Chapitre 1

Algèbre linéaire

I. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

1) Définition d'un espace vectoriel et exemples

Soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne et d'une opération externe sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

Définition 1.1. On dit que E muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ lorsque :

(i) $\forall (x,y) \in E^2, \quad x+y = y+x$ (commutativité).

(ii) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité).

(iii) $\exists 0_E \in E, \quad \forall x \in E, \quad x + 0_E = x$ (existence d'un élément neutre).

(iv) $\forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad x+y = 0_E$ (existence d'un symétrique).

(v) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

(vi) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (x,y) \in E^2, \quad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

(vii) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda \times \mu)x = \lambda(\mu x)$

(viii) $\forall x \in E, \quad 1x = x$

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés « vecteurs » et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés « scalaires ». Le symétrique d'un vecteur x est notée $-x$.

Proposition 1.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

(i) *E admet un unique élément neutre*

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda 0_E = 0_E$

(iii) $\forall x \in E, \quad 0x = 0_E$

(iv) $\forall x \in E, \quad (-1)x = -x$

(v) $\forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}$

Les principaux espaces vectoriels de référence :

1. L'ensemble $E = \mathbb{K}^n$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les opérations sont définies par :

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

L'élément neutre est $0_E = (0, \ldots, 0)$, le symétrique de x est $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

2. Les matrices : $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p}$ deux matrices de $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les coefficients des matrices $A + B = (c_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p}$ et $\lambda A = (d_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p}$ sont définis par :

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \ ; \quad d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

L'élément neutre est la matrice nulle (la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

3. Les fonctions. On considère I un ensemble non vide et E l'ensemble des fonctions définies de I dans $\mathbb{K}$. Soit f et g deux éléments de E et λ un scalaire. Les fonctions $f + g$ et λf définies pour tout $x \in I$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$

L'élément neutre est la fonction nulle, c'est-à-dire la fonction f telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 0.$$

4. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté $\mathbb{K}[X]$ (voir paragraphe I.7)). L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n, noté $\mathbb{K}_n[X]$

2) Espace vectoriel produit

Soit E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. L'ensemble produit $E = E_1 \times E_2$ muni des opérations définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

pour tous vecteurs x, x' de E, pour tous vecteurs y, y' de F et pour tout scalaire λ.

L'élément neutre de E est le vecteur $(0_E, 0_F)$.

On définit de même l'espace vectoriel produit $E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$ où $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Dans le cas où $E_1 = \cdots = E_n = \mathbb{K}^1$, on retrouve l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ défini dans le paragraphe précédent.

3) Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E lorsque F est non vide et :

$$\begin{array}{ll} \forall (x, y) \in F^2, \quad x + y \in F & : \text{stabilité par addition} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in F, \quad \lambda x \in F & : \text{stabilité par multiplication externe} \end{array}$$

La proposition suivante permet de justifier rapidement qu'un ensemble de vecteurs est un sous-espace vectoriel.

Proposition 1.2.

(i) Tout sous-espace vectoriel de E contient le vecteur nul de E.

(ii) Soit $F \subset E$. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :

$$F \neq \emptyset \quad \textit{et} \quad \forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$$

(iii) Soit $F \subset E$. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :

$$F \neq \emptyset \quad \textit{et} \quad \forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda y \in F$$

Exercice 1.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et que pour tout $n \leqslant p$, $\mathbb{K}_n[X]$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_p[X]$.

Exercice 1.2.

1. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. Autrement dit, étant donné F un sous-espace vectoriel de E, toute combinaison linéaire de vecteurs de F est un vecteur de F :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in F^n,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in F.$$

Proposition 1.3. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 1.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de n vecteurs de E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des vecteurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. Ce sous-espace vectoriel est noté $\operatorname{vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est l'ensemble des vecteurs que l'on peut former par combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Exercice 1.3. Expliciter les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $D = \operatorname{Vect}((2, 3, 0))$.
2. $P = \operatorname{Vect}((2, 3, 0), (1, -1, 1))$.

Exercice 1.4. Montrer que l'ensemble $F = \{(2t + u, t - u, t + u), (t, u) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par deux vecteurs que l'on précisera.

Exercice 1.5. Montrer que l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $y = z + x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par deux vecteurs que l'on précisera.

4) Famille de vecteurs

a) Familles génératrices

Définition 1.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est une famille génératrice de E lorsque pour tout x de E, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Exercice 1.6. Montrer que la famille $((1, 1), (1, -1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

b) Familles libres

Définition 1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est une famille libre de E lorsque pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Exercice 1.7. Étudier la liberté de la famille $(1, 2, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$.

On remarque qu'une famille de vecteurs contenant le vecteur nul n'est pas libre. En particulier, si la famille ne contient qu'un seul vecteur, cette famille est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas le vecteur nul.

De même, une famille n'est pas libre si elle contient deux vecteurs égaux ou, plus généralement un vecteur de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

c) Bases et dimension

Définition 1.6. Une base est une famille libre et génératrice.

Proposition 1.4. *Soit $\mathcal{B} = (v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de vecteurs de E.*
La famille $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'écrit de façon unique :

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$.

Définition 1.7. L'espace vectoriel E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice finie

Proposition 1.5. *Si $E \neq \{0\}$ et si E est de dimension finie alors E admet une base et toutes les bases de E ont le même cardinal.*

Définition 1.8. Le cardinal d'une base de E est appelé dimension de E. Si $E = \{0\}$ alors on dit que la dimension de E est 0.

Exemple 1.1. On a $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.6 (Théorème de la base incomplète)**.** *Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E alors $p \leqslant n$.Si $p < n$ alors il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E.*

Autrement dit toute famille libre de E peut être complétée en une base de E

Proposition 1.7 (Théorème de la base extraite)**.** *Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille génératrice de E alors $p \geqslant n$ et il existe $(i_1, \ldots i_n) \in [\![1, p]\!]^n$ tels que $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$ soit une base de E.*

Autrement dit, de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base.

On déduit de ces deux propositions que :
- toute famille libre de E est finie et de cardinal inférieur ou égal à n et si une famille libre est de cardinal n, elle est génératrice ;
- toute famille génératrice de E est soit infinie, soit de cardinal supérieur ou égal à n. Si une famille génératrice est de cardinal n, elle est libre.

Proposition 1.8. *Si E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels de dimension finie alors la dimension de $E_1 \times E_2$ est la somme des dimensions de E_1 et de E_2.*

5) Somme de sous-espaces vectoriels

a) Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E, on note :

$$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p, \quad x_1 \in F_1, \ldots, x_p \in F_p\}$$

Autrement dit, tout vecteur x de $F_1 + \cdots + F_p$ s'écrit :

$$x = x_1 + \cdots + x_p$$

où $x_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Proposition 1.9.

(i) L'ensemble $F_1 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Si $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_q)$ alors :

$$F + G = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q).$$

Exercice 1.8. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que l'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E contenant F et G.
2. Montrer que $F + G = G + F$.
3. Montrer que si la dimension de E est finie alors :

$$\dim(F + G) \leqslant \max(\dim F + \dim G, \dim E)$$

Exercice 1.9. Montrer que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E, on a $F + F = F$ et plus généralement $\underbrace{F + \cdots + F}_{n \text{ fois}} = F$ pour tout $n \geqslant 1$.

Définition 1.9. On dit que les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe si, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$:

$$x_1 + \cdots + x_p = 0_E \quad \Longrightarrow x_1 = \cdots x_p = 0_E$$

Lorsque la somme est directe, on écrit $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Proposition 1.10.

(i) Si $F_1, \ldots, F_p$ est en somme directe, toute sous famille de $(F_1, \ldots, F_p)$ est en somme directe.

(ii) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille de vecteurs non nuls alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si :

$$E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}(e_n).$$

On remarque donc que si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une famille libre alors :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}(e_k).$$

b) Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1.10. On dit que F et G deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires lorsque $E = F \oplus G$.

Proposition 1.11. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$.*

Exercice 1.10. Soit $p \geqslant 2$. Montrer que si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ alors F_1 et $F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ sont supplémentaires. Étudier la réciproque.

Proposition 1.12 (relation de Grassmann). *Si F et G sont de dimension de finie :*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

En particulier $\dim(F+G) \leqslant \dim F + \dim G$ et il y a égalité si, et seulement si F et G sont en somme directe.

Proposition 1.13. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$ alors $E = F \oplus G$.*

Exercice 1.11. On note E_1 l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(1, 2, 3)$; E_2 l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$.
Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires.

6) Hyperplans

Définition 1.11. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est un hyperplan de E si F admet un supplémentaire de dimension 1.

Exercice 1.12. Soit H un hyperplan de E et x un vecteur de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(x)$ est un supplémentaire de H si et seulement si $x \notin H$.

Proposition 1.14. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, F est un hyperplan de E si, et seulement si F est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.*

Dans $\mathbb{R}^2$, les hyperplans sont des droites. Dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont des plans.

Exercice 1.13. Montrer que $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 1.14. Montrer que l'ensemble H des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $\operatorname{tr} M = 0$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Donner une base de cet hyperplan. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(I_2)$ sont supplémentaires.

Exercice 1.15. Soit F un sous-espace vectoriel de E que l'on suppose de dimension finie et H un hyperplan de E. Montrer que $\dim(F \cap H) \geqslant \dim F - 1$. En déduire que l'intersection de p hyperplans ($p \in [\![2, n]\!]$) est de dimension au moins $n - p$.

7) Cas des familles de polynômes

a) Rappels

Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$.

Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré de P et que a_n est son coefficient dominant. Lorsque $a_n = 1$, on dit que le polynôme est unitaire.

Un polynôme est nul si, et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Le degré du polynôme nul est $-\infty$ par convention.

On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$. Un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) a au plus n racines distinctes. Donc un polynôme de degré inférieur à n ($n \in \mathbb{N}$) ayant au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul. En particulier, si un polynôme a une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

Proposition 1.15. *Soit* $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

(i) $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$

(ii) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

(iii) $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$ si $Q \neq 0$.

(iv) $\deg P' = \deg P - 1$ si $\deg P \geqslant 1$.

Si A et B sont deux polynômes et B n'est pas le polynôme nul alors il existe un polynôme Q et un polynôme R tels que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

On dit que Q est le quotient de la division euclidienne de A par B et que R est son reste.

b) Famille de polynômes non nuls échelonnée en degré

Définition 1.12 (Famille échelonnée en degré)**.**
Une famille finie $(P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes est échelonnée en degré si, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\deg P_k < \deg P_{k+1}.$$

Proposition 1.16. *Une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.*

Exercice 1.16. Soit P un polynôme de degré 3.

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P, P', P'', P^{(3)})$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. En déduire qu'il existe un unique 4-uplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $X^3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \lambda_k P^{(k)}$.

   Déterminer ces coefficients si $P(X) = X^3 + X$.

II. Applications linéaires

1) Rappels

a) Définition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition 1.13. Une application f de E dans F est linéaire lorsque :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall (x, y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ (ii) & \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{array}$$

Proposition 1.17. *Soit f est application de E dans F. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'application f est linéaire*

(ii) $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

(iii) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est notée $\mathcal{L}(E, F)$. Un endomorphisme est une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même. L'ensemble des endomorphismes de E est notée $\mathcal{L}(E)$ plutôt que $\mathcal{L}(E, E)$.

Considérons deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 tels que $E = E_1 \oplus E_2$

Proposition 1.18. *Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que u_1 soit la restriction de u à E_1 et u_2 soit la restriction de u à E_2.*

Autrement dit une application linéaire sur E est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2. Ce résultat se généralise au cas $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

Exercice 1.17. Soit H un hyperplan de E et x_0 un vecteur de E n'appartenant pas à H. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que $\ker u = H$ et $u(x_0) = -x_0$.

Exercice 1.18. On note E_1 l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(1, 2, 3)$; E_2 l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la restriction à E_1 est nulle et la restriction à E_2 est l'identité. Donner une expression de $f(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

b) Noyau et image, théorème du rang

Soit f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f, noté $\ker f$ est l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\})$. Autrement dit :

$$\ker f = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\}$$

Proposition 1.19. $\ker f$ *est un sous-espace vectoriel de E. De plus f est injective, si et seulement si* $\ker f = \{0_E\}$.

Définition 1.14. L'image de f, notée $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble $f(E)$. Autrement dit :

$$\operatorname{Im} f = \{f(x), x \in E\}$$

On note $\operatorname{rang} f$ la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 1.19. Justifier que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi\ : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{K}} \\ & P & \longmapsto & (x \longmapsto \quad P(x)) \end{array}$$

est une application linéaire injective.

L'image de Φ est l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. En pratique, on confond le polynôme P et $\Phi(P)$ la fonction polynomiale associée.

Proposition 1.20. $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F. De plus, lorsque F est de dimension finie, l'application f est surjective, si et seulement si* $\operatorname{rang} f = \dim F$.

Proposition 1.21. *(Théorème du rang) Si E est de dimension finie :*

$$\dim \ker f + \operatorname{rang} f = \dim E$$

c) Cas des endomorphismes

En dimension finie, tout endomorphisme injectif est bijectif, tout endomorphisme surjective est bijectif.

Exercice 1.20. Vérifier que les endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ suivants sont injectifs ou surjectifs mais ne sont pas bijectifs :

$$u\ : P \longmapsto XP, \qquad v\ : P \longmapsto P'.$$

Proposition 1.22. *Soit u et v deux endomorphismes de E. La composée $u \circ v$ est un endomorphisme de E.*

Exercice 1.21. Soit u et v deux endomorphismes de E. Montrer l'équivalence :

$$u \circ v = 0 \iff \operatorname{Im} v \subset \ker u$$

On note $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$ et on convient de noter $u^0 = id_E$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^{n+1} = u \circ u^n = u^n \circ u$$

2) Matrice d'une application linéaire

Dans ce paragraphe, on considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique :

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
On dit que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$. On note :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est une famille de p vecteurs de E, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$ est la matrice à n lignes et p colonnes dans laquelle la colonne j donne les coordonnées du j-ième vecteur de la famille $\mathcal{F}$.

Proposition 1.23. *Soit $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs. La matrice $P = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ est inversible si, et seulement si $\mathcal{B}'$ est une base.*
Dans ce cas $P^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}$.

Soit u un endomorphisme de E. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, notée $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u$ est la matrice de la famille $u(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u(\mathcal{B}).$$

Si u et v sont deux endomorphismes de E, de matrices respectives A et B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A + B$ et AB sont les matrices respectives de $u + v$ et de $u \circ v$ dans cette même base.

Exercice 1.22. On considère les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$u(x, y) = (x + y, x - y), \quad v(x, y) = (x - y, 2x + y)$$

Vérifier que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Donner les matrices de u, v, $u + v$, $u \circ v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.23. Soit u un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E telle que :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(e_1, u(e_1))$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

b) Formules de changement de bases

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Notons P la matrice de changement de base $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$.

