Maths - DM1

à rendre le 10 septembre 2024

Exercice 1 Soit a un nombre réel et soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, a, 2, -1), (-2, 3, a, 1), (-1, 0, 2, -1), (2, -1, a, 1)$.

1. Pour quelle valeur de a a-t-on l'égalité $E = \mathbb{R}^4$?
2. On suppose $a = -2$.
   (a) Trouver une base de E.
   (b) L'espace vectoriel E contient-il un vecteur de la base canonique ? Le vecteur $(1, -1, 0, 0)$ appartient-il à E ?

Exercice 2
Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MB = BM$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de l'espace vectoriel des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MD = DM$.
3. Calculer $P^{-1}AP$. En déduire que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a $MA = AM$ si et seulement si on a $\left(P^{-1}MP\right) D = D \left(P^{-1}MP\right)$.
4. Trouver une base de l'espace vectoriel des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MA = AM$.

Exercice 3 Trouver des matrices A et B telles que les matrices A, B, AB, BA forment une base de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?
2. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et calculer sa dimension,