Maths - DS1 - 4 heures

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. La famille (I, A, A^2) est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
3. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Est-ce que $A^{-1} \in \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$?
5. Donner une expression de $(A^{-1})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z)$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le rang de f.
3. Déterminer le noyau de f.
4. Montrer l'égalité $f \circ f = 2f$. En déduire que si $v \in \mathrm{Im}\, f$, alors $f(v) = 2v$.
5. Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
6. Trouver une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur appartient à $\ker f$ et les derniers à $\mathrm{Im}\, f$. Quelle est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) ?
7. Trouver une équation de $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 3 Soient $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les applications définies par

$$f(M) = x + t \quad \text{et} \quad g(M) = \begin{pmatrix} 2x + t & x + y + t \\ x + z + t & -2x - t \end{pmatrix}$$

pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les applications f et g sont linéaires.
2. Trouver une base de $\ker f$.
3. Calculer $g(M) - M$ lorsque $M \in \ker f$. En déduire l'inclusion $\ker f \subset \mathrm{Im}\, g$.
4. Calculer $g(U)$. En déduire que l'on a $\ker f = \mathrm{Im}\, g$ et que U est une base de $\ker g$.
5. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker g$ et $\ker f$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.
6. Soit (V, W, T) une base de $\ker f$. Écrire la matrice de g dans la base (U, V, W, T).

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$
On considère, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$E_a = \{P \in E, P(a) = 0\}$$

On note Q_0 le polynôme constant égal à 1.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes.

1. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de E pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\text{Vect}(Q_0)$ est un supplémentaire de E_a. En déduire que E_a est un hyperplan de E.
3. Soit a et b deux réels distincts. On pose $F = E_a \cap E_b$.
   (a) Justifier que pour tout polynôme P, il existe des polynômes Q et R tels que $\deg R \leqslant 1$ et :
   $$P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + R(X)$$
   (b) Montrer que $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
   (c) Quelle est la dimension de F ?
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $Q(a) = P(a)$ et $Q(b) = 0$.
   (b) En déduire que $E = E_a + E_b$.
   (c) Pour quelle valeur de n la somme $E_a + E_b$ est-elle directe ?

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit u un endomorphisme de E et F l'ensemble des vecteurs x de E tels que $u(x) = x$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Que peut-on dire de u lorsque $F = E$?
2. Soit p un projecteur de E.
   (a) Montrer que $E = \text{Im}\, p \oplus \ker p$.
   (b) On note r la dimension de $\text{Im}\, p$ et on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $e_i \in \text{Im}\, p$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ et $e_i \in \ker p$ pour tout $i \in [\![r+1, n]\!]$.
   Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que $\text{rang}\, p = \text{tr}\, p$.

Soit u un endomorphisme de E et q un entier supérieur ou égal à 2 tels que $u^q = id_E$.
On pose $v = \frac{1}{q}\left(id_E + u + \cdots + u^{q-1}\right)$ et $F = \ker(u - id_E)$.

3. Montrer que $x \in F$ si et seulement si $u(x) = x$.
4. Montrer que $u(v(x)) = v(x)$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\text{Im}\, v \subset F$.
5. Montrer que $u^k(v(x)) = v(x)$ pour tout $x \in E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que v est un projecteur.
6. Montrer que $v(x) = x$ pour tout $x \in F$. En déduire que $\text{Im}\, v = F$.
7. Déduire des questions précédentes que $\dim F = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \text{tr}(u^k)$.