

## Maths - Interrogation 1

**Exercice 1** Soit  $e_1 = (1, 2, -1, 1)$ ,  $e_2 = (-1, 0, 1, 2)$ ,  $e_3 = (3, 4, -3, 0)$ . On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ .

1. Montrer que  $(e_1, e_2)$  est une base de  $F$ .
2. Trouver des hyperplans  $H_1$  et  $H_2$  de  $\mathbb{R}^4$  tels que  $F = H_1 \cap H_2$ . Donner pour chacun de ces hyperplans :
  - une équation,
  - une base contenant  $e_1$  et  $e_2$ .
3. Donner une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\ker f = F$ .

**Exercice 2** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & a & -a \\ b & b & -b \\ c & c & -c \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A$ .

On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On suppose dans tout l'exercice que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

1. Sans résoudre de système, déterminer le rang de  $f$  et la dimension du noyau de  $f$ .
2. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(e_1) \oplus \ker f$ .
3. On note  $\mathcal{B}$  une base adaptée à la somme directe  $\text{Vect}(e_1) \oplus \ker f$  et  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les coordonnées de  $f(e_1)$  dans cette base.  
Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
4. Montrer que si  $c \neq a + b$  alors  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.

**Exercice 3** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P(2X + 1) - P(X)$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Soit  $P \in \ker f$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(2^n - 1) = P(0).$$

En déduire le noyau de  $f$ .

3. Montrer que  $\mathbb{R}_3[X]$  est stable par  $f$ .
4. On note  $f_3$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $\mathbb{R}_3[X]$ .
  - (a) Écrire la matrice de  $f_3$  dans la base  $(1, X, X^2, X^3)$ .
  - (b) Montrer que  $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1) \oplus \text{Im } f_3$ .