|\vec{x}\| \\ &= \|k\vec{x}\| \times \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \times \|\vec{x}\| \end{aligned}$$
et on a donc égalité.
- Et toujours dans le cas ci-dessus d'égalité (et en supposant toujours $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $\vec{y} \neq \vec{0}$ sans quoi il n'y a rien à démontrer),
$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| = \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|$$
, on a donc
$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \pm\|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|.$$
Or
$$\begin{aligned} \langle\vec{x},\vec{y}\rangle &= \langle\vec{x},k\vec{x}\rangle \\ &= k\langle\vec{x},\vec{x}\rangle \\ &= k\|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$
et donc $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ a le même signe que k:
  - si $k < 0$, on a donc
  $$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle < 0$$
  et puisque
  $$\|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\| > 0,$$
  c'est que
  $$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = -\|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|$$
  et on n'a donc pas égalité.
  - Si $k > 0$, on a donc
  $$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle > 0$$
  et puisque
  $$\|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\| > 0,$$
  c'est que
  $$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|$$
  et on a donc égalité.

  On voit que l'on a égalité sans les valeurs absolues que lorsque $k > 0$ i.e. lorsque $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ont le même sens.

Retour vers le théorème 67

- On a
$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle\vec{x},\vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle \\ &= \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \underbrace{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{x}\rangle}_{\text{symétrie}} + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle \\ &= \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle. \end{aligned}$$
En changeant $\vec{y}$ en $-\vec{y}$ dans cette formule, on obtient
$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|-\vec{y}\|^2 + 2\langle\vec{x},-\vec{y}\rangle.$$
Mais par bilinéarité du produit scalaire,
$$\begin{aligned} \|-\vec{y}\|^2 &= \langle-\vec{y},-\vec{y}\rangle \\ &= -\langle\vec{y},-\vec{y}\rangle \\ &= -(-\langle\vec{y},\vec{y}\rangle) = \langle\vec{y},\vec{y}\rangle, \end{aligned}$$
alors que
$$\langle\vec{x},-\vec{y}\rangle = -\langle\vec{x},-\vec{y}\rangle,$$
ce qui démontre la deuxième formule.
- On a ensuite
$$\begin{aligned} \|\lambda\vec{x}\| &= \sqrt{\langle\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}\rangle} = \sqrt{\lambda \times \langle\vec{x},\lambda\vec{x}\rangle} = \sqrt{\lambda \times \lambda\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = |\lambda|\,\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} \\ &= |\lambda|\,\|\vec{x}\|. \end{aligned}$$
- De ce qui précède et en utilisant le fait que $t \leq |t|$ pour tout réel t puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|$$
(démontrée plus bas),
$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\| \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$
d'où $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

  Enfin, on a l'égalité
  $$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$
  si et seulement si on a l'égalité
  $$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|^2$$
  si et seulement si , d'après les développements ci-dessus
  $$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|$$
  c'est à dire, d'après les cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si et seulement si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires et de même sens.

Retour vers le théorème 68 Autant faire la démonstration dans le cas général.
L'application
$$(\vec{x},\vec{y}) \longmapsto x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$
est clairement symétrique. D'autre part
$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k + \beta x'_k)y_k = \alpha\sum_{k=1}^{n}x_ky_k + \beta\sum_{k=1}^{n}x'_ky_k,$$

ce qui prouve la linéarité par rapport à la première variable et donc la bilinéarité grâce à la symétrie. Enfin,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$$

et nul si et seulement si tous les x_k^2 sont nuls (une somme de termes ≥ 0 si et seulement si tous ses termes sont nuls) i.e. si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}$, ce qui prouve la définie positivité.

Retour vers le théorème 69

- Prenons $r = 3$ pour fixer les idées et considérons une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de F. On se donne un vecteur $\vec{x}$ de E et on pose

$$\vec{x}_1 = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3$$

puis

$$\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1$$

de sorte que

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

Il est clair que $\vec{x}_1 \in F$ en tant que combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ qui sont eux-mêmes dans F. D'autre part, $\vec{x}_2 \in F^\perp$ pour la raison suivante, qui s'appuie sur le résultat du théorème 3.1: "pour appartenir à $F^\perp$, il faut et il suffit d'être orthogonal aux vecteurs d'une base de F" (dans le calcul ci-dessous, il est difficile de faire la distinction entre ce qui est scalaire et ce qui ne l'est pas; la typographie proposée devrait faciliter la tâche):

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_2, \vec{e}_1 \rangle &= \left\langle \boldsymbol{\vec{x}} - (\langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_1} + \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_2} + \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_3}), \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle \\ &= \left\langle \boldsymbol{\vec{x}}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle - \left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_1}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle - \left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_2}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle - \left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_3}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Or

$$\left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_1}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \left\langle \boldsymbol{\vec{e}_1}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle$$

par bilinéarité et puisque $\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \right\rangle = 1$, on a donc

$$\left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_1}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle.$$

Ensuite,

$$\left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_2}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle = \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \left\langle \boldsymbol{\vec{e}_2}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle = 0$$

car les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont orthogonaux. De même,

$$\left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_3}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_2, \vec{e}_1 \rangle &= \left\langle \boldsymbol{\vec{x}}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle - \left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_1}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle - \left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_2}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle - \left\langle \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle \boldsymbol{\vec{e}_3}, \boldsymbol{\vec{e}_1} \right\rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle - \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle - 0 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\langle \vec{x}_2, \vec{e}_2 \rangle = 0, \qquad \langle \vec{x}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0.$$

En conclusion, on a écrit

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

avec $\vec{x}_1 \in F$ et $\vec{x}_2 \in F^\perp$ et ce quel que soit le vecteur $\vec{x} \in E$: c'est la preuve que

$$E = F + F^\perp.$$

- On a bien sûr

$$F \cap F^\perp = \{0\},$$

car si $\vec{x} \in F \cap F^\perp$, alors $\vec{x}$ devrait en particulier être orthogonal à lui-même i.e.

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0,$$

c'est à dire $\|\vec{x}\|^2 = 0$, d'où $\vec{x} = \vec{0}$. On a donc prouvé que $E = F \oplus F^\perp$.

Retour vers le théorème 70 Le fait que H soit un hyperplan résulte de ce que H est le *noyau de la forme linéaire*

$$\varphi : \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n,$$

qui n'est pas la forme linéaire nulle par hypothèse (l'un au moins des scalaires a_i est non nul).

On voit ensuite, par définition même du produit scalaire canonique, que

$$\vec{x} \in H \iff \langle \vec{x}, \vec{A} \rangle = 0$$

i.e. $\vec{x} \in H \iff \vec{x} \perp \vec{A}$, ce qui prouve que $\vec{A}$ est orthogonal à tout vecteur de H. Ainsi, $\vec{A}$ est normal à H.

Retour vers le théorème 71 La condition est évidemment nécessaire: si $F \perp G$, tout vecteur de F, et en particulier tout vecteur de $\mathcal{B}_1$, est orthogonal à tout vecteur de G, donc en particulier à tout vecteur de $\mathcal{B}_2$.

Réciproquement, supposons que

$$\forall (i,j) \in [\![1, r]\!] \times [\![1, \ell]\!],\ \langle v_i, w_j \rangle = 0.$$

Soit $(x, y) \in F \times G$. Puisque $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ sont des bases de F et G, il existe des scalaires

$$a_1, \ldots, a_r \quad b_1, \ldots, b_\ell$$

tels que

$$\begin{aligned} x &= a_1 v_1 + \ldots a_r v_r \\ y &= b_1 w_1 + \ldots + b_\ell w_\ell \end{aligned}$$

et alors, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle a_1 v_1 + \ldots a_r v_r, b_1 w_1 + \ldots + b_\ell w_\ell \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\ell} a_i b_j \langle v_i, w_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\ell} a_i b_j \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Retour vers le théorème 72 Notons

i u est une isométrie vectorielle,

ii u conserve le produit scalaire i.e. si et seulement si

$$\forall (\vec{v}, \vec{v}\,') \in E^2,\ \langle u(\vec{v}), u(\vec{v}\,') \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\,' \rangle.$$

iii Pour toute base orthonormée $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, $(u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_n))$ est une base orthonormée de E.

iv Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ de E telle que $(u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_n))$ soit une base orthonormée de E.

Passons à la démonstration du théorème.

- Rappelons l'identité de polarisation:

$$\forall(\vec{v},\vec{v}\,')\in E^2, \langle\vec{v},\vec{v}'\rangle=\frac{1}{4}\left(\|\vec{v}+\vec{v}'\|^2-\|\vec{v}-\vec{v}'\|^2\right).$$

Supposons (i); par polarisation appliquée à $u(\vec{v})$ et $u(\vec{v}')$:

$$\begin{aligned}\langle u(\vec{v}),u(\vec{v}')\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(\vec{v})+u(\vec{v}')\|^2-\|u(\vec{v})-u(\vec{v}')\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|\vec{v}+\vec{v}'\|^2-\|\vec{v}-\vec{v}'\|^2\right)\end{aligned}$$

car par hypothèse u conserve la norme et donc conserve la norme de $\vec{v}+\vec{v}'$ et de $\vec{v}-\vec{v}'$, et cette dernière quantité vaut $\langle\vec{v},\vec{v}'\rangle$ par polarisation appliquée à $\vec{v}$ et $\vec{v}'$.

- Supposons (ii); alors l'image d'une base orthonormée est une famille orthonormale par conservation du produit scalaire, donc libre (théorème XV.3.9), donc une base orthonormale.

- Évidemment, (iii)⇒(iv).

- Supposons enfin (iv), alors on obtient (i) ainsi: tout $\vec{v}$ s'écrit sous la forme

$$\vec{v}=\sum_{k=1}^{n}\langle\vec{v},\vec{e}_k\rangle\vec{e}_k$$

et alors

$$\|\vec{v}\|^2=\sum_{k=1}^{n}\langle\vec{v},\vec{e}_k\rangle^2$$

(cf. théorème XV.3.12). Par ailleurs

$$u(\vec{v})=\sum_{k=1}^{n}\langle\vec{v},\vec{v}e_k\rangle u(\vec{e}_k)$$

et comme par hypothèse $(u(\vec{v}e_1),\dots,u(\vec{e}_n))$ est une base orthonormée, les scalaires $\langle\vec{v},\vec{e}_k\rangle$ sont les composantes de $u(\vec{v})$ dans cette base; on en déduit

$$\|u(\vec{v})\|^2=\sum_{k=1}^{n}\langle\vec{v},\vec{e}_k\rangle^2$$

toujours d'après le théorème XV.3.12 et c'est donc que u conserve la norme.

Retour vers le théorème 73

- Il est évident que $\mathrm{Id}\in\mathcal{O}(E)$.
- $\mathcal{O}(E)$ est stable par la loi $\circ$, car si u et v conservent la norme, alors $u\circ v$ aussi:

$$\begin{aligned}\forall x\in E,\ \|(u\circ v)(x)\| &= \|u(v(x))\| \text{ (car } u \text{ conserve la norme)}\\ &= \|v(x)\| \text{ (car } v \text{ conserve la norme)}\\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

- Enfin, si $u\in\mathcal{O}(E)$ alors d'une part u^{-1} existe (car u est un automorphisme de E) et pour tout $y\in E$, en posant

$$x=u^{-1}(y)$$

i.e.

$$u(x)=y,$$

on a

$$\begin{aligned}\|u^{-1}(y)\| &= \|x\|\\ &= \|u(x)\| \text{ (car } u \text{ conserve la norme)}\\ &= \|u(u^{-1}(y))\|\\ &= \|(u\circ u^{-1})(y)\|\\ &= \|y\|,\end{aligned}$$

si bien que $u^{-1}\in\mathcal{O}(E)$.

Retour vers le théorème 74

- Notons $M=(a_{ij})$; alors $M^T=(b_{ij})$ avec $b_{ij}=a_{ji}$ si bien que $M^TM=(c_{ij})$ avec

$$\begin{aligned}c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}.\end{aligned}$$

- Rappelons le théorème XV.3.12: si $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ sont les composantes *dans une base orthonormée* de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, alors

$$\begin{aligned}\forall\ell\in[\![1,n]\!],\ x_\ell &= \langle\vec{x},\vec{e}_\ell\rangle\\ \langle\vec{x},\vec{y}\rangle &= \sum_{k=1}^{n}x_k\times y_k.\end{aligned}$$

- D'après ce théorème, $\langle\vec{e}_k,u(\vec{e}_\ell)\rangle$ est la composante du vecteur $u(\vec{e}_\ell)$ suivant le vecteur $\vec{e}_k$, composante que l'on notera $u(\vec{e}_\ell)_k$.

- D'autre part, par définition de la notion de représentation matricielle, la ℓ-ième colonne $\begin{pmatrix}a_{1\ell}\\ \vdots\\ a_{n\ell}\end{pmatrix}$ de M représente les coordonnées de $u(\vec{e}_\ell)$ dans $\mathcal{B}$ et celles-ci sont, d'après le théorème rappelé ci-dessus, les scalaires

$$\langle\vec{e}_1,u(\vec{e}_\ell)\rangle,\ \langle\vec{e}_2,u(\vec{e}_\ell)\rangle,\dots,\langle\vec{e}_n,u(\vec{e}_\ell)\rangle.$$

Ainsi,

$$a_{1\ell}=\langle\vec{e}_1,u(\vec{e}_\ell)\rangle,\ a_{2\ell}=\langle\vec{e}_2,u(\vec{e}_\ell)\rangle,\dots,a_{n\ell}=\langle\vec{e}_n,u(\vec{e}_\ell)\rangle$$

i.e. pour tout $k\in[\![1,n]\!]$,

$$a_{k\ell}=\langle\vec{e}_k,u(\vec{e}_\ell)\rangle.$$

- De ces deux résultats, on déduit que

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}u(\vec{e}_i)_k\times u(\vec{e}_j)_k$$

et que $\sum_{k=1}^{n}u(\vec{e}_i)_k\times u(\vec{e}_j)_k$ est le produit scalaire de $u(\vec{e}_i)$ avec $u(\vec{e}_j)$.

  - Si u est une isométrie vectorielle, alors $(u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_n))$ est une base orthonormée et donc

$$\langle u(\vec{e}_i),u(\vec{e}_j)\rangle=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

autrement dit

$$\begin{cases}c_{ij}=1 & \text{si } i=j\\ c_{ij}=0 & \text{si } i\neq j.\end{cases}$$

On voit donc que $M^TM=I_n$.

– De même, si $M^T M = I_n$ c'est que
$$\begin{cases} c_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ c_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
autrement dit
$$\langle u(\vec{e}_i), u(\vec{e}_j)\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

  * La famille $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls (ils sont de norme un): c'est une famille libre à n éléments et c'est donc une base de E, orthonormée.
  * u est alors un isométrie vectorielle (théorème XV.7.27).

Ensuite, rappelons que pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a
$$(AB)^T = B^T \times A^T$$
puis que si M et N sont deux matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors
$$(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$$
et enfin si A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors
$$(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}.$$
En conséquence, si M et N sont dans $O(n)$, alors
$$\begin{aligned}(MN)^T &= N^T \times M^T \\ &= N^{-1} \times M^{-1} \\ &= (MN)^{-1},\end{aligned}$$
ce qui démontre que $MN \in O(n)$. Enfin, si $M \in O(n)$, alors
$$\begin{aligned}(M^{-1})^T \times M^{-1} &= \left(M^T\right)^{-1} \times M^{-1} \\ &= \left(M^{-1}\right)^{-1} \times M^{-1} \\ &= M \times M^{-1} \\ &= I_n,\end{aligned}$$
ce qui prouve que $M^{-1} \in O(n)$.
Et le fait que $I_n \in O(n)$ est évident.

Retour vers le théorème 75 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire habituel, canoniquement associé à la matrice M.

- Par définition même de la notion de représentation matricielle/codage dans une base, la première colonne de M est constituée des coordonnées, dans la base canonique, de l'image par u du premier vecteur $\vec{e}_1$ de la base canonique, etc.
- D'après le théorème XV.7.30, la matrice M est orthogonale si et seulement si u est une isométrie de E et d'après le théorème XV.7.27, la base canonique
$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$
étant orthonormée, u est une isométrie de E si et seulement si
$$(u(\vec{e}_1), \dots, \vec{u}(\vec{e}_n))$$
est une base orthonormée de E, donc si et seulement si les vecteurs colonnes de M constituent une base orthonormée.

Retour vers le théorème 76

- Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ les bases en jeu et soit u l'endomorphisme de E associé à la matrice P dans la base $\mathcal{B}_0$: cela signifie, par définition de la représentation matricielle et de la notion de matrice de passage, que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u(e_i) = f_i.$$
- D'après le théorème XV.7.27, la base $\mathcal{B}$ est orthonormée si et seulement si u est une isométrie vectorielle et d'après le théorème XV.7.30, ceci se produit si et seulement si P est une matrice orthogonale, ce qui achève la démonstration du théorème.

Retour vers le théorème 77 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de l'espace et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Par définition du concept d'orientation,
$$\det P > 0$$
et puisque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées, P est une matrice orthogonale et en particulier, son déterminant vaut 1 ou -1. On a donc
$$\det P = 1.$$
D'autre part, notons respectivement
$$X, Y, Z, \;\; X', Y', Z'$$
les vecteurs colonnes de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ puis M et M' les matrices respectives de la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$: la première colonne de M, resp. M', est donc par définition X, resp. X' et ainsi de suite et toujours par définition, le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, resp. $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, resp. la base $\mathcal{B}'$, est le déterminant de M, resp. le déterminant de M'.

D'après les formules de changement de base, on a
$$X = PX', \;\; Y = PY', \;\; Z = PZ'$$
si bien qu'il est immédiat de constater que
$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} X' & Y' & Z' \end{pmatrix},$$
c'est à dire
$$M = PM'.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \det M \\ &= \det(PM') \\ &= \det(P) \times \det(M') \\ &= 1 \times \det(M') \\ &= \det(M') \\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}).\end{aligned}$$
Le déterminant de cette famille de vecteurs calculé dans une base orthonormée directe est donc toujours le même.

Retour vers le théorème 78 Soit $\mathcal{B}_0$ la base de référence choisie pour orienter E; soit P_0 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ et P_0' la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}'$. Il est donc question de comparer les signes des déterminants de P_0 et P_0' en fonction du déterminant de P.

