

## Maths - DS1 - Corrigé

### Exercice 1

1. On pose  $N = A - I_3$ . Comme  $N^3 = 0$  et  $I_3N = NI_3 = N$ , d'après la formule de binôme de Newton :

$$A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n+2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $aI + bA + cA^2 = 0$ . Donc :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Donc :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3b + 8c = 0 \\ 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

En remplaçant  $L_2$  par  $L_2 - 2L_3$ , il vient  $b = 0$ . On en déduit que  $c = 0$  puis que  $a = 0$ . Donc la famille  $(I, A, A^2)$  est libre.

Cette famille n'est pas génératrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  car  $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9 > 3$ .

3. La matrice  $A$  est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc  $A$  est inversible et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{car } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

4.  $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$  donc  $A^{-1} \in \text{Vect}(I, A, A^2)$ .

5. On pose  $B_n = \begin{pmatrix} 1 & -n & n(n-2) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , la matrice obtenue en remplaçant  $n$  par  $-n$  dans l'expression de  $A^n$ .

On remarque que  $B_n A^n = I_3$ . Donc  $B_n = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ .

### Exercice 2

1.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. On remplace  $L_2$  par  $L_2 - 6L_1$  et  $L_3$  par  $L_3 + 3L_1$ , puis  $L_3$  par  $L_3 - L_2$  :

$$\text{rang } A = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

3.  $(x, y, z) \in \ker f$  si et seulement si :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -6x + 4y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

En effectuant les mêmes opérations que pour le calcul du rang, il obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

$\ker f$  est la droite vectorielle engendrée par  $(-1, -2, 1)$ .

4. Par calcul  $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -12 & 8 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$  d'où  $f \circ f = 2f$ .

Soit  $v \in \text{Im } f$ , il existe  $u \in E$  tel que  $f(u) = v$  et alors  $f(f(u)) = 2f(u)$  donc  $f(v) = 2v$ .

5. D'après les questions 2 et 3 (ou le théorème du rang),  $\dim \ker f + \text{rang } f = 3$ .

De plus, si  $v \in \ker f \cap \text{Im } f$  alors  $2v = f(v) = 0_E$  donc  $v = 0_E$ . On en déduit que  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.

6.  $\ker f = \text{Vect}((1, 2, -1))$  et  $\text{Im } f = \text{Vect}((-1, -6, 3), (1, 4, -1))$ .

On peut choisir  $e_1 = (1, 2, -1)$ ,  $e_2 = (-1, -6, 3)$ ,  $e_3 = (1, 4, -1)$ .

Cette famille est libre car  $(e_1)$  est une base de  $\ker f$ ,  $(e_2, e_3)$  est une base de  $\text{Im } f$  et les sous-espaces vectoriels  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.

Dans cette base, la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

7.  $(x, y, z) \in \text{Im } f$  si et seulement s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(x, y, z) = ae_2 + be_3$ , d'où le système :

$$\begin{cases} x = -a + b \\ y = -6a + 4b \\ z = 3a - b \end{cases}$$

En remplaçant  $L_2$  par  $L_2 - 6L_1$  et  $L_3$  par  $L_3 + 3L_1$ , puis  $L_3$  par  $L_2 + L_3$  :

$$\begin{cases} -a + b = x \\ -2b = y - 6x \\ 2b = z + 3x \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b = x \\ -2b = y - 6x \\ 0 = -3x + y + z \end{cases}$$

Donc  $\text{Im } f$  a pour équation  $-3x + y + z = 0$ .