Considérons un vecteur x de E. Ce vecteur admet un vecteur de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ et un vecteur de coordonnées Y dans la base $\mathcal{B}'$. On a la relation :

$$X = PY$$

Considérons maintenant un endomorphisme u de E. Cet endomorphisme admet une matrice dans la base $\mathcal{B}$ que l'on note A, une autre, que l'on note B dans la base $\mathcal{B}'$. On a la relation :

$$A = PBP^{-1}.$$

Exercice 1.24. Refaire l'exercice 1.23 en utilisant la formule de changement de base.

Exercice 1.25. $E = \mathbb{R}^3$. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme s de $\mathbb{R}^3$ tel que $s(1,1,0) = (-1,-1,0)$, $s(1,0,-1) = (1,0,-1)$ et $s(0,1,-1) = (0,1,-1)$. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.15 (Matrices semblables)**.** Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n. On dit que A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Proposition 1.24. *Deux matrices d'un même endomorphisme sont semblables.*

c) Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n. La trace de A est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposition 1.25. *L'application $M \longmapsto \operatorname{tr} M$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.26. *Pour toutes matrices carrées A et B de même ordre :*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Exercice 1.26. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

On en déduit que deux matrices d'un même endomorphisme ont même trace.

Définition 1.16. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E, A la matrice de u dans la base B. La trace de u est la trace de A.

3) Endomorphismes remarquables

a) Homothéties

Les homothéties sont les endomorphismes de la forme λid_E où $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Les homothéties ont la propriété de commuter avec tous les endomorphismes.

Exercice 1.27. Soit f un endomorphisme non nul de E. Montrer que, si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.

b) Projecteurs

Définition 1.17. On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$

Proposition 1.27. *Pour tout projecteur p de E :*

$$x \in \operatorname{Im} p \Longleftrightarrow p(x) = x.$$

Définition 1.18. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. La projection p_1 sur F_1 parallèlement à F_2 est définie de la façon suivante :

$$\forall x \in F_1, \quad p_1(x) = x, \quad \text{et} \quad \forall x \in F_2, \quad p_1(x) = 0.$$

Ainsi, tout vecteur x de E s'écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ et $p_1(x) = x_1$. Et, en notant p_2 la projection sur F_2 parallèlement à F_1, on a $p_2(x) = x_2$.

Exercice 1.28. On garde les notations précédentes. Montrer que :

$$p_1 + p_2 = id_E, \quad p_1 \circ p_1 = p_1, \quad p_2 \circ p_2 = p_2, \quad \ker p_1 = \operatorname{Im} p_2 = F_2, \quad \ker p_2 = \operatorname{Im} p_1 = F_1.$$

Exercice 1.29. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (2, 1)$, $v = (2, -1)$.

1. Déterminer la projection sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$.
2. Déterminer la projection sur $\mathrm{Vect}(v)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)$.

Proposition 1.28.

(i) Toute projection est un projecteur.

(ii) Si p est un projecteur alors $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires et p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Exercice 1.30. Montrer que si p est un projecteur $q = id_E - p$ est également un projecteur. Préciser son noyau et son image à l'aide du noyau et de l'image de p.

Soit $F_1, \dots F_m$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$. On considère les endomorphismes p_i définis par :

$$\forall x \in F_i, \quad p_i(x) = x,$$
$$\forall j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}, \forall x \in F_j, \quad p_i(x) = 0.$$

Ces endomorphismes sont les projecteurs associés à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$.

Proposition 1.29. *On a, avec les notations précédentes :*

$$\forall i \neq j, \, p_i \circ p_j = 0 \quad \textit{et} \quad p_1 + \cdots + p_m = id_E.$$

Exercice 1.31. Soit p un projecteur de rang r d'un espace vectoriel de dimension n. Calculer la trace de p.

c) Symétrie

Définition 1.19. L'endomorphisme s de E est une symétrie lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels supplémentaires F_1 et F_2 tels que :

$$\forall x \in F_1, \, s(x) = x, \quad \forall x \in F_2, \, s(x) = -x.$$

On dit alors que l'endomorphisme s est la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2.

Exercice 1.32. Montrer que'avec les notations de la définition :

$$F_1 = \ker(s - id_E), \quad F_2 = \ker(s + id_E)$$

Exercice 1.33. Soit s une symétrie de E. Déterminer $\ker s$ et $\operatorname{Im} s$.

Proposition 1.30. *Un endomorphisme s est une symétrie si, et seulement si $s \circ s = id_E$. Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\ker(s - id_E)$ parallèlement à $\ker(s + id_E)$.*

Exercice 1.34. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, et s une symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. Montrer que $p_1 = \frac{1}{2}(id_E + s)$ et $p_2 = \frac{1}{2}(id_E - s)$ sont des projecteurs. Déterminer leur noyau et leur image.

Exercice 1.35. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et p la projection sur F_1 parallèlement à F_2. Montrer que $s = 2p - id_E$ est une symétrie. Préciser les éléments de cette symétrie.

4) Sous-espaces stables d'un endomorphisme

Définition 1.20. Soit u un endomorphisme. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$, autrement dit :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

Dans ce cas, l'endomorphisme u induit sur F l'endomorphisme v de F défini par :

$$\forall x \in F, \quad v(x) = u(x).$$

Il ne faut pas confondre avec la restriction de u à F qui est une application linéaire de F dans E, qui n'est pas un endomorphisme si $F \neq E$.

Contrairement à l'endomorphisme induit, l'hypothèse de stabilité de F n'est pas nessaire pour une restriction.

Exercice 1.36. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que $\ker u$ est stable par u. Que peut-on dire de l'endomorphisme induit par u sur $\ker u$?

Exercice 1.37. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est stable par u. Que peut-on dire de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$ lorsque u est un projecteur ?

Exercice 1.38. Soit u un endomorphisme de E et λ un scalaire. Montrer que $\ker(u - \lambda id_E)$ est stable par u. Que peut-on dire de l'endomorphisme induit par u sur cet espace ?

Exercice 1.39. Soit E un espace vectoriel de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E et u l'endomorphisme admettant dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $F = \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ est un sous-espace vectoriel stable par u. Donner la matrice de l'endomorphisme induit dans base (e_2, e_3).
2. Est-ce que $G = \operatorname{Vect}(e_1, e_4)$ est stable par u ?

Proposition 1.31. *Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de E et u un endomorphisme de E.*

Le sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si $u(e_i) \in F$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F. Complétons cette base en une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit par bloc :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de v dans la base $\mathcal{B}_1$.

Exercice 1.40. Soit f un endomorphisme de E et x un vecteur non nul de E. Montrer que si $F = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par f alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f(x) = \lambda x$. Écrire la matrice de f dans une base de E :

(i) adaptée à la somme $E = F \oplus G$,

(ii) adaptée à la somme $E = G \oplus F$.

Exercice 1.41. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E stables par u. Donner l'allure de la matrice u dans une base adaptée à la somme $F \oplus G$.

Exercice 1.42. Soit F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G \oplus H$ et u un endomorphisme de E stable par F et H. Donner l'allure de la matrice de u dans une base adaptée dans le cas où $G \oplus H$ est stable, puis dans le cas où G est stable.

Exercice 1.43. Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, p le projection sur F parallèlement à G, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Donner les matrices de p et s dans une base adaptée à la somme $F \oplus G$.

5) Équation d'un hyperplan

Dans tout ce paragraphe $(E, +, .)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.32. *Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si, et seulement si il existe une application linéaire non nulle φ de E dans $\mathbb{K}$ telle que $H = \ker \varphi$.*

Démonstration. Si H est un hyperplan et D est un supplémentaire de H, on peut considérer p la projection sur D parallèlement à H et α un isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur D.
On montrer que, en posant $\varphi = \alpha^{-1} \circ p$ que $H = \ker \varphi$. □

Avec les notations précédentes :

$$x \in H \iff \varphi(x) = 0.$$

On dit que $\varphi(x) = 0$ est une équation de H.

Exercice 1.44. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que si $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ alors

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ a_1 x_1 + \cdots a_n x_n = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 1.45. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $e_1 = (1, 0, -1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1)$. Montrer que $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Donner une équation de cet hyperplan.

Exercice 1.46. Montrer que l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que $P(0) = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 1.47. Soit φ et ψ deux applications linéaires non nulles de E dans $\mathbb{K}$. Montrer que $\ker \varphi = \ker \psi$ si et seulement si (φ, ψ) est une famille liée. Dans le cas contraire, montrer que $\dim \ker \varphi \cap \ker \psi = n - 2$.

Exercice 1.48. Soit $(\varphi_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille d'applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$. Montrer que la famille $(\varphi_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre si et seulement si $\dim \displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} \ker \phi_k = n - p$.

III. Exercices

1) Révisions

Exercice 1.49. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 + X = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.50. Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.51. Calculer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ suivant les valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 1.52. Dans chacun des cas suivants, préciser si la famille est libre, génératrice ou ni libre, ni génératrice dans E.

1. $E = \mathbb{R}^5$, $\mathcal{F}_1 = \{(2,0,2,0,2), (0,1,0,1,0), (2,1,0,2,1), (2,2,0,3,1)\}$.
2. $E = \mathbb{R}^5$, $\mathcal{F}_2 = \{(2,0,2,0,2), (0,1,0,1,0), (2,1,0,2,1)\}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}_3 = \{(2,0,2), (0,1,1), (2,0,0), (0,1,2)\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}_4 = \{(2,0,2), (0,1,1), (2,-1,1)\}$.

Exercice 1.53. Soit A une matrice carrée.

1. La famille $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ est-elle libre pour tout $p \in \mathbb{N}$?
2. On suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - (a+d)A$. La famille (I, A, A^2) est-elle libre ?
3. Donner une matrice carrée A d'ordre 3 telle que (I, A, A^2) est libre.
4. On suppose que $A^{k-1} \neq 0$ et $A^k = 0$. Montrer que la famille $(I, A, \ldots, A^{k-1})$ est libre.
5. Donner une matrice triangulaire A d'ordre n telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.

Exercice 1.54. On pose, pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$:

$$P_k = (X+1)^k X^{3-k}.$$

Montrer que la famille $(P_k)_{k \in [\![0,3]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 1.55. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $A \cup B \subset A + B$.
2. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) $A \cup B = A + B$,
   (ii) $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (iii) $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Exercice 1.56. Soit U et V deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel. Montrer que $U + V$ est inclus dans V si et seulement si U est inclus dans V.

Exercice 1.57. Soit P le plan d'équation $x - y + 2z = 0$ et D la droite engendrée par le vecteur $u = (1, 2, 1)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

Exercice 1.58. Soit F l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(0) = P(1)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ puis que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus \mathrm{Vect}(X^3)$.

Exercice 1.59. Soit $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,1,1,3)$, $c = (2,1,1,1)$, $d = (-1,0,-1,2)$, $e = (2,3,0,1)$.
On note U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (a, b) et V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (c, d, e).
Quelles sont les dimensions de U, V, $U \cap V$, $U + V$?

Exercice 1.60. On considère $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x-y, x, y).$$

1. Montrer que f est injective et non surjective. Donner une base de l'image de f et la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $(a,b,c) \in \mathrm{Im} f$ si et seulement si $a = b - c$.
3. En déduire qu'il existe $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$ telle que $\ker g = \mathrm{Im} f$. Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 1.61. On considère l'endomorphime f de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P) = \frac{1}{2}P(X) + \frac{1}{2}P(1-X)$$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. On suppose que $n = 2$. Déterminer les éléments caractéristiques de f lorsque $n = 2$:
   (i) sans utiliser de matrice,
   (ii) à l'aide de la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 1.62. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On considère l'application f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dans lui-même qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ associe la matrice AMA.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Déterminer $f^n(M)$ pour tout M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Montrer que si A est inversible, l'endomorphime f est bijectif. Dans ce cas, déterminer f^{-1}, l'application réciproque de f.

Exercice 1.63. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Déterminer F l'ensemble des fonctions f de E tels que la famille (f, f') est liée.
2. Est-ce que F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1.64. Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. On note φ la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$. Montrer que :
$$\mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Im}\ f^2 \quad \text{et} \quad \ker \varphi = \ker f \cap \mathrm{Im}\, f.$$
   En déduire que $\mathrm{rang}\, f - \mathrm{rang}\, f^2 = \dim \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$ si, et seulement si $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

2) Sous-espaces vectoriels stables

Exercice 1.65. On définit l'application Δ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ par :

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme.
2. Montrer que si $\Delta(P) = 0$ alors $P(n) = P(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le noyau de Δ.
3. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par Δ.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n l'endomorphime induit par Δ sur $\mathbb{K}_n[X]$.
   (a) Quel est le noyau de Δ_n ?
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}\, \Delta_n = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
5. On note $E_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(0) = 0\}$.
   Montrer que $\tilde{\Delta}$ la restriction de Δ à E_1 est un isomorphisme de E_1 dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 1.66. Soit u_1, u_2, u_3 des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque endomorphime :

1. Dire s'il s'agit un projecteur ou d'une symétrie,
2. Donner les éléments caractéristiques (équation s'il s'agit d'un plan, vecteur directeur, s'il s'agit d'une droite).
3. Écrire ensuite les matrices de ces endomorphimes dans des bases adaptées à chacun d'eux.

Exercice 1.67. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $D_1 = \text{Vect}(e_1)$ et $D_2 = \text{Vect}(e_1 + e_2)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par u.
2. Montrer que D_1 et D_2 sont les seuls sous-espaces de dimension 1 stables par u.
3. Donner la liste des sous-espaces stables par u.

Exercice 1.68. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que u admet un unique sous-espace stable de dimension 1.

Exercice 1.69. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les sous-espaces stables par u de dimension 1.
2. Donner deux sous-espaces stables par u de dimension 2.

3) Hyperplans

Exercice 1.70. Les ensembles suivants sont-ils des hyperplans de $E = \mathbb{K}_3[X]$? Donner un supplémentaire pour chacun d'eux.

1. L'ensemble des polynômes P de E tels que $P(0) = P(1)$.
2. L'ensemble des polynômes P de E tels que $P(0) = P(1) = P(2)$.
3. L'ensemble des polynômes P de E tels que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
4. L'ensemble des polynômes P de E tels que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = P(1/2)$.

Exercice 1.71. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les ensembles H_1 d'équation $x + y + z - t = 0$, H_2 d'équation $x - y + z + t = 0$ et H_3 d'équation $x + y + z + t = 0$.

Justifier que H_1, H_2 et H_3 sont des hyperplans. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants : $H_1 \cap H_2$, $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

Exercice 1.72. Soit $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (0, 1, 2, 3)$ et $P = \mathrm{Vect}(a, b)$. Écrire P comme l'intersection de deux hyperplans dont on précisera pour chacun une équation.