De façon générale, le déterminant de la matrice de passage d'une base
$$\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$$
à une base
$$\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$$
est celui de l'endomorphisme u de E tranformant e_1 en f_1,..., e_n en f_n car d'après le protocole et par définition même de la notion de matrice de passage, u est représenté, dans la base $\mathcal{B}_1$, par la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

C'est pourquoi, en notant

- f l'endomorphisme de E transformant la base $\mathcal{B}_0$ en la base $\mathcal{B}$:
$$\det(f) = \det(P_0)$$
- g l'endomorphisme de E transformant la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:
$$\det(g) = \det(P).$$

Il en résulte que $g \circ f$ est l'endomorphisme de E transformant la base $\mathcal{B}_0$ en la base $\mathcal{B}'$ et donc
$$\det(g \circ f) = \det(P'_0).$$
Mais des propriétés du déterminant, on déduit
$$\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f).$$
Il en résulte
$$\begin{aligned}\det(P'_0) &= \det(g \circ f)\\ &= \det(g) \times \det(f)\\ &= \det(P) \times \det(P_0).\end{aligned}$$
En conséquence :

- si $\det P > 0$, alors $\det(P'_0)$ et $\det(P_0)$ ont le même signe: si celui-ci est > 0, c'est que les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont toutes les deux directes et si celui-ci est < 0, elles sont toutes les deux indirectes.
- Si $\det P < 0$, alors $\det(P'_0)$ et $\det(P_0)$ ont une signe opposé et c'est donc que l'une des bases est directe et l'autre est indirecte.

Retour vers le théorème 79 Dans les deux cas, $\det(f) \neq 0$ et donc f est un automorphisme de E et en conséquence, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ est une base de E (propriété fondamentale des automorphismes: l'image d'une base par un automorphisme est une base) et par définition même, la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Par définition de la matrice d'un endomorphisme (valeur commune du déterminant dans toute base de la matrice représentant cet endomorphisme), on a
$$\det(P) = \det(f)$$
et le résultat s'ensuit.

Retour vers le théorème 80 Soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $B_2 = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$ deux bases de P puis $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases
$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}), \quad \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{n}).$$
Notons
$$N,\ E_1,\ E_2,\ E'_1,\ E'_2$$
les matrices colonnes des vecteurs
$$\vec{n},\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2$$
dans la base canonique puis M et M' les matrices de passage de la base canonique aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement si bien que, avec des notations évidentes,
$$M = (E_1, E_2, N), \quad M' = (E'_1, E'_2, N).$$
Puisque $\vec{e}\,'_1$ et $\vec{e}\,'_2$ sont des vecteurs de P dont $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base, il existe des scalaires a, b, c, d tels que
$$\begin{aligned}\vec{e}\,'_1 &= a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2\\ \vec{e}\,'_2 &= b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2\end{aligned}$$
si bien que
$$\begin{aligned}E'_1 &= aE_1 + bE_2\\ E'_2 &= cE_1 + dE_2\end{aligned}$$
puis, par définition même, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice
$$Q = \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}.$$
Des propriétés de *multilinéarité* du déterminant (cf. page 154), on a
$$\begin{aligned}\det(M') &= \det((E'_1, E'_2, N)\\ &= \det(aE_1 + bE_2, cE_1 + dE_2, N)\\ &= ac\det(E_1, E_1, N) + ad\det(E_1, E_2, N) + bc\det(E_2, E_1, N) + bd\det(E_2, E_2, N).\end{aligned}$$
Mais
$$\det(E_1, E_1, N) = \det(E_2, E_2, N) = 0$$
car dans les deux cas, il s'agit du déterminant d'une famille liée, donc nul. D'autre part (cf. page 154), le déterminant est changé en son opposé lorsque l'on permute deux colonnes:
$$\det(E_2, E_1, N) = -\det(E_1, E_2, N).$$
On a donc
$$\det(M') = (ad - bc)\det(E_1, E_2, N),$$
c'est à dire en fait
$$\det(M') = \det(Q) \times \det(M).$$
On conclut ainsi: par définition, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ont la même orientation (au sens de cette nouvelle orientation) si et seulement si $\det(M)$ et $\det(M')$ ont le même signe, ce qui se produit donc si et seulement si $\det(Q) > 0$.

Retour vers le théorème 81 Soit $M = \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ une matrice orthogonale. Les colonnes de M étant orthogonales:
$$a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1,\ ac + bd = 0.$$

- De $a^2 + b^2 = 1$, on déduit l'existence d'un réel θ tel que
$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta.$$
- De $c^2 + d^2 = 1$, on déduit l'existence d'un réel α tel que
$$c = \sin\alpha, \quad d = \cos\alpha.$$
- De $ac + bd = 0$, on déduit
$$\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha = 0,$$
c'est à dire $\sin(\theta + \alpha) = 0$. On a alors
  1. ou bien $\theta + \alpha = 0\ [2\pi]$, auquel cas $\alpha = -\theta\ [2\pi]$ et alors
$$\sin\alpha = -\sin\theta, \quad \cos\alpha = \cos\theta, \quad M = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
et on a
$$\det(M) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$
  2. ou bien $\theta + \alpha = \pi\ [2\pi]$, auquel cas $\alpha = \pi - \theta\ [2\pi]$ et alors
$$\sin\alpha = \sin\theta, \quad \cos\alpha = -\cos\theta, \quad M = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$
et on a
$$\det(M) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1.$$

Retour vers le théorème 82

$$\begin{aligned}R_\theta \times R_{\theta'} &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta'\\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}.\end{aligned}$$

Ensuite, dans la mesure où $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = R_0$, on a alors

$$R_\theta \times R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2,$$

ce qui prouve que l'on a bien $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Retour vers le théorème 83 Fixons une base orthonormée directe $\mathcal{B}_0$ de E et soit M la matrice de f dans $\mathcal{B}_0$. Du théorème XV.7.30, on déduit que M est une matrice orthogonale, et puisque

$$\det(M) = \det(f) = 1,$$

on déduit du théorème XV.9.40 qu'il existe un réel θ tel que

$$M = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Maintenant, soit $\mathcal{B}$ une autre base orthonormée directe de E, soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à B et soit M' la matrice de f dans $\mathcal{B}$. Puisque les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées, P est une matrice orthogonale (théorème XV.7.32) et puisque $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont directes, $\det P > 0$ (définition XV.8.15) et puisque $\det P = 1$ ou $\det P = -1$ (théorème XV.7.33), on a $\det P = 1$ si bien que d'après le théorème XV.9.40, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Des formules de changement de base, on a

$$M' = P^{-1}MP.$$

Utilisons les notations du théorème XV.9.40:

$$M = R_\theta, \quad P = R_\alpha$$

si bien que d'après ce même théorème,

$$\begin{aligned}P^{-1} &= R_{-\alpha}\\ M' &= P^{-1}MP\\ &= R_{-\alpha} \times R_\theta \times R_\alpha\\ &= R_{-\alpha}\big(R_\theta \times R_\alpha\big)\\ &= R_{-\alpha} \times R_{\theta+\alpha}\\ &= R_{-\alpha+\theta+\alpha}\\ &= R_\theta\\ &= M.\end{aligned}$$

Retour vers le théorème 84 *Remarque préliminaire.* La preuve de l'invariance de la valeur du déterminant d'une famille de vecteurs dans n'importe quelle base orthonormée directe est omise car identique (avec une dimension en moins) à celle produite concernant le produit mixte dans l'espace.

Posons

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (a,b)\\ \vec{v} &= (c,d)\\ A &= \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\\ B &= \frac{\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}A &= \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\\ &= \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\\ B &= \frac{\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\\ &= \frac{ad-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}A^2+B^2 &= \frac{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\\ &= \frac{a^2c^2+b^2d^2+2acbd+a^2d^2+b^2c^2-2adbc}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\\ &= \frac{a^2(c^2+d^2)+b^2(d^2+c^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\\ &= \frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Il existe donc un réel θ, unique modulo 2π, tel que

$$A = \cos\theta, \quad B = \sin\theta$$

i.e. tel que

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{ac+bd}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\\ \sin\theta &= \frac{ad-bc}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.\end{aligned}$$

Notons alors f la rotation d'angle θ. On a alors par linéarité

$$f\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right) = \frac{1}{\|\vec{u}\|}f(\vec{u})$$

et puisque

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cos\theta - b\sin\theta\\ a\sin\theta + b\cos\theta\end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{aligned}f(\vec{u}) &= (a\cos\theta - b\sin\theta, a\sin\theta + b\cos\theta)\\ &= \frac{1}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\Big(a(ac+bd)-b(ad-bc), a(ad-bc)+b(ac+bd)\Big)\\ &= \frac{1}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\Big(c(a^2+b^2), d(a^2+b^2)\Big)\\ &= \frac{1}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}(a^2+b^2)\Big(c,d\Big)\\ &= \frac{1}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\|\vec{u}\|^2 \times \vec{v}\\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{u}\| \times \vec{v}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right) &= \frac{1}{\|\vec{u}\|}f(\vec{u}) \\ &= \frac{1}{\|\vec{u}\|}\frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{u}\|\times\vec{v} \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|}\times\vec{v}. \end{aligned}$$

Enfin, si g est une autre rotation transformant le vecteur $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ en le vecteur $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, notons θ' son angle. Alors (en anticipant sur un résultat démontré plus bas), g^{-1} est la rotation d'angle $-\theta'$ et $f\circ g^{-1}$ est la rotation d'angle $\theta-\theta'$. Mais puisque

$$g(\vec{u}_1) = \vec{v}_1,$$

on a

$$g^{-1}(\vec{v}_1) = \vec{u}_1$$

et

$$\begin{aligned} (f\circ g^{-1})(\vec{v}_1) &= f(\vec{u}_1) \\ &= \vec{v}_1 \\ &= 1\times\vec{v}_1 \end{aligned}$$

Ainsi, $f\circ g^{-1}$ est une rotation possédant la valeur propre 1 et c'est pourquoi (cf. résultat plus bas),

$$f\circ g^{-1} = \mathrm{Id}$$

i.e.

$$f = g.$$

Il n'existe donc pas d'autre rotation transformant $\vec{u}_1$ en $\vec{v}_1$ que la rotation d'angle θ.

Enfin, notons r_θ l'unique rotation transformant le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ en le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ i.e.

$$(\vec{u},\vec{v}) = \theta\ [2\pi].$$

L'application réciproque r_θ^{-1} transforme évidemment le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ en le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$. Or (proposition plus bas),

$$r_\theta^{-1} = r_{-\theta}.$$

Ainsi, la rotation qui transforme le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ en le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ est la rotation d'angle $-\theta$ et c'est pourquoi

$$(\vec{v},\vec{u}) = -\theta \quad [2\pi].$$

Notons ensuite r_θ l'unique rotation transformant le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ en le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$:

$$(\vec{u},\vec{v}) = \theta\ [2\pi]$$

et r_φ l'unique rotation transformant le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ en le vecteur $\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$:

$$(\vec{v},\vec{w}) = \varphi\ [2\pi].$$

L'application $r_\varphi\circ r_\theta$ transforme évidemment le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ en le vecteur $\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$. Or (proposition plus bas),

$$r_\varphi\circ r_\theta = r_{\varphi+\theta}.$$

Ainsi, la rotation qui transforme le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ en le vecteur $\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$ est la rotation d'angle $\varphi+\theta$ c'est à dire $\theta+\varphi$ et c'est pourquoi

$$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})\ [2\pi].$$

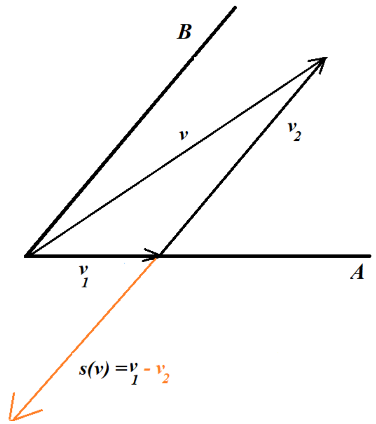
Retour vers le théorème 85 Rappelons la définition générale d'une symétrie :

Soit E un espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires:

$$E = A\oplus B.$$

Tout vecteur $\vec{v}$ de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1\in A$ et $\vec{v}_2\in B$.

- Par définition, la symétrie s sur A et parallèlement à B est l'application qui à tout $\vec{v}$ de E associe $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
- C'est un automorphisme de E i.e. une application linéaire bijective de E dans E, avec
  $$s^{-1} = s,$$
  ce qui résulte du fait que
  $$s\circ s = \mathrm{Id}_E.$$
- Pour tout vecteur $\vec{v}\in E$,
  $$s(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v}\in A, \quad s(\vec{v}) = -\vec{v} \iff \vec{v}\in B$$
  autrement dit,
  $$\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{Id}_E) = A, \quad \mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{Id}_E) = B.$$



Réciproquement, soit s un endomorphisme de E tel que $s\circ s = \mathrm{Id}_E$.

- Alors $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{Id}_E)$.
- Ainsi, en dimension finie n, si M est la matrice de s (dans une base quelconque de E), alors s est une symétrie si et seulement si $M^2 = I_n$.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ une base orthonormée de E et M la matrice de f dans $\mathcal{B}$. D'après le théorème XV.7.31, puisque f est une isométrie de E, M est une matrice orthogonale 2×2 et puisque f est indirecte, i.e. $\det(f) = -1$, on a $\det(M) = -1$ et d'après le théorème XV.9.40, il existe alors un réel θ tel que

$$M = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui est la preuve que
$$f \circ f = \mathrm{Id}_E$$
et donc que f est une symétrie.

Maintenant, étant donnée la dimension 2 de l'espace, cette symétrie ne peut être que par rapport à une droite, car sinon, on serait dans l'un de ces deux contextes

- $E = E \oplus \{\vec{0}\}$, auquel cas tout $\vec{x}$ de E s'écrit trivialement
$$\vec{x} = \vec{x} + \vec{0},\ (\vec{x}, \vec{0}) \in E \times \{\vec{0}\}$$
et en conséquence
$$f(\vec{x}) = \vec{x}$$
i.e. $f = \mathrm{Id}$, ce qui est exclu
- $E = \{\vec{0}\} \oplus E$, auquel cas tout $\vec{x}$ de E s'écrit trivialement
$$\vec{x} = \vec{0} + \vec{x},\ (\vec{0}, \vec{x}) \in \{\vec{0}\} \times E$$
et en conséquence
$$f(\vec{x}) = -\vec{x}$$
i.e. $f = -\mathrm{Id}$, ce qui est impossible, car alors f aurait pour déterminant
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$
ce qui est exclu.

Il reste à voir que f est la symétrie orthogonale par rapport à A et donc que
$$A = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$$
est orthogonal à
$$B = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E).$$
Soit donc
$$(\vec{u}, \vec{v}) \in A \times B,$$
si bien que
$$f(\vec{u}) = \vec{u}, \qquad f(\vec{v}) = -\vec{v}$$
et il s'agit de démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Puisque f est une isométrie, f conserve le produit scalaire (théorème XV.7.27) :
$$\langle f(\vec{u}), f(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle,$$
c'est à dire ici
$$\langle \vec{u}, -\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$$
i.e.
$$-\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle,$$
ce qui est la preuve que
$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0,$$
ce qu'il fallait démontrer. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ est orthogonal à $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$ et f est bien la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.

Remarque. Déterminons, en fonction de θ, le sous-espace par rapport auquel on effectue la symétrie orthogonale i.e. déterminons $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$. Soit $\vec{v} \in E$ et (x, y) ses composantes dans $\mathcal{B}$. Puisque
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ x\sin\theta - y\cos\theta \end{pmatrix},$$
on a
$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) &\iff f(\vec{v}) - \vec{v} = \vec{0} \\
&\iff \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta - x = 0 \\ x\sin\theta - y\cos\theta - y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x(\cos\theta - 1) + y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta - y(\cos\theta + 1) = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Rappelons que pour tout réel u,
$$\begin{aligned}
\cos^2 u &= \frac{1 + \cos 2u}{2} \\
\sin^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{2}
\end{aligned}$$
si bien qu'en posant $u = \frac{\theta}{2}$, on a
$$\begin{aligned}
\cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos\theta}{2} \\
\sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos\theta}{2}
\end{aligned}$$
puis en écrivant
$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin\left(2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},
\end{aligned}$$
on voit que
$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \iff \begin{cases} -2x\sin^2\frac{\theta}{2} + 2y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \\ \\ 2x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2y\cos^2\frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$
Puisque $\sin$ et $\cos$ ne s'annulent pas simultanément, on a soit $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$, soit $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$. Dans le premier cas, on simplifie L_1 par $2\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$, ce qui donne
$$-x\sin\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2} = 0$$
et en multipliant cette égalité par $-2\cos\frac{\theta}{2}$, on obtient L_2, si bien que lorsque $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$,
$$\begin{aligned}
\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) &\iff -x\sin\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2} = 0 \\
&\iff x = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} y \\
&\iff \vec{v} = \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} y, y\right) \\
&\iff \vec{v} = \frac{y}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&\iff \vec{v} \in \mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$
si bien que
$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$$
dans ce cas. Dans le deuxième cas, celui où $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$, on divise L_2 par $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$ pour obtenir
$$x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2} = 0$$
et en multipliant cette égalité par $-2\sin\frac{\theta}{2}$, on obtient L_1, si bien que lorsque $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$,
$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \iff -x\sin\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2} = 0$$
et on parvient à la même conclusion, à savoir
$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Retour vers le théorème 86

- Soit f une rotation, θ son angle et
$$M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
sa matrice dans une base orthonormée directe du plan. On calcule
$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) &= \chi_M(\lambda)\\ &= \begin{vmatrix}\lambda-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\end{aligned}$$
si bien que λ est une valeur propre de f si et seulement si
$$(\lambda-\cos\theta)^2=-\sin^2\theta,$$
Mais cette égalité entre nombres réels (on recherche des valeurs propres réelles puisque l'on travaille dans un espace vectoriel réel) n'est possible, pour des raisons de signe, à savoir
$$(\lambda-\cos\theta)^2\geq 0$$
et
$$-\sin^2\theta\leq 0,$$
que si
$$\sin\theta=0$$
i.e. $\theta=0$ ou $\theta=\pi$ (modulo 2π), ce qui conduit respectivement à $\cos\theta=1$, $\cos\theta=-1$ et donc à $M=I_2$, $M=-I_2$ et en conséquence $f=\mathrm{Id}$, ce qui est exclu, ou $f=-\mathrm{Id}$. Ainsi, la seule possibilité pour qu'une rotation possède une valeur propre est celle où cette rotation est $-\mathrm{Id}$ et cette rotation ne possède bien sûr que la valeur propre -1.
En particulier, 1 n'est valeur propre d'aucune rotation f autre que Id et c'est pourquoi
$$\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})=\{\vec{0}\}.$$
- Si f est une symétrie orthogonale en n'étant ni Id ni $-\mathrm{Id}$, f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, dont les vecteurs invariants sont les vecteurs de cette droite et dont les valeurs propres sont 1 et -1 d'après l'étude des symétries 1000 fois effectuée.

