Programmes des colles de la semaine 9, du 25 au 29 novembre 2024

Courbes paramétrées planes. Le plan est muni d'un repère $\mathcal{R}$ une courbe est paramétrée par une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $f(t)$ est le point du plan de coordonnées $f(t)$ dans $\mathcal{R}$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur les notations: $t \mapsto M(t)$, $t \mapsto \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ etc.

- Exemples de recherche de domaines d'étude/éléments de symétries de la courbe.
- Notion de point régulier, de point stationnaire. Tangente en un point régulier, en un point stationnaire.
- Disposition locale d'une courbe: ordinaire, point d'inflexion, points de rebroussement de première et deuxième espèce.
- Utilisation de développements limités pour les études locales.
- Branches infinies; construction à partir de tableaux de variations.
- *Toutes les fonctions rencontrées seront de classe suffisante; aucune difficulté théorique ne sera soulevée.*

Produit scalaire

- Définition d'un produit scalaire; exemples classiques: produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire X^TY sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, produits scalaires intégraux $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ou $\int_a^b P(x)Q(x)\,dx$ sur $\mathbb{R}[X]$.
- Vocabulaire associé: espace préhilbertien, euclidien, norme, orthogonalité de deux vecteurs.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité, identités du parallélogramme et de polarisation; théorème de Pythagore.
- Espaces euclidiens: existence de bases orthonormées, processus de Gram-Schmidt.
- Composantes d'un vecteur dans une base orthonormée, du carré de la norme, expression X^TY du produit scalaire dans une base orthonormée.
- Orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien E; c'est un sous-espace vectoriel de E

Questions de cours:

- Démontrer: si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée d'un espace euclidien E, alors

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E, \quad \begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle \vec{e}_k, \vec{x} \rangle \vec{e}_k \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle & = & X^TY \end{array}$$

  où X et Y sont les matrices colonnes respectives de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathcal{B}$ (p. 261)
- Démontrer: $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ $(a < b)$ (p. 259).
- Démontrer: $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(x)Q(x)\,dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (p. 259).