Exercice 1.73. Soit f l'endomorphime de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Donner une équation de cet hyperplan.
2. Quelle est la dimension de $\ker f$?
3. Est-ce que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires ?

Exercice 1.74. Soit f un endomorphisme de rang 1 de E (espace vectoriel de dimension finie).

1. Montrer que le noyau de f est un hyperplan de E.
2. Soit $x_0 \notin \ker f$. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$ et écrire la matrice de f dans une base adaptée à cette somme directe.
3. Montrer que si $\mathrm{tr}\, f = 0$ alors $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$
4. Montrer que si $\mathrm{tr}\, f \neq 0$ alors $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \ker f$.

Exercice 1.75. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note n la dimension de E et on pose $p = n - \dim F$.

1. Justifier qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $(e_1, \ldots, e_{n-p})$ soit une base de F.
2. On note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, p_i la projection de E sur $\mathrm{Vect}(e_i)$ parallèlement à $H_i = \mathrm{Vect}((e_j)_{j \neq i, 1 \leqslant j \leqslant n})$.

   Montrer H_i est un hyperplan de E pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et que $F = \displaystyle\bigcap_{i=n-p+1}^{n} H_i$.

Chapitre 2

Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées

I. Fonctions vectorielles

Dans toute cette section $E = \mathbb{R}^p$ avec $p = 1$, $p = 2$ ou $p = 3$.

1) Norme euclidienne et produit scalaire de $\mathbb{R}^p$

Définition 2.1. La norme euclidienne d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de E, notée $\|x\|$, est définie par :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}.$$

— Si $p = 1$ on a $x = x_1$ et $\|x\| = |x|$.
— Si $p = 2$ on a $x = (x_1, x_2)$ et $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
— Si $p = 3$ on a $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Exercice 2.1. Montrer que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$\max(|x_1|, \ldots, |x_p|) \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{p} \times \max(|x_1|, \ldots, |x_p|).$$

Définition 2.2. Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^p$, que l'on note $\langle ., . \rangle$ est défini pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$ par $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p$.

On remarque que $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

2) Fonctions coordonnées

Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Le vecteur $f(t)$ s'écrit $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ si $p = 2$ ou $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ si $p = 3$. Les fonctions f_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ ont le même ensemble de définition que f, ce sont les fonctions coordonnées de f.

Exercice 2.2. Soit f la fonction $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$. Représenter l'ensemble $f(\mathbb{R})$.

3) Limite

Définition 2.3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que x est adhérent à I lorsque tout intervalle ouvert contenant x contient au moins un élément de I.

Pour montrer qu'un réel x appartient à l'adhérence de I, il faut montrer que l'intersection de I et d'un intervalle ouvert quelconque contenant x n'est pas vide.

Inversement, pour montrer qu'un réel x n'appartient pas à l'adhérence de I, il faut trouver un intervalle ouvert contenant x dont l'intersection avec I est vide.

Tout réel appartenant à I est adhérent à I. C'est une conséquence directe de la déinition. Mais il peut exister des réels adhérents à I qui ne sont pas dans I. C'est le cas lorsque $I =]a, +\infty[$, tout intervalle ouvert contenant a est de la forme $]c, d[$ avec $c < a$ donc $I \cap]c, d[=]a, c[$ et $x = \frac{a+c}{2}$ appartient à $I \cap]c, d[$.

Exercice 2.3. Montrer que l'ensemble des points adhérents à $]a, +\infty[$ est $[a, +\infty[$.

Exemple 2.1.

— Tout point de I est adhérent à I.

— Si $a < b$, les réels a et b sont adhérents à l'intervalle ouvert $]a, b[$.

— L'ensemble des points adhérents à $]a, +\infty[$ est $[a, +\infty[$.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.4. On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ en a si a est un point adhérent à I et :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in I, |t - a| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(t) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim\limits_{t \to a} f(t) = \ell$. On remarque que cela équivaut à :

$$\lim_{t \to a} \|f(t) - \ell\| = 0.$$

En général, on s'intéresse aux points adhérents à I n'appartenant pas à I.
On note f_i les fonctions coordonnées de f et ℓ_i les coordonnées de ℓ pour $i \in [\![1, p]\!]$.

Proposition 2.1. *Avec les notations précédentes :*

$$\lim_{t \to a} f(t) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \lim_{t \to a} f_i(t) = \ell_i.$$

Si la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$ (respectivement à $I \cap]-\infty, a]$) admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite de f à droite (respectivement à gauche) en a.
On note, en général $\lim\limits_{t \to a^+} f(t)$ la limite à droite et $\lim\limits_{t \to a^-} f(t)$ la limite à gauche.

Exercice 2.4. Soit f la fonction $t \longmapsto (\sin t, |t|)$ et g la fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{t}$. Étudier la limite de f et g en 0.

4) Continuité

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.5 (Continuité en un point)**.** On dit que f est continue en $a \in \mathcal{D}_f$ lorsque $\lim\limits_{t \to a} f(t) = f(a)$.

Définition 2.6 (Continuité globale)**.** On dit que f est continue sur $I \subset \mathcal{D}_f$ si, pour tout $a \in I$, la fonction f est continue en a.

En conséquence de la proposition 2.1, la fonction f est continue en $a \in \mathcal{D}_f$ si, et seulement si toutes ses fonctions coordonnées sont continues en a ; la fonction f est continue sur $I \subset \mathbb{R}$ si, seulement si toutes ses fonctions coordonnées sont continues sur I.

Exercice 2.5. Montrer que la fonction f définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = (|t|, t^2 + t)$ est continue.

5) Fonction dérivée

a) Définition

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.7. On dit que f est dérivable en un point $a \in I$ lorsque la fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ admet une limite finie en a.
La limite est appelée vecteur dérivé de f en a, elle est notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

Si $t \mapsto f(t)$ modélise la trajectoire d'un mobile en fonction du temps, $f'(t)$ est la vitesse de ce mobile au temps t.

Proposition 2.2. *f est dérivable en a si, et seulement si toutes ses fonctions coordonnées sont dérivables en a.*

Proposition 2.3. *Une fonction dérivable est continue.*

Si $t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ admet une limite à droite (respectivement à gauche) en a, cette limite est appelée vecteur dérivé à droite (respectivement à gauche) de f en a.

Exercice 2.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (|t|, t^2 + t)$$

Étudier la dérivabilité de f. Déterminer le vecteur dérivé de f en tout point où f est dérivable.

b) Dérivation d'une combinaison linéaire

Soit $(f_1, \dots f_n)$ une famille de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 2.4. *Si les fonctions $f_1, \dots f_n$ sont dérivables en a alors la fonction $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est dérivable en a et :*

$$g'(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'(a).$$

c) Dérivation d'un produit d'une fonction à valeurs réelles par une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Soit $I \subset \mathbb{R}$, λ une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 2.5. *Si les fonctions λ et f sont dérivables en a alors la fonction $g = \lambda.f$ est dérivable en a et :*

$$g'(a) = \lambda'(a).f(a) + \lambda(a).f'(a)$$

Exercice 2.7. Soit f la fonction $t \mapsto \lambda(t)(\cos t, \sin t)$ où λ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est une fonction constante alors λ est la fonction nulle.

d) Dérivation d'un produit scalaire

Soit $I \subset \mathbb{R}$, f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 2.6. *Si les fonctions f et g sont dérivables en a, la fonction $\varphi\ : t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est dérivable en a et :*
$$\varphi'(a) = \langle f'(a), g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a)\rangle$$

Exercice 2.8. Soit f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ dérivable.

1. Montrer que $u\ : t \mapsto \|f(t)\|^2$ est dérivable. Donner une expression de u'.
2. Montrer que si $f(a) \neq 0$, la fonction $v\ : t \mapsto \|f(t)\|$ est dérivable en a et donner une expression de $v'(a)$.

e) Dérivation d'un produit vectoriel

Soit f et g deux fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.7. *Si f et g sont dérivable en a alors la fonction $h\ : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ est dérivable en a et :*
$$h'(a) = f'(a) \wedge g(a) + f(a) \wedge g'(a).$$

Exercice 2.9. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Justifier que $g\ : t \longmapsto f(t) \wedge u$ est dérivable et calculer sa dérivée.

f) Dérivation d'une composée

Soit u une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $u(I)$ dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 2.8. *Si u est dérivable en a et f est dérivable en $u(a)$ alors $g = f \circ u$ est dérivable en a et :*
$$g'(a) = u'(a).f'(u(a))$$

Exercice 2.10. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g la fonction $t \longmapsto (\cos(u(t)), \sin(u(t)))$.
Justifier que g est dérivable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $t \longmapsto \|g'(t)\|$ soit constante.

6) Dérivées successives

a) Fonction $\mathcal{C}^k$

Soit f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$. Si f est dérivable k fois, on note $f^{(k)}$ la k-ième dérivée de f. On convient de noter $f^{(0)} = f$.

Définition 2.8. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ si f est k fois dérivables et si la fonction $f^{(k)}$ est continue.
Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f est dérivable, on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) Dérivées successives d'une combinaison linéaire

Soit $(f_1, \ldots f_n)$ une famille de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 2.9. *Si les fonctions $f_1, \ldots f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors la fonction $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est de classe*

$\mathcal{C}^k$ *et :*

$$g^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^{(k)}.$$

c) Dérivées successives d'un produit

Proposition 2.10. *Soit f et g deux fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et λ une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Si f, g et λ sont de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) sur I alors :*

(i) la fonction $\lambda.f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(\lambda f)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{(i)} f^{(k-i)}$.

(ii) la fonction $\langle f, g\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(\langle f, g\rangle)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \langle f^{(i)}, g^{(k-i)}\rangle$.

(iii) (si $p = 3$) la fonction $f \wedge g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f \wedge g)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} \wedge g^{(k-i)}$.

Exercice 2.11. Calculer la dérivée d'ordre n de $t \longmapsto tf(t)$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

d) Développement limité et formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f a un développement limité à l'ordre n en a, s'il existe $a_0, \dots a_n$ appartenant à $\mathbb{R}^p$ tels que :

$$f(t) \underset{t\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} (t-a)^k a_k + o((t-a)^n)$$

Proposition 2.11 (Formule de Taylor-Young)**.** *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$:*

$$f(t) \underset{t\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (t-a)^k f^{(k)}(a) + o((t-a)^n)$$

La formule de Taylor-Young montre que toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admet un développement limité à l'ordre n et donne une expression des coefficients à l'aide des dérivées successives.

Elle permet d'obtenir les développements limités des fonctions réelles de référence (exponentielle, logarithme, sinus et cosinus). Mais en pratique, on obtient un développement limité d'une fonction vectorielle à partir des développements limités de ses fonctions coordonnées et en faisant des opérations sur les développements limités (essentiellement des sommes et des produits).

Exercice 2.12. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$.

Exercice 2.13. Soit f la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}(\sin t, t+1)$. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(t)$.

II. Courbes paramétrées du plan

Dans cette partie et les suivantes, le plan affine euclidien orienté sera identifié à $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, le plan vectoriel sera identifié lui aussi à $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Si le point M et le vecteur $\overrightarrow{u}$ ont pour coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on écrira $M = \overrightarrow{u} = (a, b) = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$.

1) Définition

Une courbe paramétrée du plan est une fonction vectorielle $f\ : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Le support de la courbe est l'ensemble des points de coordonnées $f(t)$ où t décrit l'ensemble I.
En notant f_1 et f_2 les fonctions coordonnées de f, la courbe paramétrée f est définie par le système :

$$\mathcal{S} \quad \begin{cases} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{cases} \quad t \in I$$

Une courbe paramétrée est naturellement orientée par le sens croissant du paramètre t.

Exercice 2.14. Représenter les courbes paramétrées $t \longmapsto (1+t, 1-2t)$ et $t \longmapsto (t, t^2)$.

Exercice 2.15. Montrer que les courbes paramétrées $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$, $t \longmapsto (\cos t, -\sin t)$ et $t \longmapsto (\sin t, \cos t)$ ont même support.

Si u est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors la courbe d'équation $y = u(x)$ est paramétrée par le système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = u(t) \end{cases}$$

La fonction vectorielle associée est $f\ : t \longmapsto (t, u(t))$.

Lorsque la fonction f_1 est bijective, la courbe paramétrée par le système $\mathcal{S}$ est identique à la courbe d'équation $y = f_2 \circ f_1^{-1}(x)$.

Exercice 2.16. Représenter les courbes paramétrées $t \longmapsto (t^2, t)$, $t \longmapsto (t^2, t^3)$, $t \longmapsto (\ln t, t)$.

2) Longueur d'une courbe

Soit $f\ : t \longmapsto M(t) = (x(t), y(t))$ une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 2.12. *Pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, la longueur de l'arc reliant $A = M(a)$ et $B = M(b)$ est donnée par la formule :*

$$\ell = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt.$$

Exercice 2.17. Calculer la longueur d'un cercle de rayon $R > 0$.

Exercice 2.18. Exprimer à l'aide d'une intégrale la longueur de la portion de courbe d'équation $y = x^2$ comprise entre les points O et $A = (1, 1)$.

3) Tangente et demi-tangente

Soit $f\ : t \longmapsto M(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée définie sur un intervalle I.

Exercice 2.19. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. Montrer qu'il existe un unique vecteur v de norme 1 colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{u}$.

Soit $t_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $t_0 + h \in I$.

La droite $\mathcal{D}_h$ passant par le point $M(t_0)$ et le point $(x(t_0+h), y(t_0+h))$ est dirigée par le vecteur unitaire :

$$\overrightarrow{u_h} = \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}\|}$$

Définition 2.9. Si le vecteur $\overrightarrow{u_h}$ admet une limite $\overrightarrow{u}$ lorsque $h \to 0^+$ (respectivement $h \to 0^-$), on dit que la courbe paramétrée admet une demi-tangente à droite (respectivement à gauche) en $M(t_0)$. Cette demi-tangente est la droite passant par $M(t_0)$ dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Si les limites à droite et à gauche sont égales ou opposées, la courbe paramétrée admet une tangente en $M(t_0)$.

Dans ce cas, en notant (a, b) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$, la tangente admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= x(t_0) + at \\ y &= y(t_0) + bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Si on veut une équation, on utilise le déterminant. En notant T_0 la tangente en $M(t_0)$, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de T_0 :

$$\begin{aligned} M \in T_0 &\iff \det(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{u}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - x(t_0) & a \\ y - y(t_0) & b \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Proposition 2.13. *Si f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) \neq (0,0)$ alors la courbe paramétrée par f admet une tangente au point $M(t_0)$. Cette tangente est dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.*

Exercice 2.20. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + t \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]$$

Tracer les tangentes aux points de paramètres -1, 0 et 1, puis tracer la courbe $\mathcal{C}$

Exercice 2.21. Donner une équation de la tangente T_M en un point M quelconque de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Faire une figure. Montrer que $T_M \perp (OM)$.