Retour vers le théorème 87

- D'après le théorème XV.7.28, f laisse stable $F^\perp$ qui est ici une droite D (un sous-espace et son orthogonal sont supplémentaires, donc leurs dimensions se complètent). Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur unitaire de D,
- Puisque $f(\vec{w})\in D$, c'est qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que
$$f(\vec{w})=\lambda\vec{w}.$$
Le vecteur $\vec{w}$ est donc propre pour f et on déduit du théorème XV.7.29 que $\lambda=\pm 1$.
- Mais on n'a pas $\lambda=1$, car $\vec{w}$ serait alors invariant et on aurait donc par définition $\vec{w}\in F$, ce qui est absurde puisque $\vec{w}\in F^\perp$.
- On a donc $f(\vec{w})=-\vec{w}$.
- Soit $(\vec{u},\vec{v})$ une base orthonormée de P, de sorte que
$$\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$
est une base orthonormée de E. Dans cette base, la matrice de f est (protocole!) la matrice
$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$
Puisque $D^2=I_3$, il en résulte que
$$f\circ f=\mathrm{Id}_E$$
et donc f est une isométrie de E.
- Rappelons que dans le contexte général d'une symétrie f par rapport à un sous-espace A et parallèlement à un sous-espace B dans une situation de supplémentarité
$$E=A\oplus B,$$
on a
$$f(\vec{v})=\vec{v}\iff\vec{v}\in A,\quad f(\vec{v})=-\vec{v}\iff\vec{v}\in B$$
ou encore, ce qui revient au même, A est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1:
$$A=\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}_E)$$
et B est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1:
$$B=\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}_E).$$
Ici, A est par définition le plan F et B est ni plus ni moins la droite D (car D est inclus dans B et B étant un supplémentaire de A, B est de dimension 1 comme D), qui est l'orthogonal de F.
- Cela prouve que f est la symétrie orthogonale par rapport à F.

Retour vers le théorème 88

- Orientons la droite vectorielle D par le vecteur $\vec{u}$ et fixons une base orthonormée directe $(\vec{u},\vec{v}_0,\vec{w}_0)$ de l'espace; notons $P=F^\perp$, qui est un plan, et orientons P suivant le vecteur $\vec{u}$ (proposition XV.8.37), de sorte que la base $(\vec{v}_0,\vec{w}_0)$ est une base directe de P; comme le prouve la cette proposition, cette orientation suivant le vecteur $\vec{u}$ est une orientation classique.
- D'après le théorème XV.7.28, P est stable par f.
- Notons f' la *restriction* de f à P (i.e. g est l'application f, mais dont on réduit le domaine de définition à P uniquement).
- Ainsi, f' est un *endomorphisme* de P et même une *isométrie vectorielle* de P (en effet, f conserve la norme de tous les vecteurs de E donc a fortiori de tous les vecteurs de P), qui est un espace euclidien de dimension 2.
- Mais f' ne possède pas d'invariant (autre que le vecteur nul) car un invariant de f' serait un invariant de f; or les invariants de f sont dans F, pas dans $P=F^\perp$.
- Mais, d'après le théorème XV.9.46, les seules isométries d'un espace euclidien de dimension 2 à ne pas posséder d'invariants sont les rotations. Ainsi, f' est une rotation du plan P; soit θ son angle.
- Soit $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une *autre* base orthonormée directe de E: par définition (cf. Proposition XV.8.39), la base $(\vec{v},\vec{w})$ est alors une base orthonormée directe de P et d'après le théorème XV.9.40, la matrice de f' dans cette base est
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$
ce qui signifie
$$f'(\vec{v})=\cos\theta\vec{v}+\sin\theta\vec{w},\qquad f'(\vec{w})=-\sin\theta\vec{v}+\cos\theta\vec{w},$$
c'est à dire
$$f(\vec{v})=\cos\theta\vec{v}+\sin\theta\vec{w},\qquad f(\vec{w})=-\sin\theta\vec{v}+\cos\theta\vec{w}$$
- Dans la mesure où $f(\vec{u})=\vec{u}$, la matrice de f dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est donc (protocole!)
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$
c'est à dire $M(\theta)$.

Retour vers le théorème 89 En effet, dans une base orthonormée directe $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ où $\vec{u}$ dirige et oriente D, f est alors représentée, d'après le Théorème XV.10.48, par la matrice
$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Puisque $D^2 = I_3$, c'est que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, ce qui prouve que f est une symétrie. Rappelons que dans le contexte général d'une symétrie f par rapport à un sous-espace A et parallèlement à un sous-espace B dans une situation de supplémentarité

$$E = A \oplus B,$$

on a

$$f(\vec{v}) = \vec{v} \iff \vec{v} \in A, \quad f(\vec{v}) = -\vec{v} \iff \vec{v} \in B$$

ou encore, ce qui revient au même, A est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1:

$$A = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$$

et B est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1:

$$B = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E).$$

Ici, A est par définition la droite D et dans la mesure où

$$D^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w}),$$

B est ni plus ni moins le plan $P = D^\perp$ (car P est inclus dans B puisque $f(\vec{v}) = -\vec{v}$ et $f(\vec{w}) = -\vec{w}$ et B étant un supplémentaire de A, B est de dimension 2 comme P), qui est l'orthogonal de D. C'est la preuve que f est la symétrie orthogonale par rapport à D.

Retour vers le théorème 90 La condition est nécessaire: si f est une rotation f est représenté par une matrice

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dont le déterminant, en développant suivant la première colonne, vaut

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta,$$

c'est à dire 1.

Pour la réciproque, voici un premier résultat:

- Le polynôme caractéristique P de f est un polynôme de degré 3, de la forme
$$P(\lambda) = \lambda^3 + \ldots.$$
On a donc
$$\lim_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = -\infty \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} P(\lambda) = +\infty$$
(un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $\pm\infty$).
- Du théorème des valeurs intermédiaires on déduit l'existence d'au moins un réel λ tel que $P(\lambda) = 0$ i.e. f possède au moins une valeur propre.
- Du Théorème XV.7.29, on déduit que cette valeur propre vaut 1 ou -1.

Distinguons laors deux cas.

- Si cette valeur propre vaut 1; on va raisonner suivant la dimension de $d = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$.
  - Si $d = 3$, c'est que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$ i.e.
  $$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ f(\vec{u}) = \vec{u}$$
  et donc f est l'application identique, qui est bien une rotation (avec la convention).
  - Si $d = 2$, alors f est une réflexion d'après le Théorème XV.10.47 et est alors représentée par la matrice diagonale
  $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
  dans une base convenable. Mais
  $$\det(f) = \det(D) = -1$$
  ce qui est contraire à l'hypothèse. Cette situation n'est donc pas possible.
  - Si $d = 1$, alors f est une rotation d'après le Théorème XV.10.48 et donc c'est bon.
  - Enfin, $d = 0$ n'est pas possible: on a supposé que 1 est une valeur propre de f et donc son sous-espace propre associé est au moins de dimension 1.

  Le cas $\lambda = 1$ est donc complètement réglé.
- Si cette valeur propre vaut -1; on considère alors l'endomorphisme $-f$, qui est clairement comme f une isométrie (le signe "$-$" n'affecte pas la norme des vecteurs). Puisque, par hypothèse, il existe un vecteur $\vec{\neq} 0$ tel que
$$f(\vec{v}) = -\vec{v}),$$
on a
$$-f(\vec{v}) = \vec{v}$$
ce qui démontre que 1 est une valeur propre de $-f$ et on va encore raisonner suivant la dimension de $d = \mathrm{Ker}\,(-f - \mathrm{Id})$.
  - Si $d = 3$, c'est que $\mathrm{Ker}\,(-f - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$ i.e.
  $$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ -f(\vec{u}) = \vec{u}$$
  et donc $-f$ est l'application identique, i.e.
  $$f = -\mathrm{Id},$$
  ce qui n'est pas possible puis que le déterminant de
  $$-I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
  vaut -1.
  - Si $d = 2$, alors $-f$ est, d'après le Théorème XV.10.47, une réflexion par rapport à un plan P: $-f$ transforme tous les vecteurs de P en eux-mêmes et ceux de son orthogonal $D = P^\perp$ en leurs opposés. Il en résulte que f transforme tous les vecteurs de P en leurs opposés et ceux de son orthogonal $D = P^\perp$ en eux-mêmes: c'est la définition même du retournement d'axe D, qui est bien une rotation (d'angle π).
  - Si $d = 1$, alors $-f$ est une rotation d'après le Théorème XV.10.48 et représenté par une matrice
  $$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
  si bien que f est représenté par la matrice
  $$-M(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
  dont le déterminant vaut -1, ce qui est contraire à l'hypothèse.
  - Enfin, $d = 0$ n'est pas possible: on a supposé que 1 est une valeur propre de $-f$ et donc son sous-espace propre associé est au moins de dimension 1.

Dans tous les cas possibles, f est bien une rotation.

Le deuxième point du théorème est clair: la base canonique étant orthonormée, l'endomorphisme f canoniquement associé à A est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si A est orthogonale et d'après la théorie du déterminant, $\det(f) = \det(A)$.

Retour vers le théorème 91 Les rotations sont des isométries de l'espace de déterminant 1 (théorème précédent). La base canonique étant orthonormée, f est une isométrie si et seulement si la matrice A est orthogonale, donc si et seulement si les vecteurs colonnes

$$(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$$

de A forment une base orthonormée et alors f est une rotation si et seulement si

$$\mathrm{Det}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3) = 1$$

i.e. si et seulement si la base $(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ est une base orthonormée directe, ce qui se produit, d'après la proposition XV.8.36 si et seulement si

$$\vec{C}_3 = \vec{C}_1 \wedge \vec{C}_2.$$

Retour vers le théorème 92 Voici un premier résultat:

- Le polynôme caractéristique P de f est un polynôme de degré 3, de la forme
$$P(\lambda) = \lambda^3 + \dots.$$
On a donc
$$\lim_{\lambda\to-\infty} P(\lambda) = -\infty \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} P(\lambda) = +\infty$$
(un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $\pm\infty$).
- Du théorème des valeurs intermédiaires on déduit l'existence d'au moins un réel λ tel que $P(\lambda) = 0$ i.e. f possède au moins une valeur propre.
- Du Théorème XV.7.29, on déduit que cette valeur propre vaut 1 ou -1.
- On sait donc que f possède au moins une valeur propre, à savoir 1 ou -1 et comme 1 n'est pas valeur propre, c'est que -1 est valeur propre de f. Il est alors clair que $-f$ admet la valeur propre 1.
- Quelle est la dimension du sous-espace propre de $-f$ associé à la valeur propre 1?
  - Si cette dimension vaut 2, alors $-f$ serait une réflexion (théorème précédent) et admettrait alors aussi la valeur propre -1.
  - Donc f admettrait la valeur propre 1, ce qui est contraire à l'hypothèse.
- Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(-f - \mathrm{Id})$ est de dimension 1 (ce n'est pas 3 car f n'est pas l'application $-\mathrm{Id}$), ce qui prouve que $-f$ est une rotation. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire qui dirige et oriente son axe et θ' son angle.
- Ainsi, $-f$ a pour matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta' & -\sin\theta'\\ 0 & \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et donc f a pour matrice
$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -\cos\theta' & \sin\theta'\\ 0 & -\sin\theta' & -\cos\theta'\end{pmatrix}$$
dans $\mathcal{B}$, ou encore
$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
avec $\theta = \theta' + \pi$.
- On a immédiatement
$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$
- Dans $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
est la matrice de la rotation r d'axe dirigé par $\vec{u}$ et d'angle θ et
$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
est la matrice de la réflexion s de plan engendré par $(\vec{v}, \vec{w})$ i.e. orthogonal à $\vec{u}$.
- On a donc $f = r \circ s = s \circ r$.

Retour vers le théorème 93 La démonstration de la diagonalisation est admise mais on peut néanmoins démontrer que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux:

- soit λ et μ deux valeurs propres de M avec $\lambda \neq \mu$. Démontrons que les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n)$ et $\mathrm{Ker}\,(M - \mu I_n)$ sont orthogonaux. Il s'agit de démontrer que tout vecteur de $\mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_n)$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Ker}\,(M - \mu I_n)$.
- Soit $X \in \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$ et $Y \in \mathrm{Ker}(M - \mu I_n)$. On a en utilisant le fait que $M^T = M$ et $MY = \mu Y$:
$$\begin{aligned}\langle MX, Y\rangle &= (MX)^T Y\\ &= X^T \times M^T \times Y\\ &= X^T \times M \times Y\\ &= X^T \times (MY)\\ &= X^T \times \mu Y\\ &= \mu X^T Y\\ &= \mu\langle X, Y\rangle.\end{aligned}$$
Mais comme $MX = \lambda X$, on a
$$\langle MX, Y\rangle = \langle \lambda X, Y\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle,$$
si bien que
$$\mu\langle X, Y\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle$$
c'est à dire $(\mu - \lambda)\langle X, Y\rangle = 0.$.
- Comme $\mu - \lambda \neq 0$, c'est que $\langle X, Y\rangle = 0$, i.e. $X \perp Y$, ce qu'il fallait démontrer.

Considérons alors une base orthonormée de chaque sous-espace propre de M. Comme dans une situation de diagonalisation classique, la réunion de ces bases constitue une base de l'espace. Comme ici les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, la réunion de ces bases constitue une base orthonormée de l'espace.

Retour vers le théorème 94 Écrivons $\vec{T}(t) = (a(t), b(t))$. Puisque par définition même, $\|\vec{T}(t)\| = 1$, c'est que
$$\forall t \in I,\ a^2(t) + b^2(t) = 1.$$
La fonction $t \mapsto a^2(t) + b^2(t)$ est donc constante et sa dérivée
$$t \mapsto 2a(t)a'(t) + 2b(t)b'(t)$$
est donc nulle. Ainsi,
$$\forall t \in I,\ a(t)a'(t) + b(t)b'(t) = 0$$
et puisque
$$\vec{T}'(t) = (a'(t), b'(t)),$$
on voit que
$$a(t)a'(t) + b(t)b'(t) = \langle \vec{T}(t), \vec{T}'(t)\rangle$$

si bien que $\langle \vec{T}(t), \vec{T}'(t)\rangle = 0$ i.e. $\vec{T}'(t) \perp \vec{T}(t)$. C'est pourquoi $\vec{T}'(t)$ est colinéaire au vecteur $\vec{N}(t)$. Écrivons alors

$$\vec{T}'(t) = \lambda(t)\vec{N}(t).$$

Puisque le point $M(t)$ est régulier, on a $\|f'(t)\| \neq 0$ et c'est pourquoi

$$c(t) = \frac{\lambda(t)}{\|f'(t)\|}$$

a bien un sens, ce qui conduit à la première formule de Frenet.

On sait par ailleurs que

$$\vec{N}(t) = (-b(t), a(t))$$

si bien que l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\begin{cases} a'(t) = -\lambda(t)b(t) \\ b'(t) = \lambda(t)a(t) \end{cases}$$

et en présentant ces égalités ainsi:

$$\begin{cases} -b'(t) = -\lambda(t)a(t) \\ a'(t) = -\lambda(t)b(t) \end{cases}$$

on voit que

$$\vec{N}'(t) = -\lambda(t)\vec{T}(t),$$

qui est la deuxième formule de Frenet.

Retour vers le théorème 95 On a $\vec{T}(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|}f'(t)$ et on a donc

$$f'(t) = S'(t)\vec{T}(t)$$

(où $S'(t) = \|f'(t)\|$). Écrivons plus simplement

$$f' = S'\vec{T}.$$

En dérivant les deux membres,

$$f'' = S''\vec{T} + S'\vec{T}'$$

si bien qu'en notant dét le produit mixte (valeur commune du déterminant dans n'importe quelle base orthonormée directe) et en jouant sur la bilinéarité de ce produit mixte:

$$\begin{aligned} \text{dét}\,(f', f'') &= \text{dét}\,(S'\vec{T}, S''\vec{T} + S'\vec{T}') \\ &= S'S''\text{dét}\,(\vec{T}, \vec{T}) + S'^2\text{dét}\,(\vec{T}, \vec{T}') \\ &= S'^2\text{dét}\,(\vec{T}, \vec{T}') \quad (\text{dét}\,(\vec{T}, \vec{T}) = 0 \text{ puisque } (\vec{T}, \vec{T}) \text{ est liée}) \\ &= S'^2\text{dét}\,(\vec{T}, cS'\vec{N}) \\ &= cS'^3\text{dét}\,(\vec{T}, \vec{N}) \end{aligned}$$

et puisque $\vec{T}, \vec{N}$ sont non nuls et orthogonaux, la famille $(\vec{T}, \vec{N})$ est libre et c'est pourquoi $\text{dét}(\vec{T}, \vec{N}) \neq 0$. Ainsi, M est birégulier si et seulement si , par définition,

$$\begin{aligned} (f', f'') \text{ est libre} &\iff \text{dét}\,(f', f'') \neq 0 \\ &\iff S'^3c \neq 0 \end{aligned}$$

et puisque

$$S' = \|f'\| \neq 0$$

(puisque M est régulier), la non nullité de S'^3c équivaut à la non nullité de c, d'où le résultat.

Retour vers le théorème 96 De

$$\vec{T}(t) = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t)),$$

on déduit

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= (-\alpha'(t)\sin\alpha(t), \alpha'(t)\cos\alpha(t)) \\ &= \alpha'(t)(-\sin\alpha(t), \cos\alpha(t)) \\ &= \alpha'(t)\vec{N}(t) \end{aligned}$$

alors que la première formule de Frenet donne

$$\vec{T}'(t) = \|f'(t)\|c(t)\vec{N}(t).$$

C'est donc que

$$\alpha'(t) = \|f'(t)\|c(t)$$

et donc

$$c(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|f'(t)\|}.$$

Retour vers le théorème 97 ***Convention d'écriture.***

- Le plan est muni d'un certain repère $\mathcal{R}$ et les coordonnées sont données dans ce repère.
- Étant donnés un point A de coordonnées (a, b) et un vecteur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ non nul du plan, une paramétrisation de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est

$$\lambda \longmapsto \begin{cases} a + \lambda\alpha \\ b + \lambda\beta \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

  et sera naturellement notée

$$\lambda \longmapsto A + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le problème de l'enveloppe est donc le suivant:

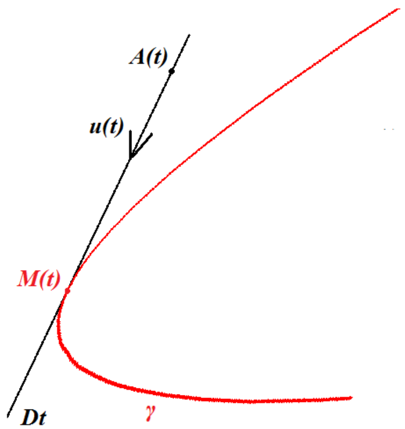
- supposons que pour chaque valeur de t, la droite D_t soit définie comme étant la droite passant par un point donné $A(t)$ de coordonnées $(a(t), b(t))$ et dirigée par un vecteur directeur donné $\vec{u}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, si bien que les points de la droite D_t sont les points

$$A(t) + \lambda\vec{u}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Il s'agit d'ajuster les fonctions x et y de manière à ce que la courbe γ de paramétrisation

$$F : t \mapsto (x(t), y(t))$$

  soit telle que pour tout t, la tangente à γ au point $M(t)$ soit précisément la droite D_t.
- Par définition même, cette tangente passe par $M(t)$:



et donc le vecteur $\overrightarrow{A(t)M(t)}$ doit être colinéaire au vecteur $\vec{u}(t)$ si bien qu'il doit exister un scalaire $\lambda(t)$[3] tel que $\overrightarrow{A(t)M(t)} = \lambda(t)\vec{u}(t)$ et donc les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $M(t)$ sont obligatoirement de la forme

$$\begin{cases} x(t) = a(t) + \lambda(t)\alpha(t) \\ y(t) = b(t) + \lambda(t)\beta(t) \end{cases}$$

avec $\lambda(t) \in \mathbb{R}$.