### Exercice 3

1. Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ,  $N = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= f\left(\begin{pmatrix} x + \lambda x' & y + \lambda y' \\ z + \lambda z' & t + \lambda t' \end{pmatrix}\right) \\ &= (x + \lambda x') + (t + \lambda t') \\ &= (x + t) + \lambda(x' + t') \\ &= f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(M + \lambda N) &= g\left(\begin{pmatrix} x + \lambda x' & y + \lambda y' \\ z + \lambda z' & t + \lambda t' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2(x + \lambda x') + (t + \lambda t') & (x + \lambda x') + (y + \lambda y') + (t + \lambda t') \\ (x + \lambda x') + (z + \lambda z') + (t + \lambda t') & -2(x + \lambda x') - (t + \lambda t') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x + t & x + y + t \\ x + z + t & -2x - t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x' + t' & x' + y' + t' \\ x' + z' + t' & -2x' - t' \end{pmatrix} \\
&= g(M) + \lambda g(N)
\end{aligned}$$

Donc les applications  $f$  et  $g$  sont linéaires.

2.  $\ker f$  admet pour base la famille  $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

3. Soit  $M \in \ker f$ . Donc  $t = -x$ .

Comme  $g(M) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ , on a  $g(M) - M = 0$ . Donc  $M = g(M) \in \text{Im } g$ , ce qui montre l'inclusion  $\ker f \subset \text{Im } g$ .

4. Par calcul  $g(U) = 0$ .

D'après la question précédente,  $\dim \ker f \leq \text{rang } g \leq 3$ . Or  $\dim \ker f = 3$  d'après la question 2. Donc  $\ker f$  et  $\text{Im } g$  sont de même dimension et comme  $\ker f \subset \text{Im } g$ , ces sous-espaces vectoriels sont égaux.

De plus  $\ker g$  est de dimension 1 (théorème du rang) et  $U \in \ker g$ , donc  $\ker g$  est engendré par  $U$ .

5. Comme  $\dim \ker g = 1$ ,  $\dim \ker f = 3$  et  $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ , il suffit de montrer que l'intersection de  $\ker f$  et  $\ker g$  est réduit à  $\{0\}$ .

Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \ker f \cap \ker g$ . Comme  $x + t = 0$ , on a :

$$g(M) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = 0$$

Donc  $x = y = z = t = 0$  et  $M = 0$ .

Donc  $\ker g$  et  $\ker f$  sont supplémentaires.

6. Comme  $g(V) = V$ ,  $g(W) = W$  et  $g(T) = T$  d'après la question 3, la matrice de  $g$  dans la

base  $(U, V, W, T)$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

#### Exercice 4

1. Le polynôme nul s'annule en  $a$  donc appartient à  $E_a$ . Soit  $P$  et  $Q$  dans  $E_a$  et  $\lambda$  un réel. On a :

$$(P + \lambda Q)(a) = P(a) + \lambda Q(a) = 0$$

Donc  $P + \lambda Q$  appartient à  $E_a$ . Donc  $E_a$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2. L'écriture  $P(X) = (P(X) - P(a)) + P(a)Q_0(X)$  montre que  $E = E_a + \text{Vect}(Q_0)$ .  
 Soit  $P \in E_a \cap \text{Vect}(Q_0)$ . Comme  $P(a) = 0$  et  $P$  est constant,  $P$  est le polynôme nul.  
 Donc  $E = E_a \oplus \text{Vect}(Q_0)$  et les sous-espaces vectoriels  $E_a$  et  $\text{Vect}(Q_0)$  sont supplémentaires.
3. (a) La division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  s'écrit :

$$P = (X - a)(X - b)Q + R$$

où  $R$  est un polynôme de degré strictement inférieur au degré de  $(X - a)(X - b)$ . Donc  $R$  appartient à  $\mathbb{R}_1[X]$ .

- (b) D'après l'égalité précédente  $P$  est la somme d'un polynôme qui s'annule en  $a$  et  $b$  et d'un polynôme de degré au plus 1. Donc  $E = F + \mathbb{R}_1[X]$ .  
 Si  $P$  appartient à  $F$  et  $\mathbb{R}_1[X]$  alors  $P$  s'annule en  $a$  et  $b$ . Le seul polynôme de  $\mathbb{R}_1[X]$  qui admet au moins deux racines et le polynôme nul. Donc  $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$ .
- (c)  $\dim F = \dim E - \dim \mathbb{R}_1[X] = (n + 1) - 2 = n - 1$ .
4. (a)  $Q$  s'écrit  $Q(X) = \alpha X + \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels tels que :

$$\alpha a + \beta = P(a) \quad \alpha b + \beta = 0$$

Il est facile de voir que ce système admet une solution, ce qui montre l'existence du polynôme  $Q$ .