Définition 2.10 (Point régulier, point singulier, point birégulier)**.**

(i) Un point $M = f(t)$ est dit régulier lorsque $f'(t) \neq (0,0)$. Une courbe est dite régulière si tous ses points sont réguliers.

(ii) Un point non régulier est dit stationnaire (ou singulier).

(iii) Un point $M = f(t)$ est dit birégulier lorsque la famille de vecteurs $(f'(t), f''(t))$ est libre.

Un point singulier n'est ni régulier, ni birégulier.

En tout point régulier $M = f(t)$ ***la courbe*** f ***admet une tangente dirigée par*** $f'(t)$**.**

On rappelle que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a, b)$ et $\overrightarrow{v} = (c, d)$ forment une famille libre si et seulement si leur déterminant est non nul, c'est-à-dire :

$$ad - bc \neq 0.$$

Exercice 2.22. Déterminer l'ensemble des points singuliers de $f\ : t \longmapsto ((t^3 - 3t, (t^2 - 1)^3)$.

Exercice 2.23. Déterminer l'ensemble des points biréguliers de $f : t \longmapsto (t + t^2, t^3)$.

4) Étude locale

On garde les notations du paragraphe précédent.
On suppose qu'il existe un plus petit entier strictement positif p tel que $f^{(p)}(t) \neq 0$ et un plus petit entier q supérieur à p tel que la famille $(f^{(p)}(t), f^{(q)}(t))$ est libre.

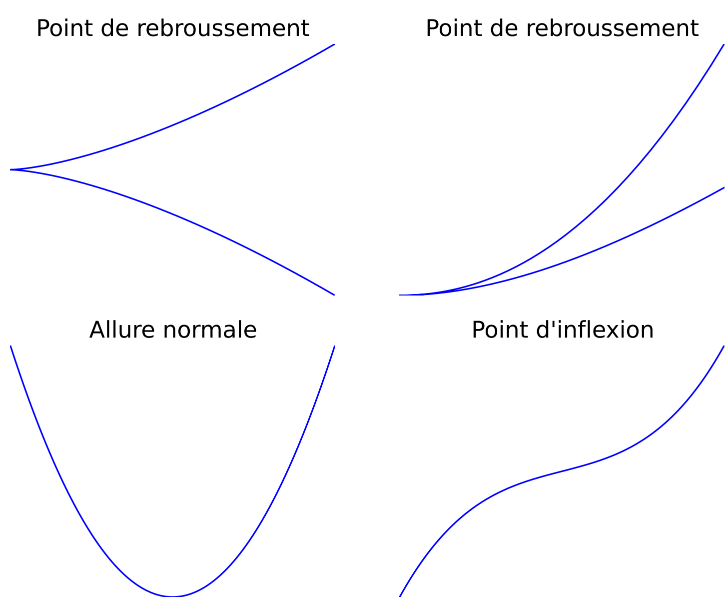
Lorsque $M(t)$ est birégulier $p = 1$ et $q = 2$.

D'après la formule de Taylor-Young :

$$f(t+h) \underset{h\to 0}{=} f(t) + \sum_{k=p}^{q-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{h^q}{q!} f^{(q)}(t) + o(h^q).$$

Proposition 2.14. *La tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $f^{(p)}(t)$.*

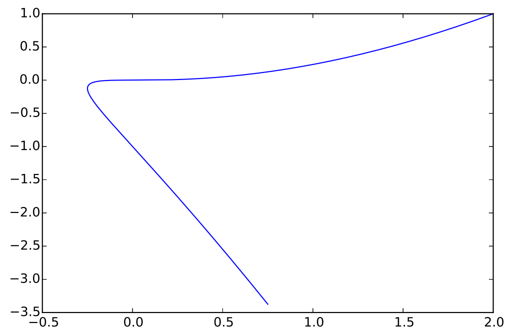
On déduit également de la formule de Taylor-Young, l'allure de la courbe au voisinage de $M(t)$:
- point de rebroussement si p pair
- point d'inflexion lorsque p impair et q impair
- point à allure « normale » lorsque p impair et q pair (courbe convexe au voisinage de $M(t)$).



Exercice 2.24. Soit f la courbe paramétrée $t \longmapsto (t^2, t^3)$.

1. Vérifier que $(1, 1)$ est un point régulier. Donner une équation de la tangente en ce point.
2. Vérifier que $(0, 0)$ est un point singulier. Déterminer la tangente en ce point.

Exercice 2.25. Étudier la nature des points non biréguliers de la courbe paramétrée $t \longmapsto (t + t^2, t^3)$.



Les points de rebroussement ne sont pas des points réguliers, mais un point d'inflexion peut être régulier.

Exercice 2.26. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $t \longmapsto (t^2, u(t))$ soit birégulière. Dans le cas contraire, montrer qu'il existe un unique point de rebroussement.

5) Branches infinies

On garde les notations du paragraphe précédent.

Définition 2.11. Soit α un réel, $-\infty$ ou $+\infty$. On dit que la courbe paramétrée admet une branche infinie en α lorsque $\lim\limits_{t\to\alpha} \|f(t)\| = +\infty$.

La courbe admet une asymptote horizontale ou verticale dans les cas suivants.
- Si $\lim\limits_{t\to\alpha} y(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} x(t) = x_0$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe.
- Si $\lim\limits_{t\to\alpha} y(t) = y_0$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} x(t) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à la courbe.

Sinon, on étudie la limite lorsque t tend vers α de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$. La courbe admet une direction asymptotique dans les cas suivants :
- Si la limite est un réel a alors la droite d'équation $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe. De plus si $\lim\limits_{t\to\alpha} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} y(t) - ax(t) = b$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.
- Si la limite est $\pm\infty$ alors la droite d''équation $x = 0$ est direction asymptotique de la courbe.
- S'il n'y a pas de limite, la courbe n'admet pas de direction asymptotique.

Exercice 2.27. Étudier les branches infinies de la courbe définie dans l'exercice 2.25.

Exercice 2.28. Étudier les branches infinies de $t \longmapsto (t - t^2, t + t^2)$ et de $t \longmapsto \left(t + \frac{1}{t}, \ln t + \frac{1}{t}\right)$.

6) Symétries remarquables d'une courbe paramétrée

Soit $t \longmapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée définie sur I. Dans les cas suivants, on peut réduire l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}^+ \cap I$:
- si $t \mapsto x(t)$ est paire et $t \mapsto y(t)$ est impaire alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
- si $t \mapsto x(t)$ est impaire et $t \mapsto y(t)$ est paire alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- si $t \mapsto x(t)$ est impaire et $t \mapsto y(t)$ est impaire alors la courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- si pour tout $t \in I$, $y(-t) = x(t)$ alors la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

— si pour tout $t \in I$, $y(-t) = -x(t)$ alors la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 2.29. Représenter les courbes suivantes (après recherche de symétries, étude des variations des fonctions coordonnées et des branches infinies) :

1. $t \longmapsto (t^2, \arctan t)$
2. $t \longmapsto (t + t^3, t^3)$
3. $t \longmapsto (t^2 + t, t^2 - t)$

7) Enveloppe d'une famille de droites

Soit $I \subset \mathbb{R}$. On considère une famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$.

Si, pour tout $t \in I$, $A(t)$ est un point de $\mathcal{D}_t$ et $\overrightarrow{u}(t)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$, tout point de $\mathcal{D}_t$ est s'écrit : $A(t) + \lambda\overrightarrow{u}(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que les fonctions $t \longmapsto \overrightarrow{u}(t)$ et $t \longmapsto A(t)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

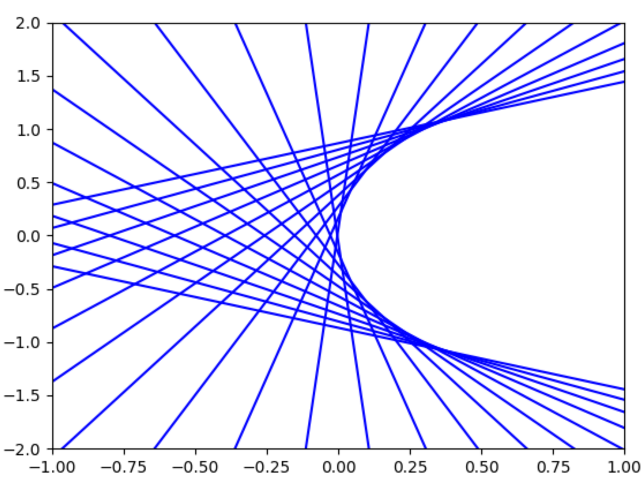
Définition 2.12. On appelle enveloppe de la famille de droites $\mathcal{D}_t$, une courbe paramétrée $f \ : t \longmapsto M(t)$ définie sur I telle que, pour tout $t \in I$, la droite $\mathcal{D}_t$ est la tangente à la courbe en $M(t)$.

Pour tout $t \in I$, $M(t) \in \mathcal{D}_t$. Donc il existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que $M(t) = A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$.
On cherche donc l'enveloppe sous la forme :

$$f \ : t \longmapsto A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$$

où λ est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On détermine $\lambda(t)$ sachant que les vecteurs $f'(t)$ et $\overrightarrow{u}(t)$ sont colinéaires. On calcule donc le déterminant de $(f'(t), \overrightarrow{u}(t))$ et on résout :

$$\det(f'(t), \overrightarrow{u}(t)) = 0.$$



Exercice 2.30. On considère $\mathcal{D}_t$ la droite dirigée par le vecteur $(\cos(t), \sin(t))$ et passant par le point de coordonnées $(\sin(t), 1/\cos(t))$.
Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{0\leqslant t<\pi/2}$.

Exercice 2.31. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites d'équation $x - y\sin t - \cos t = 0$.

III. Propriétés métriques d'une courbe plane

1) Abscisses curvilignes

Soit f une courbe paramétrée $f\ : I \to \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto M(t)$. On suppose que la courbe est régulière, autrement dit que pour tout $t \in I$, $f'(t) \neq 0$.

Définition 2.13. On appelle abscisse curviligne de f toute application $s\ : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall t \in I,\ s'(t) = \|f'(t)\|.$$

Par conséquent, pour tout $t_0 \in I$, la fonction $s\ : t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\, \mathrm{d}u$ est une abscisse curviligne de f et toutes les abscisses curvilignes de f diffèrent d'une constante.

Définition 2.14. Soit $A = M(a)$ et $B = M(b)$ deux points de la courbe telles que $a < b$. La longueur de l'arc reliant A et B est :

$$s(b) - s(a) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Définition 2.15. Si, pour tout $t \in I$, le vecteur $f'(t)$ est de norme 1, on dit que la courbe est paramétrée par une abscisse curviligne.

Lorsqu'une courbe est paramétrée par abscisse curviligne, le paramètre est notée s plutôt que t. Dans ce cas la longueur de l'arc reliant $A = M(a)$ et $B = M(b)$ est $|b - a|$.

Exercice 2.32. Vérifier que la courbe $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ est paramétrée par abscisse curviligne.

Proposition 2.15. *Pour toute courbe paramétrée régulière, il existe une courbe paramétrée par abscisse curviligne de même support.*

Démonstration. Soit f une courbe paramétrée régulière. On note I l'intervalle de définition de f.

Pour toute fonction u bijective d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans I, la courbe $g = f \circ u$ à même support que f.

On cherche une fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ telle que le vecteur $g'(t)$ soit de norme 1 pour tout t de J. On a donc, en notant u^{-1} l'application réciproque de u, pour tout t de I :

$$f(t) = g(u^{-1}(t)).$$

On dérive :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (u^{-1})'(t) g'(u^{-1}(t)).$$

Donc g est un paramétrage par abscisse curviligne si et seulement si $(u^{-1})'(t) = \|f'(t)\|$ pour tout t de I. On choisit donc pour u l'application réciproque d'une primitive de $t \longmapsto \|f'(t)\|$.

□

2) Produit mixte dans un plan orienté (rappel)

Le produit mixte de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan est défini par :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \sin\theta,$$

où θ est l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Le produit mixte de deux vecteurs est nul si l'un des deux est nul.

Proposition 2.16. *La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre si, et seulement si :*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \neq 0.$$

Si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] > 0$, on dit que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est directe.

Proposition 2.17. *En notant (a, b) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et (c, d) celles de $\overrightarrow{v}$ dans une base orthonormée directe, on a :*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

3) Repère de Frenet

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto M(t)$ une courbe régulière.

Définition 2.16. On appelle repère de Frenet en $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M; \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ où $\overrightarrow{T} = \dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ et $\overrightarrow{N}$ le vecteur qui complète $\overrightarrow{T}$ en une base orthonormée directe.
Le vecteur $\overrightarrow{N}$ est un vecteur normal unitaire à la courbe en $M(t)$.

Autrement dit $\overrightarrow{N}$ est le vecteur de norme 1 tel que :

$$\langle \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}] = 1.$$

Exercice 2.33. Déterminer le repère de Frenet de la courbe $t \longmapsto (t^2, t)$ au point $A = (1, 1)$.

Proposition 2.18 (Formules de Frenet)**.** *Il existe $\gamma(s) \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma(s)\overrightarrow{N} \quad \textit{et} \quad \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma(s)\overrightarrow{T}$$

Définition 2.17. Si la courbe $f\ : s \mapsto M(s)$ est paramétrée par abscisse curviligne, le réel $\gamma(s)$ défini dans la proposition 2.18 est appelé courbure de f au point $M(s)$.

Proposition 2.19. *Si la courbe $f\ : s \mapsto M(s)$ est paramétrée par abscisse curviligne, le point $M(s)$ est birégulier si et seulement si $\gamma(s) \neq 0$.*

Définition 2.18. En un point $M = M(s)$ birégulier :
- — Le rayon de courbure algébrique est le réel $R(s) = \dfrac{1}{\gamma(s)}$.
- — Le centre de courbure est le point Ω tel que $\overrightarrow{M\Omega} = R(s)\overrightarrow{N}$.
- — Le cercle de courbure est le cercle de centre Ω et de rayon $|R(s)|$.

Si la courbe paramétrée est régulière et ne contient que des points biréguliers, la fonction $s \mapsto R(s)$ est de signe constant.

Exercice 2.34. Soit f la courbe paramétrée $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$.
1. Déterminer le repère de Frenet en tout point $M(t)$ de f.
2. Calculer la courbure, le rayon de courbure de f en $M(t)$.
3. Déterminer le centre de courbure de f en $M(t)$.

