I - Algèbre linéaire

1) Espaces vectoriels

Définitions : espace vectoriel, sous-espace vectoriel, espace vectoriel produit

2) Familles de vecteurs

Famille libre, famille génératrice, base. Toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est libre.
Espace vectoriel de dimension finie.

3) Sous-espaces vectoriels

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Définition d'un hyperplan.

4) Applications linéaires et matrices

Noyau et image d'une application linéaire, théorème du rang.

En dimension finie : matrice d'un endomorphisme. Formules de changement de base. Matrices semblables.

Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

5) Sous-espaces stables

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Matrice dans une base adaptée.

6) Trace

Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme. Propriétés de la trace.

7) Hyperplan

Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie. Équation d'une hyperplan. Équations d'un sous-espace vectoriel : si E est de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans.

Questions de cours

1. Montrer que pour deux matrices carrées A et B : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Montrer que l'intersection de p hyperplans d'un espace de dimension n est de dimension au moins $n-p$.
3. Définition et caractérisation d'un hyperplan en dimension finie. Montrer que le noyau d'une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{K}$ est un hyperplan de E.
4. Définition d'un sous-espace stable. Cas où l'on connaît une famille génératrice.

1. *Montrer que pour deux matrices carrées A et B :* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

   Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n. On pose $C = AB$ et $D = BA$ et on note respectivement $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ les coefficients des matrices A, B, C, D.

   On a $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Donc par définition de la trace et en permutant les sommes :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

   On renomme les indices et on permute les produits :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$$

   Donc $\mathrm{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \mathrm{tr}(BA)$

2. *Montrer que l'intersection de p hyperplans d'un espace de dimension n est de dimension au moins $n - p$.*

   On raisonne par récurrence. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{H}_p$: toute intersection de p hyperplans de E est de dimension au plus $n - p$.
   Pour $p = 2$. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans. On a :

$$n = \dim E \geq \dim(H_1+H_2) = \dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1\cap H_2) = 2n-2-\dim(H_1\cap H_2)$$

   Donc $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2$.
   Soit $p \geq 2$ et supposons $\mathcal{H}_p$ vraie. Soit $H_1, \dots, H_{p+1}$ des hyperplans de E et on pose $F = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i$ de sorte que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p+1} H_i = F \cap H_{p+1}$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence $\dim F \geq n - p$. On a :

$$n \geq \dim(F + H_{p+1}) = \dim F + \dim H_{p+1} - \dim \bigcap_{i=1}^{p+1} H_i \geq n - p + n - 1 - \dim \bigcap_{i=1}^{p+1} H_i$$

   Donc $\dim \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p+1} H_i \geq n - (p + 1)$.

3. *Définition et caractérisation d'un hyperplan en dimension finie. Montrer que le noyau d'une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{K}$ est un hyperplan de E.*

   Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension 1. Donc un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan de E si et seulement s'il est de dimension $n - 1$.

   Soit φ une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{K}$. Son rang est égal à 1. Donc d'après le théorème du rang son noyau est un hyperplan de E.

4. *Définition d'un sous-espace stable. Cas où l'on connaît une famille génératrice.*

   Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u lorsque $u(x) \in F$ pour tout x de F.
   Dans le cas où $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_k)$, F est stable par u si et seulement si $u(e_i) \in F$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.
   En effet, si F est stable par u alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $u(e_i) \in F$ car $e_i \in F$.
   Réciproquement supposons que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $u(e_i) \in F$. Soit $x \in F$. Il existe $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $x = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k$.
   Donc, par linéarité :

$$u(x) = a_1 u(e_1) + \dots + a_k u(e_k) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_k).$$