I - Algèbre linéaire

4) Applications linéaires et matrices

Noyau et image d'une application linéaire, théorème du rang.

En dimension finie : matrice d'un endomorphisme. Formules de changement de base. Matrices semblables.

Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

5) Sous-espaces stables

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Matrice dans une base adaptée.

6) Trace

Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme. Propriétés de la trace.

7) Hyperplan

Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie. Équation d'une hyperplan. Équations d'un sous-espace vectoriel : si E est de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans.

II- Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées du plan

Révision : Calcul de développements limités.

1) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Limite en un point. Continuité en un point, continuité globale. Vecteur dérivé à droite et à gauche en un point. Fonction dérivée.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit (multiplication par une fonction à valeurs réelles, produit scalaire, produit vectoriel). Fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Dérivées successives d'une combinaison linéaire, d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor-Young.

Questions de cours

1. Montrer que l'intersection de p hyperplans d'un espace de dimension n est de dimension au moins $n-p$.
2. Définition d'un sous-espace stable. Cas où l'on connaît une famille génératrice.
3. Limite en un point, caractérisation de la limite avec les fonctions coordonnées. Définition de la continuité en un point et de la continuité globale pour une fonction vectorielle.
4. Dérivation d'un produit scalaire.

1. *Montrer que l'intersection de p hyperplans d'un espace de dimension n est de dimension au moins $n-p$.*

   On raisonne par récurrence. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{H}_p$: toute intersection de p hyperplans de E est de dimension au plus $n-p$.
   Pour $p=2$. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans. On a :

   $$n = \dim E \geq \dim(H_1+H_2) = \dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1\cap H_2) = 2n-2-\dim(H_1\cap H_2)$$

   Donc $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n-2$.
   Soit $p \geq 2$ et supposons $\mathcal{H}_p$ vraie. Soit $H_1, \dots, H_{p+1}$ des hyperplans de E et on pose $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ de sorte que $\bigcap_{i=1}^{p+1} H_i = F \cap H_{p+1}$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence $\dim F \geq n-p$. On a :

   $$n \geq \dim(F+H_{p+1}) = \dim F + \dim H_{p+1} - \dim \bigcap_{i=1}^{p+1} H_i \geq n-p+n-1-\dim \bigcap_{i=1}^{p+1} H_i$$

   Donc $\dim \bigcap_{i=1}^{p+1} H_i \geq n-(p+1)$.

2. *Définition d'un sous-espace stable. Cas où l'on connaît une famille génératrice.*

   Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u lorsque $u(x) \in F$ pour tout x de F.
   Dans le cas où $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_k)$, F est stable par u si et seulement si $u(e_i) \in F$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.
   En effet, si F est stable par u alors, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $u(e_i) \in F$ car $e_i \in F$.
   Réciproquement supposons que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $u(e_i) \in F$. Soit $x \in F$. Il existe $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $x = a_1e_1 + \cdots + a_ke_k$.
   Donc, par linéarité :

   $$u(x) = a_1u(e_1) + \cdots + a_ku(e_k) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_k).$$

3. *Limite en un point, caractérisation de la limite avec les fonctions coordonnées. Définition de la continuité en un point et de la continuité globale pour une fonction vectorielle.*

   Soit f une fonction d'un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$).
   On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en a lorsque :

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in I, \quad |t-a| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x)-\ell\| \leq \varepsilon.$$

   Si on note $(f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f, $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ les coordonnées de ℓ. La fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si :

   $$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lim_{t \to a} f_i(t) = \ell_i.$$

   On dit que f est continue en $a \in I$ lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
   On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

4. *Dérivation d'un produit scalaire.*

Soit f et g deux fonctions dérivables de I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On note $(f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f et $(g_1, \dots, g_n)$ celles de g.
La fonction $\varphi \ : t \longmapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ est dérivable sur Iet :

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

En effet :

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(t).$$

Donc φ est dérivable comme somme de produits de fonctions dérivables, de plus :

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \sum_{i=1}^{n} (f_i'(t) g_i(t) + f_i(t) g_i'(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i'(t) g_i(t) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i'(t) \\
&= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.
\end{aligned}$$