II- Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées du plan

Révision : Calcul de développements limités.

1) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Limite en un point. Continuité en un point, continuité globale. Vecteur dérivé à droite et à gauche en un point. Fonction dérivée.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit (multiplication par une fonction à valeurs réelles, produit scalaire, produit vectoriel). Fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Dérivées successives d'une combinaison linéaire, d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor-Young.

2) Courbes paramétrées du plan

Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Demi-tangente en un point. Point régulier, courbe régulière. Tangente en un point régulier.

Étude locale en un point régulier ou stationnaire, tangente et position relative, point de rebroussement, point d'inflexion. Branches infinies.

Construction d'une courbe à partir de tableaux de variation.

Questions de cours :

1. Limite en un point, caractérisation de la limite avec les fonctions coordonnées. Définition de la continuité en un point et de la continuité globale pour une fonction vectorielle.
2. Dérivation d'un produit scalaire.
3. Nature d'un point singulier à l'aide des dérivées successives.
4. Définition d'un point singulier, d'un point régulier, d'un point birégulier. Vecteur directeur de la tangente en un point régulier.

---

1. *Limite en un point, caractérisation de la limite avec les fonctions coordonnées. Définition de la continuité en un point et de la continuité globale pour une fonction vectorielle.*

   Soit f une fonction d'un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$).
   On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en a lorsque :

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in I, \quad |t-a| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

   Si on note $(f_1, \ldots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f, $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ les coordonnées de ℓ. La fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si :

   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{t \to a} f_i(t) = \ell_i.$$

   On dit que f est continue en $a \in I$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
   On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

2. *Dérivation d'un produit scalaire.*

   Soit f et g deux fonctions dérivables de I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On note $(f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f et $(g_1, \dots, g_n)$ celles de g.
   La fonction $\varphi\ : t \longmapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est dérivable sur Iet :
   $$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle.$$
   En effet :
   $$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(t).$$
   Donc φ est dérivable comme somme de produits de fonctions dérivables, de plus :
   $$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \sum_{i=1}^{n} (f_i'(t) g_i(t) + f_i(t) g_i'(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i'(t) g_i(t) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i'(t) \\ &= \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle.\end{aligned}$$

3. *Nature d'un point singulier à l'aide des dérivées successives.*
   Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane paramétrée par une fonction vectorielle f de I (intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}^2$. Soit $M = f(t)$ un point de cette courbe.
   On note p le plus petit entier positif non nul tel que $f^{(p)}(t) \neq (0,0)$ et q le plus petit entier tel que $(f^{(p)}(t), f^{(q)}(t))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
   Le vecteur $f^{(p)}(t)$ dirige la tangente en M à $\mathcal{C}$.
   Si p est pair alors M est un point de rebroussement (première espèce si q impair et deuxième espèce si q est pair).
   Si p est impair et q est pair alors M est un point d'allure normal (c'est le cas pour un point régulier).
   Si p et q sont impairs alors M est un point d'inflexion.

4. *Définition d'un point singulier, d'un point régulier, d'un point birégulier. Vecteur directeur de la tangente en un point régulier.*
   Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane paramétrée par une fonction f.
   Un point M de paramètre t de $\mathcal{C}$ est régulier lorsque $f'(t) \neq (0,0)$, il est singulier dans le cas contraire.
   Le point est birégulier lorsque la famille $(f'(t), f''(t))$ est libre.
   La tangente en un point régulier est dirigée par le vecteur $f'(t)$.