- Ou encore, de manière condensée, la paramétrisation de γ doit être de la forme

$$F : t \mapsto A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t),$$

en ajustant la fonction $t \mapsto \lambda(t)$ *de manière à ce que le vecteur* $F'(t)$ *soit colinéaire au vecteur* $\vec{u}(t)$ (en supposant la courbe γ régulière, ce qui garantit que la tangente soit dirigée par $F'(t)$). On a alors

$$F'(t) = A'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}\,'(t)$$

et le vecteur $F'(t)$ (supposé non nul) est colinéaire au vecteur $\vec{u}(t)$ si et seulement si $\det(F'(t), \vec{u}(t)) = 0$.

- Grâce à la propriété de bilinéarité du déterminant, à savoir

$$\det(\vec{v} + \lambda\vec{u}, \vec{w}) = \det(\vec{v}, \vec{w}) + \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}),$$

on a

$$\begin{aligned} \det(F'(t), \vec{u}(t)) &= \det\left(A'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right) \\ &= \det\left(A'(t), \vec{u}(t)\right) + \lambda'(t)\det\left(\vec{u}(t), \vec{u}(t)\right) + \lambda(t)\det\left(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right) \\ &= \det\left(A'(t), \vec{u}(t)\right) + \lambda(t)\det\left(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right) \end{aligned}$$

puisque évidemment $\det(\vec{u}(t), \vec{u}(t)) = 0$. Comme la famille $(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t))$ est libre, on a $\det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)) \neq 0$, ce qui donne

$$\lambda(t) = -\frac{\det(A'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t))}.$$

Retour vers le théorème 98 Avec les notations habituelles,

- la normale N_t à γ passe par $M(t)$ et est dirigée par $\vec{N}(t)$; elle admet donc la paramétrisation

$$\lambda \mapsto M(t) + \lambda\vec{N}(t).$$

- La développée Γ a pour paramétrisation

$$F : t \mapsto M(t) + R(t)\vec{N}(t).$$

Il faut démontrer que l'enveloppe de la famille de droite (N_t) est la courbe de paramétrisation F ci-dessus. Revenons à la définition:

> Une courbe paramétrée $\Gamma = (I, F)$ est une ***enveloppe*** de la famille $(N_t)_{t \in I}$ si pour tout $t \in I$, la droite N_t est la tangente à γ au point de paramètre t.

Comment démontrer que N_t est la tangente à Γ au point de paramètre t? Comme dans toute situation où il s'agit de démontrer que deux droites sont confondues:

- en démontrant qu'elles sont dirigées par des vecteurs qui sont colinéaires,
- et en exhibant un point commun aux deux droites.

Démontrons ces deux points.

[3] il est clair que le scalaire λ dépend de t: si on passe à un point $A(t')$, le vecteur $\overrightarrow{A'(t)M(t')}$ doit être multiple du vecteur $\vec{u}(t')$ et ce multple n'a évidemment aucune raison d'être le même qu'au point $A(t)$.

- On a

$$F'(t) = \frac{dM(t)}{d(t)} + R'(t)\vec{N}(t) + R(t)\vec{N}'(t).$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{d(t)} &= f'(t) \\ &= \|f'(t)\|\vec{T}(t) \end{aligned}$$

alors que par les formules de Frenet,

$$\vec{N}'(t) = -\frac{\|f'(t)\|}{R(t)}\vec{T}(t).$$

On a alors

$$\begin{aligned} F'(t) &= \|f'(t)\|\vec{T}(t) + R'(t)\vec{N}(t) - R(t)\frac{\|f'(t)\|}{R(t)}\vec{T}(t) \\ &= R'(t)\vec{N}(t), \end{aligned}$$

ce qui prouve que le vecteur $F'(t)$, qui dirige la tangente à la développée[4], est colinéaire au vecteur $\vec{N}(t)$, qui lui dirige la normale N_t.

- La développée est par définition la courbe décrite par le centre de courbure $I(t)$ à γ en $M(t)$; un point d'une courbe appartient évidemment à la tangente à cette courbe en ce point. Ainsi, $I(t)$ appartient à la tangente à Γ au point de paramètre t mais aussi à la normale N_t à γ en $M(t)$ puisque, par définition,

$$\overrightarrow{M(t)I(t)} = R(t)\vec{N}(t).$$

On a donc exhibé un point commun à la tangente à Γ au point de paramètre t et à la normale N_t, ce qui achève la démonstration.

Retour vers le théorème 99 Utilisons le résultat précédent: en notant S une abscisse curviligne orientée dans le sens des t croissants sur γ, S établit une bijection de I sur son image J avec

$$\forall t \in I,\ S'(t) = \|f'(t)\| > 0.$$

- Par définition, S^{-1} est défiie sur J et à valeurs dans I et il résulte du théorème de dérivation des fonctions réciproques que S^{-1} est dérivable et

$$\forall s \in J, \quad (S^{-1})'(s) = \frac{1}{S'(S^{-1}(s))}.$$

- Considérons alors la fonction

$$g = f \circ S^{-1},$$

qui est parfaitement définie sur J, puisque pour tout $s \in J$, on a $S^{-1}(s) \in I$, si bien que $f\left(S^{-1}(s)\right)$ est parfaitement défini; de plus, lorsque s parcourt J, $S^{-1}(s)$ parcourt I si bien que $f\left(S^{-1}(s)\right)$ parcourt γ et c'est pourquoi

$$(J, g)$$

est une autre paramétrisation de γ. Ensuite, de

$$g(s) = \Big(x(S^{-1}(s)), y(S^{-1}(s))\Big)$$

on déduit par théorème de dérivation des fonctions composées:

$$\begin{aligned} g'(s) &= \Big((S^{-1})'(s)x'(S^{-1}(s)), (S^{-1})'(s)y'(S^{-1}(s))\Big) \\ &= (S^{-1})'(s)\Big(x'(S^{-1}(s)), y'(S^{-1}(s))\Big) \\ &= \frac{1}{S'(S^{-1}(s))}\Big(x'(S^{-1}(s)), y'(S^{-1}(s))\Big). \end{aligned}$$

[4] En supposant que ce vecteur ne s'annule pas. On admettra que le théorème est valable même aux points où F' s'annule.

Posons $t = S^{-1}(s)$. Alors

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{1}{S'(t)}(x'(t), y'(t)) \\ &= \frac{1}{\|f'(t)\|}(x'(t), y'(t)) \\ &= \frac{1}{\|f'(t)\|} f'(t) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \|g'(s)\| &= \frac{1}{\|f'(t)\|}\|f'(t)\| \\ &= 1. \end{aligned}$$

On a donc bien créé une autre paramétrisation de γ pour laquelle le vecteur dérivé, en tout point, est de norme 1.

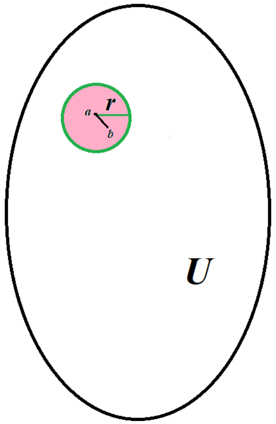
Retour vers le théorème 100 *Remarque.* Pour comprendre cette démonstration, il est nécessaire d'avoir vu (plus loin dans ce chapitre) la *Formule de Taylor à l'ordre* 1:

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U.
Alors lorsque $h = (h_1, h_2)$ tend vers $(0,0)$,

$$f(a+h) = f(a) + h_1\partial_1 f(a) + h_2\partial_2 f(a) + o\left(\|h\|\right).$$

et le paragraphe consacré à la topologie de $\mathbb{R}^n$.

Sans rentrer dans les détails trop techniques, la fonction g est effectivement définie sur un intervalle convenable centré en 0. En effet, il existe une boule de rayon r centrée en a et entièrement incluse dans U:



$$\|a-b\| < r \implies b \in U.$$

On voit donc que si

$$|t| < \frac{r}{\|\vec{v}\|},$$

alors

$$\begin{aligned} \|a - (a+t\vec{v})\| &= \|-t\vec{v}\| \\ &= |-t|\|\vec{v}\| \\ &= |t|\|\vec{v}\| \\ &< \frac{r}{\|\vec{v}\|} \times \|\vec{v}\| \\ &= r, \end{aligned}$$

et c'est pourquoi $a + t\vec{v} \in U$.

Pour fixer les idées, travaillons dans le cas d'une fonction de deux variables en posant $a = (x_0, y_0)$ et $\vec{v} = (\alpha, \beta)$, si bien que

$$a + t\vec{v} = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta).$$

On pose $h_1 = t\alpha$, $h_2 = t\beta$ et il est alors clair que

$$\begin{aligned} \|(h_1, h_2)\| &= \|t\vec{v}\| \\ &= |t|\|\vec{v}\| \end{aligned}$$

si bien que

$$h_1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,\ h_2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} g(t) &= f(a+t\vec{v}) \\ &\underset{t\to 0}{=} f(a) + h_1\partial_1 f(a) + h_2\partial_2 f(a) + o\left(\|(h_1,h_2)\|\right) \\ &= f(a) + t\alpha\partial_1 f(a) + t\beta\partial_2 f(a) + o\left(t\right) \end{aligned}$$

et puisque

$$g(t) = f(a+t\vec{v}) \implies g(0) = f(a),$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{g(t)-g(0)}{t} &= \frac{t\alpha\partial_1 f(a) + t\beta\partial_2 f(a) + o\left(t\right)}{t} \\ &= \alpha\partial_1 f(a) + \beta\partial_2 f(a) + o\left(1\right) \\ &\underset{t\to 0}{\longrightarrow} \alpha\partial_1 f(a) + \beta\partial_2 f(a) \\ &= \langle \nabla f(a), \vec{v}\rangle, \end{aligned}$$

si bien que par définition,

$$g'(0) = \langle \nabla f(a), \vec{v}\rangle.$$

Retour vers le théorème 101 La démonstration est le fruit de l'utilisation de formules de Taylor-Young:

- pour une fonction d'une variable: si ψ est une fonction de classe C^1 au voisinage d'un réel t, à valeurs réelles, alors
$$\psi(t+h) \underset{h\to 0}{=} \psi(t) + h\psi'(t) + o(h)$$
- et pour une fonction de plusieurs variables (deux pour fixer les idées): soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U.
Alors lorsque $H = (h_1, h_2)$ tend vers $(0,0)$,
$$f(a+H) = f(a) + h_1\partial_1 f(a) + h_2\partial_2 f(a) + o\left(\|H\|\right).$$

On a alors

$$f(\varphi_1(t+h), \varphi_2(t+h)) \underset{h\to 0}{=} f\big(\varphi_1(t) + h\varphi_1'(t) + o(h), \varphi_2(t) + h\varphi_1'(t) + o(h)\big)$$

et comme évidemment

$$h\varphi_1'(t) + o(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,\ h\varphi_2'(t) + o(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

on est en mesure d'appliquer la formule de Taylor-Young pour f:

$$\begin{aligned} f\big(\varphi_1(t) + h\varphi_1'(t) + o(h), \varphi_2(t) + h\varphi_1'(t) + o(h)\big) &\underset{h\to 0}{=} f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) \\ &+ \big(h\varphi_1'(t) + o(h)\big)\partial_1 f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) \\ &+ \big(h\varphi_2'(t) + o(h)\big)\partial_2 f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) \\ &+ o\big(\|H\|\big) \end{aligned}$$

où

$$H = \big(h\varphi_1'(t) + o(h), h\varphi_2'(t) + o(h)\big)$$

auquel cas

$$\begin{aligned}\|H\| &= \sqrt{(h\varphi_1'(t)+o(h))^2+(h\varphi_2'(t)+o(h))^2} \\ &= \sqrt{h^2(\varphi_1'(t)+o(1))^2+h^2(\varphi_2'(t)+o(1))^2} \\ &= |h|\sqrt{(\varphi_1'(t)+o(1))^2+(\varphi_2'(t)+o(1))^2},\end{aligned}$$

que l'on notera

$$\|H\| = |h|Z(h).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}f(\varphi_1(t)+h\varphi_1'(t)+o(h),\varphi_2(t)+h\varphi_1'(t)+o(h)) \underset{h\to 0}{=} & \; f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) \\ + & \; (h\varphi_1'(t)+o(h))\partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) \\ + & \; (h\varphi_2'(t)+o(h))\partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) \\ + & \; |h|Z(h)\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left[f(\varphi_1(t+h),\varphi_2(t+h))-f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[(h\varphi_1'(t)+o(h))\partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\right. \\ &+ (h\varphi_2'(t)+o(h))\partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)) \\ &+ \left.|h|Z(h)\right] \\ &= (\varphi_1'(t)+o(1))\partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))+(\varphi_2'(t)+o(1))\partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))+\frac{|h|}{h}Z(h).\end{aligned}$$

Par définition de la notion de $o(\;)$, on voit que

$$\begin{aligned}\varphi_1'(t)+o(1) &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t)+o(1) &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \varphi_2'(t) \\ Z(h) &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

et puisque $\frac{|h|}{h}=\pm 1$,

$$\frac{|h|}{h}Z(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Il en résulte que

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\varphi_1'(t)\partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))+\varphi_2'(t)\partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)$$

i.e. F est par définition dérivable en t et

$$F'(t)=\varphi_1'(t)\partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))+\varphi_2'(t)\partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t).$$

Et enfin, il est clair par les théorèmes généraux (somme, produit, composition de fonctions continues) que l'application

$$F':t\longmapsto\varphi_1'(t)\partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))+\varphi_2'(t)\partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)$$

est continue, ce qui achève la démonstration.

Retour vers le théorème 102

- *Rappel*. Dans le contexte

  $$F:t\mapsto f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)),$$

  où φ_1 et φ_2 sont de classe C^1 sur un certain intervalle I, alors F est C^1 sur I et

  $$\forall t\in I,\; F'(t)=\varphi_1'(t)\partial_1 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))+\varphi_2'(t)\partial_2 f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)).$$

  (règle de la chaîne).

- Pour le théorème, cela résulte immédiatement du rappel. En effet, fixons $(u,v)\in V$ et étudions l'existence d'une dérivée partielle par rapport à la première variable pour h en (u,v).

  Il s'agit donc par définition d'étudier la dérivabilité en u de l'application

  $$\psi:u\mapsto f(g_1(u,v),g_2(u,v)).$$

  On voit que ψ est une application de la forme

  $$\psi:t\mapsto f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$$

  avec

  $$\varphi_1(t)=g_1(t,v),\qquad \varphi_2(t)=g_2(t,v)$$

  qui sont chacune, par définition même du fait que g_1 et g_2 sont des fonctions de classe C^1, de classe C^1. On peut donc appliquer la règle de la chaîne (et en revenant à la variable u plutôt que t):

  $$\psi'(u)=\varphi_1'(u)\partial_1 f(\varphi_1(u),\varphi_2(u))+\varphi_2'(u)\partial_2 f(\varphi_1(u),\varphi_2(u))$$

  Dans la mesure où, par définition même du concept de dérivée partielle

  $$\varphi_1(u)=g_1(u,v)\implies\varphi_1'(u)=\partial_1 g_1(u,v)$$

  et de même

  $$\varphi_2(u)=g_2(u,v)\implies\varphi_2'(u)=\partial_1 g_2(u,v),$$

  on a

  $$\psi'(u)=\partial_1 g_1(u,v)\times\partial_1 f(\varphi_1(u),\varphi_2(u))+\partial_1 g_2(u,v)\times\partial_2 f(\varphi_1(u),\varphi_2(u)).$$

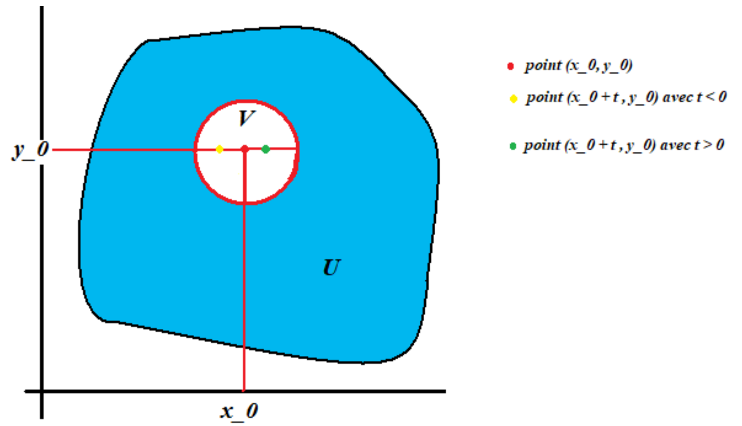
  Cela prouve donc l'existence de la dérivée partielle $\partial_1 h$ avec

  $$\partial_1 h(u,v)=\partial_1 g_1(u,v)\times\partial_1 f(\varphi_1(u),\varphi_2(u))+\partial_1 g_2(u,v)\times\partial_2 f(\varphi_1(u),\varphi_2(u)).$$

  On raisonnerait de la même façon pour $\partial_2 h$.

- Enfin, ces dérivées partielles se présentent comme somme, produit et composée de fonctions continues. Les dérivées partielles de h sont donc continues, ce qui prouve que h est de classe C^1.

