Maths - DM1 - corrigé

Exercice 1

1. $E = \mathbb{R}^4$ si et seulement si la famille génératrice donnée est libre. On étudie donc la liberté de cette famille, ce qui conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ a\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + a\lambda_2 + 2\lambda_3 + a\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - aL_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 + L_1$.

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ (2a+3)\lambda_2 + a\lambda_3 - (2a+1)\lambda_4 = 0 \\ (a+4)\lambda_2 + 4\lambda_3 + (a-4)\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ (a+4)\lambda_2 + 4\lambda_3 + (a-4)\lambda_4 = 0 \\ (2a+3)\lambda_2 + a\lambda_3 - (2a+1)\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + (a+4)L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 + (2a+3)L_2$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ -2(a+2)\lambda_3 + 4(a+2)\lambda_4 = 0 \\ -3(a+2)\lambda_3 + 4(a+2)\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ -2(a+2)\lambda_3 + 4(a+2)\lambda_4 = 0 \\ -(a+2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc si $a \neq -2$, le système est équivalent à :

$$(\star) \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ -2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

et on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Dans ce cas la famille est libre, donc elle est une base de $\mathbb{R}^4$ et $E = \mathbb{R}^4$.
Si $a = -2$, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

On a une solution non nulle en prenant par exemple $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_1 = -3$. Donc la famille des 4 vecteurs n'est pas libre, donc $E \neq \mathbb{R}^4$.

2. On suppose $a = -2$.
   (a) on pose $e_1 = (1, -2, 2, -1)$, $e_2 = (-2, 3, -2, 1)$, $e_3 = (-1, 0, 2, -1)$ et $e_4 = (2, -1, -2, 1)$.
   On reprend le système $(\star)$. Avec $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_1 = -3$, on obtient $-3e_1 - 2e_2 + e_3 = 0$. Donc $e_3 = 3e_1 + 2e_2$.
   Avec $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_1 = 4$, on obtient $4e_1 + 3e_2 + e_4 = 0$. Donc $e_4 = -4e_1 - 3e_2$.
   Donc $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Comme e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de E.
   (b) L'espace vectoriel E contient-il un vecteur de la base canonique ? Le vecteur

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu = 1 \\ -2\lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda - 2\mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ -2\lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda - 2\mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

   On remplaçant L_3 par $L_3 + L_2$, il vient $\mu = 0$ mais on aurait $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$! Donc $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ n'appartiennent pas à E.

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ -2\lambda + 3\mu = 1 \\ 2\lambda - 2\mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ -2\lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda - 2\mu = 1 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

   On remplaçant L_4 par $L_1 + L_4$, il vient $\mu = 0$ mais on aurait $\lambda = 0$ et $\lambda = \pm 1/2$! Donc $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ n'appartiennent pas à E.
   Enfin $(1, -1, 0, 0) = -(e_1 + e_2)$ donc $(1, -1, 0, 0) \in E$.

Exercice 2

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note F_B l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $BM = MB$.

Soit $(M, N) \in F_B^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(M + \lambda N)B = MB + \lambda NB = BM + \lambda BN = B(M + \lambda N)$$

Donc $M + \lambda N \in F_B$. Donc F_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$MD = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

Donc $MD = DM$ si seulement si $b = c = d = f = g = h = i$.
L'ensemble F_D des matrices M telles que $MD = DM$ est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette famille est une libre (car c'est une sous-famille de la base canonique), elle est donc une base de F_D.

3. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = D$.
Donc $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned} MA = AM &\iff MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \\ &\iff P^{-1}MPDP^{-1}P = P^{-1}PDP^{-1}MP \\ &\iff (P^{-1}MP)D = D(P^{-1}MP) \end{aligned}$$

4. $M \in F_A$ si et seulement si $P^{-1}MP \in F_D$.
Donc $E'_{11} = PE_{11}P^{-1}$, $E'_{22} = PE_{22}P^{-1}$, $E'_{33} = PE_{33}P^{-1}$ forment une famille génératrice de F_A et il est facile de montrer que cette famille est une base.

$$E'_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E'_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E'_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

Exercice 3 Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve les quatre vecteurs de la base canonique. Donc (A, B, AB, BA) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4

1. La matrice nulle n'est pas inversible donc l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. L'ensemble T_n des matrices triangulaires supérieures est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. Donc T_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. De plus cette famille est libre (comme sous-famille de la base canonique). Donc T_n est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (c'est le nombre de vecteur de la famille).