4) Théorème de relèvement

On garde les notations du paragraphe précédent. Comme $\overrightarrow{T}$ est de norme 1, pour tout t, il existe $\alpha(t)$ tel que :

$$\overrightarrow{T}(t) = \cos(\alpha(t))\overrightarrow{\imath} + \sin(\alpha(t))\overrightarrow{\jmath}.$$

On admet le théorème suivant :

Proposition 2.20. *(Théorème de relèvement) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, il existe une fonction $t \longmapsto \alpha(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'égalité ci-dessus.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto M(s)$ une courbe régulière, orientée, classe $\mathcal{C}^2$, paramétrée par abscsisse curviligne. Notons $s \mapsto \alpha(s)$ la fonction définie dans la proposition 2.20.

Proposition 2.21. *La fonction α est dérivable et sa dérivée est la fonction γ :*

$$\frac{d\alpha}{ds} = \gamma.$$

Exercice 2.35. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(-1, 1)$ et de rayon 2. Donner un paramétrage par abscisse curviligne de ce cercle. En déduire la courbure en tout point de ce cercle.

5) Développée d'une courbe régulière

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto M(t)$ une courbe régulière, c'est-à-dire que pour tout $t \in I$, $f'(t) \neq 0$.

Définition 2.19. On appelle développée de f l'ensemble des centres de courbure de f.

Proposition 2.22. *L'enveloppe des normales à f est la développée de f.*

Démonstration. Soit f une courbe régulière, orientée, paramétrée par abscisse curviligne.
On note $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ la base de Frenet en $M = f(s)$. On cherche l'enveloppe des normales sous la forme :

$$g(s) = f(s) + \lambda(s)\overrightarrow{N}.$$

On dérive. D'après la deuxième formule de Frenet et comme $f'(s) = \overrightarrow{T}$:

$$\begin{aligned} g'(s) &= f'(s) + \lambda(s)(-\gamma(s)\overrightarrow{T}) + \lambda'(s)\overrightarrow{N} \\ &= (1 - \lambda(s)\gamma(s))\overrightarrow{T} + \lambda'(s)\overrightarrow{N} \end{aligned}$$

Or $g'(s)$ est colinéaire à $\overrightarrow{N}$ (par définition de l'enveloppe). Donc $1 - \lambda(s)\gamma(s) = 0$, d'où $\lambda(s) = R(s)$.
On pose $P = g(s)$, on a :

$$\overrightarrow{PM} = R(s)\overrightarrow{N}.$$

Donc P est le centre de courbure de f au point $M = f(s)$.

□

Exercice 2.36. Vérifier que la développée de la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^x$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= t - 1 - \mathrm{e}^{2t} \\ y &= 2\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Montrer que la développée admet un unique point singulier. Préciser ce point et la tangente en ce point.

IV. Formulaire développements limités usuels

$$\begin{aligned}
\exp(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \\
\exp(-x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) \\
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n) \\
-\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + o(x^n) \\
\arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2}) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

V. Exercices

Exercice 2.37 (Révision). Former le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre indiqué de la fonction définie par la formule suivante :

1. $f(x) = \cos^2(x)$ à l'ordre 4.
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 3.
3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ à l'ordre 3.
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{1+x}$ à l'ordre 2.

Exercice 2.38. Déterminer D l'ensemble de définition et étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée de la fonction : $f\ : x \longmapsto (\sqrt{x}, |x-1|)$. Représenter $f(D)$.

Exercice 2.39. Soit $f\ : t \mapsto \begin{cases} \left(\dfrac{\sin t}{t}, \dfrac{1-\cos t}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (1,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.40. Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $u_1 = \dfrac{1}{\|f\|^2}$.
2. $u_2 = \dfrac{1}{\|f\|}$
3. $u_3 = \dfrac{1}{\|f\|} \times f$.

Exercice 2.41. Calculer la dérivée n-ième $f\ : t \longmapsto u(t) \times (1,t)$ où u est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ à valeurs réelles.

Exercice 2.42. Soit $f\ : t \longmapsto (2t - t^2, \ln t)$.

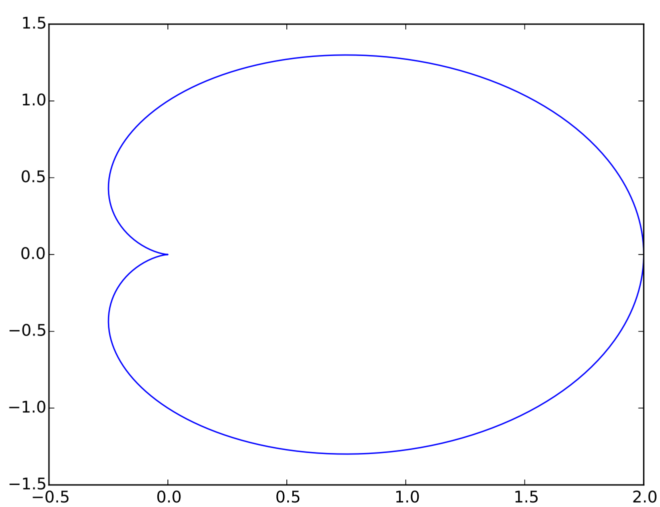
1. Donner les variations des fonctions coordonnées de f.
2. Étudier les branches infinies de f.
3. Est-ce que f admet des points singuliers ?
4. Vérifier que f admet un unique point non birégulier. Préciser l'allure de la courbe au voisinage de ce point.
5. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 2.43. Étudier les points singuliers des courbes suivantes (nature, direction de la tangente) et faire une figure :

1. $f(t) = (t^4 + 4t, t^2 + 2t)$
2. $f(t) = (\ln t - t, t^2 - 2t)$
3. $f(t) = (t^4 - 2t^2, 2t^3 - 3t^2)$

Exercice 2.44 (Cardioïde 1)**.** Soit $f\ : t \mapsto \left(\cos t + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}, \sin t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)$.

1. Montrer que la courbe est bornée.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un axe de symétrie.
4. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$ et étudier les variations des fonctions coordonnées sur cet intervalle
5. Étudier les variations des fonctions coordonnées de f.
6. Montrer qu'il existe un unique point singulier.
7. Calculer la longueur de la courbe.



Exercice 2.45 (Cardioïde 2)**.** On considère la courbe paramétrée par la fonction f définie dans l'exercice précédent. On note $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ le repère Frenet au point de paramètre t de la courbe.

On pourra utiliser les formules :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \quad \text{et} \quad \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

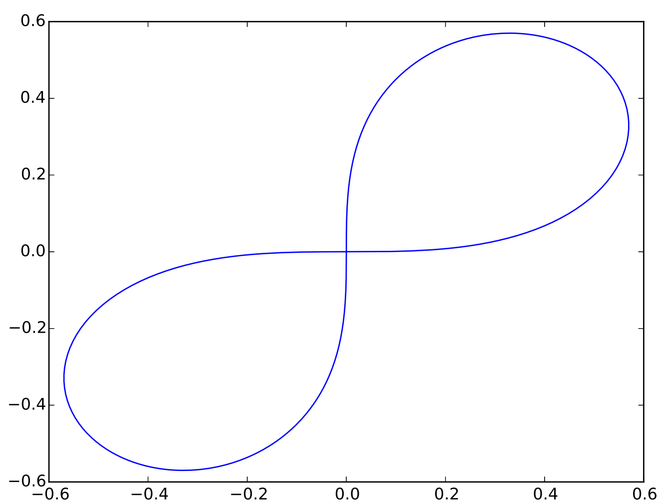
1. Montrer que $\overrightarrow{T}$ a pour coordonnées $(\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$ avec $\alpha(t) = \frac{3t}{2} + \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer la développée de f.
3. En déduire le rayon de courbure au point de la courbe de paramètre $t \in [0, \pi]$.

Exercice 2.46 (Lemniscate de Bernoulli)**.** Soit $f\ : t \longmapsto \left(x = \dfrac{t}{1+t^4}, y = \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$.

1. Calculer $x(1/t)$. En déduire que la courbe f admet un axe de symétrie. Montrer que f admet également un centre de symétrie.
2. Étudier les variations des fonctions coordonnées de f sur $[0, 1]$.
3. Déterminer les tangentes en O.
4. Quels sont les points de f les plus éloignés du point O.
5. Soit $\Omega = (\alpha, \beta)$ un point du plan et $M = f(t)$ un point de la courbe f distinct du point O. Montrer que le point M appartient au cercle de centre Ω passant par O si et seulement si :

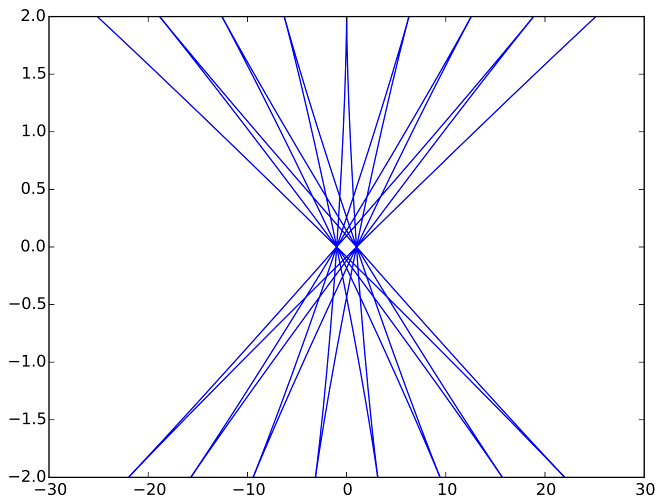
$$2\beta t^2 - t + 2\alpha = 0.$$

En déduire le lieu du centre Ω d'un cercle passant par O et tangent à f en un autre point que O.



Exercice 2.47. Soit $f\ : t \mapsto (t\cos t - \sin t, 2\cos t)$.

1. Étudier la parité des fonctions coordonnées. Quelle symétrie en déduit-on ?
2. Déterminer les points stationnaires de f. Étudier leur nature. Montrer qu'en chaque point stationnaire, la tangente à f passe par $(0, 0)$.



Exercice 2.48. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$ paramétrée par $f\ : t \mapsto M(t) = \left(\frac{1}{t}, t\right)$. Déterminer l'enveloppe des droites passant par les points $M(t)$ et $M(2t)$ de f pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2.49. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$ paramétrée par $f\ : t \mapsto M(t) = \left(\frac{1}{t}, t\right)$. La tangente en $M(t)$ à f, que l'on nomme $\mathcal{T}_t$, coupe l'axe des ordonnées en un point $P(t)$. On note $\mathcal{D}_t$ la perpendiculaire en P à $\mathcal{T}_t$.

1. Donner une représentation paramétrique des droites $\mathcal{D}_t$.
2. Déterminer l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t$.

Exercice 2.50. Montrer que l'enveloppe de la famille de droites :

$$(D_t) : \qquad (1-t^2)x + 2ty = 1 + t^2$$

est le cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 2.51. Déterminer et représenter l'enveloppe de la famille de droites :

$$(D_t) : \qquad t^3(x-1) + 3tx - 2y = 0$$

Exercice 2.52. Soit $f\ : t \longmapsto (t^2, t)$. On note $\mathcal{P}$ la courbe de f.

1. Tracer la courbe P.
2. Donner une équation de la normale à $\mathcal{P}$ au point $M = f(t)$.
3. Soit t et u deux réels distincts. On note $M_t = f(t)$, $M_u = f(u)$, N_t la normale à $\mathcal{P}$ en M_t, N_u la normale à $\mathcal{P}$ en M_u. On pose $p = tu$ et $s = t + u$.
   (a) Montrer que les normales N_t et N_u se coupent en un point de la droite d'équation $x = 1$ si et seulement si $p = s^2 - \frac{1}{2}$.
   (b) Vérifier que la droite $(M_t M_u)$ admet pour équation :
   $$x - sy + p = 0$$
   (c) En déduire l'enveloppe des cordes $(M_t M_u)$ de la courbe $\mathcal{P}$ telles que les normales à $\mathcal{P}$ en M_t et M_u se coupent sur la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 2.53. On dit que deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux lorsqu'ils se coupent et en chaque point d'intersection les tangentes à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$ sont orthogonales.

On considère les points $A = (0, -1)$ et $B = (0, 1)$. Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles distincts se coupant en A et B. On note Ω_1 le centre de $\mathcal{C}_1$ et Ω_2 le centre de $\mathcal{C}_2$ et

1. Montrer que les Ω_1 et Ω_2 appartiennent à l'axe des abscisses. On note a et b leur abscisse respective et on suppose que $a > b$.
2. Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $ab = -1$.
3. On suppose que $ab = -1$ et que $a \neq 1$. Soit $\mathcal{T}_a$ une tangente commune aux deux cercles au-dessus des deux cercles. On note I son intersection avec l'axe des abscisses.
   On note M_1 l'intersection de $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{C}_1$
   (a) Montrer que $x_I = \frac{1+a}{1-a}$.
   (b) On note (x, y) les coordonnées du point M_1.
   Justifier que $\langle \overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{\Omega_1 M_1} \rangle = 0$ et $(x-a)^2 + y^2 = 1 + a^2$. En déduire que $x = 1$ et $y = \sqrt{2a}$.
   (c) En déduire que l'enveloppe des tangentes $\mathcal{T}_a$ admet un paramétrage de la forme :

$$\begin{cases} x &= 1 + \sqrt{2a}\lambda(a) \\ y &= \sqrt{2a} + (a-1)\lambda(a) \end{cases}$$

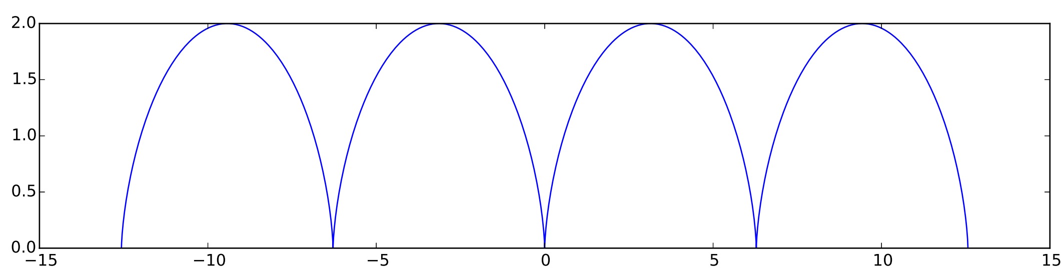
   Vérifier que $\lambda(a) = -\dfrac{\sqrt{2a}}{1+a}$ puis que l'on a le paramétrage :

$$\begin{cases} x &= \frac{1-a}{1+a} \\ y &= \frac{2\sqrt{2a}}{1+a} \end{cases} \qquad (a > 0)$$

   Tracer la courbe.

Exercice 2.54 (La cycloïde)**.** Soit $f\ : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

1. Vérifier que f est invariante par translation de vecteur $(2\pi, 0)$.
2. Étudier les variations des fonctions coordonnées sur $[0, \pi]$.
3. Calculer la longueur ℓ d'une arche de f.
4. Déterminer la développée de f.