Retour vers le théorème 103 Remarquons le fait très important suivant: puisque (x_0,y_0) est intérieur à U, il existe un voisinage V de (x_0,y_0) totalement inclus dans U



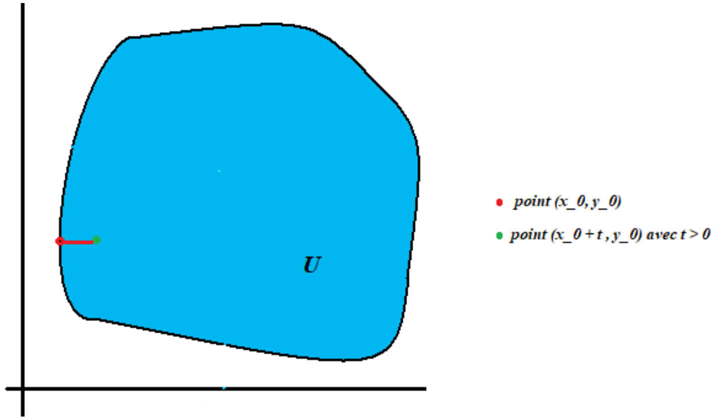
et il est alors possible de tendre vers (x_0,y_0) au moyen de points de la forme

$$(x_0+t,y_0),\; t<0$$

au moyen de points de la forme

$$(x_0+t,y_0),\; t>0$$

ce qui ne serait pas possible si (x_0,y_0) n'était pas intérieur à U:



Soit

$$\varphi : x \longmapsto f(x, y_0).$$

Alors, par définition de la notion de dérivée partielle d'une fonction en un point,

$$\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Et par définition de la notion de nombre dérivé,

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t}.\end{aligned}$$

Supposons pour fixer les idées que f présente un minimum local en (x_0, y_0) (même démonstration, *mutatis mutandis*, si f présente un maximum local). Alors

$$\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0) \geq 0$$

sur un voisinage convenable de $t = 0$, si bien que

$$\frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} \begin{cases} \geq 0 & \text{lorsque } t > 0 \\ \leq 0 & \text{lorsque } t < 0 \end{cases}$$

et en conséquence

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} \geq 0$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} \leq 0$$

et d'après la remarque ci-dessus, t a la possibilité de tendre aussi bien vers 0 par la gauche que par la droite et dans la mesure où

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t},$$

on en déduit

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} \geq 0$$

et

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} \leq 0$$

c'est à dire

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)}{t} = 0$$

i.e.

$$\varphi'(x_0) = 0,$$

c'est à dire encore

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

On démontre évidemment de même que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Retour vers le théorème 104

- La formule de Taylor à l'ordre deux donne donc

$$f(a + h) - f(a) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} H(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|h\|^2).$$

- La matrice $H(a)$ est symétrique à coefficients réels: elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; et même, en notant λ_1, λ_2 les valeurs propres de $H(a)$, il existe une matrice orthogonale $P \in O(2)$, matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres, telles que

$$\begin{aligned} D &= P^{-1} H(a) P \\ &= P^T H(a) P \end{aligned}$$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

- En notant $X' = \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \end{pmatrix}$ les composantes de $X = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$, on a

$$X = PX',$$

d'où

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} &= X^T \\ &= ((PX')^T \\ &= X'^T P^T \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} H(a) &= PDP^{-1} \\ &= PDP^T, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} H(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= X^T H(a) X \\ &= X'^T P^T \times PDP^T \times PX' \\ &= X'^T (P^T P) D (P^T P) X' \\ &= X'^T \times I_2 D \times I_2 X' \\ &= X'^T D X' \end{aligned}$$

car $P^T P = I_2$ du fait que P est orthogonale. Enfin,

$$\begin{aligned} X'^T D X' &= \begin{pmatrix} h'_1 & h'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h'_1 & h'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 h'_1 \\ \lambda_2 h'_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 h'^2_1 + \lambda_2 h'^2_2. \end{aligned}$$

- On a donc quand $(h'_1, h'_2) \to (0, 0)$:

$$f(a + h) - f(a) = \lambda_1 h'^2_1 + \lambda_2 h'^2_2 + o(h'^2_1 + h'^2_2)$$

(car $h_1^2 + h_2^2 = \|X\|^2 = \|X'\|^2 = h'^2_1 + h'^2_2$, du fait que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée).

- Ensuite, un point essentiel est le suivant: puisque $H(a)$ et D sont semblables, elles ont même déterminant et même trace:

$$\begin{aligned}\det(H(a)) &= \det(D)\\ &= \lambda_1\lambda_2\\ \mathrm{Tr}(H(a)) &= \mathrm{Tr}(D)\\ &= \lambda_1+\lambda_2.\end{aligned}$$

  - Supposons $\det(H(a))>0$:

  $$\lambda_1\lambda_2>0$$

  et donc λ_1 et λ_2 ont le même signe et supposons $\mathrm{Tr}(H(a))>0$:

  $$\lambda_1+\lambda_2>0$$

  et donc λ_1 et λ_2 sont tous deux >0; Pour fixer les idées, supposons $\lambda_1\geq\lambda_2$. Alors quand $(h'_1,h'_2)\to(0,0)$:

  $$\begin{aligned}f(a+h)-f(a) &\geq \lambda_2 h_1'^2+\lambda_2 h_2'^2+o(h_1'^2+h_2'^2)\\ &= (h_1'^2+h_2'^2)(\lambda_2+o(1))\end{aligned}$$

  et voit donc clairement que cette différence est positive sur un voisinage convenable de $(0,0)$ puisque $\lambda_2+o(1)$ tend vers $\lambda_2>0$ lorsque (h'_1,h'_2) tend vers $(0,0)$. Dans ce cas,

  $$f(a+h)\geq f(a)$$

  et f présente un minimum relatif en a.
  - Par le même type de raisonnement, on verrait que f présente un maximum relatif en a lorsque $\det(H(a))>0$ et $\mathrm{Tr}(H(a))<0$ car alors λ_1 et λ_2 seraient <0.
  - Lorsque $\det(H(a))<0$:

  $$\lambda_1\lambda_2<0$$

  λ_1 et λ_2 auraient des signes opposés et par exemple $\lambda_1>0$ et $\lambda_2<0$. Or tout voisinage de $(0,0)$ contient des points $(h'_1,0)$; en un tel point

  $$\begin{aligned}f(a+h)-f(a) &= \lambda_1^2 h_1'^2+o(h_1'^2)\\ &= h_1'^2(\lambda_1+o(1)),\end{aligned}$$

  clairement >0 sur un voisinage de 0: on peut donc exhiber des points h arbitrairement proches de $(0,0)$ tels que

  $$f(a+h)>f(a),$$

  ce qui démontre que f ne présente pas de maximum en a. En choisissant des points de la forme $(0,h'_2)$, on verrait de même que f ne présente pas de minimum en a, ce qui achève la démonstration.

Retour vers le théorème 105 De façon générale, on a

$$a_1^2\leq a_1^2+\ldots+a_p^2$$

quels que soient les réels $a_1,\ldots,a_p$; donc, en prenant la racine carrée:

$$|a_1|\leq\sqrt{a_1^2+\ldots+a_p^2}. \tag{2.10}$$

- Supposons f continue sur au point X_0. Démontrons alors que f_1 est continue en X_0. Soit $\varepsilon>0$; puisque f est continue en X_0, il existe $\alpha>0$ tel qu'en tout point X de U tel que

$$\|X-X_0\|\leq\alpha,$$

on ait

$$\|f(X)-f(X_0)\|\leq\varepsilon.$$

De l'inégalité (2.10), on déduit : en tout point X de U tel que

$$\|X-X_0\|\leq\alpha,$$

on a

$$|f_1(X)-f(X)|\leq\varepsilon,$$

ce qui prouve la continuité de f_1 en X_0. On démontre évidemment de même la continuité des applications $f_2,\ldots,f_p$ au point X_0; ceci prouve également, par définition, que si f est continue sur U, alors les applications $f_1,\ldots,f_p$ sont continues sur U.

- Supposons les applications $f_1,\ldots,f_p$ continues au point X_0. Démontrons alors que f est continue en X_0. Soit $\varepsilon>0$; puisque f_1 est continue en X_0, il existe $\alpha_1>0$ tel qu'en tout point X de U tel que

$$\|X-X_0\|\leq\alpha_1,$$

on ait

$$|f_1(X)-f_1(X_0)\|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}.$$

Puisque f_2 est continue en X_0, il existe $\alpha_2>0$ tel qu'en tout point X de U tel que

$$\|X-X_0\|\leq\alpha_2,$$

on ait

$$|f_2(X)-f_2(X_0)\|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$$

et ainsi de suite: puisque f_p est continue en X_0, il existe $\alpha_p>0$ tel qu'en tout point X de U tel que

$$\|X-X_0\|\leq\alpha_p,$$

on ait

$$|f_p(X)-f_p(X_0)\|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}.$$

Posons alors

$$\alpha=\min\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}.$$

Pour tout X de U tel que

$$\|X-X_0\|\leq\alpha$$

alors on a

$$\begin{cases}\|X-X_0\| &\leq \alpha_1\\ \|X-X_0\| &\leq \alpha_2\\ &\vdots\\ \|X-X_0\| &\leq \alpha_p\end{cases}$$

et en conséquence

$$\begin{cases}|f_1(X)-f_1(X_0)\|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}\\ |f_2(X)-f_2(X_0)\|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}\\ \qquad\vdots\\ |f_p(X)-f_p(X_0)\|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}\end{cases}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\|f(X)-f(X_0) &= \sqrt{(f_1(X)-f_1(X_0))^2+(f_2(X)-f_2(X_0))^2+\ldots+(f_p(X)-f_p(X_0))^2}\\ &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p}+\frac{\varepsilon^2}{p}+\ldots+\frac{\varepsilon^2}{p}}\\ &\leq \sqrt{p\times\frac{\varepsilon^2}{p}}\\ &= \sqrt{\varepsilon^2}\\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité de f en X_0; ceci prouve également, par définition, que si les applications $f_1,\ldots,f_p$ sont continues sur U, alors f est continue sur U.

Retour vers le théorème 106 De la proposition précédente, on déduit que Γ est, localement, le support d'une courbe paramétrée

$$f:t\longmapsto\begin{cases}x(t)\\ y(t)\end{cases}\qquad t\in I$$

dont le point M, disons de paramètre t_0, est un point régulier i.e.

$$f'(t_0) \neq (0,0).$$

Il résulte de la théorie des courbes paramétrées que Γ admet alors en M une tangente, dirigée par le vecteur $f'(t_0)$. Mais les points de coordonnées $(x(t), y(t))$, $t \in I$, sont des points de Γ; on a donc

$$\forall t \in I,\ F(x(t), y(t)) = 0.$$

Or il résulte de la règle de la chaîne que la fonction

$$G : t \longmapsto F(x(t), y(t))$$

admet comme dérivée

$$\begin{aligned} G'(t) &= x'(t)\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= \langle f'(t), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x(t), y(t))\rangle. \end{aligned}$$

Mais puisque G est la fonction nulle sur I, il en est de même pour G', si bien que

$$\forall t \in I,\ \langle f'(t), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x(t), y(t))\rangle = 0$$

et en particulier

$$\langle f'(t_0), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x(t_0), y(t_0))\rangle = 0$$

autrement dit, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x(t_0), y(t_0))$ est orthogonal au vecteur $f'(t_0)$, qui, comme on l'a vu plus haut, dirige la tangente à Γ en M.

Retour vers le théorème 107

- En posant $g(x, y) = f(x, y) - \lambda$, Γ_λ est définie par l'équation cartésienne $g(x, y) = 0$; de plus, on a

  $$\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x, y) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y)$$

  (la constante λ disparaît dans le calcul des dérivées partielles) et alors $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(M) \neq 0$, ce qui nous ramène au théorème précédent: la tangente à Γ_λ en $M(x_0, y_0)$ est orthogonale au vecteur

  $$\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x_0, y_0) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0).$$

- Appliquons ensuite la formule de Taylor à l'ordre 1 en M; lorsque $h = (h_1, h_2) \to (0, 0)$:

  $$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(M) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(M) + o(\|h\|).$$

  L'accroissement de f

  $$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)$$

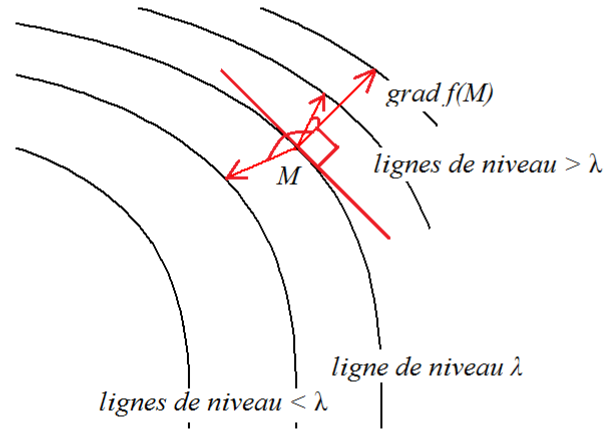
  entre le point M et le point $M + h$ peut donc être approximé par

  $$h_1\frac{\partial f}{\partial x}(M) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(M) = \langle h, \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)\rangle.$$

  Ce produit scalaire vaut aussi

  $$\|h\| \times \|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)\| \times \cos\theta,$$

  où θ est l'angle entre les vecteurs h et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$. Lorsque $\cos\theta = 1$, donc lorsque $\theta = 0$ i.e. lorsque h et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$ sont colinéaires et de même sens, on voit que cet accroissement est positif et on se dirige donc vers des lignes de niveau supérieur.

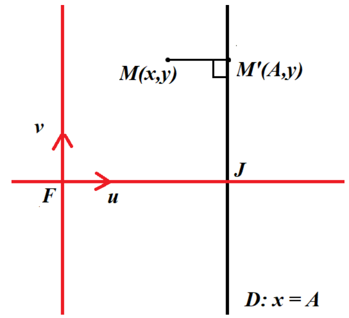


Retour vers le théorème 108

- Dans un premier temps, considérons le repère orthonormé $\mathcal{R} = (F; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire dirigeant la directrice D et $\vec{u}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{v}$. Une équation cartésienne de D dans ce repère est

  $$x = A$$

  où A est l'abscisse du point d'intersection J de D avec l'axe $(F; \vec{u})$, qui est non nul puisque par hypothèse, $F \notin D$. Soit M un point du plan et (x, y) ses coordonnées dans ce repère et M' le projeté orthogonal de M sur D, dont les coordonnées sont (A, y).



  Alors

  $$MF^2 = x^2 + y^2$$

  et

  $$\begin{aligned} d(M, D)^2 &= MM'^2 \\ &= (x - A)^2 \end{aligned}$$

  si bien que

  $$M \in \mathcal{C} \iff x^2 + y^2 = e^2(x - A)^2.$$

  On a ensuite

  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 = e^2(x - A)^2 &\iff x^2(1 - e^2) + 2e^2Ax + y^2 = e^2A^2 \\ &\iff (1 - e^2)\left(x^2 + \frac{2e^2A}{1 - e^2}x\right) + y^2 = e^2A^2. \end{aligned}$$

  On reconnaît ensuite classiquement le début du développement d'un carré:

  $$x^2 + \frac{2e^2A}{1 - e^2} = \left(x + \frac{e^2A}{1 - e^2}\right)^2 - \frac{e^4A^2}{(1 - e^2)^2}$$

si bien que

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{C} &\iff (1-e^2)\left(\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2-\frac{e^4A^2}{(1-e^2)^2}\right)+y^2=e^2A^2\\ &\iff (1-e^2)\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2+y^2=e^2A^2+\frac{e^4A^2}{1-e^2}\\ &\iff (1-e^2)\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{e^2A^2}{1-e^2}\\ &\iff \frac{(1-e^2)^2}{e^2A^2}\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2+\frac{1-e^2}{e^2A^2}y^2=1.\end{aligned}$$

Puisque $e<1$, on a $1-e^2>0$ et on peut donc poser

$$a=\sqrt{\frac{e^2A^2}{(1-e^2)^2}}\quad b=\sqrt{\frac{e^2A^2}{1-e^2}}$$

et on a donc

$$M\in\mathcal{C}\iff\frac{1}{a^2}\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Considérons le point O de coordonnées

$$\left(-\frac{e^2A}{1-e^2},0\right)$$

dans le repère $\mathcal{R}$ et notons $\mathcal{R}'$ le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. Les coordonnées (x',y') de M dans $\mathcal{R}'$ sont liées à ses coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ par les formules

$$\begin{cases} x'=x+\frac{e^2A}{1-e^2}\\ y'=y\end{cases}$$

si bien que

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{C} &\iff \frac{1}{a^2}\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}=1\\ &\iff \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1\end{aligned}$$

et le résultat est démontré.

- Les éléments de symétrie sont évidents: Soit M un point de coordonnées (x,y). Son symétrique par rapport à Ox, resp. (Oy), est le point M', resp. M'', de coordonnées $(x,-y)$, resp. $(-x,y)$ et il est donc clair que
$$M\in\gamma\iff M'\in\gamma\iff M''\in\gamma$$
car pour le dire trivialement, les carrés mangent les signes moins.
- Pour tous réels x,y, on a
$$\frac{x^2}{a^2}\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$
si bien qu'en tout point $M(x,y)$ de $\mathcal{E}$, on a
$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,$$
c'est à dire
$$x^2\le a^2,$$
autrement dit
$$-a\le x\le a$$
et l'on a $x=a$, resp. $x=-a$, c'est à dire $\frac{x^2}{a^2}=1$ lorsque $b=0$. Les points de l'ellipse ne "vont donc pas plus à droite" que le point $A(a,0)$ et pas plus à gauche que le point $A'(-a,0)$. De même, les points de l'ellipse ne vont pas plus haut que le point $B(0,b)$ et pas plus bas que le point $B'(0,-b)$. C'est la raison pour laquelle ces points sont appelés sommets de l'ellipse.
- Posons $F:(x,y)\mapsto\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ si bien que cette ellipse est la courbe d'équation $F(x,y)=0$.
  - Alors
$$\overrightarrow{\text{grad}}\,F(x_0,y_0)=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2}\right)\neq(0,0)$$
(ce vecteur ne s'annule que pour $x_0=y_0=0$ mais $(0,0)$ n'est pas un point de Γ).
  - La tangente à Γ en $M(x_0,y_0)$ admet donc l'équation cartésienne
$$(x-x_0)\frac{2x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{2y_0}{b^2}=0$$
et comme $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, on obtient qu'une équation de la tangente à Γ en $M(x_0,y_0)$ est (après avoir développé et simplifié par 2):
$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$
- Un point $(a\cos t,b\sin t)$ est bien un point de γ:
$$\frac{a^2\cos^2t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2t}{b^2}=\cos^2t+\sin^2t=1$$
et un point (x,y) de γ vérifie
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$
et il existe donc effectivement $t\in[0,2\pi]$ tel que
$$\begin{cases}\frac{x}{a}=\cos t\\ \frac{y}{b}=\sin t,\end{cases}$$
d'où $x=a\cos t$ et $y=b\sin t$.
- L'allure de $\mathcal{E}$ s'obtient en utilisant les outils d'étude d'une courbe paramétrée, en l'occurrence de la courbe de paramétrisation
$$f:t\mapsto\begin{cases}x(t)=a\cos t\\ y(t)=b\sin t\end{cases}\qquad t\in[-\pi,\pi].$$
  - Puisque x est paire et y est impaire, une étude sur $[0,\pi]$ suivie d'une symétrie par rapport à l'axe (Oy) donne toute la courbe.
  - Ensuite
$$\begin{aligned} x(\pi-t) &= a\cos(\pi-t)\\ &= -a\cos t\\ &= -x(t)\\ y(\pi-t) &= b\sin(\pi-t)\\ &= b\sin t\\ &= y(t),\end{aligned}$$
une étude sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ suivie d'une symétrie par rapport à (Ox) donnera la courbe sur $[0,\pi]$.
  - Bref, une étude sur $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ suivie d'une symétrie par rapport à (Ox) et d'une symétrie par rapport à (Oy) donnera l'entièreté de $\mathcal{E}$.
  - x est décroissante sur I, y est croissante sur I et $\mathcal{E}$ est régulière puisque
$$\forall t\in I, f'(t)=(-a\sin t,b\cos t)\neq(0,0)$$
et même birégulière puisque
$$\begin{aligned}\forall t\in I, f''(t) &= (-a\cos t,-b\sin t)\\ \det(f'(t),f''(t)) &= \begin{vmatrix}-a\sin t & -a\cos t\\ b\cos t & -b\sin t\end{vmatrix}\\ &= ab\\ &\neq 0.\end{aligned}$$
L'ellipse ne présente donc aucun point d'inflexion, aucun point de rebroussement.