- (b) On a  $P(X) = R(X) + Q(X)$  avec  $R(X) = P(X) - Q(X)$ . Comme  $R \in E_a$  et  $Q \in E_b$ , on en déduit que  $E = E_a + E_b$ .
- (c) Si la somme est directe alors :

$$\dim E = \dim E_a + \dim E_b \iff n + 1 = n + n \iff n = 1$$

Réciproquement il est facile de montrer que la somme est directe si  $n = 1$ .

### Exercice 5

1. (a)  $F$  est non vide car  $0_E \in F$ . Soit  $(x, y) \in F^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y) = x + \lambda y.$$

Donc  $x + \lambda y \in F$ . Donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- (b) Si  $F = E$  alors  $u = id_E$ .
2. (a) D'après le théorème du rang  $\dim E = \dim \text{Im } p + \dim \ker p$ . Soit  $x \in \ker p \cap \text{Im } p$ . On a  $p(x) = 0$  car  $x \in \ker p$  et  $p(x) = x$  car  $x \in \text{Im } p$  et  $p$  est un projecteur. On en déduit que  $x = 0_E$ .  
 Ceci montre que  $E = \text{Im } p \oplus \ker p$ .
- (b) La matrice  $p$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice diagonale. Les  $r$  premiers éléments de la diagonale sont égaux à 1, les autres sont nuls. Donc  $\text{rang } p = \text{tr } p$ .

3.

$$\begin{aligned} x \in F &\iff (u - id_E)(x) = 0_E \\ &\iff u(x) - x = 0_E \\ &\iff u(x) = x \end{aligned}$$

4.

$$u(v(x)) = \frac{1}{q} u(x + u(x) + \dots + u^{q-1}(x))$$

Par linéarité :

$$u(v(x)) = \frac{1}{q} (u(x) + u^2(x) + \dots + u^q(x))$$

Comme  $u^q(x) = x$ , on a bien  $u(v(x)) = v(x)$ .Soit  $y \in \text{Im } v$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $y = v(x)$ . Donc  $u(y) = u(v(x)) = v(x) = y$ . Donc  $y \in F$ . D'où  $\text{Im } v \subset F$ .5. On a  $u(v(x)) = v(x)$ . Donc en appliquant  $u^k$ , on a :

$$u^{k+1}(v(x)) = u^k(v(x)).$$

La suite  $(u^k(v(x)))$  est donc constante. Donc  $u^k(v(x)) = v(x)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .On en déduit que  $u^k \circ v = v$ . Donc :

$$v \circ v = \frac{1}{q} (v + u \circ v + \dots + u^{q-1} \circ v) = \frac{1}{q} \times qv = v$$

Donc  $v$  est un projecteur.6. Soit  $x \in F$ . Donc  $u^k(x) = x$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Donc  $v(x) = x$  et en particulier  $F \subset \text{Im } v$ .Donc, d'après la question 2,  $F = \text{Im } v$ .7. Comme  $v$  est un projecteur d'image  $F$ ,  $\text{tr } v = \dim F$ . D'où, par linéarité de la trace :

$$\dim F = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \text{tr}(u^k)$$

Barème :

Ex 1 :  $9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$

Ex 2 :  $10 = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1$

Ex 3 :  $12 = 6 \times 2$

Ex 4 :  $12,5 = 2 + 2,5 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1$

Ex 5 :  $16 = 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2$

Total : 69,5 (18,5 pour avoir 10/20)