Maths - DS2 - 4 heures

Exercice 1 On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On considère P un point de l'axe des abscisses et Q un point de l'axe des ordonnées tels que la longueur du segment $[PQ]$ soit égale à 1.

1. On note x_P l'abscisse de P et y_Q l'ordonnée de Q. Montrer qu'il existe $t \in]-\pi, \pi]$ tel que $x_P = \cos t$ et $y_Q = \sin t$.

   Dans la suite, on note $\mathcal{D}_t$ la droite passant par les points $P = (\cos t, 0)$ et $Q = (0, \sin t)$ et $\mathcal{C}$ l'enveloppe des droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in]-\pi,\pi]}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un paramétrage de la forme :
$$\begin{cases} x &= \cos^n t \\ y &= \sin^n t \end{cases} \qquad t \in]-\pi, \pi[$$
   où n est un entier à déterminer.
3. Montrer que l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = x$ sont des axes de symétrie de $\mathcal{C}$.
4. Montrer que le point $A = (1, 0)$ est un point de rebroussement de $\mathcal{C}$.
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et préciser les droites $\mathcal{D}_t$ pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

Exercice 2 On considère $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x &= (t-1)\mathrm{e}^{2t} \\ y &= (3-2t)\mathrm{e}^{t} \end{cases}$$

On note f la fonction $t \longmapsto ((t-1)\mathrm{e}^{2t}, (3-2t)\mathrm{e}^{t})$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Donner le tableau de variation des fonctions coordonnées de f.
3. Montrer que f admet un unique point singulier. Préciser sa nature. Montrer que la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (\mathrm{e}, -\sqrt{\mathrm{e}})$.
4. Justifier que la courbe admet une unique branche infinie. Préciser sa direction.
5. Calculer $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$. Interpréter géométriquement.
6. Calculer $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{f(t)}{\|f(t)\|}$. Interpréter géométriquement.
7. On a indiqué sur le graphique (page 4) les points A, B, C de la courbe de paramètre respectif $-0,75$, $0,5$ et $1,25$. Identifier ces points. Tracer la tangente au point singulier puis la courbe $\mathcal{C}$.

   On donne $\mathrm{e} \approx 2,7$ et $\sqrt{e} \approx 1,6$.

Exercice 3

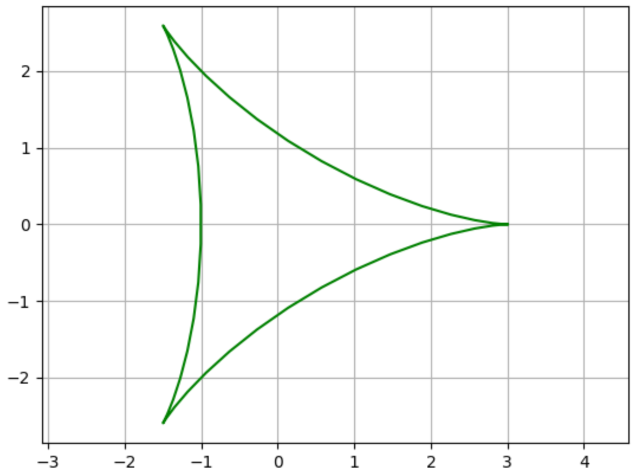
Partie 1 Questions préliminaires

1. Soit M un point d'affixe z.
   (a) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ.
   (b) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a.
   (c) Vérifier que $h_a \circ r_\theta = r_\theta \circ h_a$. On note alors $f_{a,\theta} = h_a \circ r_\theta$.
2. Soit a, b, p, q des réels.
   (a) Donner sans justification la linéarisation de $\sin(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$.
   (b) En déduire que $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et une factorisation de $\sin(p) + \sin(q)$.

Partie 2 Étude d'une courbe

On considère, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
(i) P_t le point d'affixe $2\mathrm{e}^{it}$
(ii) M_t le point tel que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{P_tM_t}$ est e^{-2it}.
On note $z(t)$ l'affixe du point M_t et Γ la courbe décrite par l'ensemble des points M_t pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que Γ admet pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x(t) &= 2\cos t + \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$$
2. Vérifier que l'affixe de $M_{t+\frac{2\pi}{3}}$ et l'affixe de l'image de M_t par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ sont égales. Que peut-on en déduire ?
3. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à l'intervalle $[0, \pi/3]$.
4. Calculer $x'(t)$ et vérifier que :
$$x'(t) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$
5. Calculer $y'(t)$ et vérifier que :
$$y'(t) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$
6. Dresser le tableau de variation de x et y sur $[0, \pi/3]$.
7. Déterminer la nature du point de paramètre $t = 0$ de Γ.
8. Calculer la longueur de la courbe.



Courbe Γ

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E.

1. Étude d'un exemple.
   On suppose que $E = \mathbb{R}^4$ et que f est endomorphisme canoniquement associé à la matrice :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
   (b) Est-ce que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
   (c) Calculer A^2 et A^3. Vérifier qu'il existe un réel λ non nul tel que $A^3 = \lambda A^2$.
   (d) Montrer que $\ker f^2$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Donner une équation de cet hyperplan.
   (e) Donner une base de $\operatorname{Im} f^2$.
   (f) Est-ce que $\operatorname{Im} f^2$ et $\ker f^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
   (g) Montrer que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f^3$.
2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$. En déduire que la suite $\left(\operatorname{rang} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
   (b) Justifier qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k_0}$ pour tout $k \geqslant k_0$.
   (c) On pose $F = \operatorname{Im} f^{k_0}$. Montrer que F est stable par f et que l'endomorphisme u induit par f sur F est bijectif.
   (d) Montrer que $E = \operatorname{Im} f^{k_0} \oplus \ker f^{k_0}$.

Nom :

Prénom :

Figure à compléter de l'exercice 2