I - Algèbre linéaire

1) Espaces vectoriels

Définitions : espace vectoriel, sous-espace vectoriel, espace vectoriel produit

2) Familles de vecteurs

Famille libre, famille génératrice, base. Toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est libre.
Espace vectoriel de dimension finie.

3) Sous-espaces vectoriels

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Définition d'un hyperplan.

4) Applications linéaires et matrices

Noyau et image d'une application linéaire, théorème du rang.

En dimension finie : matrice d'un endomorphisme. Formules de changement de base. Matrices semblables.

Projecteurs.

Questions de cours :

1. Définition d'un sous-espace vectoriel. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces est un sous-espace vectoriel.
2. Définition de la somme directe de p sous-espaces vectoriels. Caractérisation avec l'intersection lorsque $p = 2$.
3. Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors $E = \mathrm{vect}(e_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{vect}(e_n)$.
4. Noyau et image d'une application linéaire. Lien entre injectivité et noyau.

---

1. Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque F est non vide et :

   (i) pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$,

   (ii) pour tout x de F et pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\lambda x \in F$

   Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

   L'intersection $F \cap G$ est non vide car F et G contiennent 0_E (tout sous-espace vectoriel contient le vecteur nul).

   Soit x et y dans $F \cap G$ et λ dans $\mathbb{K}$. Le vecteur $x + \lambda y \in F$ car x et y appartiennent à F qui est un sous-espace vectoriel de E. De même $x + \lambda y \in G$ car x et y appartiennent à G qui est un sous-espace vectoriel de E. Donc $x + \lambda y \in F \cap G$.

   Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F = F_1 + \cdots + F_p$ est directe lorsque pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_n$:

$$x_1 + \cdots + x_p = 0_E \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0_E.$$

   Lorsque $p = 2$, on a $F = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $F_1 + F_2 = E$.
   Preuve : Supposons que $F = F_1 \oplus F_2$ alors $F = F_1 + F_2$ par définition de la somme directe.
   Soit $x \in F_1 \cap F_2$. On a $x + (-x) = 0_E$. Comme $x \in F_1$ et $-x \in F_2$, on a $x = -x = 0_E$.
   Réciproquement supposons que $F = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
   Par hypothèse $F = F_1 + F_2$.
   Soit $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x_1 + x_2 = 0_E$. Comme $x_1 = -x_2 \in F_2 \cap F_1$, on a $x_1 = -x_2 = 0_E$. La somme $F_1 + F_2$ est donc directe.
3. Soit $x \in E$. Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
   Comme $\lambda_i e_i \in \text{vect}(e_i)$, on a montré que $E = \text{vect}(e_1) + \cdots + \text{vect}(e_n)$.
   Montrons que la somme est directe.
   Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs appartenant respectivement à $\text{vect}(e_1), \dots, \text{vect}(e_n)$ tels que :

$$x_1 + \cdots + x_n = 0_E.$$

   Pour tout i, il existe λ_i un scalaire tel que $x_i = \lambda_i e_i$. On a donc :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E.$$

   Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout i, puis que $x_i = 0_E$ pour tout i. La somme est bien directe.
4. Soit f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = 0_F$
   L'image de f est l'ensemble des vecteurs y de F tels qu'il existe un vecteur x de E tel que $f(x) = y$.
   On a l'équivalence : L'application linéaire f est injective si et seulement si $\ker f$ est réduit au vecteur nul de E.
   Supposons f injective. Soit x dans $\ker f$. On a $f(x) = 0_F$ et on sait que $f(0_E) = 0_F$. Donc par injectivité de f, $x = 0_E$.
   Réciproquement, supposons que $\ker f$ ne contient que le vecteur nul de E et considérons deux vecteurs x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$.
   Par linéarité $f(x - x') = 0_F$ donc $x - x' = 0_E$ et $x = x'$.