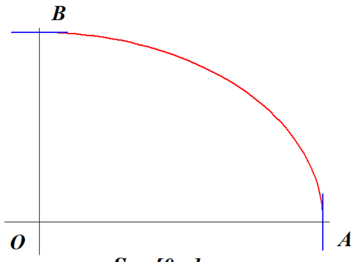
– Enfin,

$$f'(0) = (0, b)$$

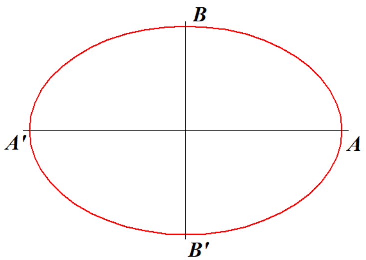
ce qui démontre que la tangente à $\mathcal{E}$ est verticale au point de paramètre 0, qui est le sommet $A(a, 0)$ et

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (a, 0)$$

ce qui démontre que la tangente à $\mathcal{E}$ est horizontale au point de paramètre 0, qui est le sommet $B(0, b)$.



Sur [0,π]



Sur [-π,π]

Retour vers le théorème 109 Donnons-nous donc deux réels a et b avec $a > b > 0$, posons

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

qui est bien défini et non nul puisque $a^2 > b^2$ par hypothèse. Considérons le point F de coordonnées $(c, 0)$, la droite D d'équation

$$x = \frac{a^2}{c}$$

et posons

$$e = \frac{c}{a}.$$

Considérons enfin la conique γ de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. Puisque

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} < \sqrt{a^2} = a,$$

on a

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

si bien que γ est une ellipse. Soit M un point du plan et (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
M \in \gamma &\iff MF = ed(M, D) \\
&\iff MF^2 = e^2 d(M, D)^2 \\
&\iff (x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 \\
&\iff x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x^2 - 2x\frac{a^2}{c} + \frac{a^4}{c^2}\right) \\
&\iff x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2 \\
&\iff x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
a^2 - c^2 &= a^2 - (a^2 - b^2) \\
&= b^2 \\
1 - \frac{c^2}{a^2} &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} \\
&= \frac{b^2}{a^2}
\end{aligned}$$

et en conséquence,

$$\begin{aligned}
M \in \gamma &\iff MF = ed(M, D) \\
&\iff \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2 \\
&\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
&\iff M \in \mathcal{E},
\end{aligned}$$

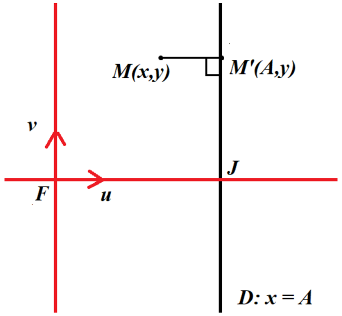
ce qui prouve que γ et $\mathcal{E}$ sont confondues.

Retour vers le théorème 110

- Dans un premier temps, considérons le repère orthonormé $\mathcal{R} = (F; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire dirigeant la directrice D et $\vec{u}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{v}$. Une équation cartésienne de D dans ce repère est

$$x = A$$

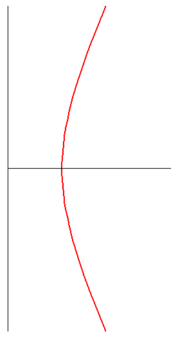
où A est l'abscisse du point d'intersection J de D avec l'axe $(F; \vec{u})$, qui est non nul puisque par hypothèse, $F \notin D$. Soit M un point du plan et (x, y) ses coordonnées dans ce repère et M' le projeté orthogonal de M sur D, dont les coordonnées sont (A, y).



Alors
$$MF^2 = x^2 + y^2$$
et
$$\begin{aligned} d(M,D)^2 &= MM'^2 \\ &= (x-A)^2 \end{aligned}$$
si bien que
$$M \in \mathcal{C} \iff x^2 + y^2 = e^2(x-A)^2.$$
On a ensuite
$$\begin{aligned} x^2+y^2 = e^2(x-A)^2 &\iff x^2(1-e^2) + 2e^2Ax + y^2 = e^2A^2 \\ &\iff (1-e^2)\left(x^2 + \frac{2e^2A}{1-e^2}x\right) + y^2 = e^2A^2. \end{aligned}$$
On reconnaît ensuite classiquement le début du développement d'un carré:
$$x^2 + \frac{2e^2A}{1-e^2} = \left(x + \frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2 - \frac{e^4A^2}{(1-e^2)^2}$$
si bien que
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff (1-e^2)\left(\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2 - \frac{e^4A^2}{(1-e^2)^2}\right) + y^2 = e^2A^2 \\ &\iff (1-e^2)\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = e^2A^2 + \frac{e^4A^2}{1-e^2} \\ &\iff (1-e^2)\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{e^2A^2}{1-e^2} \\ &\iff \frac{(1-e^2)^2}{e^2A^2}\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2 + \frac{1-e^2}{e^2A^2}y^2 = 1 \\ &\iff \frac{(1-e^2)^2}{e^2A^2}\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2 - \frac{e^2-1}{e^2A^2}y^2 = 1. \end{aligned}$$
Puisque $e > 1$, on a $e^2 - 1 > 0$ et on peut donc poser
$$a = \sqrt{\frac{e^2A^2}{(1-e^2)^2}} \quad b = \sqrt{\frac{e^2A^2}{e^2-1}}$$
et on a donc
$$M \in \mathcal{C} \iff \frac{1}{a^2}\left(x + \frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Considérons le point O de coordonnées
$$\left(-\frac{e^2A}{1-e^2}, 0\right)$$
dans le repère $\mathcal{R}$ et notons $\mathcal{R}'$ le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. Les coordonnées (x',y') de M dans $\mathcal{R}'$ sont liées à ses coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ par les formules
$$\begin{cases} x' = x + \frac{e^2A}{1-e^2} \\ y' = y \end{cases}$$
si bien que
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff \frac{1}{a^2}\left(x+\frac{e^2A}{1-e^2}\right)^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\iff \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$
et le résultat est démontré.

- Les éléments de symétrie se démontrent comme dans le cas de l'ellipse.
- L'équation de la tangente se démontre comme dans le cas de l'ellipse.
- En tout point $M(x,y)$ de γ, on a
$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1,$$
ce qui montre que $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ i.e. $x^2 \geq a^2$; autrement dit, $|x| \geq a$, ce qui montre que l'on a soit $x \geq a$, soit $x \leq -a$ et donc aucun point de γ ne se trouve dans la bande $-a < x < a$.
- Le point $(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$ appartient bien à cette branche car d'une part $\operatorname{ch} t \geq 1$ pour tout réel t et donc $a \operatorname{ch} t \geq a$ et d'autre part
$$\begin{aligned} \frac{(a \operatorname{ch} t)^2}{a^2} - \frac{(b \operatorname{sh} t)^2}{b^2} &= \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t \\ &= 1. \end{aligned}$$
- Réciproquement, soit $M(x,y)$ un point de γ avec $x \geq a$. On sait que la fonction $t \mapsto \operatorname{sh} t$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en effet, elle est continue strictement croissante et de limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$). Il existe donc un réel t (unique) tel que $y = b \operatorname{sh} t$. Comme $x \geq a > 0$, on a
$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x^2} \\ &= \sqrt{a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)} \\ &= a\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \\ &= a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t} \\ &= a \operatorname{ch} t \end{aligned}$$
(on a utilisé la relation $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, donc $1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$).
- L'allure de $\langle$ s'obtient en utilisant les outils d'étude d'une courbe paramétrée, en l'occurrence de la courbe de paramétrisation
$$f : t \mapsto \begin{cases} x(t) = a\operatorname{ch} t \\ y(t) = b\operatorname{sh} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$
  - Puisque x est paire et y est impaire, une étude sur $I = [0, +\infty[$ suivie d'une symétrie par rapport à l'axe (Oy) donne toute la courbe.
  - x et y sont croissantes sur I et $\mathcal{E}$ est régulière puisque
$$\forall t \in I, f'(t) = (a\operatorname{sh} t, b\operatorname{ch} t) \neq (0,0)$$
et même birégulière puisque
$$\begin{aligned} \forall t \in I, f''(t) &= (a\operatorname{ch} t, b\operatorname{sh} t) \\ \det(f'(t), f''(t)) &= \begin{vmatrix} a\operatorname{sh} t & -a\operatorname{ch} t \\ b\operatorname{ch} t & b\operatorname{sh} t \end{vmatrix} \\ &= ab(\operatorname{sh}^2 t - \operatorname{ch}^2) \\ &= -ab \\ &\neq 0. \end{aligned}$$
L'hyperbole ne présente donc aucun point d'inflexion, aucun point de rebroussement.
  - Enfin,
$$f'(0) = (0, b)$$
ce qui démontre que la tangente à $\mathcal{H}$ est verticale au point de paramètre 0, qui est le sommet $A(a,0)$.

Sur [0,+∞[



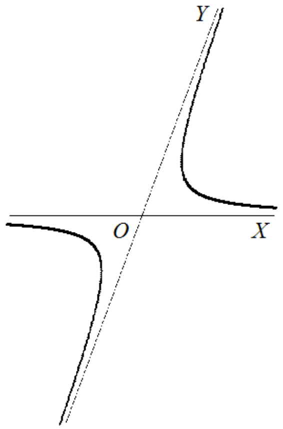
Sur $\mathbb{R}$

Retour vers le théorème 111 Donnons-nous donc deux réels $a>0$ et $b>0$, posons
$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$
considérons le point F de coordonnées $(c,0)$, la droite D d'équation
$$x=\frac{a^2}{c}$$
et posons
$$e=\frac{c}{a}.$$
Considérons enfin la conique γ de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. Puisque
$$c=\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{a^2}=a,$$
on a
$$e=\frac{c}{a}>1$$
si bien que $\mathcal{H}$ est une hyperbole. Soit M un point du plan et (x,y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$. Alors
$$\begin{aligned}
M\in\gamma &\iff MF=ed(M,D)\\
&\iff MF^2=e^2d(M,D)^2\\
&\iff (x-c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2\\
&\iff x^2-2xc+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x^2-2x\frac{a^2}{c}+\frac{a^4}{c^2}\right)\\
&\iff x^2-2xc+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2\\
&\iff x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2.
\end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned}
a^2-c^2&=a^2-(a^2+b^2)\\
&=-b^2\\
1-\frac{c^2}{a^2}&=\frac{a^2-c^2}{a^2}\\
&=-\frac{b^2}{a^2}
\end{aligned}$$
et en conséquence,
$$\begin{aligned}
M\in\gamma &\iff MF=ed(M,D)\\
&\iff -\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=-b^2\\
&\iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,
\end{aligned}$$
ce qui prouve que γ et $\mathcal{H}$ sont confondues.

Retour vers le théorème 112

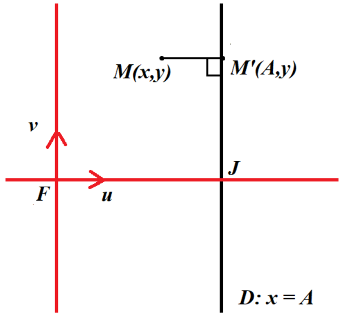
- On a
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\iff\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1.$$
Posons alors
$$X=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\quad Y=\frac{x}{a}-\frac{y}{b} \tag{2.11}$$
et considérons la matrice
$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&\frac{1}{b}\\ \frac{1}{a}&-\frac{1}{b}\end{pmatrix}.$$
- On a $\text{dét}\,(Q)=-\frac{2}{ab}\neq 0$ donc Q est inversible; on calcule aisément
$$Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a&a\\ b&-b\end{pmatrix}.$$
En posant $P=Q^{-1}$, on voit donc que 2.11 définit les formules de changement de repère du repère $\mathcal{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ au repère $\mathcal{R}'=(O;\vec{u},\vec{v})$ avec
$$\vec{u}=\frac{1}{2}(a,b),\quad \vec{v}=\frac{1}{2}(a,-b)$$
et en conséquence, γ a pour équation $XY=1$ dans le repère $\mathcal{R}'$, ou encore $Y=\frac{1}{X}$.
- Ainsi, γ apparaît comme le graphe de la fonction $X\mapsto\frac{1}{X}$ mais tracé dans $\mathcal{R}'$.



- Évidemment, ce graphe possède les asymptotes $Y = 0$, obtenue quand $X \to \pm\infty$, (et donc dirigée par $\vec{v}$) et $X = 0$, obtenue quand $X \to 0^{\pm}$ (et donc dirigée par $\vec{u}$). En revenant au repère $\mathcal{R}$, ces asymptotes ont pour équation respectives
$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$
d'où les résultats de l'énoncé.
- Ces asymptotes sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le sont, donc si et seulement si (produit scalaire) $\frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$ c'est à dire $a = b$.

Retour vers le théorème 113

- Dans un premier temps, considérons le repère orthonormé $\mathcal{R} = (F; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire dirigeant la directrice D et $\vec{u}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{v}$. Une équation cartésienne de D dans ce repère est
$$x = A$$
où A est l'abscisse du point d'intersection J de D avec l'axe $(F; \vec{u})$, qui est non nul puisque par hypothèse, $F \notin D$. Soit M un point du plan et (x, y) ses coordonnées dans ce repère et M' le projeté orthogonal de M sur D, dont les coordonnées sont (A, y).



Alors
$$MF^2 = x^2 + y^2$$
et
$$\begin{aligned} d(M, D)^2 &= MM'^2 \\ &= (x - A)^2 \end{aligned}$$
si bien que
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff x^2 + y^2 = (x - A)^2 \\ &\iff y^2 = -2Ax + A^2. \end{aligned}$$
On écrit ensuite classiquement
$$-2Ax + A^2 = -2A\left(x - \frac{A}{2}\right).$$
Considérons le point O de coordonnées
$$\left(\frac{A}{2}, 0\right)$$
dans le repère $\mathcal{R}$ et notons $\mathcal{R}'$ le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Les coordonnées (x', y') de M dans $\mathcal{R}'$ sont liées à ses coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ par les formules
$$\begin{cases} x' = x - \frac{A}{2} \\ y' = y \end{cases}$$
si bien que
$$M \in \mathcal{C} \iff y'^2 = -2Ax'$$
et le résultat est démontré.

- Posons $F : (x, y) \mapsto y^2 - 2px$ si bien que cette ellipse est la courbe d'équation $F(x, y) = 0$.
  - Alors
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0) = (-2p, 2y_0) \neq (0, 0).$$
  - La tangente à Γ en $M(x_0, y_0)$ admet donc l'équation cartésienne
$$-2p(x - x_0) + 2(y - y_0)y_0 = 0$$
et comme $y_0^2 = 2px_0$, on obtient qu'une équation de la tangente à Γ en $M(x_0, y_0)$ est (après avoir développé et simplifié par 2):
$$yy_0 = p(x + x_0).$$
- Le reste du théorème est évident.

Retour vers le théorème 114 Donnons-nous donc un réel $p \neq 0$, considérons le point F de coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, la droite D d'équation
$$x = -\frac{p}{2}$$
ainsi que la parabole de foyer F et de directrice D. Soit M un point du plan et (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$. Alors
$$\begin{aligned} M \in \gamma &\iff MF = d(M, D) \\ &\iff MF^2 = d(M, D)^2 \\ &\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &\iff x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\ &\iff y^2 = 2px, \end{aligned}$$
ce qui prouve que γ et $\mathcal{P}$ sont confondues.

Retour vers le théorème 115 De la proposition précédente, on déduit que Σ est, localement, le support d'une surface paramétrée
$$f : (u, v) \longmapsto \begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$
dont le point M, disons de paramètres (u_0, v_0), est un point régulier i.e.
$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$$
est libre. Il résulte de la théorie des surfaces paramétrées que Σ admet alors en M un plan tangent, dirigé par les vecteurs
$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right).$$

Mais les points de coordonnées $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$, sont des points de Σ; on a donc
$$\forall (u, v) \in D,\ F\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) = 0.$$
Or il résulte de la règle de la chaîne que la fonction
$$G : (u, v) \longmapsto F\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

admet comme dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial F}{\partial x}(f(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial F}{\partial y}(f(u,v)) + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\frac{\partial F}{\partial z}(f(u,v)) \\ &= \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(f(u,v))\rangle \\ \frac{\partial G}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial F}{\partial x}(f(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial F}{\partial y}(f(u,v)) + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\frac{\partial F}{\partial z}(f(u,v)) \\ &= \langle \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(f(u,v))\rangle.\end{aligned}$$

Mais puisque G est la fonction nulle sur D, il en est de même pour ses dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial u}$ et $\frac{\partial G}{\partial v}$, si bien que

$$\forall (u,v)\in D, \begin{cases} \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(f(u,v))\rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(f(u,v))\rangle = 0\end{cases}$$

et en particulier

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(M)\rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0), \overrightarrow{\text{grad}}\, F(M)\rangle = 0.\end{cases}$$

Autrement dit, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$, qui, comme on l'a vu plus haut, dirigent le plan tangent à Σ en M. C'est la raison pour laquelle le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M)$ est normal au plan tangent.

Retour vers le théorème 116 S a pour équation cartésienne $F(x,y,z)=0$ avec

$$F(x,y,z) = z - g(x,y).$$

- On a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) \neq (0,0,0)$$

donc S est régulière et

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0,y_0,z_0) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x_0}(x_0,y_0), -\frac{\partial g}{\partial y_0}(x_0,y_0), 1\right)$$

est normal au plan tangent en tout point $M(x_0,y_0,z_0)$ de Σ (avec bien entendu $z_0 = g(x_0,y_0)$).

- En supposant que (x_0,y_0) est un point critique de g, on a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(M) = (0,0,1)$$

et une équation cartésienne du plan tangent à S en M est donc

$$0\times(x-x_0) + 0\times(y-y_0) + 1\times(z-z_0) = 0$$

c'est à dire

$$z = z_0$$

avec bien entendu $z_0 = g(x_0,y_0)$.

Il est question de positionner un point par rapport à un plan.

- Rappelons que si $ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan P, ce plan divise l'espace en deux régions (appelées demi-espaces): les points $M(x,y,z)$ tels que

$$ax+by+cz+d\geq 0$$

et les points $M(x,y,z)$ tels que

$$ax+by+cz+d\leq 0.$$

- Il s'agit donc de positionner les points de S (au voisinage de M_0), donc les points de coordonnées

$$(x,y,g(x,y)),$$

par rapport au plan P d'équation

$$z - g(x_0,y_0) = 0.$$

On doit donc étudier le signe de

$$g(x,y) - g(x_0,y_0).$$

  – Si, sur un certain voisinage de M_0, ce signe est constant, c'est que tous les points de S de ce voisinage sont d'un même côté de P.
  – Si, quel que soit le voisinage de M_0, ce signe n'est pas constant, c'est que l'on peut toujours trouver des points de S au voisinage de M_0 situés de part et d'autre de P.