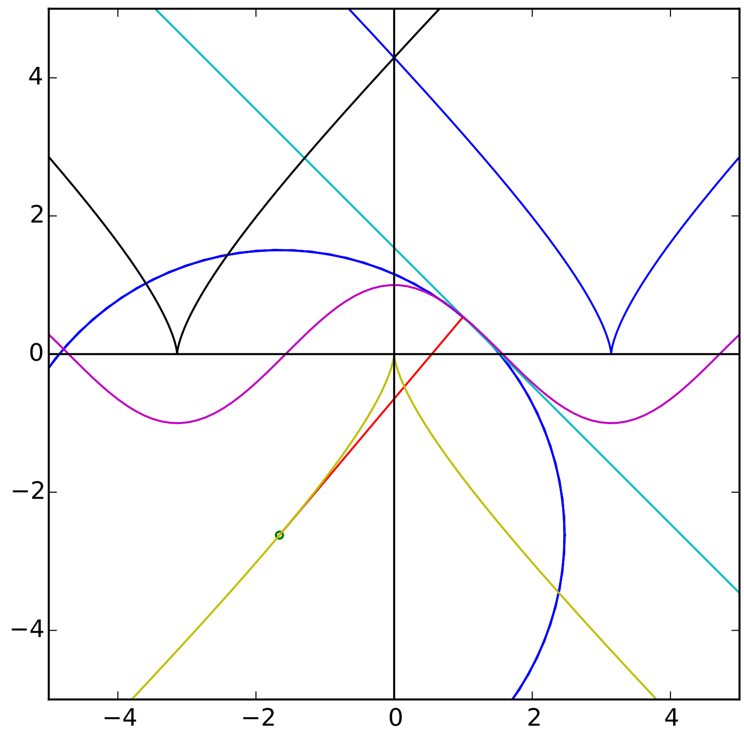
Exercice 2.55 (La cycloïde 2)**.** Soit $f\ : t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

1. Déterminer la développée de f.
2. Déterminer le centre de courbure et le rayon de courbure aux sommets.
3. Montrer que la développée de f se déduit de f par translation d'un vecteur que l'on précisera.

Exercice 2.56. Soit $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction $t \longmapsto \cos t$.

1. Déterminer le repère de Frenet en tout point de la courbe.

2. Déterminer la développée de $\mathcal{C}$. En déduire la courbure en tout point de la courbe et le centre de courbure aux points $A = (0, 1)$ et $B = (\pi, -1)$.
3. Déterminer les points singuliers et les asymptotes de la développée.



Exercice 2.57. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle ouvert I. On considère la courbe paramétrée $t \longmapsto (t, u(t))$.

1. Montrer que tous les points de la courbes sont réguliers.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M d'abscisse x de la courbe soit birégulier.
3. Déterminer, en fonction de $u'(x)$ et $u''(x)$, le rayon de courbure au point d'abscisse x de la courbe.

Exercice 2.58. Soit $f\ : t \longmapsto (2\cos t, \sin t)$.

1. Montrer que f est birégulière et montrer que les axes de coordonnées sont des axes de symétrie.
2. Déterminer g, la développée de f.
3. Quels sont les points singuliers de g ?
4. Tracer la courbe et sa développée.
5. Déterminer la courbure en tout point de f.

Chapitre 3

Intégrales généralisées

I. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

1) Primitives d'une fonction continue (rappels)

Si f est continue sur $[a,b]$ (avec $a<b$) alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ converge et sa limite est $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $a\in I$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $x\in I$ et l'application de I dans $\mathbb{R}$, $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

De ce fait, toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Exercice 3.1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\qquad \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\qquad \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Fonctions	Primitives
$x\in\mathbb{R}^{+*}\longmapsto x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x\in\mathbb{R}^{+*}\longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}^{+*}\longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$	$x\in\mathbb{R}^{+*}\longmapsto \dfrac{-1}{\alpha-1}\times\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}\longmapsto x^n, n\in\mathbb{N}$	$x\in\mathbb{R}\longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}^*\longmapsto \dfrac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$	$x\in\mathbb{R}^*\longmapsto \dfrac{-1}{n-1}\times\dfrac{1}{x^{n-1}}+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}^*\longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x\in\mathbb{R}^*\longmapsto \ln(\|x\|)+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}\longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$	$x\in\mathbb{R}^*\longmapsto \arctan(x)+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}^{+*}\longmapsto \ln(x)$	$x\in\mathbb{R}^{+*}\longmapsto x\ln(x)-x+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}\longmapsto \sin(x)$	$x\in\mathbb{R}\longmapsto -\cos(x)+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}\longmapsto \cos(x)$	$x\in\mathbb{R}\longmapsto \sin(x)+K, K\in\mathbb{R}$

Fonctions $((a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R})$	Primitives
$x\in\mathbb{R}\longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$	$x\in\mathbb{R}\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a}+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}\longmapsto (ax+b)^n, n\in\mathbb{N}$	$x\in\mathbb{R}\longmapsto \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}\backslash\{-b/a\}\longmapsto \dfrac{1}{(ax+b)^n}, n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$	$x\in\mathbb{R}\backslash\{-b/a\}\longmapsto \dfrac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}\backslash\{-b/a\}\longmapsto \dfrac{1}{ax+b}, n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$	$x\in\mathbb{R}\backslash\{-b/a\}\longmapsto \dfrac{1}{a}\ln(\lvert ax+b\rvert)+K, K\in\mathbb{R}$
$x\in\mathbb{R}\longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$	$x\in\mathbb{R}\longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+K, K\in\mathbb{R}$

Fonctions (u une fonction dérivable)	Primitives
$u'\times u^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+K, K\in\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u^{\alpha}}, \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$	$\dfrac{-1}{\alpha-1}\times\dfrac{1}{u^{\alpha-1}}+K, K\in\mathbb{R}$
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u+K, K\in\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+K, K\in\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u)+K, K\in\mathbb{R}$

2) Définition

Définition 3.1. Soit f est application continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Si la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on écrit :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

De même :

(i) si f est continue sur $]-\infty,a]$, si la limite existe et est finie : $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$

(ii) si f est continue sur $[a,b[$, si la limite existe et est finie : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

(iii) si f est continue sur $]a,b]$, si la limite existe et est finie : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$

— Étudier la nature d'une intégrale généralisée, c'est montrer qu'elle est convergente ou qu'elle est divergente. On commence par étudier (rapidement) la continuité de la fonction entre les bornes de l'intégrale.

— Pour montrer l'existence d'une intégrale, on commence par déterminer si elle est généralisée. Dans ce cas, on montre qu'elle converge. Sinon il suffit de justifier que la fonction sous l'intégrale est continue sur le segment défini par les bornes de l'intégrale.

Exercice 3.2. Expliquer pourquoi les intégrales suivantes sont généralisées, puis étudier leur nature :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

En cas de convergence, donner la valeur.

Proposition 3.1. *Soit f une application de $I = [a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continue. S'il existe $c \in I$ tel que l'intégrale $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors pour tout $d \in I$ l'intégrale $\int_d^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.*

Cette proposition s'adapte naturellement aux fonctions continues sur $]-\infty, a]$, $[a, b[$ ou $]a, b]$.

Définition 3.2. Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette définition s'adapte naturellement aux fonctions continues sur les intervalles ouverts $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ ou $]a, b[$.

Par exemple, dans le cas d'une fonction f continue sur $]0, +\infty[$, si les intégrales $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 3.3. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ convergent et donner leur valeur.

Comme pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, on écrit, pour une intégrale généralisée convergente $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Ainsi la relation de Chasles s'applique aux intégrales généralisées :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t,$$

dès lors que les trois intégrales sont convergentes.

Proposition 3.2 (propriété de linéarité)**.** *Soit f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$. Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes alors $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,dt$ est convergente et :*

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

La proposition reste vraie si on remplace a par $-\infty$ ou b par $+\infty$.

Proposition 3.3. *Pour toute fonction continue sur un intervalle $I =]a, b]$ (avec $a < b$), si $f(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in I$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$.*

Cette proposition est connue lorsque l'intervalle I est un segment (voir cours de PTSI), elle se généralise lorsque $I = [a, b[$, $I =]a, b[$, $I = [a, +\infty[$, etc.

Démonstration. Soit $x \in]a, b]$. Montrons que $f(x) = 0$. On choisit $y \in]a, x[$. On a :

$$0 \leqslant \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que $\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ puis que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [y, x]$ (car f est continue et positive sur le segment $[x, y]$). En particulier $f(x) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

3) Intégrales de référence

Proposition 3.4. *Soit α un réel.*

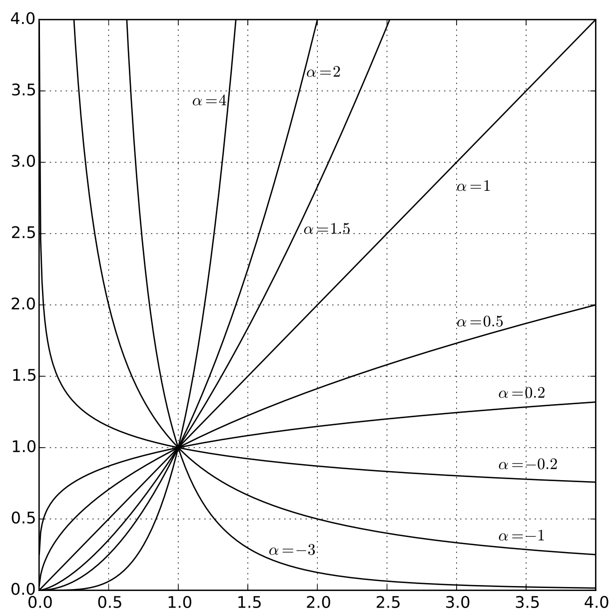
(i) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ *converge si $\alpha > 1$, elle diverge si $\alpha \leqslant 1$.*

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ *converge si $\alpha < 1$, elle diverge si $\alpha \geqslant 1$.*

(iii) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt$ *converge si $\alpha > 0$, elle diverge si $\alpha \leqslant 0$.*

(iv) $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *est convergente.*

Démonstration. On cherche une primitive et on montre qu'elle admet une limite en $+\infty$ ou en 0 selon les cas. $\square$



Exercice 3.4. Étudier, sans calcul, la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}+\frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^{1} \sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'objectif de ce qui suit est d'établir des critères permettant de donner la nature d'une intégrale généralisée sans avoir à chercher une primitive de la fonction. L'idée est de comparer la fonction sous l'intégrale à des fonctions de référence (fonction puissance, fonction exponentielle).

On utilise beaucoup les équivalents, les notations petit « o » et grand « O », les croissances comparées. Voici quelques rappels importants.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a (et on peut remplacer a par $+\infty$ ou $-\infty$). Cela sera le cas dans la plupart des exercices puisque g sera une fonction de référence (très souvent puissance ou exponentielle).

(i) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ signifie que $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$,

(ii) $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)$ signifie que $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$,

(iii) $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)$ signifie que le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de a,

(iv) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ équivalent à $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x)+o(g(x))$.

(v) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)$. La réciproque est fausse.

(v) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)$. La réciproque est fausse.

Exercice 3.5. Monter que :

1) $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ **2)** $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$ **3)** $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$ **4)** $\ln(x) \underset{x\to 0}{=} o(1/x)$

5) $\cos(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(1)$ **6)** $\mathrm{e}^x-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ **7)** $\ln(x^2+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln x$ **8)** $\ln(x^2+1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

4) Critère de convergence

Proposition 3.5. *Soit f une fonction continue positive sur $I=[a,+\infty[$. La fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est majorée si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge*

Démonstration. On note F la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette fonction est une primitive de f. Elle est donc croissante puisque $F'=f\geqslant 0$.

Donc la fonction F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée. Cela montre la proposition puisque, par définition, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque F admet une limite finie. □

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Soit f et g deux fonctions continues positives sur un intervalle $I=[a,+\infty[$.*

(i) Si, pour tout $x\in I$, $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

(ii) Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

(iii) Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

La contraposée de la première assertion est parfois utile : si $0 \leqslant f \leqslant g$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
La proposition s'adapte naturellement aux fonctions continues sur $]-\infty, a]$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ (avec $a < b$).

Exercice 3.6 (Règle $t^\alpha f(t)$)**.** Calculer la limite de $t^2\mathrm{e}^{-t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.7. Montrer que $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$ pour tout t réel. En déduire que $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout t réel et retrouver le résultat de l'exercice précédent.

5) Théorème de changement de variable

Proposition 3.7. *Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ $(a < b)$ et $\varphi\ :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature. Si elles convergent :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))|\varphi'(u)|du,$$

Autrement dit, en cas de convergence :
- si φ est strictement croissante : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$,
- si φ est strictement décroissante : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$.

La proposition reste vraie lorsque l'on remplace a ou α par $-\infty$ et b pu β par $+\infty$.
Grâce aux changements de variable $u = t - a$ et $u = b - t$, on déduit de la proposition que les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature pour tous réels α, a et b (avec $a < b$).

Exercice 3.8. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Exercice 3.9. Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 3.10. Montrer à l'aide du changement de variable $u = 1/t$ que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

6) Intégration par parties

Proposition 3.8. *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$. Si la fonction produit fg a une limite* *finie en a alors les intégrales* $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$ *sont de même nature. Si elles convergent :*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt,$$

où $\Big[fg\Big]_a^b = f(b)g(b) - \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$.

La proposition s'adapte naturellement aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$ ou $]a,b[$ et en remplaçant a par $-\infty$ ou b par $+\infty$.

Exercice 3.11. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Justifier la convergence et calculer.

II. Intégrale absolument convergente

1) Définition

Définition 3.3. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 3.12. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente ? Est-elle convergente ?

Proposition 3.9. *Soit f une fonction (réelle ou complexe) continue sur $]a,b[$ (avec $(a<b)$).*
Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ *converge alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *converge.*

La proposition ci-dessus reste vraie si on remplace a par $-\infty$ ou b par $+\infty$ et on parle encore d'intégrale absolument convergente.

Exercice 3.13. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^\alpha}$ est absolument convergente pour tout $\alpha > 1$.

Proposition 3.10. *Si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *converge absolument alors :*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b \big|f(t)\big|\,dt.$$

2) Fonctions intégrables

Définition 3.4.

1. Une fonction f continue sur $]a,b]$ est intégrable en a (ou a^+) lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. On dit aussi que la fonction f est intégrable sur $]a,b]$.
2. Une fonction continue sur $[a,b[$ est intégrable en b (ou b^-) lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge

absolument. On dit aussi que la fonction f est intégrable sur $[a, b[$.

Exercice 3.14. Pour quelles valeurs de α :

1. la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est-elle intégrable en 0^+ ?
2. la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{|t-a|^\alpha}$ est-elle intégrable en a^+ ? En a^- ?

