Maths - DM2

à rendre le 8 octobre 2024

On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par le système :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \cos t \end{cases}$$

On note f la fonction $t \longmapsto (\cos t, \sin t \cos t)$.

1. Tracé de la courbe.
   (a) Calculer $f(-t)$. Quelle symétrie de $\mathcal{C}$ peut-on en déduire ?
   (b) Calculer $f(\pi - t)$. Quelle symétrie de $\mathcal{C}$ peut-on en déduire ?
   (c) Étudier les variations des fonctions coordonnées de f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (d) Est-ce que la courbe $\mathcal{C}$ est birégulière ?
   (e) Tracer la courbe pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Indiquer la tangente en O, la tangente horizontale et la tangente verticale.
   (f) Tracer la courbe entièrement. Indiquer $f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right)$, $f\left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\right)$.
2. Une propriété géométrique.
   Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On note P le point de coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. On considère Q le projeté orthogonal de P sur l'axe des abscisses et R le projeté orthogonal de Q sur la droite (OP).
   (a) Montrer que P appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
   (b) Placer les points P, Q, R en prenant $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
   (c) Déterminer en fonction de α les coordonnées de Q.
   (d) Montrer que R a pour coordonnées $(\cos^3\alpha, \cos^2\alpha \sin\alpha)$.
   (e) Montrer que le segment $[PQ]$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un unique point que l'on notera M.
   (f) Montrer que le triangle MQR est isocèle en Q.
   (g) Peut-on trouver α de sorte que le triangle MQR soit équilatéral ?