- Or ce signe est constant si et seulement si g présente un extrémum en (x_0,y_0) et le théorème est donc une conséquence d'un théorème de la théorie des extrémums: si $\det(H)>0$, g possède un minimum ou un maximum en (x_0,y_0) (selon le signe de la trace) et si $\det(H)<0$, g ne possède ni minimum ni maximum en (x_0,y_0)

Retour vers le théorème 117 On va envisager deux situations, typiques.

- On suppose que S est une surface de paramétrisation (D,f), $f:(u,v)\mapsto f(u,v)$ et que γ admet la paramétrisation

$$F : t\longmapsto f\big(X(t),Y(t)\big),\ t\in I,$$

où

$$t\longmapsto \big(X(t),Y(t)\big)$$

est une application définie sur un intervalle I et à valeurs dans D. Notons alors qu'une telle paramétrisation engendre une courbe γ effectivement tracée sur S: pour tout $t\in I$, $(X(t),Y(t))$ appartient par hypothèse à D et alors $f\big(X(t),Y(t)\big)$ est bien un point de S.

Alors de la règle de la chaîne, on déduit

$$F'(t) = X'(t)\frac{\partial f}{\partial u}(X(t),Y(t)) + Y'(t)\frac{\partial f}{\partial v}(X(t),Y(t)).$$

Supposons que $M = M(t_0)$, soit le point de paramètre t_0 de la courbe γ; donc M est le point de S de paramètres $(X(t_0),Y(t_0))$. On voit alors que $F'(t_0)$, qui est un vecteur directeur de la tangente à γ en M, est combinaison des vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}(X(t_0),Y(t_0)),\ \frac{\partial f}{\partial v}(X(t_0),Y(t_0)),$$

vecteurs directeurs du plan tangent à S en M et qu'en conséquence ,la droite passant par M et dirigée par $F'(t_0)$ est incluse dans le plan passant par M et dirigé par les vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}(X(t_0),Y(t_0)),\ \frac{\partial f}{\partial v}(X(t_0),Y(t_0)),$$

i.e. par le plan tangent à S au point M, d'où le résultat.

- On suppose que Σ est la surface d'équation cartésienne

$$f(x,y,z) = 0$$

et que γ est une courbe gauche de paramétristation

$$F : t\mapsto (x(t),y(t),z(t)),\ t\in I$$

telle que

$$\forall t\in I,\quad f(x(t),y(t),z(t)) = 0.$$

La dérivée de l'application

$$G : t\mapsto f(x(t),y(t),z(t))$$

est

$$G'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(M) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(M) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(M)$$

et l'on voit que

$$G'(t) = \langle F'(t), \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M(t))\rangle.$$

Mais G est l'application nulle et sa dérivée l'est donc aussi. Ainsi,

$$F'(t) \perp \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M(t)).$$

d'où le résultat, puisque la tangente à γ est dirigée par $F'(t)$, alors que le plan tangent à Σ en $M(t)$ est normal à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M(t))$

Retour vers le théorème 118 Il est évidemment inutile d'étudier la convergence absolue de cette série entière pour $z = 0$: on sait déjà qu'elle a lieu (pas de problème de convergence!). Pour tout $z \neq 0$, posons

$$u_n(z) = |a_n z^n|.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} &= \left|a_{n+1}z^{n+1}\right| \times \frac{1}{|a_n z^n|} \\ &= \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \times \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} \\ &= |z| \times \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z| \times L \end{aligned}$$

(et cette limite est infinie si $L = +\infty$).

- Si L est un réel non nul:
  - si $|z|L < 1$, c'est à dire si
  $$|z| < \frac{1}{L},$$
  alors la série $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ converge en vertu de la règle de d'Alembert pour les séries numériques i.e. la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument,
  - si $|z|L > 1$, c'est à dire si
  $$|z| > \frac{1}{L},$$
  alors la série $\sum_{n\geq 0} |a_n z^n|$ ne converge pas en vertu de la règle de d'Alembert pour les séries numériques i.e. la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ne converge pas absolument.

  Le plus grand disque ouvert sur lequel la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument est donc le disque $D\left(0, \frac{1}{L}\right)$ et c'est pourquoi, par définition, $R = \frac{1}{L}$.
- Si $L = 0$, la suite $\left(\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right)$ converge donc vers 0, qui est une limite < 1 et ce, pour tout $z \neq 0$. C'est pourquoi, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ et ainsi $R = +\infty$.
- Si $L = +\infty$, la suite $\left(\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right)$ tend vers $+\infty$ et ce, pour tout $z \neq 0$. C'est pourquoi, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ne converge absolument pour aucun $z \in \mathbb{C}^*$ et ainsi $R = 0$.

Retour vers le théorème 119 Soit $z \in D(0, R)$, si bien que $z \in D(0, R_a)$ et donc la série entière

$$\sum a_n z^n$$

est convergente. Notons alors

$$S_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

De même, $z \in D(0, R_b)$ et donc la série entière

$$\sum b_n z^n$$

est convergente. Notons alors

$$S_b(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

On est donc en présence de deux séries absolument convergentes, si bien que l'on peut appliquer le résultat concernant le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes: la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k})$$

est convergente et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n,$$

c'est à dire

$$S_a(z)S_b(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

Or

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \times z^k \times z^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \times z^n \end{aligned}$$

et comme le facteur z^n, indépendant de k, est commun à tous les termes de la somme, on a

$$w_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

C'est donc que

$$S_a(z)S_b(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

et ce, pour tout $z \in D(0, R)$. D'où le résultat.

Retour vers le théorème 120

- On a déjà obtenu le développement de $x \mapsto e^x$ comme conséquence du théorème de dérivation terme à terme.

- Par définition,
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
Sachant que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$
on a donc
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\end{aligned}$$
et en conséquence
$$\begin{aligned}e^x + e^{-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+(-1)^n)x^n}{n!}.\end{aligned}$$
Or
$$1+(-1)^n = \begin{cases} 1+1=2 & \text{si } n \text{ est pair}\\ 1-1=0 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$
et donc
$$\begin{aligned}e^x + e^{-x} &= \sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2x^n}{n!}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2x^{2p}}{(2p)!}\\ &= 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}\end{aligned}$$
d'où
$$\operatorname{ch} x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$
Le développement de la fonction sh s'établit de la même manière.
- Les développements des fonctions $\cos$ et $\sin$ seront établis à la fin de ce chapitre.
- Les développements des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ne sont autres que les sommes de séries géométriques.
- Le développement de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ a été obtenu comme fruit du théorème d'intégration terme à terme appliqué à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:
$$\forall x \in \,]-1,1[\,,\quad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
et en changeant x en $-x$:
$$\forall x \in \,]-1,1[\,,\quad \ln(1+x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}.$$
Mais comme $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$, on obtient
$$\forall x \in \,]-1,1[\,,\quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$
- Le développement de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ fera l'objet d'une démonstration plus loin dans ce chapitre.

Retour vers le théorème 121 C'est une conséquence immédiate du théorème concernant le produit de Cauchy de deux séries entières.

Retour vers le théorème 122 Calcul du rayon de convergence: c'est une série entière pour laquelle tous les coefficients sont non nuls. En posant
$$a_n = \frac{1}{n!},$$
on a
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|\\ &= \frac{1}{n+1}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$
et c'est pourquoi (règle $R = \frac{1}{L}$), le rayon de convergence de cette série entière vaut $+\infty$.

Rappelons la théorie du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes:

> On considère deux séries absolument convergentes $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ (à termes réels ou complexes).
> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
> $$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$
> Alors la série $\sum_{n\geq 0} w_n$, appelée produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est absolument convergente et
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

on a
$$\begin{aligned}e^z e^{z'} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\,\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}\right).\end{aligned}$$
Or
$$\begin{aligned}\frac{1}{k!(n-k)!} &= \frac{1}{n!}\,\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{1}{n!}\binom{n}{k}\end{aligned}$$
et on a donc, en reconnaissant la formule du binôme de Newton:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\,\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}\\ &= (z+z')^n,\end{aligned}$$
si bien que
$$e^z e^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+z')^n$$

c'est à dire, par définition même:

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Retour vers le théorème 123

toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

À ne pas confondre avec borne inférieure:

- une borne inférieure n'appartient pas nécessairement à l'ensemble, par exemple 0 est la borne inférieure de l'intervalle $]0,+\infty[$;
- lorsque la borne inférieure appartient à l'ensemble, on l'appelle justement le plus petit élément.

Soit donc une partie infinie E de $\mathbb{N}$.

- À son plus petit élément, que l'on notera n_0, associons-lui le nombre 0.
- Au plus petit élément de l'ensemble $E\setminus\{n_0\}$, que l'on notera n_1, associons-lui le nombre 1.
- Au plus petit élément de l'ensemble $E\setminus\{n_0,n_1\}$, que l'on notera n_2, associons-lui le nombre 2, et ainsi de suite.

Retour vers le théorème 124 Démontrons l'équivalence entre

$$P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\times P(Y\in B) \tag{2.12}$$

pour tous ensembles A et B et

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\times P(Y=y) \tag{2.13}$$

pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

- De façon évidente, (2.12), que l'on applique avec $A=\{x\}$ et $B=\{y\}$, entraîne (2.13).
- Supposons à présent (2.13); soit $A=\{x_n,\ n\in I\}$ et $B=\{y_n,\ n\in J\}$ des ensembles de valeurs prises par X et Y respectivement, où I et J sont certains sous-ensembles d'entiers. Alors

$$A=\bigcup_{n\in I}\{x_n\}\quad B=\bigcup_{n\in J}\{y_n\}$$

et donc

$$(X\in A)=\bigcup_{n\in I}(X=x_n)\quad (Y\in B)=\bigcup_{n\in J}(Y=y_n).$$

Pour bien comprendre la suite, examinons la situation où

$$A=\{1,2,3\}$$

et

$$B=\{4,5\}.$$

Alors $(X\in A, Y\in B)$ est la réunion des événements

$$(X=1,Y=4),\ (X=1,Y=5),\ (X=2,Y=4),\ (X=2,Y=5),\ (X=3,Y=4),\ (X=3,Y=5)$$

ce que l'on peut synthétiser en

$$(X\in A, Y\in B) \ = \ \bigcup_{(x,y)\in A\times B}(X=x,Y=y).$$

Il est à peu près clair que cette égalité a lieu quels que soient les ensembles A et B en jeu. C'est pourquoi

$$\begin{aligned}P(X\in A,Y\in B) &= P\left(\bigcup_{(x,y)\in A\times B}(X=x,Y=y)\right)\\ &= P\left(\bigcup_{(n,k)\in I\times J}(X=x_n,Y=y_k)\right)\end{aligned}$$

puis par incompatibilité des événements en jeu et σ-additivité,

$$P(X\in A,Y\in B)=\sum_{(n,k)\in I\times J}P(X=x_n,Y=y_k)$$

et enfin d'après l'hypothèse (2.13),

$$P(X\in A,Y\in B)=\sum_{(n,k)\in I\times J}P(X=x_n)\times P(Y=y_k).$$

Intéressons-nous d'autre part à

$$P(X\in A)\times P(Y\in B),$$

c'est à dire à

$$\sum_{n\in I}P(X=x_n)\times\sum_{k\in J}P(Y=y_k).$$

si on était dans la situation de l'exemple ci-dessus, on serait en mode

$$(p_1+p_2+p_3)(q_4+q_5),$$

qui vaut

$$p_1q_4+p_1q_5+p_2q_4+p_2q_5+p_3q_4+p_3q_5,$$

que l'on peut écrire aussi, en posant $I=\{1,2,3\}$ et $J=\{4,5\}$:

$$\sum_{(n,k)\in I\times J}p_iq_j.$$

Il est à peu près clair que cette égalité a lieu quels que soient les ensembles I et J en jeu. C'est pourquoi

$$\sum_{n\in I}P(X=x_n)\times\sum_{k\in J}P(Y=y_k)=\sum_{(n,k)\in I\times J}P(X=x_n)\times P(Y=y_k)$$

c'est à dire en fait

$$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)\times P(Y\in B),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Retour vers le théorème 125 Pour la preuve de

$$f(X)\perp\!\!\!\perp g(Y),$$

il faut donc démontrer que

$$P(f(X)=u,g(Y)=v)=P(f(X)=u)\times P(g(Y)=v)$$

pour toutes valeurs u et v prises respectivement par les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$. Soit donc u une valeur prise par $f(X)$ et

$$A=f^{-1}(\{u\})$$

l'ensemble des antécédents de u par f (si par exemple f est la fonction $\sin$ et $u=0$, alors A serait l'ensemble des multiples de π). Alors l'événement

$$(f(X)=u)$$

est réalisé si et seulement si X prend des valeurs appartenant à A i.e. si et seulement si $X\in A$:

$$(f(X)=u)\ = \ (X\in A)$$

et donc

$$P(f(X)=u)=P(X\in A).$$

De même, soit v une valeur prise par $g(Y)$ et

$$B=g^{-1}(\{v\}).$$

alors

$$(g(X)=v)\ = \ (Y\in B)$$

et donc
$$P(g(Y)=v)=P(Y\in B).$$
Ainsi,
$$(f(X)=u,g(Y)=v) \;=\; (X\in A, Y\in B)$$
et donc
$$P(f(X)=u,g(Y)=v)=P(X\in A,Y\in B)$$
et par hypothèse,
$$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)\times P(Y\in B)$$
si bien que
$$\begin{aligned} P(f(X)=u,g(Y)=)) &= P(X\in A)\times P(Y\in B)\\ &= P(f(X)=u)\times P(g(Y)=v), \end{aligned}$$
ce qu'il fallait démontrer.

Retour vers le théorème 126 Dans la somme de la série
$$E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X=x_n),$$
isolons la valeur de x_n donnant 0; supposons pour fixer les idées que ce soit x_0: $x_0=0$. Le terme $x_0P(X=x_0)$ ne sert à rien dans cette somme et on a donc
$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} x_n P(X=x_n)$$
avec maintenant $x_n>0$ pour tout $n\geq 1$. Mais $E(X)=0$ donne alors nécessairement
$$\forall n\geq 1,\; P(X=x_n)=0$$
car si l'une de ces probabilités était $\neq 0$, disons $P(X=x_1)\neq 0$ pour fixer les idées, on aurait
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n P(X=x_n)\\ &\geq x_1P(X=x_1)\\ &> 0, \end{aligned}$$
ce qui est contradictoire. Donc la probabilité que X prenne une valeur >0 est nulle; en passant par l'événement contraire, on obtient le résultat.

Retour vers le théorème 127 Pour tous réels x et y, on a
$$(|x|-|y|)^2\geq 0$$
et donc en développant, il vient
$$|xy|\leq \frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)$$
c'est à dire
$$|xy|\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$
La variable aléatoire XY satisfait donc
$$|XY|\leq \frac{1}{2}(X^2+Y^2).$$
Puisque X^2 et Y^2 possèdent une espérance, alors $\frac{1}{2}(X^2+Y^2)$ aussi et de la proposition XXII.5.11, on déduit que XY possède une espérance.

On procède comme dans la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produits scalaires.

- Supposons d'abord que $E(X^2)=0$; c'est donc que X^2, variable aléatoire positive, a une espérance nulle si bien que l'événement $X^2=0$, c'est à dire l'événement $X=0$ est presque sûr. Donc l'événement $XY=0$ est presque sûr et en conséquence $E(XY)=0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$E(XY)^2 \;\leq\; E(X^2)E(Y^2)$$
est vérifiée.
- Supposons maintenant $E(X^2)\neq 0$.
  - Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a
  $$(\lambda X+Y)^2=\lambda^2X^2+Y^2+2\lambda XY$$
  et comme on sait maintenant que XY possède une espérance, on en déduit que $(\lambda X+Y)^2$ possède également une espérance.
  - Par propriété de l'espérance d'une variable positive, on a
  $$E\big((\lambda X+Y)^2\big)\geq 0,$$
  c'est à dire
  $$E(\lambda^2X^2+Y^2+2\lambda XY)\geq 0$$
  ou encore, par linéarité de l'espérance,
  $$\lambda^2E(X^2)+2\lambda E(XY)+E(Y^2)\geq 0.$$
  - Ainsi, $E\big((\lambda X+Y)^2\big)$ est un trinôme du second degré en λ toujours positif. Son discriminant est donc toujours ≤ 0, c'est à dire
  $$4E(XY)^2-4E(X^2)E(Y^2)\leq 0,$$
  ce qui conduit à
  $$E(XY)^2 \;\leq\; E(X^2)E(Y^2).$$
  - L'égalité dans cette inégalité équivaut à la nullité du discriminant du trinôme sus-mentionné, donc à l'existence d'un unique réel λ tel que
  $$E((\lambda X+Y)^2)=0$$
  donc, du fait que $(\lambda X+Y)^2$ est une variable positive, à l'existence d'un scalaire λ tel que l'événement $(\lambda X+Y=0)$ soit presque sûr.

Retour vers le théorème 128 Pour tout entier n, l'événement $(X\geq n)$ est réalisé si et seulement si l'événement $(X=n)$ est réalisé ou l'événement $(X\geq n+1)$ est réalisé. Ces deux possibilités s'excluant (les événements sont incompatibles),
$$P(X\geq n)=P(X=n)+P(X\geq n+1)$$
et on a donc
$$P(X=n)=P(X\geq n)-P(X\geq n+1).$$
Soit un entier $N\geq 0$. Alors
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} nP(X=n) &= \sum_{n=0}^{N} n\big(P(X\geq n)-P(X\geq n+1)\big)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\big(nP(X\geq n)-nP(X\geq n+1)\big)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\big(nP(X\geq n)-(n+1)P(X\geq n+1)+P(X\geq n+1)\big)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\big(nP(X\geq n)-(n+1)P(X\geq n+1)\big) \;+\; \sum_{n=0}^{N} P(X\geq n+1). \end{aligned}$$

La première somme est télescopique:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\big(nP(X\geq n)-(n+1)P(X\geq n+1)\big) &= 0\times P(X\geq 0)-(N+1)P(X\geq N+1)\\ &= -(N+1)P(X\geq N+1)\end{aligned}$$

et on a donc

$$\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) = -(N+1)P(X\geq N+1)+\sum_{n=0}^{N}P(X\geq n+1).$$

- Supposons que X possède une espérance; alors par définition, la série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ converge.