Définition 3.5. Une fonction f continue sur $[a, +\infty[$ (resp. $]a, +\infty[$) est intégrable sur $[a, +\infty[$ (resp. $]a, +\infty[$) lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

On définit de la même façon l'intégrabilité sur $]-\infty, b]$ ou sur $]-\infty, b[$.

Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I, on note $\displaystyle\int_I f$ l'intégrale de f sur I, c'est-à-dire :

— $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ si I est un intervalle d'extrémités a et b avec $a < b$,

— $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ si $I = [a, +\infty[$ ou $I =]a, +\infty[$,

— $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ si $I = [-\infty, a[$ ou $I =]-\infty, a]$.

Exercice 3.15. Pour quelles valeurs de α :

1. la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est-elle intégrable en $[1, +\infty[$? Sur $]0, +\infty[$?
2. la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ est-elle intégrable en $\mathbb{R}^+$? Sur $\mathbb{R}^-$? Sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.16. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ est définie sur $]a, b[$, continue sur $]a, b[$, intégrable sur $]a, b[$.

Proposition 3.11. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

(i) Si f est paire et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

(ii) Si f est impaire intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

Exercice 3.17. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \times \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Calculer cette intégrale.

Proposition 3.12 (Théorème de comparaison)**.** *Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$.*

(i) Si $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ et g est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

(ii) Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(g(t))$ et g est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

(iii) Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Par contraposée de la proposition, si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(g(t))$ et f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3.18. Montrer que les fonctions $f\ : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{1+x^2}$ et $g\ : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$:

La proposition s'adapte naturellement aux fonctions définies sur $]-\infty, a]$. Considérons, par exemple, f et g deux fonctions continues sur $]-\infty, a]$. Si $f(t) \underset{t\to-\infty}{=} O(g(t))$ et g est intégrable sur $]-\infty, a]$ alors f est intégrable sur $]-\infty, a]$.
La proposition s'adapte également aux fonctions définies sur $[a, b[$ ou sur $]a, b]$

Exercice 3.19. Étudier l'intégrabilité de $t \longmapsto \sin(1/t)$ sur $]0, 1]$.

Il faut retenir que :

— f continue sur un segment implique f intégrable sur ce segment,

— $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente et f à valeurs réelles de signe constant implique f intégrable sur $]a, b[$,

— f continue sur un intervalle I n'implique pas f intégrable sur I (penser à $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$),

— $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente n'implique pas f intégrable sur $[a, b[$ (un contre-exemple classique : $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais ni la convergence de l'intégrale, ni la non-intégrabilité de la fonction ne sont faciles à établir).

3) Espace vectoriel des fonctions intégrables

Soit I un intervalle. On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues et intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

Si I est un segment alors toute fonction continue sur I est intégrable sur I. Dans ce cas $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^1(I, K)$. C'est faux lorsque I n'est pas un segment !

Proposition 3.13. *L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et φ l'application de $\mathcal{L}^1(I, K)$ dans $\mathbb{K}$:*

$$f \longmapsto \int_I f$$

est linéaire, positive et croissante.

Autrement dit :

— pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{L}$ et tout λ de $\mathbb{K}$: $\displaystyle\int_I (f+\lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$.

— pour toute fonction f à valeurs réelles positives, continue, intégrable sur I, on a $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$.

— pour toutes fonctions f et g de continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ et intégrables sur I telles que $f \leqslant g$, on a :

$$\int_I f \leqslant \int_I g.$$

III. Exercices

Exercice 3.20. Étudier la convergence de :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$. **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.21. Étudier la convergence de :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan t}\,\mathrm{d}t$. **2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t\,\mathrm{d}t$. **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t\,\mathrm{d}t$. **4)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.22. Étudier la convergence de :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$. **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$. **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}t}\,\mathrm{d}t$. **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.23. Étudier en fonction de $a \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^a}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^a)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3.24. Étudier en fonction de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{at}}{t^b}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.25. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}t$ où $a \in \mathbb{R}$.
En cas de convergence, calculer l'intégrale.

Exercice 3.26. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ est bien définie et calculer sa valeur.

Exercice 3.27. Étudier l'intégrabilité de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{|t^3-t|}}$ en 0^+ et 0^-, en 1^+ et 1^-, en -1^+ et -1^-, sur $]1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1[$.

Exercice 3.28. Étudier l'intégrabilité de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\sin t}}$ en 0 et π.

Exercice 3.29. Étudier l'intégrabilité de $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ en 0 et sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3.30. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $t \longmapsto 1/P(t)$ soit intégrable sur son ensemble de définition.

Exercice 3.31. Soit P un polynôme admettant une racine réelle α. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $t \longmapsto 1/\sqrt{|P(t)|}$ soit intégrable en α.
On pourra commencer par étudier le cas où $\alpha = 0$.

Exercice 3.32. Soit$(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $f\ : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$. On note $I = [\mathrm{e},+\infty[$.

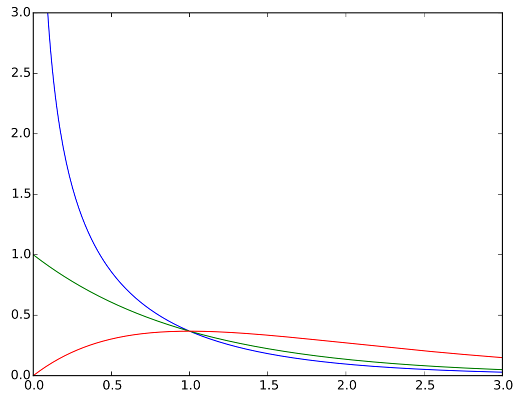
1. On suppose que $\alpha > 1$.
   (a) Calculer la limite de $t^{(1+\alpha)/2}f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. En comparant les fonctions f et $t \longmapsto 1/t$, montrer que $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge si $\alpha < 1$
3. On suppose que $\beta \neq 1$ et que $\alpha = 1$.
   (a) Donner une primitive de f sur I.
   (b) Pour quelles valeurs de β l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
4. Étudier le cas $\alpha = \beta = 1$

Exercice 3.33.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3. En déduire, à l'aide d'un changement de variable, la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.34. Soit $\Gamma\ : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.



La figure ci-dessus représente la fonction $t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ pour $x = 1/2$, $x = 1$ et $x = 2$.

1. Montrer que $t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en 0 pour tout $x > 0$. En déduire que $\Gamma(x)$ est défini pour tout $x > 0$ et calculer $\Gamma(1)$.
2. Donner une relation entre $\Gamma(1/2)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
4. En admettant que la fonction Γ est continue en 1, déterminer la limite et un équivalent de Γ au voisinage de 0^+ (utiliser la question 3).
5. Donner une expression de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (utiliser la question 3).

Exercice 3.35. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I et J puis montrer que $I = J$.
2. Exprimer $I + J$ à l'aide d'une intégrale. Calculer cette intégrale et en déduire la valeur de I.
3. Montrer que $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 3.36. On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de I et J.
2. Montrer que $I = J$ à l'aide du changement de variable $y = 1/x$.
3. Montrer que :
$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x.$$
En déduire la valeur de I.

Exercice 3.37. On considère les fonctions $f\ : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ et $g\ : t \longmapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$.

1. Montrer que f est intégrable en 0.
2. Montrer que g est intégrable sur l'intervalle $[\pi, +\infty[$. Est-que g est intégrable en 0 ?

3. Intégrer par parties $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
4. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi}\,\mathrm{d}t.$

   (b) Montrer que $\displaystyle I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(k+1)\pi}$$

   (d) En déduire la limite de (I_n).

   On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$

5. Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3.38. Soit $\displaystyle I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

   En déduire I_2 et I_3 puis une expression de I_n en fonction de n (à justifier par récurrence).

Chapitre 4

Les séries

I. Les séries numériques

1) Rappels

a) Définitions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

Définition 4.1. On dit que la série de terme général u_n (en abrégé $\sum u_n$) est convergente si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On écrit alors : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
Si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie, on dit que la série $\sum u_n$ diverge.

Dans le cas des suites géométriques, on peut calculer les sommes partielles. Considérons q un complexe différent de 1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Donc :

— si $|q| < 1$ alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

— si $|q| \geqslant 1$ alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$ est divergente.

Exercice 4.1. Donner la nature de la série de terme général $\exp(-\alpha n)$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.1. *Si la série de terme général u_n converge alors la suite (u_n) converge vers 0.*

La réciproque de cette proposition est fausse :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty.$$

La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 mais la série de terme général $1/n$ diverge.

Définition 4.2. On dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement lorsque la suite (u_n) ne tend pas vers 0.

Exercice 4.2. Quelle est la nature de la série de terme général $\exp(-1/n)$?

Définition 4.3. On appelle reste de la série **convergente** de terme général u_n la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.3. Déterminer la suite des restes de la série de terme général q^n où $q \in]-1,1[$.

Proposition 4.2. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes les deux convergentes alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum(u_n + \lambda v_n)$ est convergente et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

b) Cas des séries téléscopiques

Soit (u_n) une suite. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge si seulement si la suite (u_n) converge.

Exercice 4.4. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que la série de terme général u_n converge et déterminer la suite des restes de cette série. pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Indication : faire une décomposition en éléments simples.

c) Comparaison série-intégrale et séries de Riemann

Proposition 4.3. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$, positive, continue et décroissante alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.*

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sont décroissante sur $[1, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.4. *La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leqslant 1$.*

2) Compléments sur les séries de terme général positif

a) Critères de convergence

Lorsque l'on étudie une série, on commence par montrer qu'elle est convergente. On peut revenir à la définition (montrer que la suite des sommes partielles est convergente) mais ce n'est pas la méthode la plus souvent utilisée.

On va plutôt chercher à comparer le terme général de la série à une suite de référence convenable pour essayer d'appliquer l'un des critères de convergence.

Attention, cette méthode ne permet bien sûr pas de calculer la somme de la série ! On obtiendra tout au plus un encadrement.

On rappelle les définitions et les notations suivantes.

— La suite (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, lorsqu'il existe une suite (ε_n) convergeant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$. Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, cela est équivaut à $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On écrit que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} w_n + o(v_n)$ lorsque $u_n - w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

— Les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$. Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, cela est équivaut à $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

— La suite (u_n) est un grand « O » de (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ lorsque la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
On écrit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} w_n + O(v_n)$ lorsque $u_n - w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Il faut retenir que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n) \iff v_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n + o(v_n)$$

On remarque que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n).$$

L'implication réciproque est fausse.

Exercice 4.5. Quelles limites doit-on calculer pour montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$?

> **Proposition 4.5.** *Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.*
> *(i) Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.*
> *(ii) Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.*

La deuxième assertion est la contraposée de la première

Exercice 4.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \geqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. En déduire que la série de terme général $1/n$ est divergente.

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ alors il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant K v_n$$

Donc la convergence de la série $\sum v_n$ implique la convergence de la série $\sum K u_n$ de la série $\sum u_n$. D'où la proposition suivante.

> **Proposition 4.6.** *Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives.*
> *(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.*
> *(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

En pratique, on cherche un équivalent de u_n ou bien un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O\left(1/n^{\alpha}\right)$, c'est-à-dire, tel que la suite $(n^{\alpha} u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Exercice 4.7. Étudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n + \ln n}$, $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$, $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-\sqrt{n})$.

b) Règle de d'Alembert

Proposition 4.7 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit (u_n) une suite strictement positive. Si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite ℓ finie ou infinie alors :*
- *si $\ell > 1$ alors la série de terme général u_n diverge.*
- *si $\ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge.*

Démonstration. Supposons que ℓ est strictement plus grand que 1. Il existe alors un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$$

La suite (u_n) est donc croissante à partir du rang n_0. Donc :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant u_{n_0}.$$

Comme u_{n_0} est strictement positif, on en déduit que la suite (u_n) ne converge pas vers 0. La série de terme général u_n est donc grossièrement divergente.
Supposons maintenant que $\ell \in [0, 1[$. On pose $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$. Comme la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{1+\ell}{2}.$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant q^{n-n_0} u_{n_0},$$

avec $q = \dfrac{1+\ell}{2}$. Comme $q \in [0, 1[$, la série de terme général q^n est convergente. Donc, par comparaison, la série de terme général u_n l'est également.

□

Exercice 4.8. Montrer que dans le cas où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on ne peut pas en déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 4.9. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n}{n!}$ et de $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{2^n}$.

3) Produit de Cauchy

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général w_n défini par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k.$$

On a en particulier :

$$\begin{aligned}
w_0 &= u_0v_0 \\
w_1 &= u_0v_1 + u_1v_0 \\
w_2 &= u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0 \\
w_3 &= u_0v_3 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_3v_0 \\
w_4 &= u_0v_4 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + u_4v_0
\end{aligned}$$

Exercice 4.10. Soit q et q' deux réels distincts appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Donner le terme général du produit de Cauchy des séries $\sum q^k$ et $\sum q'^k$.

Proposition 4.8. *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs et convergentes alors la série $\sum w_n$ est convergente et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

4) Séries absolument convergentes

a) Définition et propriétés

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.

Définition 4.4. Une série de terme général u_n est dite absolument convergente lorsque la série de terme général $|u_n|$ converge. On dit alors que la suite (u_n) est sommable.

Exercice 4.11. Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\mathrm{e}^{-in\theta}}{n^2}$ est sommable.

Proposition 4.9.

(i) Une série absolument convergente est convergente.

(ii) Lorsqu'une série est absolument convergente, on ne change pas la valeur de la somme de cette série lorsque l'on réordonne ses termes.

La deuxième assertion signifie que si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Proposition 4.10 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour toute série absolument convergente de terme général u_n, on a :*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

b) Critères de convergence (généralisation)

Proposition 4.11. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes.*

(i) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant |v_n|$ et si la série $\sum v_n$ converge absolument alors la série $\sum u_n$ converge absolument.

> *(ii)* *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ *et la série* $\sum v_n$ *converge absolument alors la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*
>
> *(iii)* *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge absolument si et seulement si la série* $\sum v_n$ *converge absolument.*

Exercice 4.12. Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$ est sommable.

> **Proposition 4.12** (Règle de d'Alembert)**.** *Soit* (u_n) *une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Si la suite* $\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ *admet une limite* ℓ *finie ou infinie alors :*
>
> — *si* $\ell > 1$ *alors la série de terme général* u_n *diverge.*
>
> — *si* $\ell < 1$ *alors la série de terme général* u_n *converge absolument.*

Exercice 4.13. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ donné.

c) Produit de Cauchy

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

> **Proposition 4.13.** *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont absolument convergentes alors la série* $\sum w_n$ *est absolument convergente et :*
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

Exercice 4.14. Soit z et z' deux complexes. Justifier que les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}$ convergent absolument et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$$

d) Critère spécial des séries alternées

On dit que la série réelle $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est alternée lorsque u_n et u_{n+1} sont de signe contraire pour tout $n \geqslant n_0$.

