Maths - Interrogation 1 - corrigé

Exercice 1

1. $e_3 = 2e_1 - e_2$. Donc (e_1, e_2) est une famille génératrice de F et comme e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, (e_1, e_2) est une base de F.
2. $X = (x, y, z, t) \in F$ si et seulement s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} x &= a - b \\ y &= 2a \\ z &= -a + b \\ t &= a + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} b &= \frac{1}{2}y - x \\ a &= \frac{1}{2}y \\ x &= -z \\ t &= \frac{3}{2}y - 2x \end{cases}$$

   Donc F est l'intersection des hyperplans d'équations $x + z = 0$ et $2x - \frac{3}{2}y + t = 0$.

   On note H_1 l'hyperplan d'équation $x+z = 0$ et H_2 l'hyperplan d'équation $2x-\frac{3}{2}y+t = 0$.

   On pose $e_4 = (1, 0, 0, -1)$. Ce vecteur appartient à H_1 mais pas à H_2. Donc (e_1, e_2, e_4) est une base de H_1.

   On pose $e_5 = (1, 0, -2, 0)$. Ce vecteur appartient à H_2 mais pas à H_1. Donc (e_1, e_2, e_5) est une base de H_2.
3. On peut prendre $f\ : (x, y, z, t) \longmapsto \big(x + z, 2x - \frac{3}{2}y + t\big)$.

Exercice 2

1. Les colonnes de A sont colinéaires à $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ donc f est de rang 1 et, d'après le théorème du rang, on en déduit que la dimension de $\ker f$ est 2.
2. $\dim \mathrm{Vect}(e_1) + \dim \ker f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
   Soit $X \in \ker f \cap \mathrm{Vect}(e_1)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda e_1$ et $f(X) = 0$ Donc $\lambda(a, b, c) = 0$. Donc $\lambda = 0$.
   Donc $\ker f \cap \mathrm{Vect}(e_1) = \{0\}$ et $\ker f \oplus \mathrm{Vect}(e_1) = \mathbb{R}^3$.
3. $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, f = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Si $c \neq a + b$ alors $\mathrm{tr}\, f = \alpha = a + b - c \neq 0$.
   On note e'_1 le premier vecteur de la base $\mathcal{B}$. Comme $\alpha \neq 0$, $e'_1 \notin \ker f$, et on montre que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\ f$ sont supplémentaires (même méthode qu'à la question 2).

Exercice 3 Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P(2X + 1) - P(X)$$

1. Soit P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ et λ un réel.

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(2X + 1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= P(2X + 1) + \lambda Q(2X + 1) - P(X) - \lambda Q(X) \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

2. On raisonne par récurrence.
   Pour $n = 0$, c'est évident.
   Supposons que $P(2^n - 1) = P(0)$.
   Comme $P \in \ker f$, on a $P(2X + 1) = P(X)$. Donc :
   $$P(2(2^n - 1) + 1) = P(2^n - 1) = P(0)$$
   Donc en déduit que $P(2^{n+1} - 1) = P(0)$.
   Ceci achève la récurrence.
   Le polynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$ admet pour racine les termes de la suite $(2^n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Donc Q admet une infinité de racines. Donc Q est nul et P est constant.
   Donc $\ker f = \mathbb{R}_0[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
   $$\deg f(P) \leqslant \max(\deg(P(2X + 1), \deg(P(X))) \leqslant 3$$
   Donc $\mathbb{R}_3[X]$ est stable par f.
4. (a) La matrice est :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
   (b) On a :
   $$\text{Im } f_3 = \text{Vect}(X + 1, 3X^2 + 4X + 1, 7X^3 + 12X^2 + 6X + 1)$$
   D'autre part, la famille $(1, X + 1, 3X^2 + 4X + 1, 7X^3 + 12X^2 + 6X + 1)$ est échelonnée en degré et ne contient pas le polynôme nul, donc elle est libre, donc elle est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc :
   $$\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1) \oplus \text{Im } f_3$$

Barème : 25 points (17 points pour avoir 20)
ex 1 : 2+4+1
ex 2 : 2+2+1+2
ex 3 : 2+4+2+1+2