  Démontrons alors que

  $$(N+1)P(X\geq N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  – L'événement $(X\geq N+1)$ est la réunion des événements $(X=n)$ avec $n\geq N+1$:

  $$(X\geq N+1) = \bigcup_{n=N+1}^{+\infty}(X=n)$$

  et comme ces événements sont deux à deux incompatibles,

  $$P(X\geq N+1)=\sum_{n=N+1}^{+\infty}P(X=n).$$

  – On a donc

  $$(N+1)P(X\geq N+1)=(N+1)\sum_{n=N+1}^{+\infty}P(X=n).$$

  – Comme la série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ est convergente, la série

  $$\sum_{n\geq N+1} nP(X=n)$$

  l'est aussi i.e.

  $$\sum_{n=N+1}^{+\infty} nP(X=n)$$

  existe et puisque tous les entiers n figurant dans cette somme sont $\geq N+1$, on a

  $$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{+\infty} nP(X=n) &\geq \sum_{n=N+1}^{+\infty}(N+1)P(X=n)\\ &= (N+1)\sum_{n=N+1}^{+\infty}P(X=n).\end{aligned}$$

  – Ainsi,

  $$0\leq (N+1)P(X\geq N+1)\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} nP(X=n).$$

  – Mais en revenant encore à la définition de la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$:

  $$\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n)$$

  et par différence:

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n)-\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  c'est à dire

  $$\sum_{n=N+1}^{+\infty} P(X=n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  – De l'encadrement

  $$0\leq (N+1)P(X\geq N+1)\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} nP(X=n)$$

  et du théorème d'encadrement (gendarmes), on déduit bien

  $$(N+1)P(X\geq N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  – Revenons à

  $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) &= -(N+1)P(X\geq N+1)+\sum_{n=0}^{N}P(X\geq n+1)\\ &= -(N+1)P(X\geq N+1)+\sum_{n=1}^{N}P(X\geq n)\end{aligned}$$

  (changement d'indice). On est en mode

  $$S_N = a_N + T_N$$

  avec

  $$a_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  De

  $$T_N = S_N - a_N$$

  et du fait que par définition même de la notion d'espérance,

  $$\begin{aligned}S_N &= \sum_{n=0}^{N} nP(X=n)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} E(X),\end{aligned}$$

  on déduit que la suite (T_N) est convergente i.e. la série

  $$\sum_{n\geq 1} P(X\geq n)$$

  est convergente et

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geq n)=E(X).$$

  Le résultat est donc prouvé dans un sens.

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geq n).$$

- Supposons la série

  $$\sum_{n\geq 1} P(X\geq n)$$

  convergente. On a toujours

  $$\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) = -(N+1)P(X\geq N+1)+\sum_{n=1}^{N}P(X\geq n)$$

et on voit donc que

$$\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) \leq \sum_{n=1}^{N} P(X \geq n).$$

La suite (T_N) avec

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} P(X \geq n)$$

est, par définition de la convergence d'une série, convergente et croissante puisque

$$\begin{array}{rcl} T_{N+1} - T_N & = & P(X \geq N+1) \\ & \geq & 0. \end{array}$$

Elle est donc majorée (par sa limite: théorème de la limite monotone) et par voie de conséquence, la suite (S_N) également, où

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} nP(X=n).$$

Étant elle aussi croissante, puisque

$$\begin{array}{rcl} S_{N+1} - S_N & = & (N+1)P(X=N+1) \\ & \geq & 0, \end{array}$$

elle est convergente (théorème de la limite monotone) et donc, par définition de la convergence d'une série, la série

$$\sum_{n \geq 1} nP(X=n)$$

est convergente i.e. X possède une espérance; ceci nous ramène à la première hypothèse et la boucle est bouclée.

Retour vers le théorème 129

- Cette définition utilise le théorème de transfert appliqué à la fonction $f : x \mapsto x^2$, qui, sous l'hypothèse de convergence de la série $\sum x_n^2 P(X=x_n)$, affirme que l'espérance de X^2 est donnée par la formule

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 P(X=x_n).$$

- Toujours sous l'hypothèse de convergence de la série $\sum x_n^2 P(X=x_n)$: pour tout réel x, on a

$$|x| \leq 1 + x^2$$

car:

  - c'est vrai si $|x| \leq 1$ du fait que $1 + x^2 \geq 1$
  - et si $|x| \geq 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} 1 + x^2 & \geq & x^2 \\ & = & |x| \times |x| \\ & \geq & |x| \times 1 \\ & = & |x|. \end{array}$$

Ainsi,

$$|x_n| P(X=x_n) \leq P(X=x_n) + x_n^2 P(X=x_n)$$

et puisque $\sum P(X=x_n)$ est une série convergente (de somme 1, par définition même d'une loi de variable aléatoire),

$$P(X=x_n) + x_n^2 P(X=x_n)$$

est alors le terme général d'une série convergente. Le membre de gauche l'est alors aussi en vertu du théorème de comparaison par majoration: $\sum |x_n| P(X=x_n)$ converge et donc par définition, X possède une espérance.

Ensuite, en posant $a = E(X)$, on a

$$(X-a)^2 = X^2 - 2aX + a^2$$

et puisque X^2, X et la variable aléatoire constante égale à a^2 possèdent des espérances, $(X-a)^2$ en possède une aussi. Et par linéarité de l'espérance,

$$\begin{array}{rcl} E\big((X-E(X))^2\big) & = & E\big((X-a)^2\big) \\ & = & E\big(X^2 - 2aX + a^2\big) \\ & = & E(X^2) - 2aE(X) + E(a^2) \\ & = & E(X^2) - 2aX + a^2 \\ & = & E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ & = & E(X^2) - E(X)^2, \end{array}$$

d'où la formule de König-Huygens.

Retour vers le théorème 130 Dire que X a une variance nulle, c'est dire, par définition, que $(X-E(X))^2$ a une espérance nulle; puisque $(X-E(X))^2$ est une variable aléatoire à valeurs ≥ 0, c'est que l'événement $(X-E(X))^2 = 0$, c'est à dire l'événement $X - E(X) = 0$, est presque sûr (proposition XXII.5.5); puisque $E(X)$ est une constante, c'est donc que X est presque sûrement constante.

Retour vers le théorème 131 On a

$$\begin{array}{rcl} \left[X+Y-E(X+Y)\right]^2 & = & \left[(X-E(X)) + (Y-E(Y)\right]^2 \\ & = & (X-E(X))^2 + (Y-E(Y))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y)). \end{array}$$

Or, par hypothèse, X^2 possède une espérance, donc par théorème, X aussi, donc, en posant $a = E(X)$

$$(X-E(X))^2 = X^2 - 2aX + a^2$$

aussi ainsi que $(Y-E(Y))^2$. Enfin (cf. inégalité de Cauchy-Schwarz), puisque X^2 et Y^2 possèdent des espérances, XY aussi et, en posant $a = E(X)$ et $b = E(Y)$,

$$(X-E(X))(Y-E(Y)) = XY - aY - bX + ab$$

aussi. Donc

$$(X-E(X))^2 + (Y-E(Y))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y))$$

possède une espérance, c'est à dire: $X+Y$ possède une variance et

$$\begin{array}{rcl} V(X+Y) & = & E\left(\left[X+Y-E(X+Y)\right]^2\right) \\ & = & E\left(\left[X+Y-a-x\right]^2\right) \\ & = & E\left(\left[(X-a)+(Y-b)\right]^2\right) \\ & = & E\left((X-a)^2 + (Y-b)^2 + 2(X-a)(Y-b)\right) \\ & = & E\left((X-a)^2\right) + E\left((Y-b)^2\right) + 2E\left((X-a)(Y-b)\right) \\ & = & V(X) + V(Y) + 2E\left(XY - bX - aY + ab\right) \\ & = & V(X) + V(Y) + 2E(XY) - 2bE(X) - 2aE(Y) + 2ab \\ & = & V(X) + V(Y) + 2E(XY) - 2E(Y)E(X) - 2E(X)E(Y) + 2E(X)E(Y) \\ & = & V(X) + V(Y) + 2E(XY) - 2E(X)E(Y). \end{array}$$

Retour vers le théorème 132 Posons $a = E(X)$ et $b = E(Y)$. Alors

$$(X-E(X))(Y-E(Y)) = XY - bX - aY + ab.$$

Par hypothèse, X, Y, possèdent une espérance et les variables aléatoires constantes a et b aussi.Par ailleurs, par hypothèse d'existence de variances, X^2 et Y^2 possèdent chacune une espérance; comme conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que XY possède une espérance. De tous ces élements, il résulte que

$$XY - bX - aY + ab$$

possède une espérance et c'est pourquoi le produit $(X-a)(Y-b)$ possède une espérance, ce qui justifie l'existence de la covariance.

Retour vers le théorème 133 Avec les notations et l'égalité obtenues lors de la précédente définition et par linéarité de l'espérance:

$$\begin{aligned} E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big) &= E(XY) - bE(X) - aE(Y) + ab \\ &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

L'égalité concernant la variance est ensuite une conséquence du théorème précédent.

Retour vers le théorème 134 La démonstration est relativement simple lorsque $R_X > 1$ puisque le théorème de dérivation terme à terme garantit que G_X est dérivable (et même de classe C^∞) sur $]-R_X, R_X[$ et donc en particulier en 1, qui est bien un réel de cet intervalle et ce théorème donne:

$$\forall t \in\,]-R_X, R_X[, \quad G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)t^{n-1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} G'_X(1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

(par définition, puisque les valeurs prises par X sont les entiers $n \in \mathbb{N}$).

La situation est plus délicate lorsque $R_X = 1$ (la fonction G_X n'est alors définie qu'à gauche de 1 et il sera donc évidemment question de dérivabilité à gauche). Introduisons

$$T(t) = \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}.$$

Il s'agit donc, en se ramenant à la définition du nombre de dérivé, d'établir que T possède une limite finie en 1 si et seulement si X admet une espérance et qu'alors cette limite vaut $E(X)$. Notons $p_n = P(X=n)$.

- Observons tout d'abord que pour tout $t \in\,]-1,1[$,

$$\begin{aligned} \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1} &= \frac{1}{t-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \left(\frac{t^n - 1}{t-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \left(1 + t + \ldots + t^{n-1}\right) \end{aligned}$$

  (la somme démarre à $n=1$ car les termes pour $n=0$ sont tous deux égaux à p_0 et s'éliminent).
- Puisque $p_n \geq 0$ pour tout n et que $t^k \leq t'^k$ pour tout entier k dès lors que $0 \leq t \leq t'$, on en déduit

$$\forall t, t' \in [0,1[, \; t \leq t' \Longrightarrow p_n\left(1 + t + \ldots + t^{n-1}\right) \leq p_n\left(1 + t' + \ldots + t'^{n-1}\right)$$

  et en conséquence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n\left(1 + t + \ldots + t^{n-1}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\left(1 + t' + \ldots + t'^{n-1}\right).$$

- Ainsi, T est croissante sur $[0,1[$.
- Supposons que X possède une espérance; la série $\sum np_n$ est donc convergente, sa somme étant $E(X)$. Pour tout $t \in [0,1[$, on a manifestement $1 + t + \ldots + t^{n-1} \leq n$. On en déduit

$$T(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\left(1 + t + \ldots + t^{n-1}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = E(X).$$

  Ainsi, T est une fonction majorée sur $[0,1[$; étant croissante, elle possède donc une limite en 1 (théorème de la limite monotone), ce qui prouve que G_X est dérivable (à gauche) en 1. De plus,

$$G'_X(1) = \lim_{t \to 1} T(t) \leq E(X).$$

  Mais on n'a pas encore prouvé que $G'_X(1) = E(X)$, ce qui viendra plus tard.
- Supposons G_X dérivable (à gauche) en 1. Fixons un entier $N \geq 1$. Pour tout $t \in [0,1[$, tous les termes étant ≥ 0, on a

$$T(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n\left(1 + t + \ldots + t^{n-1}\right) \geq \sum_{n=1}^{N} p_n\left(1 + t + \ldots + t^{n-1}\right).$$

  Par hypothèse, le membre de gauche tend vers $G'_X(1)$ lorsque t tend vers 1 alors que le membre de droite tend naturellement (vulgaire continuité d'un polynôme en $t=1$) vers

$$\sum_{n=1}^{N} p_n\left(1 + 1 + \ldots + 1^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{N} np_n.$$

  Les inégalités (larges) se conservant par passage à la limite, on a donc

$$\forall N \geq 1, \quad G'_X(1) \geq \sum_{n=1}^{N} np_n.$$

  La suite (S_N) définie par

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} np_n$$

  est donc majorée; puisqu'elle est croissante (du fait que $S_{N+1} - S_N = (N+1)p_{N+1} \geq 0$), la suite (S_N) est donc convergente ce qui signifie par définition même que la série $\sum np_n$ est convergente. Ainsi, toujours par définition, X possède une espérance et en passant à la limite, on obtient

$$E(X) \leq G'_X(1).$$

- *Synthèse des résultats.* Si X possède une espérance, alors G_X est dérivable en 1 et

$$G'_X(1) \leq E(X)$$

  et si G_X est dérivable en 1 alors X admet une espérance et

$$E(X) \leq G'_X(1).$$

  Il en résulte que G_X est dérivable si et seulement si X admet une espérance et qu'on a alors

$$G'_X(1) \leq E(X) \leq G'_X(1)$$

  i.e. $G'_X(1) = E(X)$.

Retour vers le théorème 135 Voici une preuve intéressante dans le cas de deux variables.

- Par définition,

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n)t^n.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$; examinons l'événement $X+Y=n$.

– Puisque X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, l'égalité $X+Y=n$ a lieu si et seulement s'il existe un entier $k \in [0,n]$ tel que $X=k$ et $Y=n-k$.
– On a donc

$$(X+Y=n) = \bigcup_{k=0}^{n} (X=k, Y=n-k)$$

et comme ces événements sont deux à deux incompatibles,

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k).$$

– Enfin, comme X et Y sont indépendantes,

$$P(X=k, Y=n-k) = P(X=k)P(Y=n-k)$$

et en conséquence,

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k).$$

- On a donc

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k P(Y=n-k)t^{n-k} \right). \end{aligned}$$

- On reconnaît exactement le produit de Cauchy de la série $\sum P(X=n)t^n$ par la série

$$\sum P(Y=n)t^n,$$

dont la somme est

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)t^n \right),$$

c'est à dire $G_X(t) \times G_Y(t)$.
- D'où le résultat.
- ***Remarque:*** de façon plus rigoureuse, le théorème de Cauchy nécessite l'absolue convergence des séries en jeu; la série produit est alors à son tour absolument convergente. En notant $R = \inf\{R_X, R_Y\}$ et en prenant $t \in]-R, R[$, les deux séries entières convergent absolument et on peut donc appliquer le résultat, ce qui permet d'affirmer de plus que la série entière $G_{X+Y}(t)$ est absolument convergente sur $]-R, R[$. On a donc prouvé que le rayon de convergence de la série génératrice de $X+Y$ vaut au moins $\inf\{R_X, R_Y\}$.

Dans le cas de plus de deux variables, on peut donner une tout autre preuve: soit $t \in [0, R[$; puisque t est à l'intérieur de tous les intervalles ouverts de convergence des séries génératrices $G_{X_1}, \ldots, G_{X_n}$, les variables aléatoires

$$t^{X_1}, \ldots, t^{X_n}$$

possèdent des espérances avec

$$\begin{aligned} t^{X_1} &= G_{X_1}(t) \\ &\vdots \\ t^{X_n} &= G_{X_n}(t). \end{aligned}$$

Notons

$$f : n \longmapsto t^n.$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires

$$f(X_1), \ldots, f(X_n)$$

le sont aussi i.e.

$$t^{X_1}, \ldots, t^{X_n}$$

sont indépendantes. D'un théorème du cours, on déduit que leur produit

$$t^{X_1} \times \ldots \times t^{X_n}$$

possède une espérance avec

$$\begin{aligned} E\left(t^{X_1} \times \ldots \times t^{X_n}\right) &= E(t^{X_1}) \times \ldots \times E(t^{X_n}) \\ &= G_{X_1}(t) \times \ldots \times G_{X_n}(t). \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que

$$t^{X_1} \times \ldots \times t^{X_n} = t^{X_1 + \ldots + X_n}$$

et donc

$$\begin{aligned} E\left(t^{X_1} \times \ldots \times t^{X_n}\right) &= E\left(t^{X_1 + \ldots + X_n}\right) \\ &= G_{X_1 + \ldots + X_n}(t), \end{aligned}$$

par définition d'une série génératrice. On a donc bien

$$\forall t \in]-R, R[\,,\ G_{X_1 + \ldots + X_N}(t) = G_{X_1}(t) \times \ldots \times G_{X_N}(t).$$

Retour vers le théorème 136

- Par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np$$

et les variables (X_k) étant indépendantes,

$$V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

- Pour ce qui est de la série génératrice,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pt + 1 - p)^n. \end{aligned}$$

Retour vers le théorème 137

- Calcul de l'espérance:

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

et par théorème de dérivation terme à terme d'une série entière,

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Par une nouvelle application du théorème de dérivation terme à terme d'une série entière,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

En posant $x = 1-p$, la série $\sum kp(1-p)^{k-1}$ est convergente et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

- Pour la variance, on a

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} \\ &\quad \textit{(terme nul pour } k=1\textit{)} \\ &= p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} \\ &= p(1-p) \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

Mais $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$. On a donc

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 \\ &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

- Pour la série génératrice:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n \\ &= pt\sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{n-1}, \end{aligned}$$

série géométrique absolument convergente si et seulement si $|(1-p)t| < 1$ donc si et seulement si $t \in \left]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}\right[$, donc le rayon de convergence R_X vaut bien $R_X = \frac{1}{1-p}$ et pour tout $t \in]-R_X, R_X[$,

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Retour vers le théorème 138

- On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} \\ &\quad \textit{(terme nul pour } k=0\textit{)} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

- Ensuite,

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} \\ &\quad \textit{(termes nuls pour } k=0 \textit{ et pour } k=1\textit{)} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2. \end{aligned}$$

- Enfin, $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$, d'où

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

- Pour la série génératrice:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^n \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \times e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Retour vers le théorème 139 Puisque X possède par hypothèse une variance, la variable aléatoire

$$Z = (X - E(X))^2$$

possède une espérance, justement égale, par définition, à $V(X)$:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E((X - E(X))^2) \\ &= V(X) \end{aligned}$$

et on a clairement

$$|X - E(X)| \geq \varepsilon \iff Z \geq \varepsilon^2$$

si bien que

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P(Z \geq \varepsilon^2).$$

Il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité de Markov à Z en remplaçant ε par ε^2 et en remarquant que $|Z| = Z$:

$$P(Z \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(Z)}{\varepsilon^2}$$

et compte-tenu de ce qui précède:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Retour vers le théorème 140

- Rappelons que $\sigma(X_1) = \sqrt{V(X_1)}$ est l'écart-type de X_1.
- Par linéarité de l'espérance,

  $$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} m = nm$$

  et toujours par linéarité

  $$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = m.$$

- On sait que pour tout scalaire a,

  $$V(aX) = a^2 V(X).$$

  On a donc

  $$V\left(\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \ldots + X_n)$$

  et en cas d'indépendance des variables aléatoires en jeu, on sait que la variance de la somme est la somme des variances. On a donc

  $$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\right) &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + \ldots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}(V(X_1) + \ldots + V(X_n)) \\ &= \frac{1}{n^2} n V(X_1) \\ &= \frac{1}{n} V(X_1) \\ &= \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

  appliquée à la variable aléatoire $X = \frac{1}{n} S_n$ donne donc

  $$P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$