Donc (dans le cas où $n_0 = 0$), si $u_0 > 0$ alors tous les termes d'indice pair sont positifs et tous les termes d'indice impair sont négatif. On a donc $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, si $u_0 < 0$ alors $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

> **Proposition 4.14.** *Soit* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ *une série alternée.*
>
> *La série* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ *est convergente si et seulement si la suite* $(|u_n|)_{n\geqslant n_0}$ *est décroissante et converge vers* 0.

Pour démontrer ce résultat, on utilise le résultat suivant (vu en première année). Soit (u_n) une suite réelle (ou complexe). Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration. Supposons que $u_0 > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont la même limite. Cela montre que la suite (S_n) converge, donc que la série de terme général u_n converge. □

Exercice 4.15. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α cette convergence est-elle absolue ?

II. Séries entières

1) Rayon de convergence

Une série entière de la variable complexe z est une série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où (a_n) est une suite donnée de complexes (indépendants de z).
Ce sont les exposants de la variable z qui sont entiers dans une *série entière*. L'expression : « série de puissances entières positives » s'est abrégée en « série entière » en France, et « série de puissances » en anglais, en allemand, en espagnol et en italien.

Exercice 4.16. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 4.17. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} n z^{2n}$ est une série entière.

Proposition 4.15. *(Lemme d'Abel) Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est absolument convergente.*

On remarque que si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout complexe z de module inférieur à celui de z_0, la suite $a_n z^n$ est également bornée :

Définition 4.5. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

Donc, si pour un certain complexe z_0, la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, on a $R \geqslant |z_0|$. En particulier, si la série $\sum a_n z_0^n$ converge alors $R \geqslant |z_0|$.

Exercice 4.18. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la suite (nz^n) est-elle bornée ? En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n z^n$.

On remarque que l'on ne change pas le rayon de convergence lorsque l'on décale les indices ou lorsque l'on multiplie la suite par une constante non nulle. Autrement dit :

Proposition 4.16.

(i) Les séries entières $\sum a_n z^n$ *et* $\sum a_{n+1} z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

(ii) Pour tout $\lambda \neq 0$*, les séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum \lambda a_n z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

Exercice 4.19. Donner le rayon de convergence de $\displaystyle\sum z^n$, $\displaystyle\sum 2z^n$, $\displaystyle\sum 2^n z^n$, $\displaystyle\sum 2^{n+1} z^n$.

Proposition 4.17. *Soit* R *le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *(*$R \in \mathbb{R}^+$ *ou* $R = +\infty$*).*

(i) Si $|z| < R$ *alors la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument.*

(ii) Si $|z| > R$ *alors la série* $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement.*

Il faut retenir que le rayon R de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie :

$$\begin{aligned} R &= \sup\{|z|, \sum a_n z^n \text{converge absolument}\} \\ &= \sup\{|z|, \sum a_n z^n \text{converge}\} \\ &= \sup\{|z|, \text{la suite} (a_n z^n) \text{ est bornée}\} \\ &= \sup\left\{|z|, \lim_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\} \end{aligned}$$

Si $|z| = R$, tout peut arriver : convergence, convergence absolue ou divergence.

Exercice 4.20. Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$?

Exercice 4.21. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

Définition 4.6. On appelle, pour la série entière $\sum a_n z^n$:

(i) disque ouvert de convergence : l'ensemble des complexes z tels que $|z| < R$.

(ii) intervalle ouvert réel de convergence : l'ensemble des réels x tels que $|x| < R$, c'est-à-dire l'intervalle $]-R, R[$.

Proposition 4.18. *Soit* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_1 *et* R_2*.*

(i) Si, à partir d'un certain rang $|a_n| \leqslant |b_n|$ *alors* $R_1 \geqslant R_2$*.*

(ii) Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ *alors* $R_1 = R_2$*.*

Exercice 4.22. Soit (a_n) une suite qui converge vers 0.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Comparer les rayons de convergence de $\displaystyle\sum a_n z^n$ et $\displaystyle\sum a_n^2 z^n$.

Exercice 4.23. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{n-1}{n+1} z^n$.

Remarque : On peut utiliser le critère de d'Alembert pour déterminer l'intervalle ouvert (ou le disque ouvert) de convergence. On obtient ainsi le rayon de convergence.

Proposition 4.19 (Critère de d'Alembert pour les séries entières). *Si la suite (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et si la suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers ℓ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $\dfrac{1}{\ell}$ (si $\ell = 0$ alors le rayon de convergence est $+\infty$).*

Exercice 4.24. À l'aide du critère de d'Alembert, déterminer le rayon de convergence de $\sum nz^n$ et $\sum \dfrac{1}{n+1} z^n$.

Proposition 4.20. *Les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence pour tout α réel.*

Exercice 4.25. Reprendre l'exercice précédent à l'aide de la proposition ci-dessus.

Exercice 4.26. Justifier que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[3]{n}\, a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

2) Opérations sur les séries entières

a) Somme

Proposition 4.21. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2.*
Le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieure ou égal à $\min(R_1, R_2)$ et pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_1, R_2)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Si $R_1 \neq R_2$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_1, R_2)$.

Exercice 4.27.

1. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) z^n$.
2. Déterminer les rayons de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1) z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{1/2^n} z^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{1/2^n} - 1\right) z^n$

Exercice 4.28. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-1/n!} - 1\right) z^n$

b) Produit

Proposition 4.22. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2.*
Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_1, R_2)$ et

pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_1, R_2)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n . \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n .$$

Exercice 4.29. Soit z un complexe tel que $|z| < 1$.
Calculer $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \right)^2$ et $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \right)^3$. En déduire $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) z^k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2) z^k$.

3) Propriétés de la somme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction d'une variable réelle : $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

L'ensemble de définition de cette fonction est l'un des intervalles $]-R, R[$, $]-R, R]$, $[-R, R[$ ou $[-R, R]$.

a) Continuité

Proposition 4.23. *La fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur son ensemble de définition.*

Exercice 4.30. Montrer que $f \ : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est continue sur $]-1, 1]$.

b) Dérivabilité

Proposition 4.24. *La fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.*

On obtient donc la dérivée d'une série entière en dérivant terme à terme.

On remarque également, en notant f la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad x f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n .$$

Exercice 4.31. Déterminer le rayon de convergence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ à l'aide de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Comme $\sum_{n=1} n a_n z^{n-1}$ est encore une série entière de rayon de convergence R, la fonction f' est dérivable. En fait la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Sa dérivée d'ordre k s'obtient en dérivant k fois terme à terme.

Exercice 4.32. Calculer, pour tout $x \in]-1, 1[$, la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}$ à l'aide de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

c) Intégration

La fonction $F : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est dérivable sur $]-R, R[$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$. Par conséquent, pour tout $(a, b) \in]-R, R[^2$, on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n t^n dt.$$

Exercice 4.33. Calculer pour tout $x \in]-1, 1[$, les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

4) Fonctions développables en série entière

a) Définition

Définition 4.7. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. On dit que f est développable en série entière sur I s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par conséquent, une fonction développable en série entière sur I est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $I \subset]-R, R[$ où R est le rayon de convergence de la série entière. En général I est l'intervalle $]-R, R[$.

Les fonctions polynomiales sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ car :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

b) Unicité du développement en série entière

Proposition 4.25. *Si f est développable en série entière sur un intervalle ouvert I contenant 0 alors les coefficients sont :*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

On en déduit que si f est développable en série entière sur I, son développement est unique et on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Exercice 4.34. Montrer que l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$ admet une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$. En déduire que la fonction exponentielle est développable en série entière.

Exercice 4.35. Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer que $g : x \longmapsto f(-x)$ est développable en série entière. Quel est son rayon de convergence ?
2. Montrer que si f est paire, on a $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si f est impaire, on a $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Lien avec la formule de Taylor avec reste intégrale

On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I ouvert contenant 0, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x)}.$$

Donc si, pour tout $x \in I$, $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ alors f est développable en série entière sur I.

Exercice 4.36. Justifier que la fonction cosinus est développable en série entière à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale.

d) Développements usuels

Les développements que l'on déduit de la série exponentielle :

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, & I = \mathbb{R} \\
\mathrm{ch} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, & I = \mathbb{R} \\
\mathrm{sh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, & I = \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, & I = \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, & I = \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Les développements que l'ont déduit des séries géométriques :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, & I =]-1, 1[\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, & I =]-1, 1[\\
\arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} & I =]-1, 1[
\end{aligned}$$

Le développement qui généralise la formule du binome de Newton :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad I =]-1, 1[$$

5) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe.

Proposition 4.26. *Pour tout complexe z tel que $|z| < 1$:*

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k.$$

On rappelle que pour tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \times (\cos y + \mathrm{i} \sin y).$$

Proposition 4.27. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

III. Exercices

1) Séries numériques

Exercice 4.37. Étudier, pour tout $a > 0$, la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{1 + a^n}$.

Exercice 4.38. Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chaque cas suivant.

1. $u_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$.
2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 4.39. Soit la suite de terme général $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$.

1. Écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\alpha_n^n$ où l'on précisera α_n.
2. Montrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n \ln n} + o\left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)$.
3. Calculer la limite de α_n^n.
4. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 4.40. On note (H_n) la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
2. Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ par comparaison somme-intégrale.
3. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = H_n - \ln n.$$
   (a) Justifier que $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) En déduire que $u_{n-1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$, puis qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$
   La constante γ est appelée constante d'Euler. On a $\gamma \approx 0,57721$.

Exercice 4.41. Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer, à l'aide de la fonction $x \longmapsto -x + \ln(1+x)$, que :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1, &\quad \frac{1}{n} \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \forall n \geqslant 2, &\quad \frac{1}{n} \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

   En déduire que $0 \leqslant H_n - \ln(n) \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. Étudier la nature de la série de terme général $w_n = a^{H_n}$ suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 4.42. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n}{2^n}$. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1. Montrer que la série de terme général u_n est bien convergente.
2. Calculer $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$. En déduire la valeur de S.

Exercice 4.43. Justifier la convergence et calculer $S = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$.

Exercice 4.44. Justifier la convergence et calculer $S = \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 4.45. Soit a un réel strictement positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et décroissante.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$$
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Exercice 4.46. Étudier la nature des séries suivantes. S'il y a divergence grossière ou convergence absolue, le préciser.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3}{3^n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n)}{(n+1)^2}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

Exercice 4.47. Étudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Exercice 4.48. Étudier la nature de la série de terme général $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + (-1)^n}$.

Exercice 4.49. Démontrer la convergence de la suite définie pour tout n par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{n^2}.$$

à l'aide de la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 4.50. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
2. Déduire de la question précédente la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$.

Exercice 4.51.

1. Pour tout $\alpha > 0$, justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

2. Donner un équivalent de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Donner un équivalent de la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ après avoir justifié la convergence de la série.

2) Séries entières

Exercice 4.52. Déterminer le rayon de convergence de :

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$ **2)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} x^n$ **3)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$ **4)** $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ **5)** $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^{n^2}$

Exercice 4.53. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme.

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^{3n}$ **2)** $\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n) x^n$ **3)** $\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n) x^{2n+1}$ **4)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh} n \, x^n$

Exercice 4.54. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme.

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) x^{n+1}$ **2)** $\sum_{n=0}^{+\infty} (2n-1) x^n$ **3)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^n$ **4)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$

Exercice 4.55. Déterminer les intervalles sur lequel les fonctions suivantes sont continues :

1) $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$ **2)** $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ **3)** $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}} x^n$

4) $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4+1}} x^n$ **5)** $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$

Exercice 4.56. Soit (a_n) une suite réelle admettant une limite ℓ. On note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

1. Déterminer R lorsque $\ell \in \mathbb{R}^*$.
2. Que peut-on dire de R si $\ell = 0$?
3. Que peut-on dire de R si $\ell = +\infty$?
4. Étudier le cas où la suite (a_n) est géométrique de raison $q > 0$.

Exercice 4.57. Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2a_{n-1}}{n+1}$.
On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que $1 \leqslant a_n \leqslant (n+1)^2$.
2. Déterminer le rayon de convergence de f.
3. Donner une expression simple de f.

Exercice 4.58. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n) x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.

1. Déterminer les rayons de convergence de f et g.
2. Trouver une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$.
3. On pose $h(x) = g(x) - \ln(1-x)$.
   (a) Écrire le développement en série entière de h.
   (b) Montrer que h est prolongeable par continuité en 1.
   (c) En déduire un équivalent de g puis de f au voisinage de 1.

Exercice 4.59. Donner l'ensemble de définition, développer en série entière et préciser l'intervalle sur lequel la fonction est développable en série entière :

1) $\dfrac{1}{2-x}$ **2)** $\ln(2-x)$ **3)** $\ln(x^2 - 3x + 2)$ **4)** $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 4.60. Montrer que $x \longmapsto \mathrm{e}^x \cos x$ est développable en série entière et préciser les coefficients de son développement :

1. à l'aide d'un produit de Cauchy,
2. à l'aide du développement en série entière de l'exponentielle complexe.

Exercice 4.61.

1. Exprimer $\cos^4 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$. En déduire le développement en série entière de $\cos^4 x$.
2. Développer en série entière $\sin^4 x$.

Exercice 4.62. Développer en série entière $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 4.63. Soit f la fonction définie par $f(0) = -\frac{1}{2}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

1. Montrer que f est dérivable en 0 à l'aide d'un taux d'accroissement. Déterminer $f'(0)$.
2. Montrer que f est développable en série entière et retrouver le résultat précédent.

Exercice 4.64. Soit $f\ : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-4x)y' = 2y$.
3. En déduire une expression de f sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 4.65. Soit f la fonction $x \longmapsto \sin x\,\mathrm{ch} x$.

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \mathrm{ch} x$. Quel est le rayon de convergence de la série entière ?
2. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. *Ne pas chercher le développement dans cette question !*
3. (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

où, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) À l'aide de la partie imaginaire du développement $(1+i)^{2n+1}$, montrer que :

$$c_n = 2^n \sqrt{2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}\right).$$

Que peut-on dire de $|c_n|$?

Exercice 4.66 (Preuve de la proposition **??**).

Soit $\alpha > 0$ et (a_n) une suite. On note R_α le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha a_n z^n$ et R celui de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que $R_\alpha \leqslant R$.
2. Soit $q > 0$. Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n z^n$?
3. Soit $q > 1$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $n^\alpha \leqslant q^n$. En déduire que $R_\alpha \geqslant \dfrac{R}{q}$.
4. Montrer que $R_\alpha = R$.
5. Montrer que l'égalité est encore vraie si $\alpha < 0$.